Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 5 Giugno 2023
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:
- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

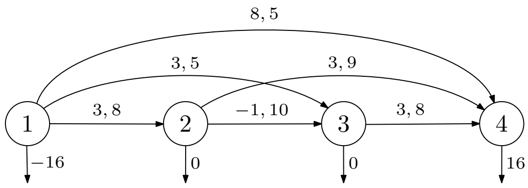
Esercizio 1. *(Punti 9)*
Un'azienda informatica si trova a dover acquistare m server sul mercato, non necessariamente di modelli diversi. I modelli di server offerti dal mercato sono n, ed ogni modello di server i è offerto ad un prezzo pari a p_i. Ogni server i, poi, è dotato di uno o più hard disk di capacità complessiva pari ad h_i gigabyte ed è capace di processare dati ad una velocità di v_i megabit per secondo. Si aiuti l'azienda informatica a determinare quanti server di ogni tipo acquistare, minimizzando il costo complessivo. Si tenga inoltre conto che l'azienda ha bisogno di garantire la presenza di memoria di massa (e quindi di hard disk) per un ammontare complessivo di almeno s gigabyte e che la velocità di processamento richiesto è pari a w megabit per secondo.

Esercizio 2. *(Punti 8)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della colonna di sinistra.

$$\min y - x$$

$$\begin{array}{lll} y + x \leq 3 & y + 2x \leq 4 & x \leq 2 \\ y \leq x + 3 & x + 1 \geq 0 & \end{array}$$

Esercizio 3. *(Punti 8)*
Si risolva il seguente problema di flusso di costo minimo tramite l'algoritmo dei cammini minimi successivi. Si indichino in modo preciso il valore ottimo e la soluzione ottima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Si consideri la seguente variazione sul tema dell'Esercizio 1. Si supponga che ogni modello di server i sia venduto da un'azienda $k_i \in \{1, \dots, p\}$ dove p è tipicamente inferiore a n e che ogni azienda $k \in \{1, \dots, p\}$ offra un contratto di manutenzione di costo annuo pari a c_k, indipendentemente dal numero e dal modello dei server coinvolti. Tenere poi conto nel costo di manutenzione annuo complessivo nella scelta dei server da acquistare.

ESERCIZIO $\boxed{1}$

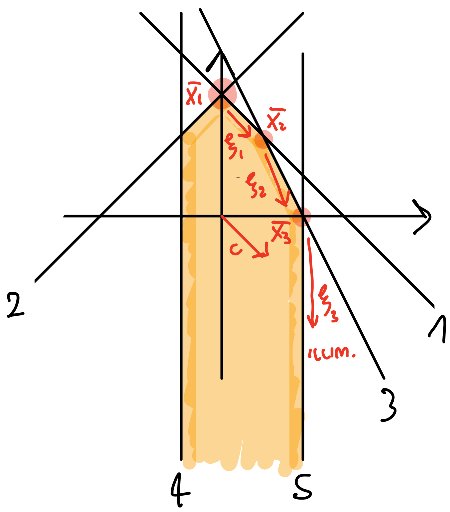
$x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1 \dots n$: serve modello i acquistati

$\min \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

where

$\sum_{i=1}^{n} x_i l_i \geq s$, $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \geq w$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$

ESERCIZIO $\boxed{2}$



$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} A \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \bar{x} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} b \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}
\qquad
\begin{array}{c} c \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$\max \{ c\bar{x} \mid A\bar{x} \leq b \}$$

$B_1 = \{1, 2\}$ $\quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$

$h = 2$

$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 2\left(4 - \begin{bmatrix} 2, 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2 \\ \\ 2\left(2 - \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 4 \end{matrix}$

$k = 3$

$B_2 = \{1, 3\}$ $\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}$

$h = 1$

$\xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad k = 5$

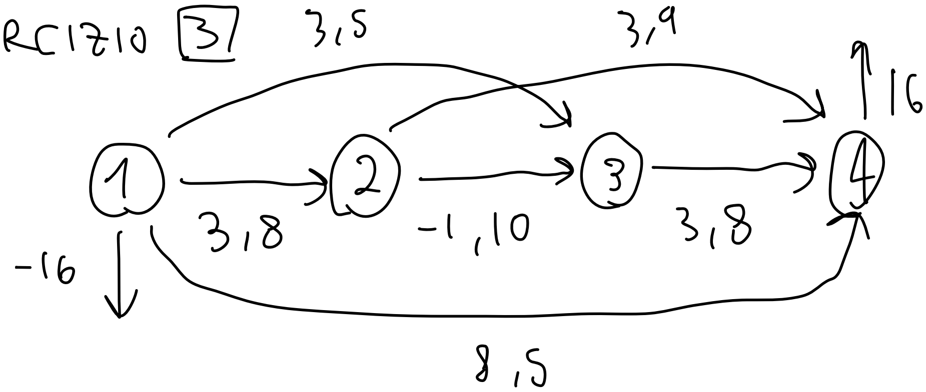
$B_3 = \{3, 5\}$ $\quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$

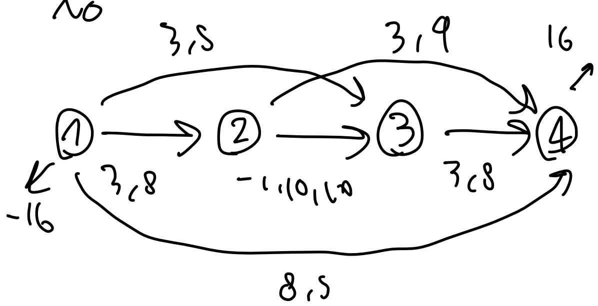
$h = 3$

$\xi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ILLIMITATO

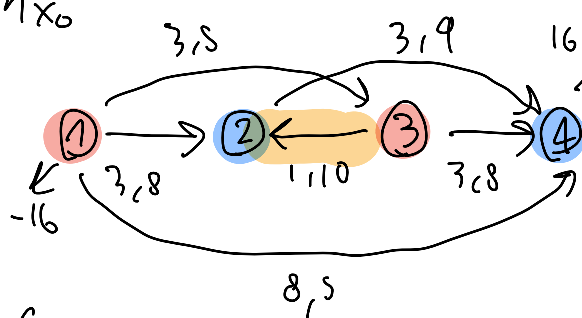
ESERCIZIO $\boxed{3}$



x_0

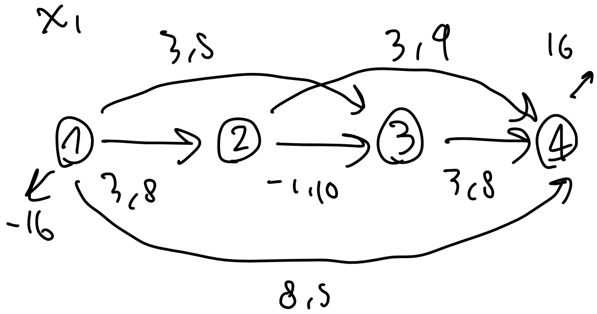


G_{x_0}

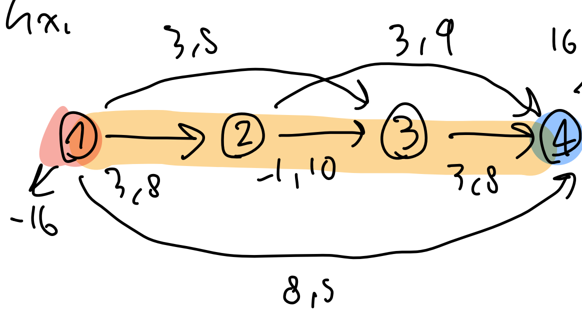


$c = 1$
$\theta = 10$

x_1

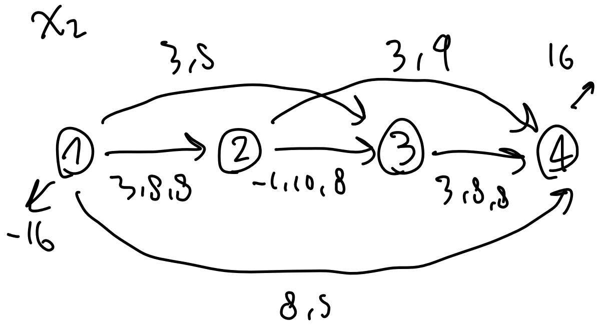


G_{x_1}

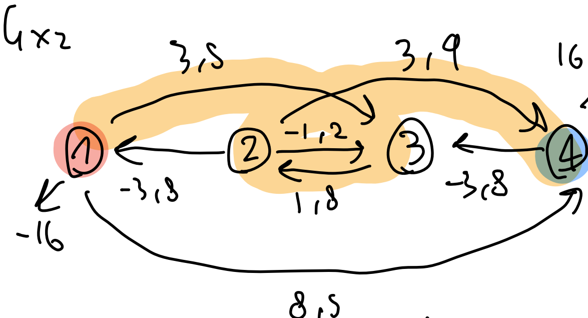


$c = 5$
$\theta = 8$

x_2

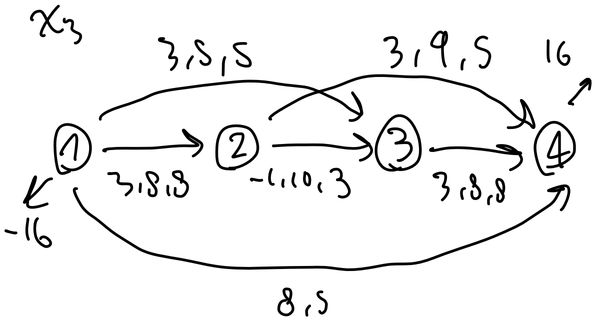


G_{x_2}

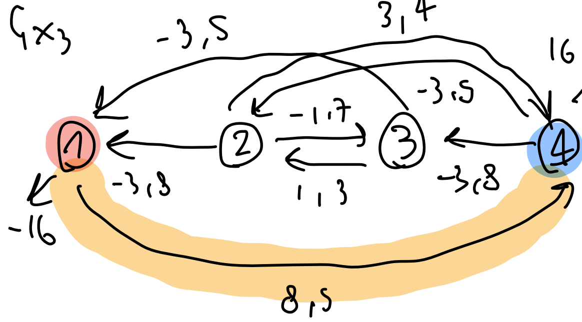


$c = 7$
$\theta = 5$

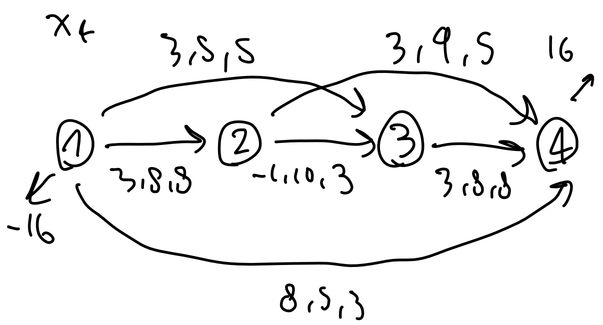
x_3



G_{x_3}



$c = 8$
$\theta = 3$



NESSUNO SBILANCIAMENTO, $x^* = x_4$

ESERCIZIO $\boxed{4}$

$x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1 \dots n$: server modello i acquistati

$y_k \in \{0,1\}$, $k = 1 \dots p$: almeno un server di azienda k

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{k=1}^{p} y_k c_k$$

where

$$\sum_{i=1}^{n} x_i h_i \geq s \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \geq w \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = m$$

$$y_k \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} x_i P_{ik} \quad \text{for } k = 1 \dots p \quad \text{where } P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } k_i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$