Programmazione lineare
Dieci esercizi commentati e risolti

Giovanni Righini

6 agosto 2010

Di tutti gli esercizi presentati nel seguito è disponibile il modello con relativa soluzione anche sotto forma di foglio elettronico.

Prima di affrontare gli esercizi consiglio di dare un'occhiata alla guida allo svolgimento degli esercizi di programmazione matematica e all'introduzione alla PL, entrambe disponibili su questo sito.

1 Problema n.1: Il mix produttivo ottimale

Questo esercizio è stato tratto da E. V. Denardo, *The science of decision making: a problem.based approach using Excel*, Wiley, 2002.

Il problema Un impianto produce tre modelli di veicoli: A, B e C. L'impianto contiene un reparto motori, un reparto carrozzeria e tre reparti per le finiture, uno per ogni modello. I primi due reparti trattano motori e carrozzerie di tutti e tre i modelli. I dati sono espressi nella tabella 1. Le capacità produttive di ogni reparto sono espresse in ore lavorative per settimana. I tempi di lavorazione sono espressi in ore lavorative per veicolo. Sono dati i profitti per ogni veicolo. Si vuole massimizzare il profitto complessivo.

		Tempi di lavorazione		
Reparto	Capacità	A	B	C
Motori	120	3	2	1
Carrozzeria	80	1	2	3
A	96	2		
B	102		3	
C	40			2
Profitti		840	1120	1200

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, 5$ la risorsa e con un indice $j = A, \dots, C$ i modelli. Indichiamo con a_{ij} il consumo dato di risorsa $i = 1, \dots, 5$ per ogni veicolo di tipo $j = A, \dots, C$ (ore / veicolo). Indichiamo con b_i la massima quantità di risorsa $i = 1, \dots, 5$ disponibile, cioè la massima capacità produttiva di ogni reparto (ore / settimana). Indichiamo con c_j il profitto per ogni tipo di veicolo $j = A, \dots, C$ (Euro / veicolo).

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere quanti veicoli produrre di ogni tipo ogni settimana. Definiamo quindi una variabile per ogni tipo di modello. La variabile indica il numero di veicoli prodotti ogni settimana. Abbiamo quindi le variabili x_j con $j = A, \dots, C$, misurate in veicoli / settimana.

Vincoli. Il numero di veicoli producibili è limitato da cinque risorse limitate, che corrispondono ai cinque reparti interessati. Si esprimono i vincoli come $\sum_{j=A}^{C} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, 5$.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il profitto complessivo z, che dipende dalla produzione scelta: $z = \sum_{j=A}^{C} c_j x_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\max z = & \sum_{j=A}^{C} c_j x_j \\
\text{s.t.} & \sum_{j=A}^{C} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i = 1, \dots, 5 \\
& x_j \geq 0 & \forall j = A, \dots, C
\end{aligned}
$$

2 Problema n.2: La dieta

Il problema. Un team di dietologi ha studiato le quantità ottimali di sostanze nutritive che dovrebbero costituire l'alimentazione ottimale per un atleta. L'atleta deve procurarsi le sostanze nutritive da un opportuno mix di cibi disponibili e vuole riuscirvi minimizzando i costi. Proteine, carboidrati, grassi, calcio e fosforo devono essere assunti in quantità comprese tra dati valori minimi e massimi. Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati seguenti. Quanto costa ogni giorno la dieta ottimale?

	Alimenti						
Sostanze	Pasta	Latte	Formaggio	Pesce	Verdura	Pane	Polenta
Proteine	11.5	3.15	8	18.5	2.1	12.0	9
Carboidrati	72.7	4.85	3.8	0.5	0	68	74
Grassi	1.5	1.55	11	19	0.1	6	1

Tabella 1: Quantità di sostanza nutritive (grammi di sostanza per ogni chilogrammo di alimento).

Sostanze	**Limite inferiore**	**Limite superiore**
Proteine	25	35
Carboidrati	15	25
Grassi	10	20

Tabella 2: Limiti superiori ed inferiori di sostanze nutritive (grammi / giorno).

	Alimenti						
Sostanze	Pasta	Latte	Formaggio	Pesce	Verdura	Pane	Polenta
Costo	4	4	15	22.5	3	1	5

Tabella 3: Costi degli alimenti (Euro / Kg).

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono date $S = 3$ sostanze e $A = 7$ alimenti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, S$ le sostanze (proteine, carboidrati, grassi) e con un indice $j = 1, \ldots, A$ gli alimenti. Indichiamo con a_{ij} la quantità (in grammi) di sostanza $i = 1, \ldots, S$ per ogni chilogrammo di alimento $j = 1, \ldots, A$ [g / kg]. Indichiamo con l_i ed u_i la minima e la massima quantità di sostanza $i = 1, \ldots, S$ da assumere ogni giorno [g / giorno]. Indichiamo con c_j il prezzo di ogni alimento $j = 1, \ldots, A$ [Euro / kg].

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere le *quantità* ottimali di ogni alimento da inserire nella dieta dell'atleta. Definiamo quindi una variabile per ogni tipo di alimento: essa indica la quantità di alimento che deve essere consumata dall'atleta ogni giorno. Abbiamo quindi le variabili x_j con $j = 1, \ldots, A$, misurate in kg / giorno. Le variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. Le quantità di sostanze nutritive $i = 1, \ldots, S$ devono essere comprese entro i limiti l_i e u_i. Esiste quindi una coppia di vincoli per ogni sostanza nutritiva $i = 1, \ldots, S$. Si esprimono i vincoli come $l_i \leq \sum_{j=1}^{A} a_{ij} x_j \leq u_i \quad \forall i = 1, \ldots, S$. Ogni vincolo è espresso in grammi / giorno.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo z, che dipende dalle quantità di alimenti scelti: $z = \sum_{j=1}^{A} c_j x_j$. La funzione obiettivo è espressa in Euro / giorno.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{j=1}^{A} c_j x_j \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{A} a_{ij} x_j \geq l_i & \qquad \forall i = 1, \ldots, S \\
& \sum_{j=1}^{A} a_{ij} x_j \leq u_i & \qquad \forall i = 1, \ldots, S \\
& x_j \geq 0 & \qquad \forall j = 1, \ldots, A.
\end{aligned}
$$

3 Problema n.3: Miscelazione dell'alluminio

Questo problema è tratto da F. Schoen, *Modelli di ottimizzazione per le decisioni*, Ed. Esculapio, 2006.

Il problema. Un impianto produce alluminio da rottami. A questo scopo è possibile acquistare in quantitativi limitati alcuni rottami costituiti in massima parte da alluminio, ma contentneti anche altri elementi chimici, e di volerli miscelare in modo tale da ottenere tramite fusione un materiale che contenga quantitativi prefissati dei vari elementi chimici ("alluminio 6063"). Per correggere la qualità dei rottami disponibili è possibile acquistare metalli puri in quantità teoricamente illimitate ma ad un prezzo sensibilmente più alto.

	Materiali					
Elementi	Scarti ALMC	Scarti KAC	Rottami	Al	Si	Mg
Silicio	0.50	0.50	0.30		100	
Magnesio	0.75	0.70	0.50			100
Ferro	0.20	0.20	0.35			
Rame	0.01	0.01	0.05			
Manganese	0.02	0.02	0.05			
Zinco	0.02	0.02	0.05			
Cromo	0.02	0.02	0.05			
Titanio	0.02	0.02	0.05			
Alluminio	97.0	97.0	90.0	100		
Altri elementi	0.06	0.06	0.77			
Impurità	1.40	1.45	7.83			

Tabella 4: Composizione chimica dei materiali (percentuale in peso per ogni elemento chimico).

Elementi	**Percentuale minima**	**Percentuale massima**
Silicio	0.2	0.6
Magnesio	0.45	0.9
Ferro		0.35
Rame		0.1
Manganese		0.1
Zinco		0.1
Cromo		0.1
Titanio		0.1
Alluminio	96.9	100.0
Altri elementi		0.15

Tabella 5: Limiti percentuali superiori ed inferiori di elementi chimici.

Materiali	Quantità disponibili	Costo
Scarti ALMC	0.50	1230
Scarti KAC	1.20	1230
Rottami	2.20	1230
Al	illimitata	2140
Si	illimitata	1300
Mg	illimitata	2442

Tabella 6: Quantità (tonnellate) e costi (Euro / tonnellata) dei materiali.

La quantità di alluminio 6063 da produrre è pari a 4,5 tonnellate.

Si noti che le impurità dei materiali contribuiscono al peso complessivo del prodotto finale ma non sono vincolate.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $M = 6$ materiali e $E = 10$ elementi. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, M$ i materiali e con un indice $j = 1, \dots, E$ gli elementi. Indichiamo con a_{ij} la percentuale di elemento $j = 1, \dots, E$ nel materiale $i = 1, \dots, M$ [adimensionale]. Indichiamo con l_j ed u_j la minima e la massima percentuale di elemento $j = 1, \dots, E$ nel prodotto della fusione [adimensionale]. Indichiamo con q_i la quantitm̀assima disponibile di ogni materiale $i = 1, \dots, M$ [tonnellate]. Indichiamo con c_i il prezzo di ogni materiale $i = 1, \dots, M$ [Euro / tonnellata]. Indichiamo con Q la quantità di Alluminio 6063 da produrre.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere le *quantità* ottimali di ogni materiale da miscelare. Definiamo quindi una variabile per ogni tipo di materiale: essa indica la quantità di materiale che viene impiegato per la fusione di alluminio 6063. Abbiamo quindi le variabili x_i con $i = 1, \dots, M$, misurate in tonnellate. Le variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. Le quantità di materiali impiegate non possono eccedere i limiti q_i: $x_i \leq q_i \ \forall i = 1, \dots, M$. La quantità complessiva prodotta deve essere pari a Q: $\sum_{i=1}^{M} x_i = Q$. Questi vincoli sono espressi in tonnellate. Infine, la percentuale di ogni elemento nel prodotto della fuzione deve essere compreso nei limiti specificati. Esiste quindi una coppia di vincoli per ogni elemento $j = 1, \dots, E$: $l_j \leq \sum_{i=1}^{M} \frac{a_{ij} x_i}{Q} \leq u_j \ \forall j = 1, \dots, E$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo z, che dipende dalle quantità di materiali usati: $z = \sum_{i=1}^{M} c_i x_i$. La funzione obiettivo è espressa in Euro.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\min z = & \sum_{i=1}^{M} c_i x_i & \\
\text{s.t.} & \sum_{i=1}^{M} \frac{a_{ij} x_i}{Q} \geq l_j & \forall j = 1, \dots, E \\
& \sum_{i=1}^{M} \frac{a_{ij} x_i}{Q} \leq u_j & \forall j = 1, \dots, E \\
& \sum_{i=1}^{M} x_i = Q & \\
& x_i \leq q_i & \forall i = 1, \dots, M \\
& x_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, M.
\end{aligned}
$$

4 Problema n.4: Scommesse sui cavalli

Questo problema è tratto da "DOOR: Didactical Off-line Operations Research" per gentile concessione del prof. Alberto Colorni.

Il problema. Un ricercatore operativo va all'ippodromo con un budget dato da spendere in scommesse, pari a 57 Euro. Egli sa che la prossima corsa verrà vinta da uno dei quattro cavalli favoriti: Fulmine, Freccia, Dardo e Lampo. I cavalli sono quotati rispettivamente 3:1, 4:1, 5:1 e 6:1 dai bookmakers. Non essendo in grado di attribuire una probabilità ai quattro possibili esiti della gara, egli vuole massimizzare la propria vincita nel caso peggiore.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $C = 4$ cavalli. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, C$ ogni cavallo. Indichiamo con q_i la quotazione del cavallo $i = 1, \ldots, C$ [adimensionale]. Indichiamo con B il budget disponibile [Euro].

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere le *quantità* di denaro da puntare su ciascun cavallo. Definiamo quindi una variabile per ogni cavallo: essa indica la puntata fatta su quel cavallo. Abbiamo quindi le variabili x_i con $i = 1, \ldots, C$, misurate in Euro. Le variabili sono continue (trascuriamo per semplicità il fatto che le puntate devono necessariamente essere multipli interi di un centesimo di Euro) e non-negative.

Vincoli. Le puntate complessive non possono superare il budget disponibile: $\sum_{i=1}^{C} x_i \leq B$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare la vincita nel caso peggiore. Le quattro vincite possibili sono date da $q_i x_i \ \forall i = 1, \ldots, C$. La funzione obiettivo si può esprimere quindi come $max \min_{i=1,\ldots,C}\{q_i x_i\}$. Si tratta di una funzione obiettivo "max-min, che può essere riformulata in modo lineare come segue: $max\ z$ con i vincoli $z \leq q_i x_i \ \forall i = 1, \ldots, C$. In altri termini si vuole trovare il più alto valore z possibile con la condizione che esso sia non superiore ad alcuno dei quattro valori delle possibili vincite. Di conseguenza il valore di z deve coincidere con il minimo dei quattro valori suddetti.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z \\
\text{s.t. } & z \leq q_i x_i && \forall i = 1, \ldots, C \\
& \sum_{i=1}^{C} x_i \leq B \\
& x_i \geq 0 && \forall i = 1, \ldots, C.
\end{aligned}
$$

5 Problema n.5: Pianificazione multi-periodo

Per questo esercizio i crediti e i ringraziamenti vanno al prof. Francesco Maffioli.

Il problema. Un impianto produce elettrodomestici. La quantità rimasta invenduta al termine di ogni mese resta in magazzino ed è disponibile per essere venduta nel mese successivo. Immagazzinare il prodotto ha un costo, direttamente proporzionale alla quantità immagazzinata ogni mese. La capacità produttiva dell'impianto è nota e limitata, così come il costo di produzione. Esiste la possibilità di aumentare la produzione tramite affidamento di apposite commesse a ditte esterne, ad un costo superiore ed in quantità limitata. È nota la previsione di domanda per i prossimi mesi. Si vuole pianificare la produzione in ciascun mese in modo da minimizzare i costi complessivi.

La capacità produttiva dell'impianto è di 110 pezzi/mese. Il costo di produzione è di 300 Euro/pezzo. La capacità produttiva extra è di 60 pezzi/mese. Il costo della produzione extra è di 330 Euro/pezzo. Il costo di giacenza in magazzino è di 10 Euro/pezzo per ogni mese di giacenza. La domanda per i prossimi 3 mesi è stimata in 100, 130 e 150 pezzi/mese rispettivamente.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $M = 3$ periodi di produzione da pianificare. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, M$ il periodo (mese). Indichiamo con Q la capacità produttiva dell'impianto e con Q^+ la capacità produttiva extra [pezzi/mese]. Indichiamo con c il costo di produzione e con c^+ il costo di produzione extra [Euro/pezzo]. Indichiamo con s il costo di stoccaggio del prodotto [Euro/(pezzo mese)]. Indichiamo con d_i la domanda stimata per ogni periodo $i = 1, \ldots, M$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quanto* produrre in ogni periodo. La produizione può essere normale o extra: quindi definiamo due variabili per ogni periodo, indicanti una la produzione normale e l'altra la produzione extra in quel periodo. Abbiamo quindi le variabili x_i e x_i^+ con $i = 1, \ldots, M$, entrambe misurate in pezzi/mese. Inoltre per esprimere i costi di giacenza è opportuno introdurre variabili che rappresentano le scorte al termine di ogni periodo. Abbiamo perciò un'altra variabile y_i per ogni periodo $i = 1, \ldots, M$, misurata in pezzi/mese. Tutte le variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. La capacità produttiva è limitata, in entrambi i casi. Quindi si ha: $x_i \leq Q$ e $x_i^+ \leq Q^+$ per ogni periodo $i = 1, \ldots, M$. È necessario esprimere il legame tra le variabili che indicano la produzione e le variabili che indicano le scorte. Si ha perciò $y_i = y_{i-1} + x_i - d_i$, che rappresenta un'equazione di bilancio del prodotto. Si noti che per $i = 1$ nell'equazione compare la grandezza y_0, che non è una variabile bensì indica l'eventuale giacenza iniziale già disponibile in magazzino. Nel caso considerato, in assenza di informazioni in proposito, si può assumere $y_0 = 0$, cioè magazzino inizialmente vuoto. Si noti che il vincolo che la domanda del mercato sia soddisfatta in ogni periodo è già implicato dalla condizione di non-negatività sulle variabili y.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivvo, dato dalla somma di tre contributi, dovuti rispettivamente alla produzione normale, alla produzione extra e allo stoccaggio. Si ha quindi $min\ z = \sum_{i=1}^{M}(cx_i + c^+ x_i^+ + sy_i)$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\min z = &\sum_{i=1}^{M}(cx_i + c^+x_i^+ + sy_i) & \\
\text{s.t.} &\, y_i = y_{i-1} + x_i - d_i & \forall i = 1, \dots, M \\
& x_i \leq Q & \forall i = 1, \dots, M \\
& x_i^+ \leq Q^+ & \forall i = 1, \dots, M \\
& x_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, M \\
& x_i^+ \geq 0 & \forall i = 1, \dots, M \\
& y_i \geq 0 & \forall i = 1, \dots, M
\end{aligned}
$$

6 Problema n.6: Posologia

Questo problema è un libero adattamento di un esercizio tratto da F. Schoen, *Modelli di ottimizzazione per le decisioni*, Ed. Esculapio, 2006.

Il problema. Un dato trattamento farmacologico richiede che il paziente assuma una certa sostanza X durante il giorno. La sostanza X può essere assunta in quantità variabili in qualunque ora del giorno tramite farmaci di diverso tipo. Per semplicità il giorno viene suddiviso in 24 fasce orarie di un'ora ciascuna. L'effetto dei farmaci viene misurato dal tasso di una certa proteina Y nel sangue del paziente. Il tasso di proteina Y è direttamente proporzionale alla quantità di sostanza X assunta dal paziente, a parità di tempo trascorso. Naturalmente gli effetti dovuti all'assunzione di sostanza X in fasce orarie diverse si sommano. Il dosaggio di sostanza X da assumere in ciascuna fascia oraria ha lo scopo di mantenere il tasso di proteina Y al di sopra di un valore minimo necessario all'organismo. Tale valore minimo a sua volta varia a seconda dell'ora, poiché dipende dall'attività dell'organismo: digestione, sonno, ecc... È noto il livello minimo di proteina Y da assicurare per ogni fascia oraria, così come un livello massimo (indipendente dall'ora) che non deve essere superato. Tale livello massimo di proteina Y consentito è pari a 45 mg/cc.

Fascia oraria	Proteina Y	Fascia oraria	Proteina Y
0:00 - 1:00	5.0	12:00 - 13:00	25.0
1:00 - 2:00	1.0	13:00 - 14:00	30.0
2:00 - 3:00	0.0	14:00 - 15:00	25.0
3:00 - 4:00	0.0	15:00 - 16:00	15.0
4:00 - 5:00	0.0	16:00 - 17:00	5.0
5:00 - 6:00	0.0	17:00 - 18:00	4.0
6:00 - 7:00	4.0	18:00 - 19:00	3.0
7:00 - 8:00	15.0	19:00 - 20:00	25.0
8:00 - 9:00	12.0	20:00 - 21:00	30.0
9:00 - 10:00	5.0	21:00 - 22:00	25.0
10:00 - 11:00	4.0	22:00 - 23:00	20.0
11:00 - 12:00	3.0	23:00 - 24:00	10.0

Tabella 7: Livello minimo di proteina Y da garantire (mg/cc) in ogni ora del giorno.

L'effetto nel tempo di ogni farmaco è noto: a parità di sostanza X fornita all'organismo, alcuni farmaci sviluppano rapidamente una grande quantità di proteina Y ed hanno un effetto limitato nel tempo, mentre altri sviluppano una quantità di proteina Y inferiore e più duratura. L'effetto nel tempo di ogni farmaco è indipendentemente dall'ora in cui esso viene assunto.

Si vuole trovare una posologia che consenta di rispettare i limiti richiesti, minimizzando (a) la quantità di sostanza complessiva da assumere durante la

Ore trascorse	**Farmaci** Prismil	Cilindren
0	1.5	2.5
1	3.0	4.0
2	4.0	5.5
3	2.5	4.0
4	1.9	3.0
5	1.4	1.5
6	1.0	0.7
7	0.7	0.4
8	0.5	0.2
9	0.3	0.0
10	0.2	0.0
11	0.1	0.0
12 o più	0.0	0.0

Tabella 8: Tasso di proteina Y prodotta (mg/cc per ogni grammo di farmaco assunto).

giornata, oppure (b) il costo della cura, calcolabile conoscendo il prezzo dei farmaci.

Il farmaco Prismil costa 0.70 Euro/grammo; il farmaco Cilindren costa 0.95 Euro/grammo.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $F = 2$ farmaci e $N = 24$ fasce orarie. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, N$ la fascia oraria e con un indice $j = 1, \dots, F$ il farmaco. Indichiamo con q_i il fabbisogno di proteina in ogni fascia oraria $i = 1, \dots, N$. Indichiamo con a_{kj} la quantità di proteina Y generata a k ore di distanza dall'assunzione di una quantità unitaria di farmaco $j = 1, \dots, F$. Indichiamo con Q la massima quantità di proteina Y consentita. Indichiamo con c_j il prezzo del farmaco $j = 1, \dots, F$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di ogni farmaco da assumere in ogni fascia oraria. Abbiamo quindi le variabili continue e non-negative x_{ij} con $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, F$, misurate in grammi.

Vincoli. La quantità di proteina Y in ogni fascia oraria è la somma di vari contributi, dovuti ai farmaci assunti dal paziente nelle ultime 12 ore. Quindi la quantità di proteina nella fascia oraria $i = 1, \dots, N$ è data da $\sum_{j=1}^{F} \sum_{k=0}^{12} a_{kj} x_{i-k\ j}$. L'indice $i - k$ va inteso come indice circolare, cioè calcolato modulo 24. Tale quantità deve risultare compresa tra q_i e Q.

Funzione obiettivo. Il testo dell'esercizio propone due funzioni obiettivo diverse. Nel primo caso si vuole minimizzare la quantità complessiva di farmaci assunti nell'arco della giornata. Si ha quindi $min\ z' = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} x_{ij}$. Nel secondo caso si vuole minimizzare il costo giornaliero della terapia. Si ha quindi $min\ z'' = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} c_j x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\min z' &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} x_{ij} \\
\min z'' &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{F} c_j x_{ij} \\
\text{s.t.} & \sum_{j=1}^{F} \sum_{k=0}^{12} a_{kj} x_{i-k\ j} \geq q_i && \forall i = 1, \dots, N \\
& \sum_{j=1}^{F} \sum_{k=0}^{12} a_{kj} x_{i-k\ j} \leq Q && \forall i = 1, \dots, N \\
& x_{ij} \geq 0 && \forall i = 1, \dots, N\ \forall j = 1, \dots, F
\end{aligned}
$$

7 Problema n.7: Interpolazione

Il problema. In una nuova abitazione si vuole misurare il consumo energetico effettivo degli elettrodomestici. A questo scopo in giorni diversi viene misurato per quanto tempo ogni elettrodomestico viene usato e si rileva il totale consumo rilevato al contatore centrale. Il consummo totale in un dato giorno è quindi dato dalla somma di diversi contributi, ciascuno dovuto ad uno degli elettrodomestici; ogni contributo è pari al prodotto tra il tempo di funzionamento (misurato) e la potenza assorbita dall'elettrodomestico (incognita). Si sa che la lettura sul contatore è soggetta ad approssimazioni dovute a cause diverse (piccoli consumi delle lampadine, eventuale contributo positivo dato da un pannello fotovoltaico,...), mentre si suppone che le misure dei tempi di funzionamento siano precise. Si vuole calcolare i valori incogniti di potenza assorbita dagli elettrodomestici che meglio spiegano i dati sperimentali raccolti. A tal fine in ogni giorno si calcola un errore (approssimazione sul contatore) come la differenza tra il consumo letto sul contatore e la somma dei contributi relativi ai diversi elettrodomestici (che dipendono dai valori incogniti di potenza assorbita e dai tempi di funzionamento misurati). Si vuole quindi stabilire quali sono i valori di potenza assorbita da ogni elettrodomestico che rendono minima una funzione dell'errore. Si propongono quattro criteri: (a) minimizzare il massimo errore in valore assoluto; (b) minimizzare il valore assoluto del valor medio degli errori; (c) minimizzare il valor medio dei valori assoluti degli errori; (d) minimizzare l'errore quadratico medio. Gli elettrodomestici sono 8, i giorni in cui vengono eseguite le misurazioni sono 12.

Giorno	Consumo (KWh)	Tempo (h)							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	0.2	0.4	0.5	0.6	0.6	0.5	0.2	0.2
2	20	0.1	1.0	0.1	1.2	1.1	1.0	0.6	0.3
3	10	0.1	0.5	0.5	0.7	0.5	0.5	0.1	0.2
4	15	0.2	0.6	0.6	0.8	0.6	0.6	0.2	0.3
5	5	0.1	0.4	0.2	0.3	0.2	0.2	0.0	0.2
6	10	0.2	0.5	0.4	0.7	0.5	0.4	0.2	0.3
7	10	0.3	0.4	0.5	0.8	0.4	0.4	0.2	0.2
8	20	0.6	0.8	1.0	1.5	1.3	0.6	0.5	0.6
9	12	0.3	0.4	0.5	0.7	0.5	0.5	0.3	0.2
10	25	0.5	0.9	1.1	1.3	0.9	1.2	0.8	0.5
11	2	0.0	0.2	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1
12	5	0.0	0.5	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.3

Tabella 9: Consumo e tempi di funzionamento in ciascun giorno.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $E = 8$ elettrodomestici e $G = 12$ giorni. Indichiamo con un indice $g = 1, \ldots, G$ ogni giorno e con un indice $e = 1, \ldots, E$ ogni elettrodomestico. Indichiamo con t_{ge} il tempo di funzionamento dell'elettrodomestico $e = 1, \ldots, E$ nel giorno $g = 1, \ldots, G$ [ore]. Indichiamo con c_g il consumo letto sul contatore nel giorno $g = 1, \ldots, G$ [KWh].

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere i *valori di potenza assorbita* che spiegano nel modo migliore gli esperimenti. Definiamo quindi una variabile continua non-negativa per ogni elettrodomestico: abbiamo quindi le variabili x_e con $e = 1, \ldots, E$, misurate in KiloWatt [KW]. Come suggerito dal testo dell'esercizio, per esprimere la funzione obiettivo è opportuno introdurre variabili ausiliarie che rappresentano l'approssimazione nella lettura del contatore in ogni giorno. Abbiamo perciò anche una variabile continua e libera (può assumere valori sia positivi che negativi) a_g per ogni giorno $g = 1, \ldots, G$.

Vincoli. Il legame tra le variabili x e le variabili a è espresso dalla definizione di approssimazione data nel testo:

$$a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge} x_e \quad \forall g = 1, \ldots, G.$$

Funzione obiettivo. Si considerino separatamente i quattro casi.

Caso (a): per minimizzare il massimo errore in valore assoluto si ottiene una funzione obiettivo di tipo "min-max":

$$\text{minimize } f^{(a)} = \max_{g=1,\ldots,G} \{|a_g|\}.$$

Essa si può esprimere in un modello lineare introducendo una variabile ausiliaria: minimize $f^{(a)} = z'$ con i vincoli $z' \geq a_g$ e $z' \geq -a_g$ $\forall g = 1, \ldots, G$.

Caso (b): per minimizzare il valore assoluto della media degli errori bisogna considerare la seguente funzione obiettivo "min-max":

$$\text{minimize } f^{(b)} = |\frac{1}{G} \sum_{g=1,\ldots,G} a_g|.$$

Come nel caso precedente, essa si può esprimere in un modello lineare introducendo una variabile ausiliaria: minimize $f^{(b)} = z''$ con i due vincoli $z'' \geq (1/G) \sum_{g=1}^{G} a_g$ e $z'' \geq -(1/G) \sum_{g=1}^{G} a_g$.

Caso (c): per minimizzare il valor medio dei valori assoluti degli errori bisogna considerare la seguente funzione obiettivo:

$$\text{minimize } f^{(c)} = \frac{1}{G} \sum_{g=1,\ldots,G} |a_g|.$$

La tecnica di linearizzazione è la stessa dei casi precedenti, ma stavolta i valori assoluti da eliminare sono tanti quanti i giorni e quindi altrettante sono le variabili ausiliarie da inserire nel modello: minimize $f^{(c)} = \frac{1}{G} \sum_{g=1,\ldots,G} z_g'''$ con i vincoli $z_g''' \geq a_g$ e $z_g''' \geq -a_g$ per ogni $g = 1, \ldots, G$.

Caso (d): per minimizzare l'errore quadratico medio bisogna ricorrere ad una funzione quadratica, cioè non-lineare: minimize $f^{(d)} = (1/G) \sum_{g=1}^{G} a_g^2$. In questo ultimo caso la soluzione si può tuttavia ricavare imponendo che siano nulle le derivate della funzione obiettivo rispetto a ciascuna delle variabili x_e. Si ottengono così E equazioni lineari in altrettante incognite, riconducendosi da un problema di ottimizzazione non-lineare ad un problema di esistenza lineare. Per ricavare le condizioni analitiche si procede facilmente come segue: $\frac{\partial f^{(d)}}{\partial x_e} = \sum_{g=1}^{G} \frac{\partial f^{(d)}}{\partial a_g} * \frac{\partial a_g}{\partial x_e} = \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{G} 2a_g * (-t_{ge}) = -\frac{2}{G} \sum_{g=1}^{G} t_{ge} a_g$, da cui le E condizioni analitiche del primo ordine

$$\sum_{g=1}^{G} t_{ge} a_g = 0 \quad \forall e = 1, \ldots, E.$$

Il modello matematico completo risulta quindi:
Caso (a):

$$\begin{aligned}
&\min z' \\
&\text{s.t. } a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge} x_e && \forall g = 1, \ldots, G \\
&\qquad z' \geq a_g && \forall g = 1, \ldots, G \\
&\qquad z' \geq -a_g && \forall g = 1, \ldots, G \\
&\qquad x_e \geq 0 && \forall e = 1, \ldots, E.
\end{aligned}$$

Caso (b):

$$\begin{aligned}
&\min z'' \\
&\text{s.t. } a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge} x_e && \forall g = 1, \ldots, G \\
&\qquad z'' \geq (1/G) \sum_{g=1}^{G} a_g && \\
&\qquad z'' \geq -(1/G) \sum_{g=1}^{G} a_g && \\
&\qquad x_e \geq 0 && \forall e = 1, \ldots, E.
\end{aligned}$$

Caso (c):

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{G} \sum_{g=1,\dots,G} z_g''' \\
\text{s.t. } & a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge} x_e && \forall g = 1, \dots, G \\
& z_g''' \geq a_g && \forall g = 1, \dots, G \\
& z_g''' \geq -a_g && \forall g = 1, \dots, G \\
& x_e \geq 0 && \forall e = 1, \dots, E.
\end{aligned}
$$

Caso (d):

$$
\begin{aligned}
\min\ & (1/G) \sum_{g=1}^{G} a_g^2 \\
\text{s.t. } & a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge} x_e && \forall g = 1, \dots, G \\
& x_e \geq 0 && \forall e = 1, \dots, E.
\end{aligned}
$$

trasformabile in:

$$
\begin{aligned}
& a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge} x_e && \forall g = 1, \dots, G \\
& \sum_{g=1}^{G} t_{ge} a_g = 0 && \forall e = 1, \dots, E \\
& x_e \geq 0 && \forall e = 1, \dots, E.
\end{aligned}
$$

8 Problema n.8: Trasporto a costo minimo

Il problema. È dato un insieme di origini (punti di produzione di una data merce), ciascuno caratterizzato da un'offerta, ossia da una quantità di merce in uscita. È dato un insieme di destinazioni (punti di consumo della merce), ciascuno caraterizzato da una domanda, ossia da una quantità di merce richiesta in ingresso. La somma delle offerte e la somma delle domande sono uguali. È dato il costo unitario di trasporto della merce da ogni origine ad ogni destinazione. Si vuole decidere quali quantità di merce trasportare da ogni origine ad ogni destinazione, in modo da soddisfare i vincoli sulla domanda e sull'offerta minimizzando i costi.

Origini	Destinazioni			
1	20	25	30	28
2	15	12	32	26
3	18	41	36	37
4	32	23	35	20
5	31	40	19	38
6	33	22	34	21
7	25	29	26	27
8	30	24	39	28

Tabella 10: Costi di trasporto da 8 origini a 4 destinazioni.

Origine	Offerta
1	30
2	40
3	20
4	35
5	40
6	30
7	25
8	50

Tabella 11: Offerta di ogni origine.

Destinazione	1	2	3	4
Domanda	70	70	50	80

Tabella 12: Domanda di ogni destinazione.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 8$ origini e $D = 4$ destinazioni. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, O$ ogni origine e con un indice $j = 1, \dots, D$ ogni destinazione. Indichiamo con o_i l'offerta dell'origine $i = 1, \dots, O$ e con d_j la domanda della destinazione $j = 1, \dots, D$. Indichiamo con c_{ij} il costo unitario di trasporto della merce dall'origine $i = 1, \dots, O$ alla destinazione $j = 1, \dots, D$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di merce da trasportare da ogni origine ad ogni destinazione. Definiamo quindi una variabile continua e non-negativa per ogni coppia origine-destinazione, per indicare tale quantità. Abbiamo quindi variabili x_{ij} $\forall i = 1, \dots, O$ $\forall j = 1, \dots, D$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che la merce complessivamente in usccita da ogni origine sia pari alla sua offerta e la merce complessivamente in ingresso ad ogni destinazione sia pari alla sua domanda. Esistono pertanto un vincolo per ogni origine, del tipo $\sum_{j=1}^{D} x_{ij} = o_i \quad \forall i = 1, \dots, O$ ed un vincolo per ogni destinazione, del tipo $\sum_{i=1}^{O} x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots, D$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo, che è dato dal prodotto tra i costi unitari e le quantità trasportate: min $\sum_{i=1}^{O} \sum_{j=1}^{D} c_{ij} x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{i=1}^{O} \sum_{j=1}^{D} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{D} x_{ij} = o_i & \forall i = 1, \dots, O \\
& \sum_{i=1}^{O} x_{ij} = d_j & \forall j = 1, \dots, D \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, O \quad \forall j = 1, \dots, D.
\end{aligned}
$$

9 Problema n.9: Radioterapia

Il problema. Nel trattamento anti-tumorale con radioterapia è possibile irraggiare la parte malata da diverse posizioni ed angolature e con diversa intensità. Per ognuna di queste possibilità tuttavia bisogna tener conto degli effetti collaterali nocivi che il trattamento provoca sugli organi adiacenti la massa tumorale. Si supponga di conoscere un insieme discreto di possibilità di irraggiamento di un tumore e di voler decidere con quale intensità effettuare l'irraggiamento per ciascuna di esse. Si considerano un dato numero di organi adiacenti da preservare e per ogni possibilità di irraggiamento è noto un coefficiente che esprime la percentuale di radiazione che colpirebbe il tumore e la percentuale di radiazione che colpirebbe ciascuno degli organi adiacenti. Nell'esempio riportato qui le posizioni da cui è possibile irraggiare il tumore sono cinque e gli organi adiacenti il tumore sono sette.

Organi	Posizioni				
	1	2	3	4	5
Tumore	0.4	0.3	0.25	0.7	0.5
Org. 1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.2
Org. 2	0.1	0.0	0.15	0.0	0.1
Org. 3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
Org. 4	0.0	0.2	0.1	0.1	0.0
Org. 5	0.1	0.0	0.2	0.0	0.1
Org. 6	0.1	0.3	0.15	0.1	0.1
Org. 7	0.2	0.1	0.15	0.0	0.0

Tabella 13: Coefficienti di assorbimento delle radiazioni [%] per il tumore e per gli organi adiacenti.

L'intensità totale delle radiazioni utilizzabili nel trattamento è limitata a 60 Gray e ci sono soglie massime anche sull'intensità di radiazione per ogni singola possibilità di irraggiamento.

Posizione	Limite max.
1	12
2	13
3	10
4	15
5	15

Tabella 14: Limiti massimi di radiazione (Gray) erogabile per ogni posizione.

Si vuole massimizzare l'effetto delle radiazioni sul tumore, cioè la quantità totale di radiazioni assorbite dal tumore, nel rispetto di alcune soglie massime di tolleranza per i livelli di radiazione assorbiti da ciascun organo adiacente.

Organo	Limite max.
1	5.5
2	9.0
3	6.0
4	2.4
5	7.0
6	5.5
7	9.5

Tabella 15: Limiti massimi di radiazione (Gray) ammissibile per ogni organo.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 7$ organi e $P = 5$ posizioni di irraggiamento. Indichiamo con un indice $i = 0, \ldots, O$ ogni organo, dove l'indice $i = 0$ indica il tumore e con un indice $j = 1, \ldots, P$ ogni posizione. Indichiamo con m_i la massima intensità di radiazione ammissibile per ogni organo $i = 1, \ldots, O$ e con r_j la massima intensità di radiazione erogabile dalla posizione $j = 1, \ldots, P$. Indichiamo con a_{ij} la percentuale di radiazione assorbita dall'organo $i = 0, \ldots, O$ dalla posizione $j = 1, \ldots, D$. Indichiamo con R la massima quantità di radiazione erogabile complessiva.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di radiazione da erogare da ogni posizione. Definiamo quindi una variabile continua e non-negativa per ogni posizione, per indicare tale quantità. Abbiamo quindi variabili continue non-negative x_j $\forall j = 1, \ldots, P$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che:

- la radiazione complessiva sia non superiore a R: $\sum_{j=1}^{P} x_j \leq R$;
- la radiazione erogata da ogni posizione $j = 1, \ldots, P$ non sia superiore al limite massimo r_j: $x_j \leq r_j$ $\forall j = 1, \ldots, P$;
- la radiazione assorbita da ogni organo $i = 1, \ldots, O$ non sia superiore al limite massimo m_i: $\sum_{j=1}^{P} a_{ij} x_j \leq m_i$ $\forall i = 1, \ldots, O$.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare la radiazione che colpisce il tumore: max $\sum_{j=1}^{P} a_{0j} x_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = \sum_{j=1}^{P} a_{0j} x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{P} a_{ij} x_j \leq m_i & \forall i = 1, \ldots, O \\
& x_j \leq r_j & \forall j = 1, \ldots, P \\
& \sum_{j=1}^{P} x_j \leq R \\
& x_j \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, O \;\; \forall j = 1, \ldots, P.
\end{aligned}
$$

Nell'ipotesi di poter eccedere una delle soglie di tolleranza relative agli organi adiacenti, quale soglia di tolleranza converrebbe violare per avere il miglior risultato sul tumore?

10 Problema n.10: Mars Express

Il problema. La missione Mars Express consiste nell'esplorare la superficie del pianeta Marte con una sonda orbitante attorno da esso. Durante ogni orbita gli strumenti scientifici a bordo della sonda acquisiscono dati, che vengono immagazzinati in dispositivi di memoria, uno per ogni strumento. Tali dispositivi devono essere periodicamente svuotati, trasmettendo i dati a Terra, in modo da liberare la memoria per altri dati. La trasmissione dei dati a Terra può avvenire solo durante particolari finestre temporali durante le quali la posizione della sonda è visibile dalle stazioni di Terra. La capacità del canale di trasmissione è limitata e ad ogni orbita solo una parte dei dati in memoria può essere trasmessa a Terra. Gli scienziati sono in grado di stimare in anticipo la quantità di dati che verranno immagazzinati in ogni dispositivo di memoria in ogni orbita per un certo numero di orbite nel futuro. Essi conoscono anche la durata delle finestre temporali disponibili per la trasmissione, per ciascuna di tali orbite. Si tratta di pianificare la trasmissione dei dati a Terra, cioè di decidere per ogni finestra temporale di trasmissione quanti dati scaricare da ogni dispositivo di memoria. L'obiettivo è quello di mantenere in tutti i dispositivi un certo margine di sicurezza, in vista del fatto che la quantità dei dati in ingresso nelle orbite future è solo frutto di una previsione, ma non è nota con certezza, e si vuole evitare che un eventuale picco imprevisto nella quantità di dati in ingresso provochi la saturazione di uno o più dispositivi di memoria. Si vuole quindi minimizzare il massimo livello di riempimento raggiunto dai dispositivi di memoria durante il periodo considerato.

Si noti che dopo ogni orbita avviene prima lo svuotamento dei dispositivi (trasmissione a Terra) e poi il riempimento con i dati nuovi.

Nell'esempio riportato qui di seguito si considerano 5 dispositivi di memoria e 10 orbite. I dati sono i seguenti.

Orbite	Memorie				
	1	2	3	4	5
1	35	0	80	25	50
2	200	70	100	25	0
3	0	150	0	25	100
4	600	300	0	25	75
5	200	0	210	25	200
6	50	0	85	0	45
7	40	60	50	0	300
8	300	90	20	60	0
9	0	100	100	60	20
10	0	20	100	60	250

Tabella 16: Quantità di dati previste in ingresso (Mbit).

La velocità di trasmissione dei dati è pari a 9 Mbit/minuto.

Orbita	Durata
1	45
2	47
3	55
4	45
5	35
6	42
7	30
8	35
9	44
10	40

Tabella 17: Durata della finestra disponibile per la trasmissione al termine di ogni orbita (minuti).

Memoria	Capacità	Contenuto iniziale
1	1000	500
2	1200	600
3	1000	500
4	500	250
5	700	350

Tabella 18: Capacità e riempimento iniziale dei dispositivi di memoria (Mbit).

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 10$ orbite e $M = 5$ dispositivi di memoria. Indichiamo con un indice $j = 1, \ldots, O$ ogni orbita e con un indice $i = 1, \ldots, M$ ogni memoria. Indichiamo con s_i la quantità iniziale di dati e con c_i la capacità massima per ogni banco di memoria $i = 1, \ldots, M$. Indichiamo con t_j la durata della finestra di trasmissione dell'orbita $j = 1, \ldots, O$. Indichiamo con d_{ij} la quantità di dati prevista in ingresso alla memoria $i = 1, \ldots, M$ durante l'orbita $j = 1, \ldots, O$. Indichiamo con R il bit-rate di tramissione.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di dati da scaricare da ogni memoria in ogni finestra. Definiamo quindi le variabili continue e non-negative x_{ij} $\forall i = 1, \ldots, M$ $\forall j = 1, \ldots, O$.
Nel formulare il modello risulterà utile introdurre anche altre variabili (v. seguito).

Vincoli. I vincoli del problema sono i seguenti.

- La quantità di dati trasmessa in ogni finestra temporale non ecceda la capacità di trasmissione, data a sua volta dal prodotto tra il bit-rate di trasmissione e la durata della finestra temporale: $\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \leq Rt_j \quad \forall j = 1, \ldots, O$.

- La quantità di dati trasmessa non può essere più grande della quantità di dati presente nel dispositivo di memoria in quel momento. Per esprimere questo insieme di vincoli è utile quindi definire per ogni memoria e per ogni orbita la grandezza continua e non-negativa y_{ij} che indica quanti dati sono rimasti in memoria nel dispositivo i dopo il completamento di tutte le operazioni (acquisizioni e trasmissioni) fino a quelle dell'orbita j. In tal modo il vincolo si può esprimere facilmente imponendo $x_{ij} \leq y_{ij-1}$ $\forall i = 1, \ldots, M$ $\forall j = 1, \ldots, O$. Inoltre si ha $y_{ij} = y_{ij-1} - x_{ij} + d_{ij}$, che è un'equazione di conservazione dei dati: per ogni dispositivo i ciò che rimane in memoria dopo l'orbita j è pari a ciò che era rimasto in memoria dopo l'orbita $j-1$ meno la quantità di dati trasmessa a Terra dopo l'orbita j più la quantità di dati nuovi immagazzinati durante l'orbita j. Si noti che per $j = 1$ è necessario conoscere le grandezze y_{i0}, che sono le quantità di dati inizialmente presenti nelle memorie, cioè i dati s_i.

- il contenuto di ogni dispositivo non deve mai eccedere la sua capacità: $y_{ij} \leq c_i$ $\forall i = 1, \ldots, M$ $\forall j = 1, \ldots, O$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il massimo livello percentuale di riempimento dei dispositivi di memoria, quindi si tratta di una funzione di tipo min-max: $\min \max_{i=1,\ldots,M \quad j=1,\ldots,O} \{100 * y_{ij}/c_i\}$. Introduciamo quindi una variabile ausiliaria z e richiediamo di minimizzare z con i vincoli $z \geq 100 * y_{ij}/c_i$ $\forall i = 1, \ldots, M$ $\forall j = 1, \ldots, O$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & z & \\
\text{subject to} & z \geq 100 * y_{ij}/c_i & \forall i = 1, \ldots, M \; \forall j = 1, \ldots, O \\
& y_{ij} = y_{ij-1} - x_{ij} + d_{ij} & \forall i = 1, \ldots, M \; \forall j = 1, \ldots, O \\
& y_{i0} = s_i & \forall i = 1, \ldots, M \\
& x_j \leq y_{ij-1} & \forall i = 1, \ldots, M \; \forall j = 1, \ldots, O \\
& y_{ij} \leq c_i & \forall i = 1, \ldots, M \; \forall j = 1, \ldots, O \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \leq Rt_j & \forall j = 1, \ldots, O \\
& y_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, M \; \forall j = 1, \ldots, O \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, M \; \forall j = 1, \ldots, O.
\end{array}
$$

Come cambierebbe il problema se i dati potessero essere scaricati in blocchi da N Mbit per volta da ogni dispositivo (ad esempio N=25)?

Come cambierebbe il problema se ci fosse il vincolo che in ogni finestra di trasmissione ogni dispositivo di memoria può soltanto o essere svuotato del tutto oppure non trasmettere nulla?

Come cambierebbe il problema se solo un dato numero k di dispositivi potessero trasmettere a Terra in ogni finestra temporale?