Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 5 Settembre 2023
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:

- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

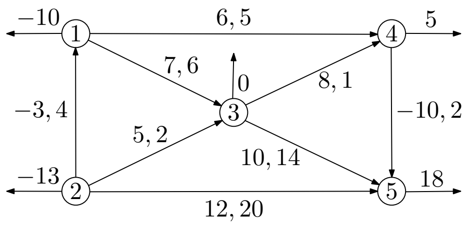
Esercizio 1. *(Punti 10)*
Uno studente iscritto attualmente al secondo anno del Corso di Laurea Triennale in Informatica deve decidere che corsi liberi seguire al terzo anno. In tal senso, lo studente può accedere ad un paniere di n corsi $1, \dots, n$. Ciascun corso i offre c_i crediti e, sulla base dell'interazione con i suoi colleghi degli anni precedenti, lo studente stima che d_i sia una buona misura della difficoltà del corso i. Infine, ogni corso i riguarda la tematica $t_i \in \{1, \dots, m\}$. Si aiuti lo studente a decidere che corsi seguire tramite la programmazione lineare, tenendo conto che il suo obiettivo è quello di minimizzare la difficoltà complessiva dei corsi seguiti, che da piano di studi è necessario passare dei corsi liberi per almeno k crediti e che lo studente è disposto a seguire *solo* corsi relativi ad un insieme di tematiche $T \subseteq \{1, \dots, m\}$ di suo interesse.

Esercizio 2. *(Punti 8)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima riga.

$$\max x + y + z$$

$$\begin{array}{llll}
x \geq 0 & y \geq 0 & z \geq 0 & \\
x \leq 1 & y \leq 1 & z \leq 1 & x + y + z \leq 1
\end{array}$$

Esercizio 3. *(Punti 7)*
Si risolva il seguente problema di flusso di costo minimo tramite un algoritmo a scelta tra i due svolti a lezione. Si indichino in modo preciso la soluzione ottima e il valore ottimo.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Si consideri la seguente variazione sul tema dell'Esercizio 1. Lo studente deve tenere conto, nello scegliere i corsi liberi, dell'orario delle lezioni. In particolare, lo studente è riuscito a costruire l'insieme I di tutte e sole le coppie nella forma (a, b) dove $a, b \in \{1, \dots, n\}$ e le lezioni del corso a si sovrappogono a quelle del corso b. L'insieme I può quindi essere considerato parametro del problema. Occorre garantire che tra i corsi scelti non ci siano sovrapposizioni.

ESERCIZIO $\boxed{1}$

Parametri

n : Numero di Corsi

m : Tematiche

c_i : Crediti del corso i, $i = 1 \dots n$

d_i : Difficolta' del corso i, $i = 1 \dots n$

t_{ij} : $\begin{cases} 1 & \text{se il corso } i \text{ ha tematica } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

R : Crediti da raggiungere

$T \subseteq \{1 \dots m\}$: Tematiche a cui lo studente è interessato

Variabili

$x_i \in \{0,1\}$ $\quad x_i = \begin{cases} 1 & \text{se viene scelto il corso } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Obiettivo

$$\text{MIN} \sum_{i=1}^{n} x_i d_i$$

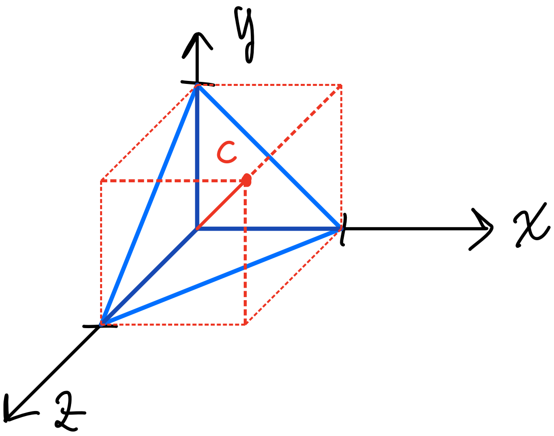
Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i c_i \geq R$$

$$x_i t_{ij} = 0 \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots n\}, j \in \{1, \dots m\} \setminus T$$

ESERCIZIO 2

I vincoli $x \le 1$; $y \le 1$; $z \le 1$ sono ridondanti



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iterazione 1 $(B = \{1, 2, 3\})$

$$A_1 = A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = A_1^{-1} b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{y}_1 = c A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$h = 1$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{A}_1 \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$ Non illimitato lungo ξ_1

$k = 4$

Iterazione 2 $(B = \{2, 3, 4\})$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_2 = A_2^{-1} b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_2 = c A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE OTTIMA

PRIMALE : $(1; 0; 0)$

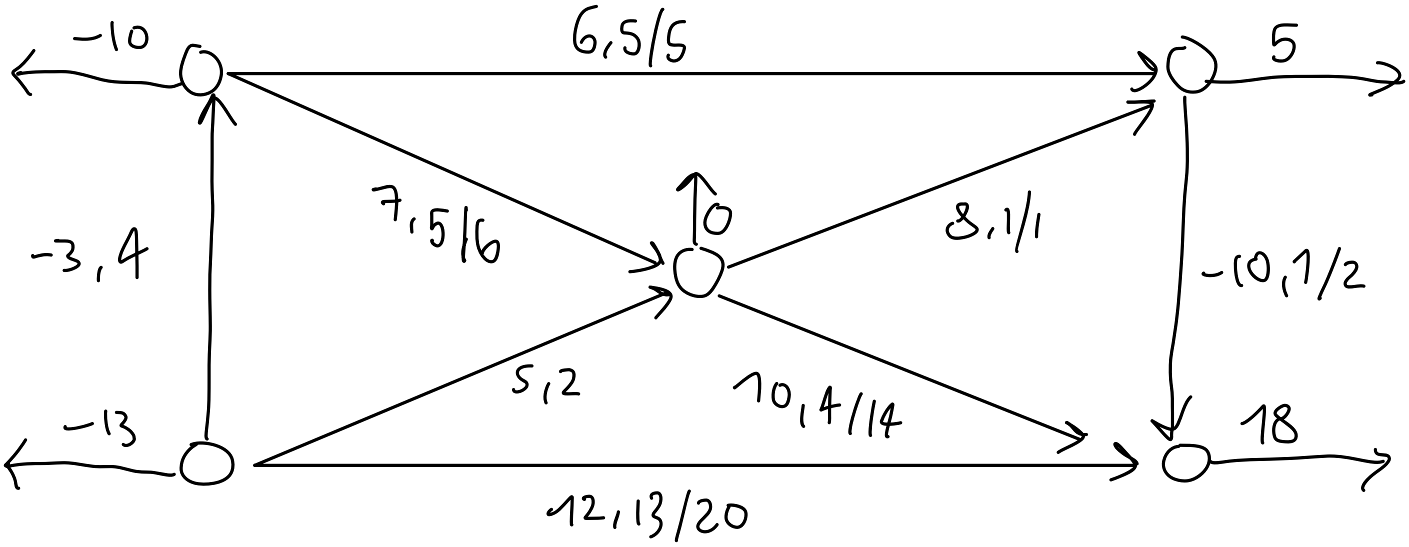
DUALE : $(0; 0; 1)$

VALORE OTTIMO : 1

Esercizio $\boxed{3}$

Soluzione con cammini minimi successivi

Flusso finale (soluzione ottima)

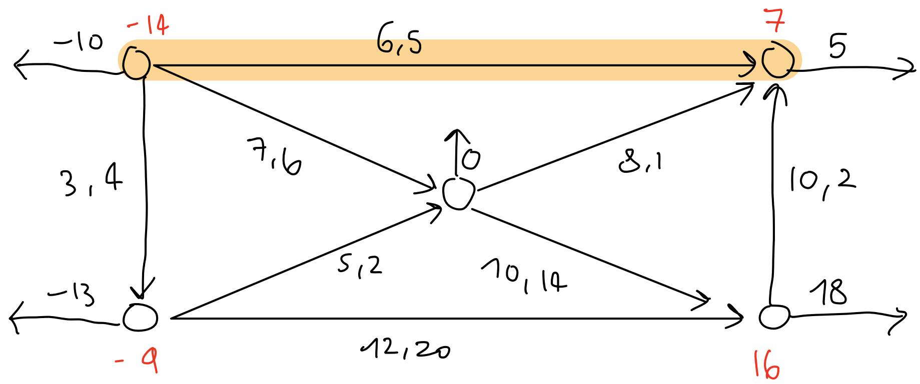


Valore ottimo : $5\cdot6+6\cdot7-3\cdot4+13\cdot12+8+5\cdot10-10$
$= 264$

Grafi residui

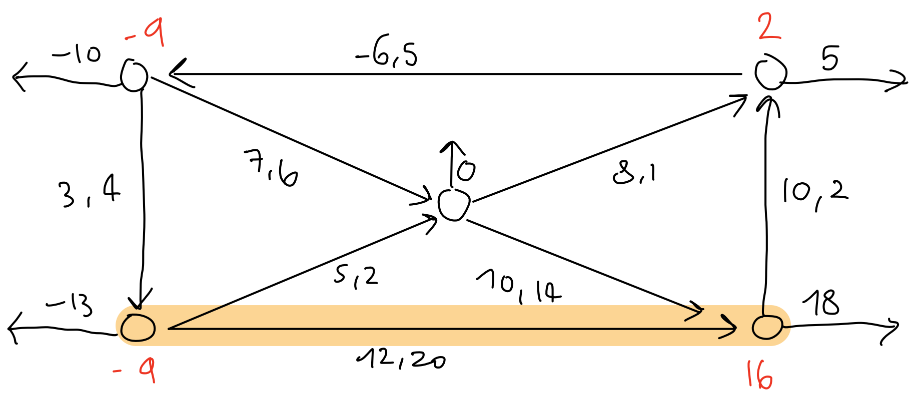
G_{x_1}

$\theta = 5$



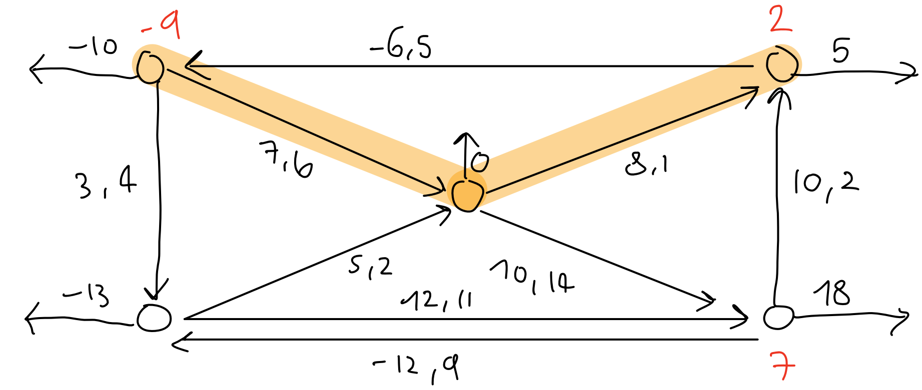
G_{x_2}

$\theta = 9$



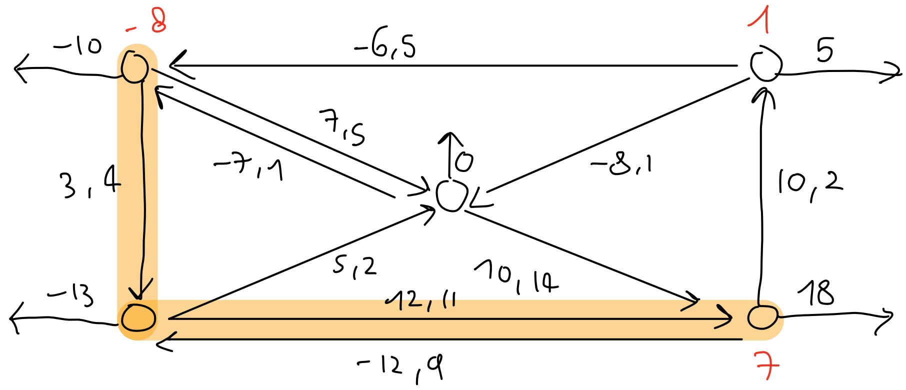
G_{x_3}

$\theta = 1$



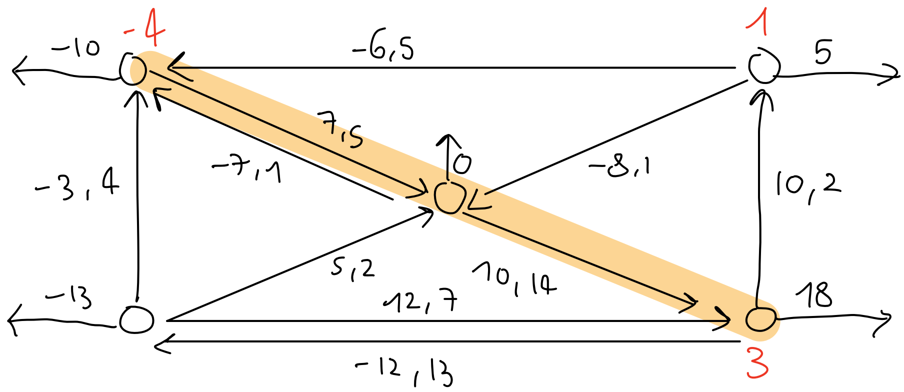
G_{x_4}

$\theta = 4$



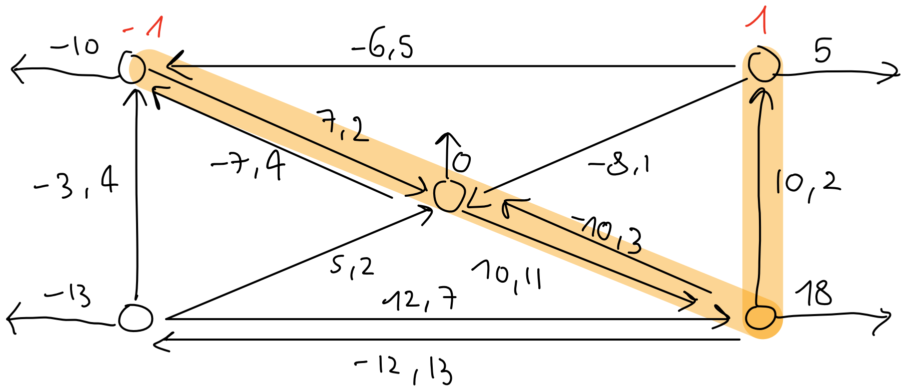
G_{x_5}

$\theta = 3$



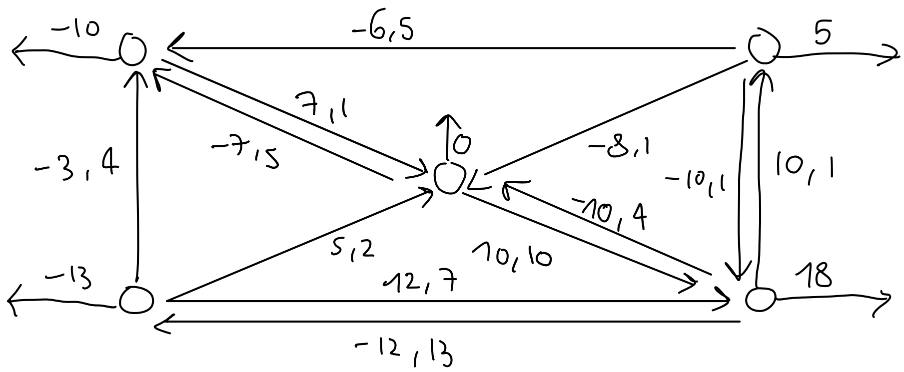
G_{x_6}

$\theta = 1$



G_{x_7}

Bilanciato



ESERCIZIO $\boxed{4}$

Nuovi parametri

$I \subseteq \{1 \dots n\}^2$: Insieme delle coppie di corsi che si sovrappongono

Nuovi vincoli

$x_a + x_b \leq 1$ per ogni $(a, b) \in I$