Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 9 Gennaio 2023
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:
- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

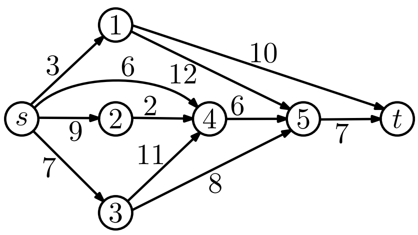
Esercizio 1. *(Punti 9)*
Un'azienda informatica dispone di m calcolatori con differenti caratteristiche hardware e quindi con diversi livelli di performance e consumo energetico. L'azienda prevede, nel mese di febbraio 2023, di dover far eseguire n task distinti alle sue macchine. Ciascun task j richiede un tempo pari a t_{ij} ore se eseguito dalla macchina i. Parimenti, la macchina i consumerebbe k_{ij} kilowattora se fosse chiamata ad eseguire il task j. Si determini come allocare i task alle macchine in modo tale che tale allocazione sia compatibile con i limiti temporali del caso (si tenga in particolare conto del fatto che febbraio 2023 avrà 672 ore) e che il numero totale dei kilowattora consumati sia minimo.

Esercizio 2. *(Punti 6)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della colonna di sinistra.

$$\max x + 2y$$

$$\begin{array}{lll} x+2 \geq 0 & y+1 \geq x & x \leq 5 \\ y+2 \geq 0 & y \leq x+1 & y \leq 5 \end{array}$$

Esercizio 3. *(Punti 10)*
Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si indichino in modo preciso il valore ottimo e la soluzione ottima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Si consideri la seguente variazione sul tema del Problema 1. Anziché minimizzare il numero di kilowattora complessivi, si vuole minimizzare il numero di macchine utilizzate (anche solo per poche ore) nel mese di febbraio 2023. Si richiede però che il numero di kilowattora complessivamente utilizzati sia inferiore ad una soglia pari a s.

A

Corso di Ottimizzazione Combinatoria
Prova scritta del 9 Gennaio 2023
Tempo a disposizione: ore 1:45.

Si ricorda che:

- Per quanto possibile, occorre scrivere in bella calligrafia (il testo illeggibile non verrà preso in considerazione).
- Su tutti i fogli che vi abbiamo consegnato occorre riportare cognome, nome e numero di matricola.
- Occorre riportare in modo chiaro tutti i passi che portano alla determinazione del risultato.
- Il numero dell'esercizio che si sta svolgendo va sempre riportato in modo chiaro.
- Non è consentita la consultazione di appunti, libri, etc.
- Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, etc.
- Non è concesso chiedere alcunché ai docenti e agli altri studenti.
- Occorre consegnare anche la brutta copia ai docenti.

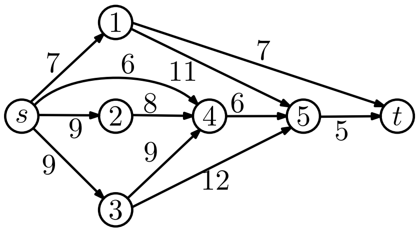
Esercizio 1. *(Punti 9)*
Un'azienda informatica dispone di n calcolatori con differenti caratteristiche hardware e quindi con diversi livelli di performance e consumo energetico. L'azienda prevede, nel mese di febbraio 2023, di dover far eseguire m task distinti alle sue macchine. Ciascun task j richiede un tempo pari a h_{ij} ore se eseguito dalla macchina i. Parimenti, la macchina i consumerebbe w_{ij} kilowattora se fosse chiamata ad eseguire il task j. Si determini come allocare i task alle macchine in modo tale che tale allocazione sia compatibile con i limiti temporali del caso (si tenga in particolare conto del fatto che febbraio 2023 avrà 672 ore) e che il numero totale dei kilowattora consumati sia minimo.

Esercizio 2. *(Punti 6)*
Si risolva il seguente problema di programmazione lineare attraverso l'algoritmo del simplesso. Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della colonna di sinistra.

$$\max 2x + y$$

$x + 1 \geq 0$	$2y + 2 \geq x$	$x \leq 6$
$y + 1 \geq 0$	$y \leq 2x + 2$	$y \leq 6$

Esercizio 3. *(Punti 10)*
Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si indichino in modo preciso il valore ottimo e la soluzione ottima.



Esercizio 4. *(Punti 5)*
Si consideri la seguente variazione sul tema del Problema 1. Anziché minimizzare il numero di kilowattora complessivi, si vuole minimizzare il numero di macchine utilizzate (anche solo per poche ore) nel mese di febbraio 2023. Si richiede però che il numero di kilowattora complessivamente utilizzati sia inferiore ad una soglia pari a u.

B

CORREZIONE TRACCIA (A)

ESERCIZIO 1

VARIABILI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE IL TASK } j \text{ È ESEGUITO SULLA MACCHINA } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_{ij}$$

VINCOLI

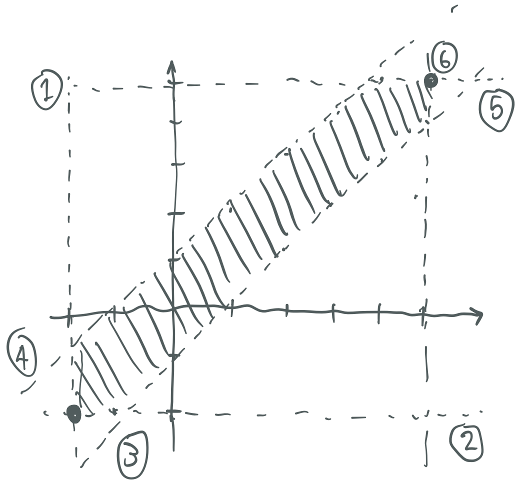
$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \qquad 0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} t_{ij} \leq 672$$

ESERCIZIO 2

LA REGIONE AMMISSIBILE HA L'ASPETTO SEGUENTE



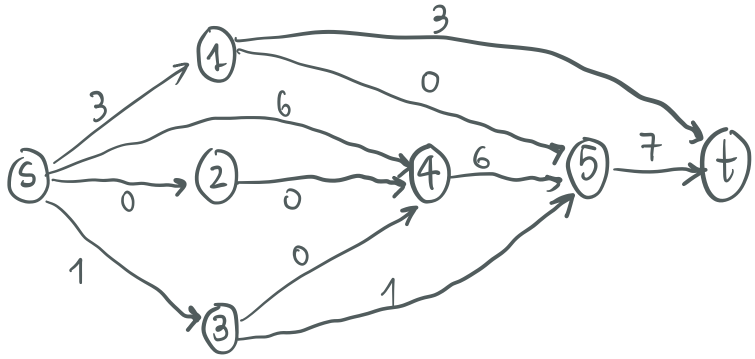
DOPO 4 PASSAGGI SI ARRIVA QUINDI ALLA SOLUZIONE OTTIMA

$$x = 5 \qquad y = 5$$

CHE CORRISPONDE AL VALORE OTTIMO 15

ESERCIZIO 3

DOPO AVER COSTRUITO DUE CAMMINI AUMENTANTI, SI ARRIVA ALLA SOLUZIONE SEGUENTE



CHE CORRISPONDE AL VALORE OTTIMO 10

ESERCIZIO 4

BASTERÀ INTRODURRE DELLE NUOVE VARIABILI

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{SE LA MACCHINA } i \text{ È UTILIZZATA} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LA FUNZIONE OBIETTIVO DIVENTERÀ

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

MENTRE AVREMO BISOGNO DEI VINCOLI SEGUENTI

$$y_i \in \mathbb{Z} \qquad 0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} k_{ij} \leq S$$

CORREZIONE TRACCIA B

ESERCIZIO 1

VARIABILI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE IL TASK } j \text{ È ESEGUITO SULLA MACCHINA } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} w_{ij}$$

VINCOLI

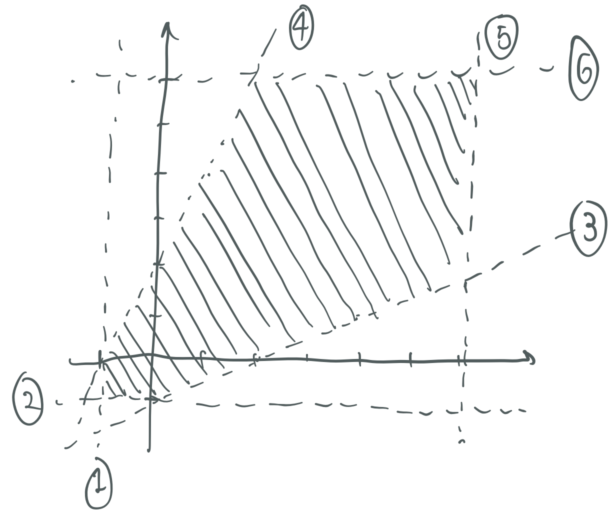
$$x_{ij} \in \mathbb{Z} \qquad 0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} h_{ij} \leq 672$$

ESERCIZIO 2

LA REGIONE AMMISSIBILE HA L'ASPETTO SEGUENTE



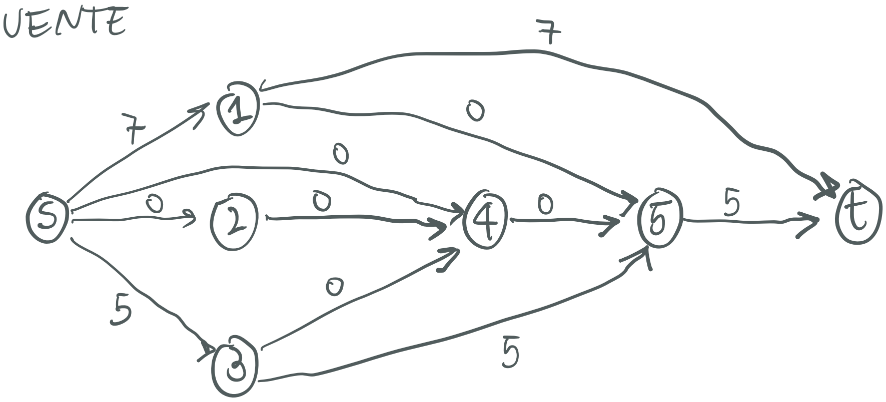
DOPO 4 PASSAGGI SI ARRIVA ALLA SOLUZIONE OTTIMA

$x = 6 \qquad y = 6$

CHE CORRISPONDE AL VALORE OTTIMO 18

ESERCIZIO 3

DOPO AVER COSTRUITO DUE CAMMINI AUMENTANTI SI ARRIVA ALLA SOLUZIONE SEGUENTE



CHE CORRISPONDE AL VALORE OTTIMO 12

ESERCIZIO 4

BASTERÀ INTRODURRE DELLE NUOVE VARIABILI

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{SE LA MACCHINA } i \text{ È UTILIZZATA} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

LA FUNZIONE OBIETTIVO DIVENTERÀ

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

MENTRE AVREMO BISOGNO DEI VINCOLI SEGUENTI

$$y_i \in \mathbb{Z} \qquad 0 \leq y_i \leq 1 \quad \forall i$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} w_{ij} \leq u$$