Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 17 Luglio 2023
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:
- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

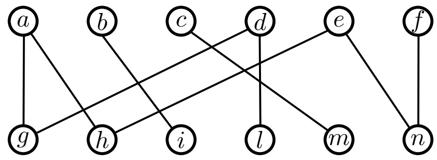
Esercizio 1. *(Punti 10)*
Un'azienda alimentare mono-prodotto dispone di n stabilimenti $1, \ldots, n$, ciascun stabilimento i avente una capacità produttiva massima di t_i tonnellate di prodotto al mese. Il prodotto in uscita da ogni stabilimento deve essere immediatamente trasportato via terra in uno o o più degli m magazzini di stoccaggio $1, \ldots, m$, dove resterà fino a al mese successivo. Ogni magazzino j ha una capacità di c_j tonnellate di prodotto e lo stoccaggio di una tonnellata di prodotto nel magazzino j costa p_j Euro. Infine, il trasporto di un chilogrammo di prodotto tra lo stabilimento i e il magazzino j costa d_{ij} Euro. Si formuli in PLI il problema di decidere dove produrre e dislocare il prodotto in modo da ridurre al minimo i costi di trasporto e stoccaggio, garantendo al contempo che le tonnellate di bene prodotte e trasferite siano esattamente pari ad un certo ammontare s.

Esercizio 2. *(Punti 8)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della colonna a sinistra.

$$\min 2x + y$$

$y \leq 2$	$x + 1 \geq 0$	$y \leq x + 2$	$y + x + 1 \geq 0$
$x \leq 2$	$y + 1 \geq 0$	$y + 2 \geq x$	

Esercizio 3. *(Punti 7)*
Si risolva il seguente problema di accoppiamento di massima cardinalità tramite un algoritmo a scelta. Si indichi in modo preciso la soluzione ottima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Si consideri la seguente variazione sul tema dell'Esercizio 1. Si supponga che i costi di trasporto relativi al prodotto trasportato dallo stabilimento i al magazzino j comprendano, oltre alla quota variabile d_{ij}, anche una quota fissa f_{ij}, da sostenersi però *solo* nel caso in cui tra i e j si debba spostare una quantità di prodotto superiore a q_{ij} tonnellate.

ESERCIZIO $\boxed{1}$

Variabili:

$x_{ij} \in \mathbb{R}^+$: tonnellate di merce prodotte nello stabilimento i e trasportate al magaz. j

$i \in \{1 \dots n\}$

$j \in \{1 \dots m\}$

Funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{x_{ij} p_j}_{} + \underbrace{(1000 x_{ij})\, d_{ij}}_{}$$

COSTO di STOCCAGGIO e TRASPORTO

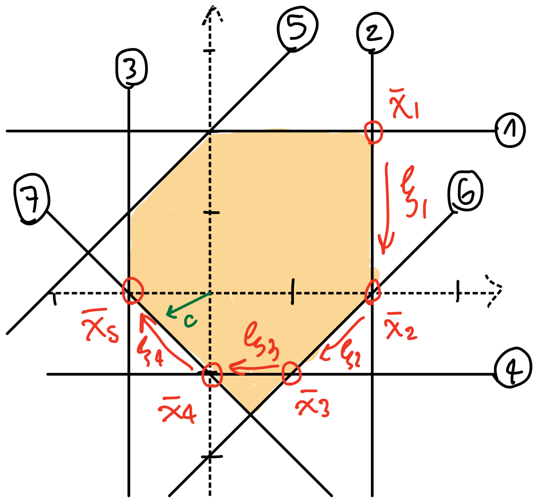
Vincoli:

$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq t_i$ per $i \in \{1 \dots n\}$: limiti di produzione

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq c_j$ per $j \in \{1 \dots m\}$: limiti di stoccaggio

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = S$: richiesta di produzione

ESERCIZIO $\boxed{2}$



$$\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\quad A \qquad\qquad b \qquad\qquad c$$

ITERAZIONE I $\quad B_1 = \{1, 2\}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$h = 1$$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{A}_1 \xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1 - \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$2 - \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \qquad k = 6$$

$$1 - \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

ITERAZIONE II $\quad B_2 = \{2, 6\}$

$A_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$

$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \quad \bar{y}_2 = \begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 1\end{bmatrix}$

$h = 2$

$\xi_2 = \begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix} \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\\ -1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad \bar{A}_2 \xi_2 = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$

$1 - \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} = 3$

$1 - \begin{bmatrix}0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} = 1 \quad k = 4$

$\frac{1}{2}\left(1 - \begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}\right) = 3/2$

ITERAZIONE III $\quad B_3 = \{4, 6\}$

$A_3 = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad A_3^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$

$\bar{x}_3 = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} \quad \bar{y}_3 = \begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}$

$h = 6$

$\xi_3 = \begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} \quad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & 0\\ -1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad \bar{A}_3 \xi_3 = \begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

$1 - \begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = 2$

$2 - \begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = 4$

$1 - \begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = 1 \quad k = 7$

ITERAZIONE IV $\quad B_4 = \{4, 7\}$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_4 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$h = 4$$

$$\xi_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{A}_4 \xi_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$2 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 3$

$1 - \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \quad k = 3$

$\frac{1}{2}\left(2 - \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = 3/2$

ITERAZIONE V $\quad B_5 = \{3, 7\}$

$$A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_5^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad b_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

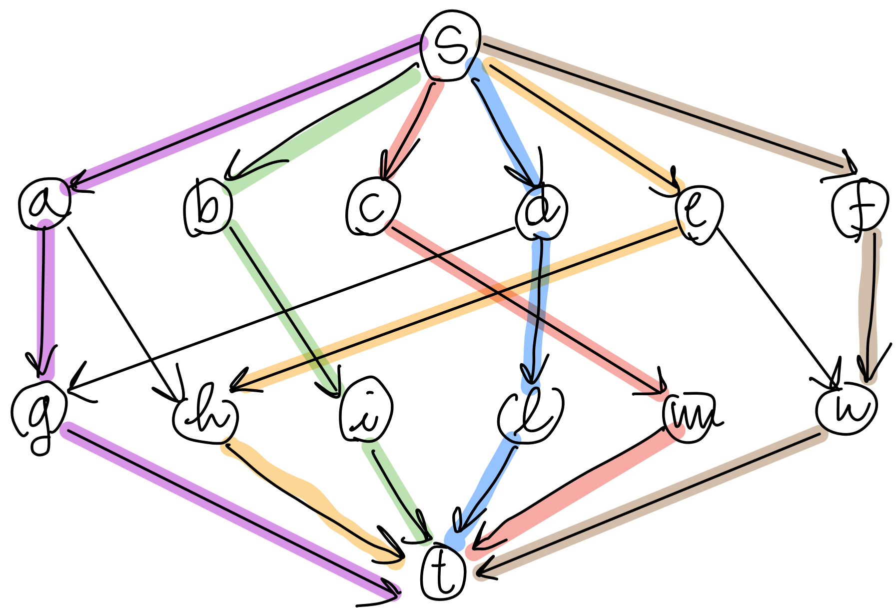
$$\bar{x}_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{y}_5 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE OTTIMA PRIMALE

SOLUZIONE OTTIMA DUALE

ESERCIZIO $\boxed{3}$

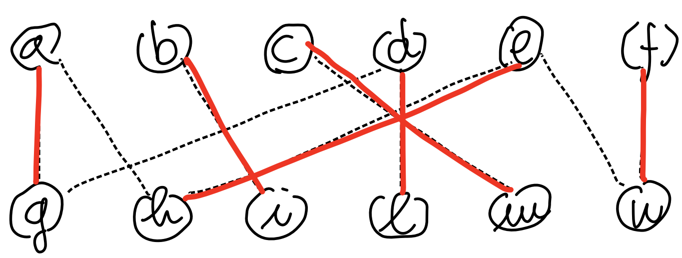
Riduco il problema a MF:



Tutti gli archi hanno CAPACITÀ 1.

I CAMMINI AUMENTANTI SONO 1, 2, 3, 4, 5, 6

L'accoppiamento risultante è PERFETTO:



ESERCIZIO $\boxed{4}$

Variabili aggiuntive:

$$y_{ij} \in \{0, 1\} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > q_{ij} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i \in \{1 \dots n\}$
$j \in \{1 \dots m\}$

Nuova funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{x_{ij} p_j}_{} + \underbrace{(1000 x_{ij})\, d_{ij}}_{} + \underbrace{y_{ij} f_{ij}}_{}$$

COSTO di STOCCAGGIO e TRASPORTO e QUOTE FISSE

Vincoli aggiuntivi:

$$y_{ij} \geq (x_{ij} - q_{ij}) / q_{ij} \qquad \text{per } i \in \{1, \dots, n\},\ j \in \{1, \dots, m\}$$

Se $x_{ij} > q_{ij}$, $(x_{ij} - q_{ij}) / q_{ij} > 0$ e y_{ij} deve essere posto a 1, altrimenti y_{ij} può essere posto a 0.