

Ottimizzazione Combinatoria

Corso di Laurea in Informatica

Seconda Parte: Reti di Flusso

Ugo Dal Lago



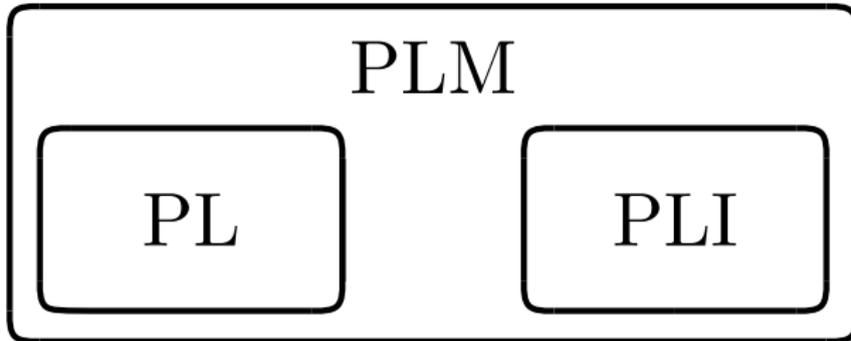
ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

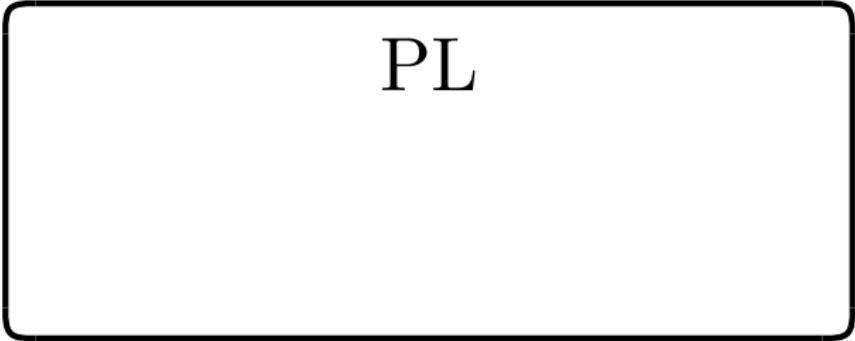
Inria
informatiques mathématiques

Anno Accademico 2022-2023

Sezione 1

Reti di Flusso





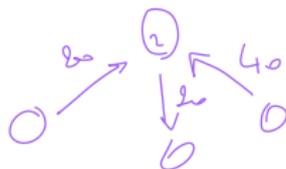
PL

PL

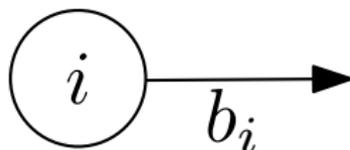
Problemi su Reti

- ▶ Con il termine **rete** indichiamo un grafo $G = (N, A)$, di solito *diretto*, ai cui archi siano associati dei *pesi*.
- ▶ Gli *archi* di una rete sono interpretabili come **canali** in cui fluiscono oggetti, rappresentati da grandezze:
 - ▶ **Discrete** (ad esempio passeggeri o veicoli);
 - ▶ **Continue** (ad esempio fluidi);
- ▶ I *nodi* indicano invece **punti di ingresso o di uscita** dalla rete.
- ▶ Una conseguenza di questo modo di interpretare archi e nodi è la **terminologia** che andiamo ad introdurre ora.

- ▶ Ad ogni nodo $i \in N$ è associato un reale b_i , detto **sbilanciamento**, che può essere:
 - ▶ *Positivo.*
 - ▶ Il nodo i è un nodo di uscita dalla rete e viene detto **destinazione**, **pozzo**, oppure **nodo di output**.
 - ▶ b_i è detto **domanda** di i .
 - ▶ *Negativo.*
 - ▶ Il nodo i è un nodo di entrata nella rete e viene detto **origine**, **sorgente**, oppure **nodo di input**.
 - ▶ $-b_i$ è detto **offerta** di i .
 - ▶ *Nulla.*
 - ▶ Il nodo i è detto **nodo di trasferimento**.

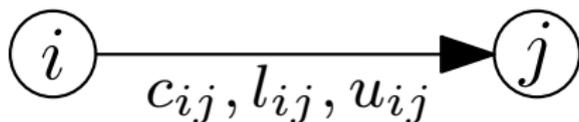


- ▶ Ad ogni nodo $i \in N$ è associato un reale b_i , detto **sbilanciamento**, che può essere:
 - ▶ *Positivo.*
 - ▶ Il nodo i è un nodo di uscita dalla rete e viene detto **destinazione**, **pozzo**, oppure **nodo di output**.
 - ▶ b_i è detto **domanda** di i .
 - ▶ *Negativo.*
 - ▶ Il nodo i è un nodo di entrata nella rete e viene detto **origine**, **sorgente**, oppure **nodo di input**.
 - ▶ $-b_i$ è detto **offerta** di i .
 - ▶ *Nulla.*
 - ▶ Il nodo i è detto **nodo di trasferimento**.



- ▶ Ad ogni arco $(i, j) \in A$ sono associati:
 - ▶ Un **costo** c_{ij} che indica quanto costa, per un'unità di bene, attraversare il canale.
 - ▶ Una **capacità inferiore** l_{ij} , ossia un limite inferiore alla quantità di beni che possono fluire sul canale.
 - ▶ Una **capacità superiore** u_{ij} , ossia un limite superiore alla quantità di beni che possono fluire sul canale.

- ▶ Ad ogni arco $(i, j) \in A$ sono associati:
 - ▶ Un **costo** c_{ij} che indica quanto costa, per un'unità di bene, attraversare il canale.
 - ▶ Una **capacità inferiore** l_{ij} , ossia un limite inferiore alla quantità di beni che possono fluire sul canale.
 - ▶ Una **capacità superiore** u_{ij} , ossia un limite superiore alla quantità di beni che possono fluire sul canale.



Problemi di Flusso

- ▶ Nei problemi di flusso, una soluzione non è altro che un **flusso**, ossia un assegnamento di *valori reali* agli archi di una certa rete $G = (N, A)$.
- ▶ Ciò viene formalizzato tramite una sequenza di variabili x_{ij} , ciascuna corrispondente ad un arco $(i, j) \in A$.
- ▶ Il **costo** di un flusso non è nient'altro che il costo complessivo di tutti i flussi presenti nella rete:

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Problemi di Flusso — Vincoli

- ▶ **Domanda e offerta globale si equivalgono:**

$$\sum_{i \in D} b_i = - \sum_{i \in O} b_i \Leftrightarrow \sum_{i \in N} b_i = 0,$$

dove $D = \{i \in N \mid b_i > 0\}$ e $O = \{i \in N \mid b_i < 0\}$.

- ▶ **Il flusso si conserva:**

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \quad i \in N,$$

dove

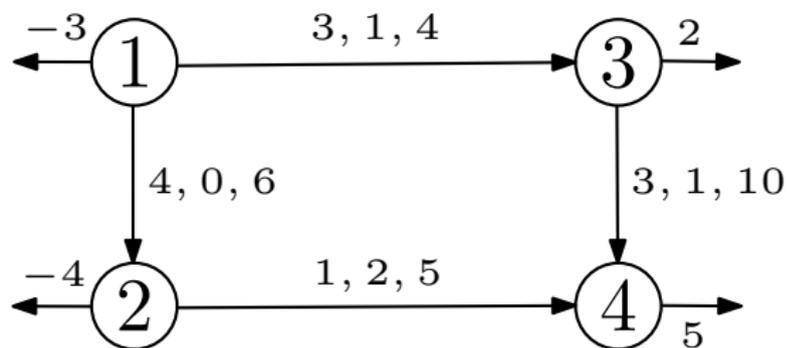
$$BS(i) = \{(k, i) \mid (k, i) \in A\};$$

$$FS(i) = \{(i, k) \mid (i, k) \in A\}.$$

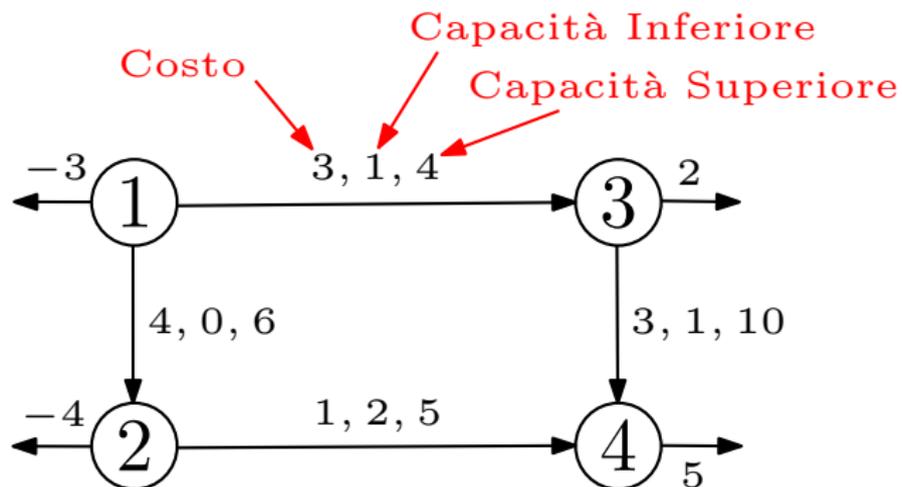
- ▶ **Il flusso deve essere ammissibile:**

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i, j) \in A$$

Un Esempio



Un Esempio



Problemi di Flusso — Perché Studiarli?

- ▶ I problemi di flusso rappresentano un ottimo compromesso tra:
 - ▶ **Espressività**, visto che moltissimi problemi concreti si possono esprimere come istanze di problemi di flusso;
 - ▶ **Complessità**, visto che esistono algoritmi relativamente efficienti per i problemi di flusso, anche per i più generali tra essi.

Un'Ipotesi Semplificativa

- ▶ Una supposizione che semplifica un po' il problema di flusso consiste nell'imporre che $l_{ij} = 0$ per ogni arco $(i, j) \in A$, ossia che **le capacità inferiori siano nulle**.
 - ▶ La faremo sempre anche noi!
- ▶ Data una rete G , si può costruire una rete H che sia in un certo senso **equivalente** a G ma che abbia capacità inferiori nulle. Per ogni arco $(i, j) \in A$,
 - ▶ Si **sottrae** la quantità l_{ij} a b_j e a u_{ij} ;
 - ▶ Si **aggiunge** la quantità l_{ij} a b_i .
 - ▶ Occorrerà aggiungere la quantità

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} l_{ij}$$

alla funzione obiettivo.

- ▶ In altre parole, ad un flusso x_{ij} in H corrisponderà un flusso $x_{ij} + l_{ij}$ in G .

Il Problema del Flusso di Costo Minimo (MCF)

- ▶ Nel problema del *flusso di costo minimo* (o *minimum cost flow*, MCF):
 - ▶ Il costo del flusso è la funzione obiettivo, ovviamente da **minimizzare**.
 - ▶ Le capacità inferiori sono nulle.
- ▶ Il problema è formalizzabile facilmente in programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x \leq u \quad Ex = b \end{aligned}$$

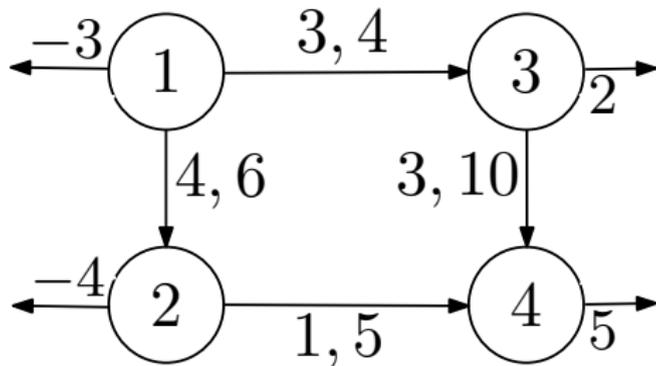
dove

- ▶ $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ è il **vettore dei costi**;
- ▶ $u \in \mathbb{R}^{|A|}$ è il **vettore delle capacità (superiori)**;
- ▶ $E \in \mathbb{R}^{|N| \times |A|}$ è una sorta di matrice di incidenza tra nodi e archi;
- ▶ $b \in \mathbb{R}^{|N|}$ è il **vettore degli sbilanciamenti**.

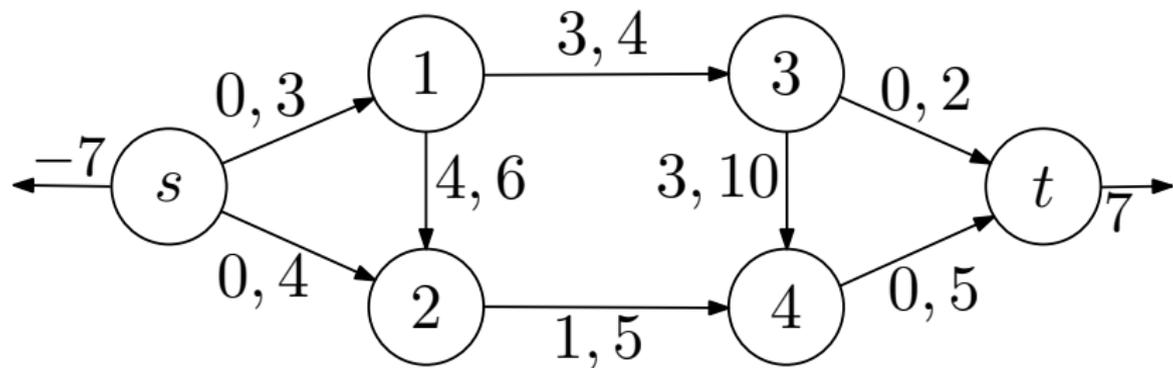
MCF — Rilassare Alcune Assunzioni

- ▶ Spesso, nel progetto di algoritmi per MCF, conviene assumere che vi sia una sola sorgente e un solo pozzo.
- ▶ Un generico problema MCF si può trasformare in un problema con una sola sorgente e un solo pozzo:
 - ▶ Aggiungendo **due nodi** fittizi, uno corrispondente all'unica sorgente, e l'altro all'unico pozzo.
 - ▶ Aggiungendo **archi** fittizi **dalla sorgente** a ciascuna delle sorgenti della rete di partenza. Tali archi avranno costo nullo, e capacità superiore pari all'inverso dello sbilanciamento della sorgente.
 - ▶ Aggiungendo **archi** fittizi da ciascuno dei pozzi della rete di partenza **al pozzo**. Tali archi avranno anch'essi costo nullo, ma capacità superiore pari allo sbilanciamento del pozzo.
 - ▶ Lo **sbilanciamento** dell'unica sorgente sarà uguale alla somma degli sbilanciamenti delle sorgenti della rete di partenza. Similmente per i pozzi.

MCF — Rilassare Alcune Assunzioni



MCF — Rilassare Alcune Assunzioni

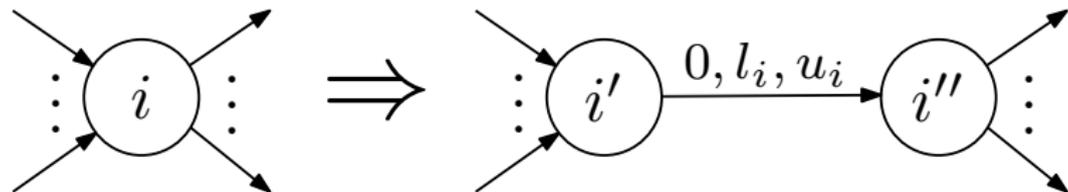


MCF — Rilassare Alcune Assunzioni

- ▶ Alcune volte è utile imporre che anche i *nodi* (e non solo gli *archi*) abbiano delle **capacità**, ossia che solo una quantità di flusso compresa nell'intervallo chiuso $[l_i, u_i]$ possa passare per il nodo $i \in N$.
- ▶ Situazioni come queste si possono modellare **sdoppiando** ciascun nodo i in due nodi i', i'' , in modo che:
 - ▶ Tutti gli archi entranti in i vadano a finire in i' .
 - ▶ Tutti gli archi uscenti da i partano da i'' .
 - ▶ Vi sia un arco fittizio (i', i'') con costo nullo, capacità inferiore l_i e capacità superiore u_i .

MCF — Rilassare Alcune Assunzioni

- ▶ Alcune volte è utile imporre che anche i *nodi* (e non solo gli *archi*) abbiano delle **capacità**, ossia che solo una quantità di flusso compresa nell'intervallo chiuso $[l_i, u_i]$ possa passare per il nodo $i \in N$.
- ▶ Situazioni come queste si possono modellare **sdoppiando** ciascun nodo i in due nodi i', i'' , in modo che:
 - ▶ Tutti gli archi entranti in i vadano a finire in i' .
 - ▶ Tutti gli archi uscenti da i partano da i'' .
 - ▶ Vi sia un arco fittizio (i', i'') con costo nullo, capacità inferiore l_i e capacità superiore u_i .



Definire il Problema — I

- ▶ Il **problema di flusso massimo** (o maximum flow, MF) è un problema di ottimizzazione su reti che può essere visto come una restrizione di MCF.
- ▶ Ciò che cambia è la funzione obiettivo: non vogliamo *minimizzare* i costi, ma piuttosto *massimizzare* i flussi.
- ▶ Formalmente, data una rete $G = (N, A)$:
 - ▶ Fissiamo due nodi s (detto **sorgente**) e t (detto **destinazione**);
 - ▶ Vogliamo massimizzare il flusso da s a t , ossia trovare il **massimo** valore v tale che se $b_s = -v$, $b_t = v$ e $b_i = 0$ in tutti gli altri casi, allora esiste un flusso ammissibile (di qualsiasi costo).
- ▶ Un valore v *ammissibile* per il problema di cui sopra si dice **valore** del flusso x .
- ▶ Il problema è formalizzabile direttamente in PL.

Definire il Problema — II

max v

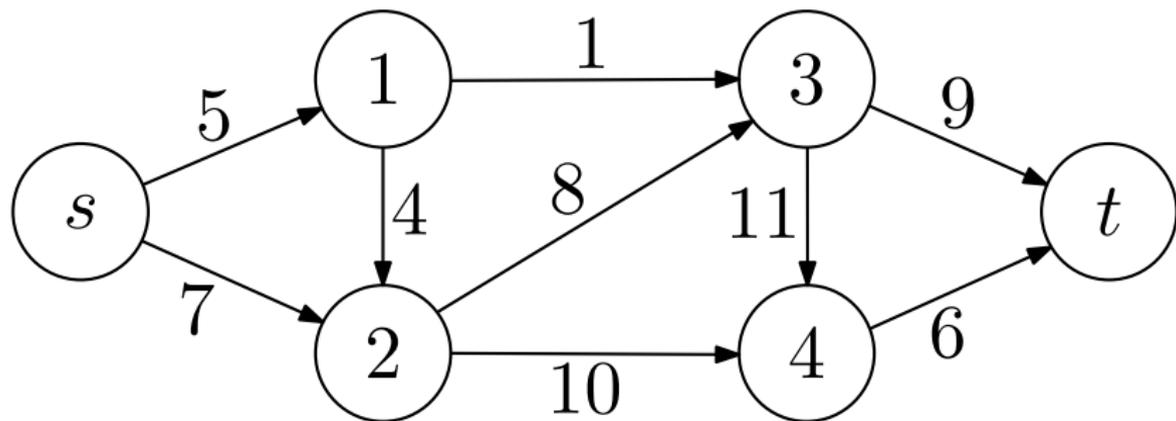
$$\sum_{(j,s) \in BS(s)} x_{js} + v = \sum_{(s,j) \in FS(s)} x_{sj};$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = 0, \quad i \in N - \{s, t\};$$

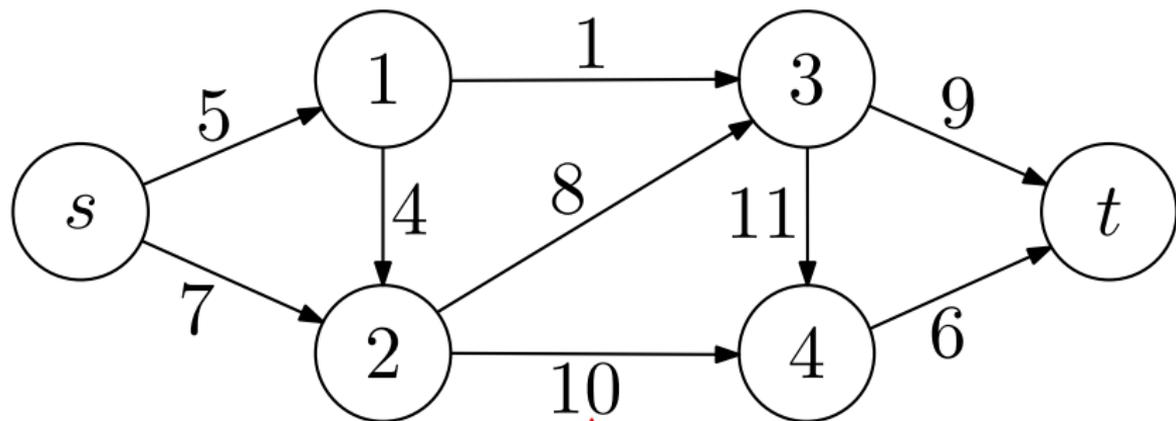
$$\sum_{(j,t) \in BS(t)} x_{jt} = \sum_{(t,j) \in FS(t)} x_{tj} + v;$$

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in A.$$

Esempio



Esempio



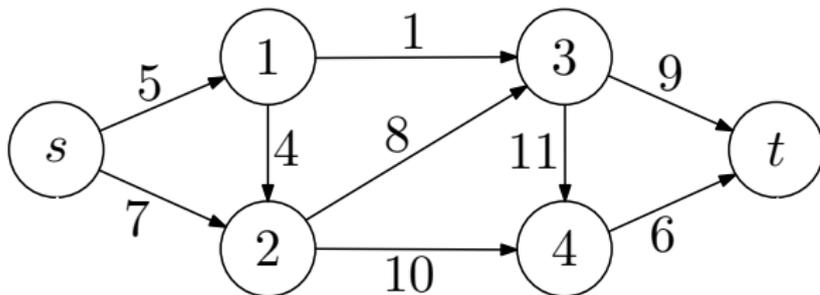
Capacità Superiore

Massimo Flusso e MCF

- ▶ Il problema MF può essere visto come un caso particolare di MCF:
 - ▶ I costi sono nulli;
 - ▶ Gli sbilanciamenti sono nulli;
 - ▶ Si aggiunge però un arco fittizio da t a s con costo -1 e capacità infinita.

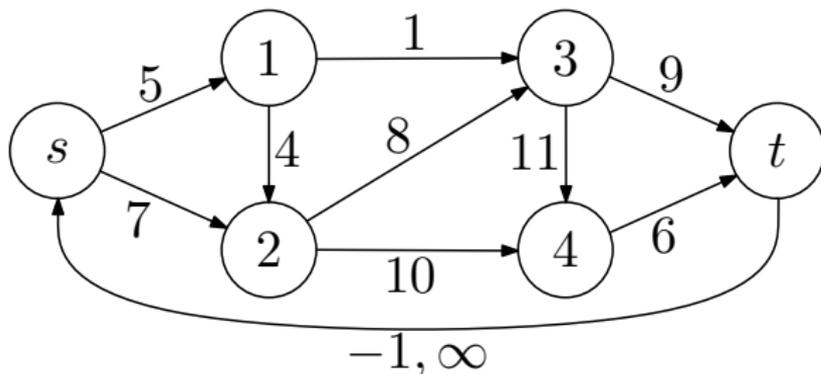
Massimo Flusso e MCF

- ▶ Il problema MF può essere visto come un caso particolare di MCF:
 - ▶ I costi sono nulli;
 - ▶ Gli sbilanciamenti sono nulli;
 - ▶ Si aggiunge però un arco fittizio da t a s con costo -1 e capacità infinita.
- ▶ Graficamente:



Massimo Flusso e MCF

- ▶ Il problema MF può essere visto come un caso particolare di MCF:
 - ▶ I costi sono nulli;
 - ▶ Gli sbilanciamenti sono nulli;
 - ▶ Si aggiunge però un arco fittizio da t a s con costo -1 e capacità infinita.
- ▶ Graficamente:



Sezione 2

Il Problema del Flusso Massimo: Algoritmi

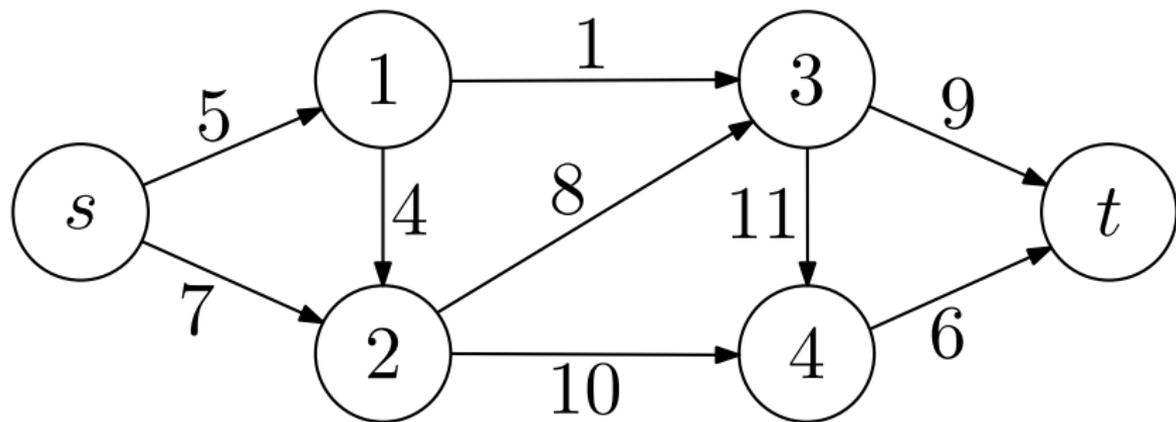
Tagli

- ▶ Un **taglio** in una rete $G = (N, A)$ è dato da una coppia (N', N'') di sottoinsiemi di N tali che $N' \cap N'' = \emptyset$ e $N' \cup N'' = N$.
- ▶ Un (s, t) -**taglio** in una rete G è un taglio (N_s, N_t) dove $s \in N_s$ e $t \in N_t$.
- ▶ Dato un (s, t) -taglio in $G = (N, A)$, indichiamo con $A^+(N_s, N_t)$ e $A^-(N_s, N_t)$ i seguenti sottoinsiemi di A :

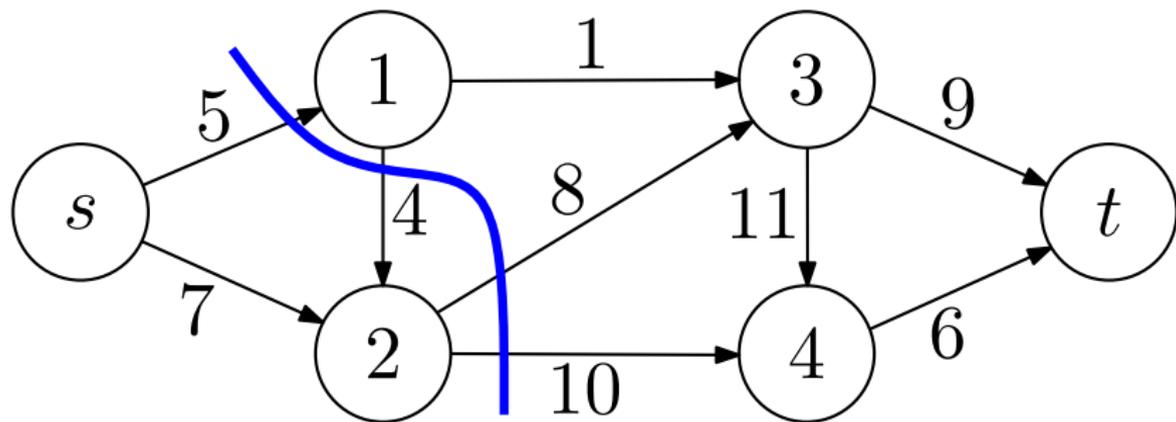
$$A^+(N_s, N_t) = \{(i, j) \in A \mid i \in N_s \wedge j \in N_t\};$$

$$A^-(N_s, N_t) = \{(i, j) \in A \mid i \in N_t \wedge j \in N_s\}.$$

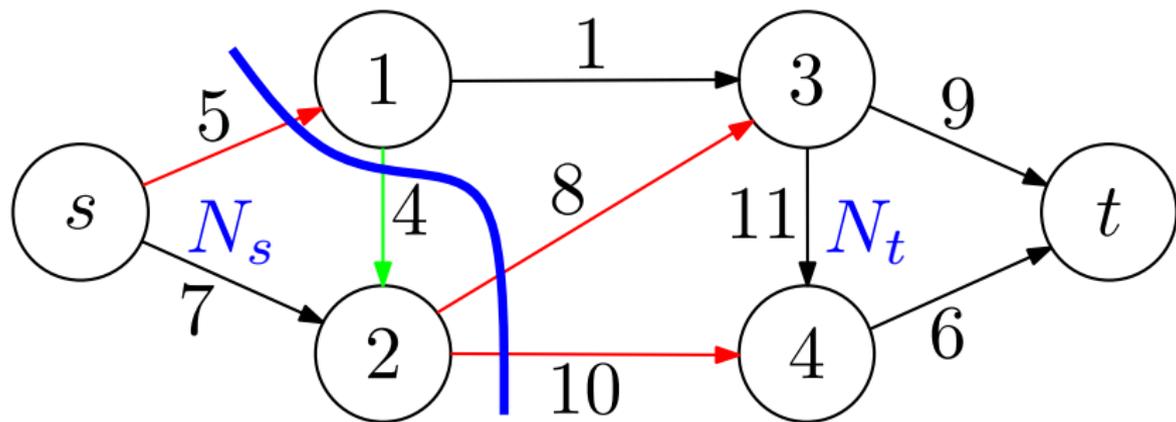
Tagli — Esempio



Tagli — Esempio



Tagli — Esempio



Tagli — Proprietà

Lemma

Per ogni (s, t) -taglio (N_s, N_t) e ogni flusso ammissibile x con valore v :

1. $v = \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_s, N_t)} x_{ij}$;
2. $v \leq \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} u_{ij}$.

Dimostrazione.

1. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{(s,j) \in A} x_{sj} - \sum_{(i,s) \in A} x_{is} = \sum_{k \in N_s} \left(\sum_{(k,j) \in A} x_{kj} - \sum_{(i,k) \in A} x_{ik} \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_s, N_t)} x_{ij} \end{aligned}$$

2. E' una semplice conseguenza del punto 1.



Tagli — Proprietà

- ▶ Diamo un nome alle due quantità che abbiamo studiato nel Lemma precedente:
 - ▶ La quantità $\sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_s, N_t)} x_{ij}$ è detta **flusso del taglio** (N_s, N_t) , ed è indicata con $x(N_s, N_t)$.
 - ▶ La quantità $\sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} u_{ij}$ è detta **capacità del taglio** (N_s, N_t) , ed è indicata con $u(N_s, N_t)$.
- ▶ Quello che ci dice il Lemma precedente è che

$$v = x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t).$$

- ▶ In altre parole: *il valore di un flusso ammissibile è sempre minore o uguale della capacità di qualunque taglio.*
- ▶ Ma esiste un taglio con capacità **identica** al valore di un flusso ammissibile (che quindi sarà massimo)?

Grafi Residui

- ▶ Dati una rete $G = (N_G, A_G)$ e un flusso ammissibile x , il **grafo residuo** G_x è il *multigrafo* (N_{G_x}, A_{G_x}) tale che:
 - ▶ $N_{G_x} = N_G$;
 - ▶ Gli archi in A_{G_x} sono di due tipi:
 - ▶ Per ogni arco $(i, j) \in A_G$ tale che $x_{ij} < u_{ij}$ esiste un arco **da i a j** in G_x (detto **arco concorde**);
 - ▶ Per ogni arco $(i, j) \in A_G$ tale che $x_{ij} > 0$ esiste un arco **da j a i** in G_x (detto **arco discorde**).
 - ▶ Osserviamo come in N_{G_x} ci possano essere *due* archi da uno stesso nodo i ad uno stesso nodo j .

Cammini Aumentanti

- ▶ Un **cammino aumentante** P in una rete G rispetto a x non è nient'altro che un cammino semplice e orientato da s a t in G_x .
 - ▶ Sia P^+ l'insieme degli archi *concordi* in P , e P^- l'insieme dei suoi archi *discordi*.
- ▶ Dato un cammino aumentante P rispetto a x , definiamo la **capacità** di P rispetto a x come

$$\theta(P, x) = \min\left\{ \min\{u_{ij} - x_{ij} \mid (i, j) \in P^+\}, \right. \\ \left. \min\{x_{ij} \mid (j, i) \in P^-\} \right\}.$$

- ▶ Dato un flusso x , un cammino P in G_x e un reale θ , definiamo $x(P, \theta)$ il flusso definito come segue:

$$(x(P, \theta))_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \theta & \text{se } (i, j) \in P^+; \\ x_{ij} - \theta & \text{se } (j, i) \in P^-; \\ x_{ij} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'Algoritmo di Ford-Fulkerson

1. $x \leftarrow 0$;
2. Costruisci G_x e determina se G_x ha un cammino aumentante P . In caso P non esista, termina e restituisci x ;
3. $x \leftarrow x(P, \theta(P, x))$
4. Ritorna al punto 2.

Lemma

Se x è ammissibile, allora anche $x(P, \theta(P, x))$ è ammissibile.

Lemma

Se x è ammissibile, allora anche $x(P, \theta(P, x))$ è ammissibile.

Lemma

Se x è un flusso ammissibile massimo, allora G_x non ha cammini aumentanti.

Dimostrazione.

Se ci fosse un cammino aumentante in G_x , allora x non sarebbe massimo, perché sarebbe possibile aumentare il valore del flusso. □

Lemma

Se G_x non ha cammini aumentanti, allora esiste un taglio di capacità pari a v .

Dimostrazione.

Basta considerare il taglio (N_s, N_t) , dove N_s contiene tutti e soli i nodi raggiungibili da s in G_x (e $N_t = N - N_s$). Infatti

$$\begin{aligned}v &= x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_s, N_t)} x_{ij} \\ &= \sum_{(i,j) \in A^+(N_s, N_t)} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-(N_s, N_t)} 0 \\ &= u(N_s, N_t)\end{aligned}$$



Teorema (Correttezza)

Se l'algoritmo di Ford-Fulkerson termina, allora il flusso x è un flusso massimo.

Dimostrazione.

- ▶ Se Ford-Fulkerson termina, allora G_x non ha cammini aumentanti.
- ▶ Ma quindi esiste un taglio di capacità pari a v .
- ▶ E a questo punto v non può essere che massimo, perché se non lo fosse avremmo un taglio di capacità inferiore al valore di un flusso ammissibile.



Max-Flow Min-Cut

Teorema

Il valore del massimo flusso è uguale alla minima capacità dei tagli.

Dimostrazione.

- ▶ Basta dimostrare che il valore del massimo flusso è maggiore o uguale alla capacità di *un* taglio.
- ▶ Ma se x è ammissibile e massimo, G_x non ha cammini aumentanti, e quindi esiste un taglio di capacità pari a v .



Ford-Fulkerson — Complessità

Teorema

Se le capacità di G sono numeri interi, allora esiste almeno un flusso intero massimo.

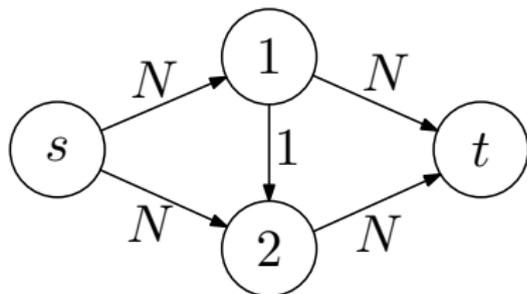
Dimostrazione.

- ▶ Se le capacità sono intere, allora il flusso massimo sarà al più nU dove $U = \max\{u_{ij} \mid (i, j) \in A\}$.
- ▶ Si parte da un flusso intero, e l'interezza è preservata, perché per ogni cammino aumentante P , $\theta(P, x)$ è un numero intero.
- ▶ Di conseguenza, il valore del flusso aumenta almeno di 1 ad ogni iterata.
- ▶ L'algoritmo terminerà quindi dopo al più nU iterate.



Ford-Fulkerson — Complessità

- ▶ La dimostrazione del teorema precedente ci dice che se le capacità sono intere, allora la complessità è $O(mnU)$, ovvero solo **pseudopolinomiale** nella dimensione della rete
- ▶ Controesempio alla polinomialità:



- ▶ In assenza del vincolo di interezza, non si può dire molto sulla complessità dell'algoritmo.

L'Algoritmo di Edmonds-Karp

- ▶ E' possibile rendere la complessità di Ford-Fulkerson **polinomiale** in tempo?
- ▶ Un modo consiste nel lasciare l'algoritmo così com'è, ma agire sul **modo** in cui i cammini aumentanti vengono scoperti, ossia sull'algoritmo usato per **visitare** il grafo residuo G_x .
- ▶ L'**Algoritmo di Edmonds-Karp** non è nient'altro che l'algoritmo di Ford-Fulkerson dove, però, la ricerca del cammino aumentante viene eseguita visitando **in ampiezza** (BFS) il grafo residuo G_x .
- ▶ Notiamo che in questo modo i cammini aumentanti saranno sempre cammini **di lunghezza minima**.

- ▶ EK è trivialmente **corretto**, essendo nient'altro che un caso particolare di FF.
- ▶ Studiarne la **complessità**, invece, risulta più difficile:
 - ▶ Si procede osservando che, *se in FF i cammini aumentanti sono di lunghezza minima*, allora la distanza di un generico nodo i dalla sorgente s in G_x **non può diminuire**.
 - ▶ Da ciò si deduce che il numero di iterazioni di EK non può, asintoticamente essere più grande di $N \cdot A$.

Edmonds-Karp — Proprietà

- ▶ Data una rete G , un flusso ammissibile x e due nodi i, j in G , indichiamo con $\delta_x(i, j)$ la distanza tra i e j nel grafo residuo G_x .

- ▶ Data una rete G , un flusso ammissibile x e due nodi i, j in G , indichiamo con $\delta_x(i, j)$ la distanza tra i e j nel grafo residuo G_x .

Lemma

Se, durante l'esecuzione di EK, il flusso y è ottenuto da x tramite un'operazione di aumento del flusso in un cammino aumentante, allora per ogni nodo $i \in N$, vale che $\delta_x(s, i) \leq \delta_y(s, i)$.

- ▶ Data una rete G , un flusso ammissibile x e due nodi i, j in G , indichiamo con $\delta_x(i, j)$ la distanza tra i e j nel grafo residuo G_x .

Lemma

Se, durante l'esecuzione di EK, il flusso y è ottenuto da x tramite un'operazione di aumento del flusso in un cammino aumentante, allora per ogni nodo $i \in N$, vale che $\delta_x(s, i) \leq \delta_y(s, i)$.

- ▶ La prova è molto interessante ed ingegnosa. Non abbiamo purtroppo tempo di vederla in dettaglio. Gli studenti interessati possono consultare le note.

Teorema

Il numero di iterazioni di EK è $O(NA)$, quindi la sua complessità è $O(NA^2)$.

Dimostrazione.

- ▶ Un arco (i, j) in G_x è detto *critico* per un cammino aumentante P se la sua capacità (ossia $u_{ij} - x_{ij}$ se è concorde o x_{ji} se discorde) è uguale a $\theta(P, x)$.
 - ▶ Dopo l'aumento del flusso lungo P , l'arco (i, j) sparisce dal grafo residuo.
 - ▶ In ogni cammino aumentante, esiste almeno un arco critico.
- ▶ Dati i, j connessi da un arco in A , quante volte è possibile che (i, j) sia arco critico? Si può dimostrare che tale numero è al più $O(N)$, e visto che di tali coppie ne esistono al più $O(A)$, in totale potremo avere al più $O(NA)$ iterazioni. Nel seguito dimostriamo proprio il limite $O(N)$ al numero di volte in cui (i, j) può diventare critico.

- ▶ Quando (i, j) diventa critico la prima volta, deve valere che

$$\delta_x(s, j) = \delta_x(s, i) + 1,$$

dove x è il flusso, e a quel punto sparisce dal grafo residuo.

- ▶ L'unico modo per ricomparirvi è fare in modo che il flusso (reale o virtuale) da i a j *diminuisca*, e questo vuol dire che

$$\delta_y(s, i) = \delta_y(s, j) + 1,$$

dove y è il flusso.

- ▶ Dunque:

$$\delta_y(s, i) = \delta_y(s, j) + 1 \geq \delta_x(s, j) + 1 = \delta_x(s, i) + 2.$$

- ▶ Di conseguenza, da un momento in cui (i, j) diventa critico al successivo, la sua distanza da s aumenta di almeno 2. Siccome tale distanza non può essere superiore a $|N|$, il numero di volte in cui (i, j) può diventare critico è lineare in $|N|$.



Ci Sono Solo FF e EK?

Ci Sono Solo FF e EK?

<i>Algoritmo</i>	<i>Complessità</i>
Dinic	$O(V^2 A)$
MKM	$O(V^3)$
Goldberg-Tarjan	$O(V^2 A)$
KRT	$O(V A \log_{\frac{A}{V \log V}} V)$
Orlin+KRT	$O(V A)$

L'Algoritmo di Goldberg-Tarjan — I

- ▶ Una delle strade che ci permettono di scendere sotto la soglia di una complessità $O(VA^2)$ è quella che Goldberg e Tarjan intrapresero nel 1986 e che consiste nel rendere la costruzione del flusso massimo più **locale**.
 - ▶ Questo in opposizione con FF ed EK, in cui ad ogni iterazione occorre procedere con un'analisi **globale**.

L'Algoritmo di Goldberg-Tarjan — I

- ▶ Una delle strade che ci permettono di scendere sotto la soglia di una complessità $O(VA^2)$ è quella che Goldberg e Tarjan intrapresero nel 1986 e che consiste nel rendere la costruzione del flusso massimo più **locale**.
 - ▶ Questo in opposizione con FF ed EK, in cui ad ogni iterazione occorre procedere con un'analisi **globale**.
- ▶ C'è un prezzo da pagare, ossia il fatto che durante l'esecuzione dell'algoritmo, non si lavora solo con flussi **ammissibili**, ma anche con **preflussi**.

L'Algoritmo di Goldberg-Tarjan — II

- ▶ Un **preflusso** è un vettore x tale che:

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} \geq 0, \quad i \in N - \{s, t\};$$
$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i, j) \in A.$$

In altre parole, i vincoli di capacità sono soddisfatti, mentre quelli di bilanciamento ai nodi possono non esserlo.

- ▶ Un nodo si dice **attivo** se il suo **eccesso**

$$e_i = \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij}$$

è positivo, altrimenti si dice **bilanciato**.

L'Algoritmo di Goldberg-Tarjan — III

- ▶ L'idea centrale dell'algoritmo è quella di eliminare gli sbilanciamenti presenti nel preflusso corrente in modo *iterativo e locale*.

L'Algoritmo di Goldberg-Tarjan — III

- ▶ L'idea centrale dell'algoritmo è quella di eliminare gli sbilanciamenti presenti nel preflusso corrente in modo *iterativo e locale*.
- ▶ Lo sbilanciamento presente in un nodo i viene eliminato spostando parte del flusso in eccesso:
 - ▶ In avanti, ossia attraverso un arco (i, j) , ogniqualvolta $x_{ij} < u_{ij}$
 - ▶ Indietro, ossia attraverso un arco (j, i) , ogniqualvolta $x_{ij} > 0$.

Tali operazioni si chiamano **push forward** e **push backward**.

L'Algoritmo di Goldberg-Tarjan — III

- ▶ L'idea centrale dell'algoritmo è quella di eliminare gli sbilanciamenti presenti nel preflusso corrente in modo *iterativo e locale*.
- ▶ Lo sbilanciamento presente in un nodo i viene eliminato spostando parte del flusso in eccesso:
 - ▶ In avanti, ossia attraverso un arco (i, j) , ogniqualvolta $x_{ij} < u_{ij}$
 - ▶ Indietro, ossia attraverso un arco (j, i) , ogniqualvolta $x_{ij} > 0$.

Tali operazioni si chiamano **push forward** e **push backward**.

- ▶ E' sempre possibile effettuare operazioni di push?
 - ▶ **No**, altrimenti sarebbe molto difficile tenere la complessità dell'algoritmo sotto controllo.
 - ▶ Si usa invece un sistema basato su **etichettature**.

GOLDBERG-TARJAN(G, s, t)

1. $x \leftarrow 0$;
2. $x_{sj} \leftarrow u_{sj} \quad \forall (s, j) \in FS(s)$;
3. $d \leftarrow \text{ETICHETTATURAVALIDA}(G)$;
4. $d_s \leftarrow n$;
5. Se tutti i nodi (diversi da s e t) sono bilanciati, allora termina e restituisci x .
6. Sia v un qualunque nodo sbilanciato
7. Se esiste (v, j) ammissibile per v , allora esegui $\text{PUSHFORWARD}(v, j)$ e torna a 6, altrimenti prosegui
8. se esiste (i, v) ammissibile per v , allora esegui $\text{PUSHBACKWARD}(i, v)$ e torna a 6, altrimenti prosegui
9. esegui $\text{RELABEL}(v)$ e torna a 6.

Teorema

L'algoritmo di Goldberg e Tarjan è corretto, e la sua complessità in tempo è $O(N^2A)$.

Sezione 3

Il Problema del Flusso di Costo Minimo: Algoritmi

Nozioni e Risultati Preliminari — I

- ▶ Uno **pseudoflusso** è un vettore x che soddisfa i vincoli di capacità, ossia tale che

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i, j) \in A$$

- ▶ Se x è uno pseudoflusso, definiamo **sbilanciamento** di un nodo i rispetto a x la quantità

$$e_x(i) = \sum_{(j,i) \in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} - b_i$$

- ▶ Possiamo anche vedere e_x come un vettore, detto **vettore degli sbilanciamenti**.

Nozioni e Risultati Preliminari — II

- ▶ Dato uno pseudoflusso x , i nodi sbilanciati rispetto a x fanno parte di uno dei seguenti due insiemi:

$$O_x = \{i \in N \mid e_x(i) > 0\};$$

$$D_x = \{i \in N \mid e_x(i) < 0\}.$$

I nodi in O_x sono detti **nodì con eccesso di flusso**, mentre quelli in D_x sono detti **nodì con difetto di flusso**.

- ▶ Se $O_x = D_x = \emptyset$, allora x è un flusso.
- ▶ Lo **sbilanciamento complessivo** di x è definito come:

$$g(x) = \sum_{i \in O_x} e_x(i) = - \sum_{j \in D_x} e_x(j)$$

Cammini Aumentanti — I

- ▶ Quando si lavora con pseudoflussi, la nozione stessa di cammino aumentante diventa più generale.
- ▶ La nozione di **grafo residuo** G_x per uno pseudoflusso x si generalizza banalmente al problema MCF. Ogni arco, però, avrà ora un costo, parametro importante.
 - ▶ in un arco concorde (i, j) di G_x , il costo è semplicemente c_{ij} ;
 - ▶ in un arco discorde (j, i) di G_x , il costo è invece $-c_{ij}$.
- ▶ Un cammino P tra i e j in G_x verrà quindi detto **cammino aumentante** tra i e j .
 - ▶ I suoi archi possono essere partizionati in P^+ e P^- .
 - ▶ La sua capacità $\theta(P, x)$ è definita come al solito.
 - ▶ Un cammino aumentante tra i e i viene anche detto **ciclo aumentante**

Cammini Aumentanti — II

- ▶ Dato uno pseudoflusso x e un cammino aumentante P , è possibile inviare $0 \leq \theta \leq \theta(P, x)$ unità di flusso lungo P , attraverso l'operazione $x(P, \theta)$, che conosciamo già
 - ▶ In questo contesto, $x(P, \theta)$ verrà spesso indicato anche con $x \oplus P\theta$.
- ▶ Se P è un cammino aumentante da i a j in G_x , allora lo pseudoflusso $x(P, \theta)$ avrà gli stessi sbilanciamenti di x , tranne in i e in j .
 - ▶ Se $i = j$, allora il vettore degli sbilanciamenti resterà addirittura *inalterato*.
- ▶ Il **costo** di un cammino aumentante P è definito come

$$c(P) = \sum_{(i,j) \in P^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in P^-} c_{ij}$$

- ▶ Si verifica facilmente che

$$c \cdot (x(P, \theta)) = c \cdot (x \oplus P\theta) = c \cdot x + \theta c(P).$$

Teorema (Struttura degli Pseudoflussi)

Siano x e y due pseudoflussi qualunque. Allora esistono $k \leq n + m$ cammini aumentanti P_1, \dots, P_k , tutti per x , di cui al più m sono cicli, tali che

$$z_1 = x$$

$$z_{i+1} = z_i \oplus \theta_i P_i \quad 1 \leq i \leq k$$

$$z_{k+1} = y$$

$$0 \leq \theta_i \leq \theta(P_i, z_i).$$

Inoltre, tutti i P_i hanno come estremi dei nodi in cui lo sbilanciamento di x è diverso da quello di y .

Pseudoflussi Minimali — I

- ▶ A differenza di quello che succede in MF, in MCF non possiamo permetterci di aumentare il flusso indiscriminatamente.
- ▶ Un problema centrale è quindi quello di determinare *quali siano* le operazioni di aumento lecite e quali siano le proprietà sui flussi che esse garantiscano.
- ▶ Centrale da questo punto di vista è la nozione di **pseudoflusso minimale**, che è uno pseudoflusso x che abbia costo *minimo tra tutti* gli pseudoflussi aventi lo stesso vettore di sbilanciamento e_x .

Pseudoflussi Minimali — II

Lemma

Uno pseudoflusso (rispettivamente, un flusso ammissibile) è minimale (rispettivamente, ottimo) sse non esistono cicli aumentanti di costo negativo.

Dimostrazione.

- \Rightarrow Per contrapposizione: se esiste un ciclo aumentante di costo negativo in G_x , applicarlo fa diminuire il costo senza alterare lo sbilanciamento, in contraddizione con la minimalità di x .
- \Leftarrow Ancora per contrapposizione: supponiamo che x non sia minimale, ossia che esista y con $cy < cx$ e $e_y = e_x$. Allora per il teorema sugli pseudoflussi possiamo scrivere $y = x \oplus \theta_1 P_1 \oplus \dots \oplus \theta_n P_n$, dove $\theta_i > 0$ e ciascun P_i è un ciclo. Da $cy < cx$ discende però che:

$$cx > cx + \theta_1 c(P_1) + \dots + \theta_n c(P_n)$$

e quindi che $c(P_i) < 0$ per qualche i .



Pseudoflussi Minimali — III

Teorema

Sia x uno pseudoflusso minimale e sia P un cammino aumentante rispetto ad x avente costo minimo tra tutti i cammini che uniscono un nodo di O_x ad un nodo di D_x . Allora, qualunque sia $\theta \leq \theta(x, P)$, abbiamo che $x(\theta, P) = x \oplus \theta P$ è ancora pseudoflusso minimale.

Dimostrazione.

- ▶ Siano s e t i vertici che P collega. Supponiamo che $\theta \leq \theta(x, P)$ e che y sia un qualunque pseudoflusso con vettore di sbilanciamento $e_{x(\theta, P)}$.
- ▶ Per il Teorema sulla struttura degli pseudoflussi esistono:
 - ▶ k cammini aumentanti P_1, \dots, P_k rispetto a x , tutti da s a t ;
 - ▶ h cicli aumentanti C_1, \dots, C_h rispetto a x .

tali che $y = x \oplus \theta_1 P_1 \oplus \dots \oplus \theta_k P_k \oplus \mu_1 C_1 \oplus \dots \oplus \mu_h C_h$, (dove tutti gli θ_i, μ_j sono positivi).

- ▶ Deve essere , per ragioni che hanno a che fare con lo sbilanciamento, che $\sum_{1 \leq i \leq k} \theta_i = \theta$.
- ▶ Poiché x è minimale, $c(C_i) \geq 0$.
- ▶ Siccome P ha costo minimo, $c(P_i) \geq c(P)$.
- ▶ Di conseguenza:

$$\begin{aligned}cy &= cx + \theta_1 c(P_1) + \dots + \theta_k c(P_k) + \mu_1 c(C_1) + \dots + \mu_h c(C_h) \\ &\geq cx + \theta c(P) = cx(\theta, P).\end{aligned}$$



Alcuni Algoritmi Ausiliari

- ▶ È abbastanza facile costruire uno pseudoflusso minimale x , se non si bada agli sbilanciamenti. Ad esempio, il flusso x definito come

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{ij} \geq 0 \\ u_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo i costi degli archi in G_x sono tutti non-negativi e quindi G_x non avrà cicli negativi (e in ultima analisi x sarà minimale).

- ▶ Determinare un cammino di costo minimo tra O_x e D_x è semplice: basta usare uno degli algoritmi basati sui cammini minimi.

CAMMINI MINIMI SUCCESSIVI(G)

1. $x \leftarrow \text{PSEUDOFUSSO MINIMALE}(G)$;
2. Se $g(x) = 0$, allora termina e restituisci x ;
3. Cerca un cammino di costo minimo P tra un nodo di $i \in O_x$ e $j \in D_x$; se non esiste, termina: il problema è vuoto;
4. $x \leftarrow x(P, \min\{\theta(P, x), e_x(i), -e_x(j)\})$;
5. Torna al punto 2.

Cammini Minimi Successivi — Correttezza e Terminazione

- ▶ Ad ogni passo, il flusso x rimane minimale.
- ▶ **Se l'algoritmo termina**, allora $g(x) = 0$ e quindi x è uno pseudoflusso minimale con sbilanciamento nullo, ossia un flusso di costo minimo.
- ▶ Riguardo la **terminazione**, se b e u sono vettori di numeri *interi*, possiamo osservare che:
 - ▶ Lo pseudoflusso iniziale è esso stesso intero;
 - ▶ Se x è pseudoflusso intero, allora la capacità $\theta(x, P)$ rimane intera;
 - ▶ Lo pseudoflusso x rimane quindi *sempre* intero.
 - ▶ Ad ogni passo, $g(x)$ diminuisce di almeno 1.

Cammini Minimi Successivi — Complessità

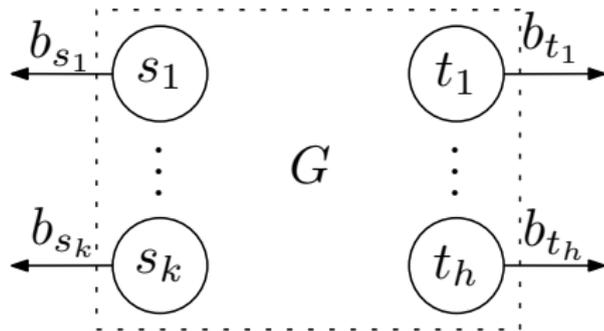
- ▶ L'analisi della terminazione che abbiamo appena fatto si estende facilmente anche alla complessità.
- ▶ Lo sbilanciamento iniziale \bar{g} è al più

$$\bar{g} \leq \sum_{b_i > 0} b_i + \sum_{c_{ij} < 0} u_{ij}$$

- ▶ Come già detto, lo sbilanciamento $g(x)$ cala di almeno 1 ad ogni interazione. Le **iterazioni** saranno quindi al più \bar{g} .
- ▶ Il costo computazionale di **ogni iterazione** è dominato dalla ricerca di un cammino minimo, che possiamo eseguire in tempo $O(NA)$.
- ▶ La complessità sarà quindi nel caso peggiore $O(\bar{g}NA)$, **pseudopolinomiale** nella dimensione del grafo.

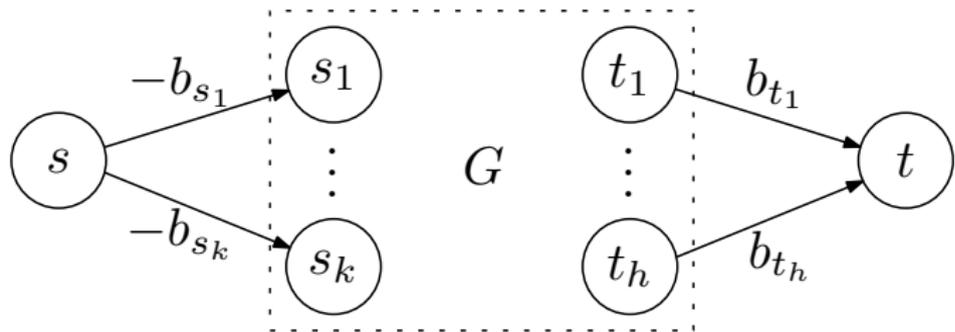
Costruire un Flusso Ammissibile

- ▶ Data una rete G , è possibile determinare se esiste un **flusso** ammissibile (ma non necessariamente ottimo) per essa?
- ▶ Basta risolvere il problema MF sulla rete ottenuta nel modo seguente



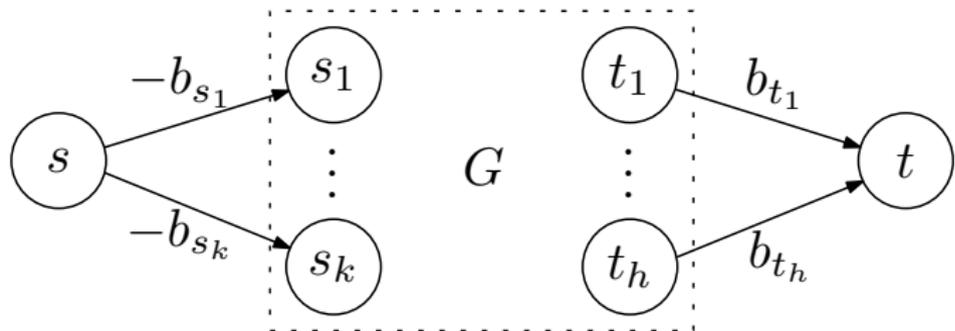
Costruire un Flusso Ammissibile

- ▶ Data una rete G , è possibile determinare se esiste un **flusso** ammissibile (ma non necessariamente ottimo) per essa?
- ▶ Basta risolvere il problema MF sulla rete ottenuta nel modo seguente



Costruire un Flusso Ammissibile

- ▶ Data una rete G , è possibile determinare se esiste un **flusso** ammissibile (ma non necessariamente ottimo) per essa?
- ▶ Basta risolvere il problema MF sulla rete ottenuta nel modo seguente



- ▶ Otteniamo così un algoritmo, che chiamiamo $\text{FLUSSOAMMISSIBILE}(G)$, che data una rete, calcola un flusso ammissibile per essa (se esiste).

CANCELLAZIONE CICLI(G)

1. Se FLUSSOAMMISSIBILE(G) restituisce un flusso ammissibile, allora mettilo in x , altrimenti termina: il problema è vuoto.
2. Cerca un ciclo di costo negativo in G_x . Se non lo trovi, allora termina e restituisci x , altrimenti metti il ciclo in C .
3. $x \leftarrow x(C, \theta(C, x))$;
4. Torna al punto 2.

Cancellazione di Cicli — Proprietà

- ▶ La **correttezza** dell'algoritmo è una banale conseguenza del Lemma (che abbiamo dimostrato) sull'equivalenza tra assenza di cicli aumentanti e ottimalità.
- ▶ Come al solito, se le capacità sono numeri interi, allora qualcosa diminuisce di almeno 1 ad ogni iterazione, ossia il *costo* (e quindi l'algoritmo **termina**).
- ▶ Il costo di qualunque flusso ammissibile è compreso tra $-A\bar{u}\bar{c}$ e $A\bar{u}\bar{c}$, dove

$$\bar{u} = \max\{u_{ij} \mid (i, j) \in N\};$$

$$\bar{c} = \max\{c_{ij} \mid (i, j) \in N\}.$$

La **complessità** dell'algoritmo sarà quindi *pseudopolinomiale*, ossia

$$O(NA) \cdot O(A\bar{u}\bar{c}) = O(NA^2\bar{u}\bar{c})$$

Esistono Algoritmi Polytime?

Esistono Algoritmi Polytime?

<i>Algoritmo</i>	<i>Complessità</i>
EM	$O((A \log V) \cdot (\min\{V \log(VC), AV \log V\}))$
Goldberg-Tarjan	$O(V^2 A^3 (\log V))$

Sezione 4

Problemi di Accoppiamento

Nozioni Preliminari — I

- ▶ Nei problemi di accoppiamento, si lavora con **grafi bipartiti non orientati** ossia con grafi nella forma $G = (O \cup D, A)$, dove:
 - ▶ $O = \{1, \dots, n\}$ è l'insieme dei **nodi origine**;
 - ▶ $D = \{n + 1, \dots, n + d\}$ è l'insieme dei **nodi destinazione**;
 - ▶ $A \subseteq O \times D$ è l'insieme degli **archi**, a ciascuno dei quali è associato un **costo**.
- ▶ Un **accoppiamento** per un grafo bipartito $G = (O \cup D, A)$ è un sottoinsieme M di A i cui archi non abbiano nodi in comune.
 - ▶ Gli archi in M si dicono **interni**, mentre quelli in $A - M$ sono detti **esterni**.
 - ▶ I nodi che compaiono in qualche arco di M si dicono **accoppiati**, gli altri nodi si dicono invece **esposti**.

- ▶ M è detto **accoppiamento perfetto** sse non vi sono nodi esposti.
- ▶ Il *costo* di un accoppiamento M è nient'altro che

$$c(M) = \sum_{(i,j) \in M} c_{ij}.$$

Problemi di Accoppiamento

- ▶ **Accoppiamento di Massima Cardinalità**
 - ▶ Si vuole determinare, semplicemente, l'accoppiamento di massima cardinalità
- ▶ **Accoppiamento di Costo Minimo**
 - ▶ Si vuole determinare l'accoppiamento di costo minimo tra tutti gli accoppiamenti *perfetti*.

Accoppiamento di Massima Cardinalità — I

- ▶ Il problema può essere visto come un problema di **flusso massimo** con più sorgenti (i nodi in O) e più pozzi (i nodi in D).
 - ▶ Le **capacità** saranno tutte pari a 1.
 - ▶ Ci interessano solamente **flussi interi**.
 - ▶ Come sappiamo, una rete con molte sorgenti e molte destinazioni può essere poi tradotta in una rete con **una** sorgente e **una** destinazione.
- ▶ *Flussi ammissibili interi e accoppiamenti* sono in corrispondenza biunivoca.
 - ▶ Indicheremo quindi, ad esempio, un flusso con M e il relativo grafo residuo con G_M .

Accoppiamento di Massima Cardinalità — II

- ▶ È possibile utilizzare gli algoritmi classici per il problema MF, ma c'è spazio per sfruttare le caratteristiche peculiari dei problemi di accoppiamento.
- ▶ A tal proposito osserviamo che ogni cammino aumentante in G_M deve:
 - ▶ Essere **alternante**, ossia consistere di archi interni, seguiti da archi esterni, seguiti da archi interni, e così via.
 - ▶ Partire da un'origine **esposta** e arrivare ad una destinazione **esposta**.
 - ▶ In altre parole, se $P_E = P - M$ e $P_I = M \cap P$ sono rispettivamente gli archi esterni e interni di un cammino aumentante P , allora $|P_E| - |P_I| = 1$.
- ▶ La capacità $\theta(M, P)$ di un cammino aumentante P sarà sempre 1, e di conseguenza

$$M \oplus (\theta(M, P))P = (M - P_I) \cup P_E.$$

Accoppiamento di Massima Cardinalità — III

- ▶ Otteniamo in questo modo un algoritmo del tutto simile a FF, ma in cui la ricerca del cammino aumentante può essere eseguita tramite una semplice procedura di visita.
- ▶ La complessità di quest'algoritmo, a differenza di quella di FF, sarà $O(mn)$, perché

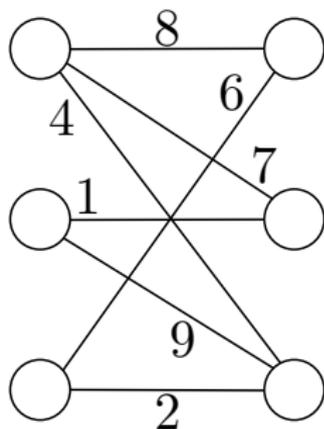
$$U = \max\{c_{ij} \mid (i, j) \in A\} = 1.$$

Accoppiamento di Costo Minimo

- ▶ Seguendo lo stesso identico tipo di ragionamento, è possibile vedere una qualunque istanza del problema di accoppiamento di costo minimo come un'istanza di MCF.
 - ▶ In particolare, i cammini minimi aumentanti potrebbero essere visti come cammini esposti tra due vertici esposti, rispettivamente in O e in D .

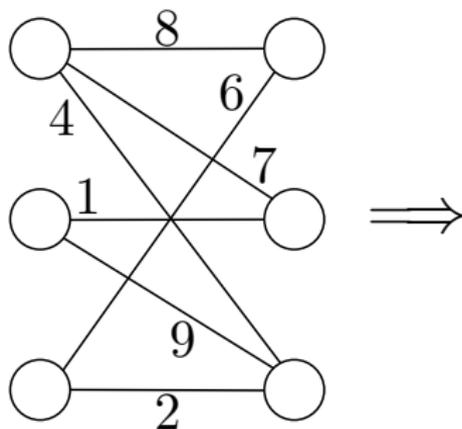
Accoppiamento di Costo Minimo

- ▶ Seguendo lo stesso identico tipo di ragionamento, è possibile vedere una qualunque istanza del problema di accoppiamento di costo minimo come un'istanza di MCF.
 - ▶ In particolare, i cammini minimi aumentanti potrebbero essere visti come cammini esposti tra due vertici esposti, rispettivamente in O e in D .
- ▶ Ad esempio:



Accoppiamento di Costo Minimo

- ▶ Seguendo lo stesso identico tipo di ragionamento, è possibile vedere una qualunque istanza del problema di accoppiamento di costo minimo come un'istanza di MCF.
 - ▶ In particolare, i cammini minimi aumentanti potrebbero essere visti come cammini esposti tra due vertici esposti, rispettivamente in O e in D .
- ▶ Ad esempio:



Accoppiamento di Costo Minimo

- ▶ Seguendo lo stesso identico tipo di ragionamento, è possibile vedere una qualunque istanza del problema di accoppiamento di costo minimo come un'istanza di MCF.
 - ▶ In particolare, i cammini minimi aumentanti potrebbero essere visti come cammini esposti tra due vertici esposti, rispettivamente in O e in D .
- ▶ Ad esempio:

