Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 20 Giugno 2023
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:

- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

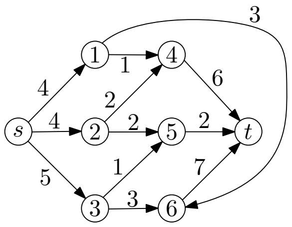
Esercizio 1. *(Punti 10)*
Un'azienda informatica che assembla PC acquista a prezzo stracciato uno stock di componenti HW. Lo stock consiste di n componenti $1, \ldots, n$ (CPU, schede madri, HD, banchi di RAM), che per comodità assumiamo siano di modelli distinti. Nel frattempo l'azienda ha raccolto m ordini dai suoi clienti, chiamiamoli $1, \ldots, m$. Ciascun ordine j consiste in uno o più PC che, per essere assemblati, hanno bisogno dei componenti $C_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Ciascun ordine j darebbe luogo, se evaso, ad un ricavo pari a p_j Euro. Ovviamente, lo stesso componente deve essere usato in al più un ordine. Si aiuti l'azienda a decidere quali siano gli ordini che conviene evadere usando i componenti HW acquistati, tenendo conto del fatto che l'obiettivo è chiaramente quello di massimizzare i ricavi.

Esercizio 2. *(Punti 5)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima riga.

$$\max x + y + z$$

$$\begin{array}{ccc} x \geq 0 & y \geq 0 & z \geq 0 \\ x \leq 1 & y \leq 1 & z \leq 1 \end{array}$$

Esercizio 3. *(Punti 10)*
Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si indichino in modo preciso il valore ottimo e la soluzione ottima. Si determini poi un taglio di capacità minima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Si consideri la seguente variazione sul tema dell'Esercizio 1. Si supponga che ogni componente HW possa essere presente in *più* di un esemplare nello stock, ossia che per ogni i esistano t_i componenti di tale modello.

ESERCIZIO $\boxed{1}$

PARAMETRI : $n \in \mathbb{N}$ componenti

$m \in \mathbb{N}$ ordini

$C_j \subseteq \{1, \dots, n\}$ componenti in ordine j

per $j = 1 \dots m$

VARIABILI : $x_{ij} \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 & \text{se componente } i \text{ è usata nell'ordine } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

per $i = 1 \dots n$

$j = 1 \dots m$

$y_j \in \{0,1\} = \begin{cases} 1 & \text{se l'ordine } j \text{ è evaso} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

per $j = 1 \dots m$

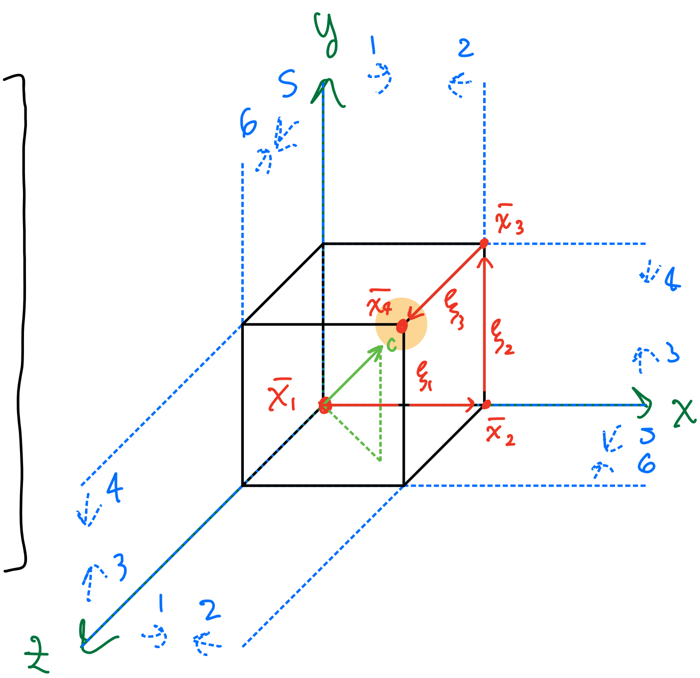
VINCOLI : $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1$ per $i = 1 \dots n$

$y_j \leq x_{ij}$ per $j = 1 \dots m$ e per ogni $i \in C_j$

ESERCIZIO $\boxed{2}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad c$$



ITERAZIONE 1

$B_1 = \{1, 3, 5\} \qquad N_1 = \{2, 4, 6\}$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_1 = A_1^{-1} b_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_1 = c A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \end{array} \end{array}$$

$h = 1$

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{N_1} \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \end{array}$$

$k = 2$

ITERAZIONE 2

$B_2 = \{2, 3, 5\}$ $\quad N_2 = \{1, 4, 6\}$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_2 = A_2^{-1} b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_2 = c A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \;\;2 \quad\;\; 3 \quad\;\; 5 \end{array}$$

$h = 3$

$$\xi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_{N_2} \xi_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 6 \end{array}$$

$k = 4$

ITERAZIONE 3

$B_3 = \{2, 4, 5\}$ $N_3 = \{1, 3, 6\}$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_3 = A_3^{-1} b_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_3 = c A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 5 \end{array} \end{array}$$

$h = 5$

$$\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_{N_3} \xi_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \end{array} \end{array} \rightarrow k = 6$$

ITERAZIONE 4

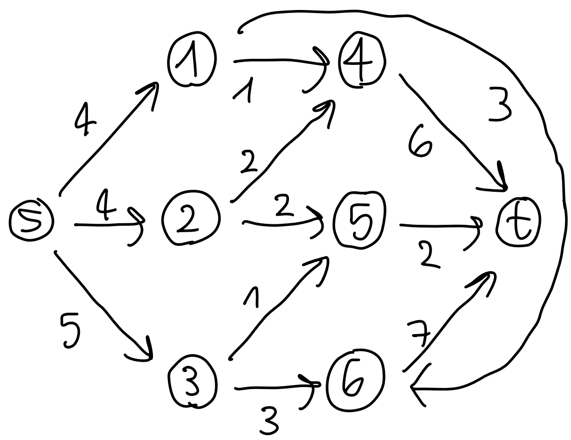
$B_4 = \{2, 4, 6\}$ $N_4 = \{1, 3, 5\}$

$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\bar{x}_4 = A_4^{-1} b_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

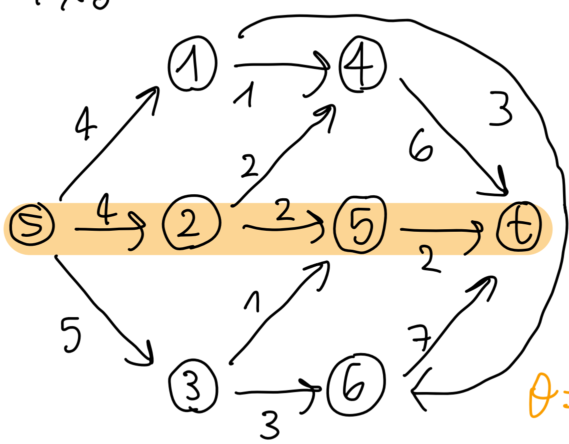
$\bar{y}_4 = c A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\bar{x}_4$ e $\bar{y}_4$ SOLUZIONI OTTIME DI PRIMALE & DUALE, RISPETTIVAMENTE.

ESERCIZIO $\boxed{3}$

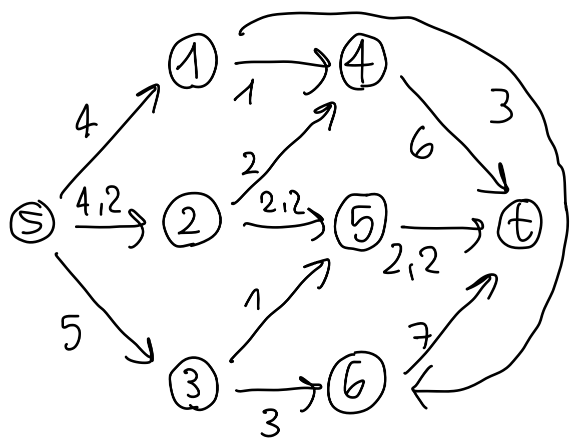
$\bar{x}_0 =$ 

$G_{\bar{x}_0}$

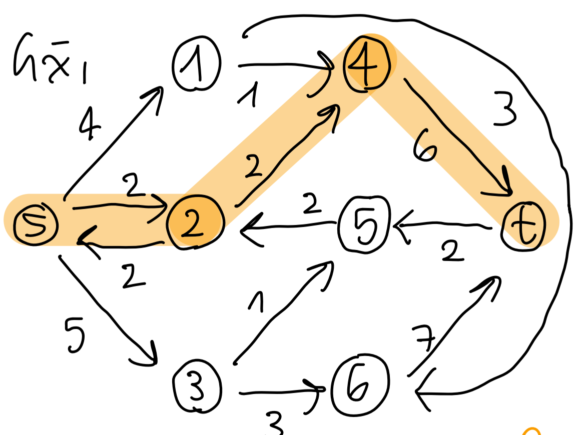


$\theta = 2$

$\bar{x}_1$

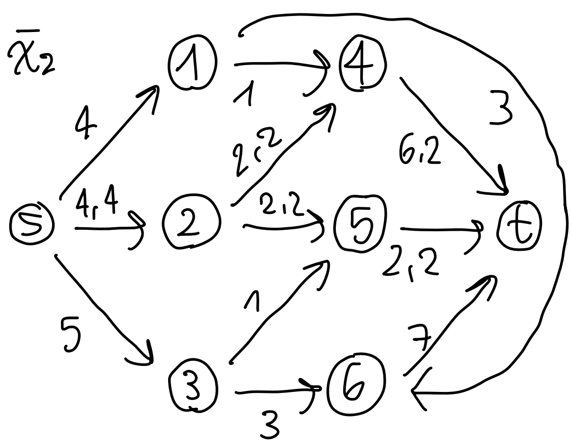


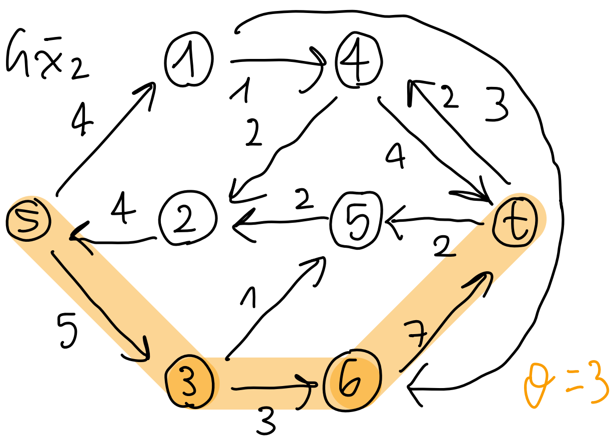
$G_{\bar{x}_1}$

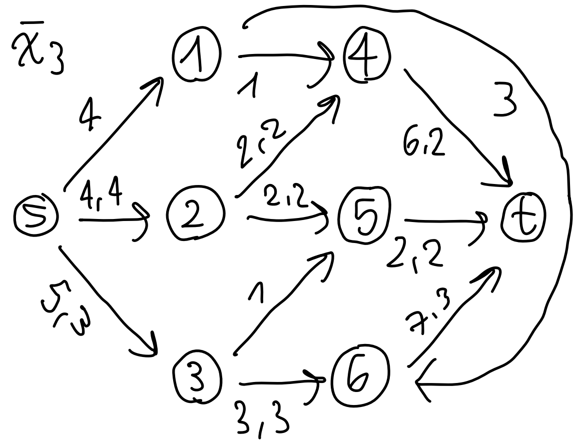


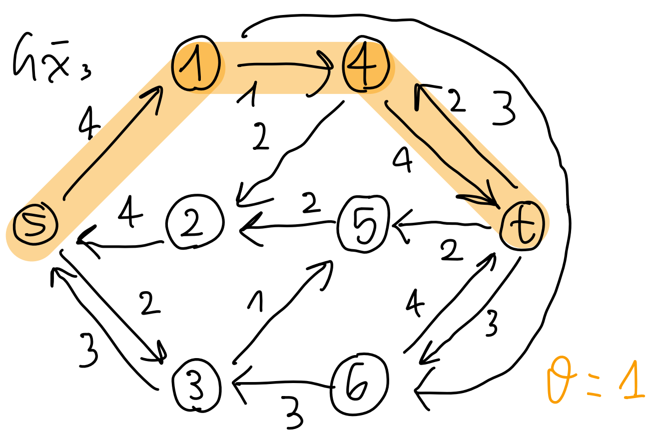
$\theta = 2$

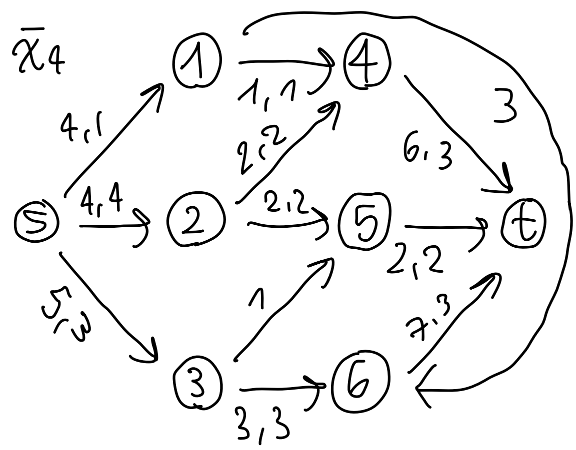
$\bar{x}_2$

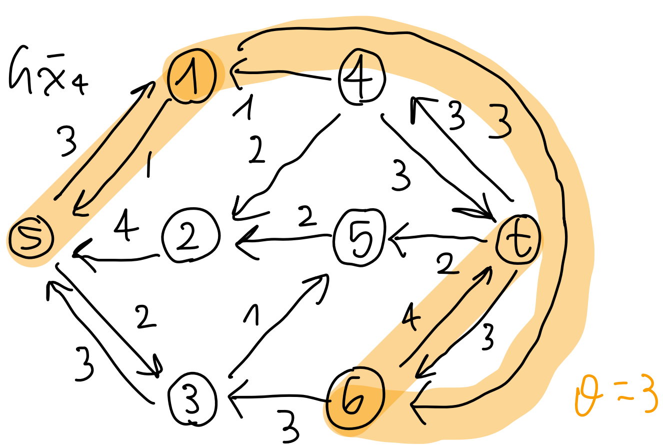


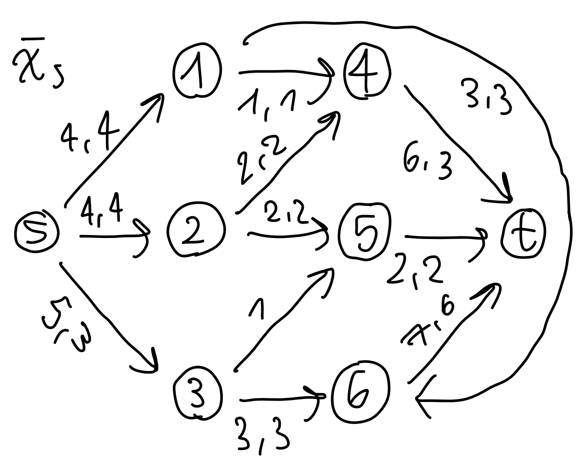

G x̄2
θ = 3


x̄3

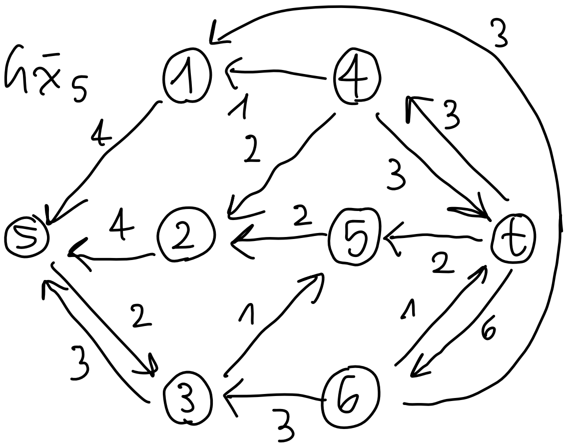

G x̄3
θ = 1


x̄4


G x̄4
θ = 3

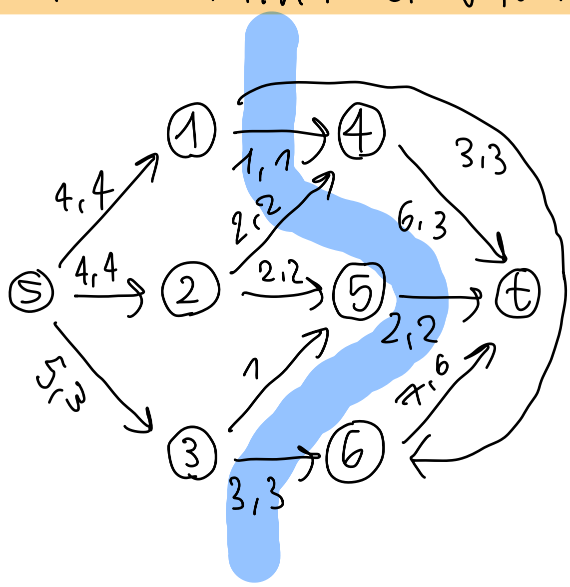

x̄5

$G_{\bar{x}_5}$



NESSUN CAMMINO AUMENTANTE, TERMINO

SOLUZIONE OTTIMA DI VALORE 11



TAGLIO DI CAPACITA' MINIMA 11

ESERCIZIO $\boxed{4}$

PARAMETRI AGGIUNTIVI : $t_i \in \mathbb{N}$ per $i = 1 \dots n$ esemplari di modello i

VINCOLI MODIFICATI : il vincolo

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad \text{per } i = 1 \dots n$$

diventa

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq t_i \quad \text{per } i = 1 \dots n$$