Eserciziario di Ottimizzazione

Ugo Dal Lago Gabriele Vanoni

20 dicembre 2021

Indice

1 Modellizzazione

1.1 Esercizi con soluzioni

Esercizio 1.1. Una banca ha un capitale di C miliardi di euro e due possibilità di investimento in azioni.

1. Ha un ritorno annuo del 15% e un fattore di rischio di $\frac{1}{3}$.
2. Ha un ritorno annuo del 25% e un fattore di rischio di 1.

Il fattore di rischio rappresenta la massima frazione di capitale investito che può essere persa. Un fattore di rischio di 0.25 indica che se vengono comprate azioni per 100€ allora si possono perdere fino a 25€. Si richiede che almeno la metà di C sia senza rischio. L'ammontare di euro investiti in azioni di tipo (2) non può essere maggiore del doppio dei soldi investiti in (1). Almeno $\frac{1}{6}$ di C deve essere investito in azioni di tipo (1). Si dia una formulazione in termini di programmazione lineare per il problema tale che il profitto sia massimizzato. Si dia poi una formulazione dello stesso problema nel caso di n diverse possibilità di investimento, ognuna con il proprio ritorno annuo e il proprio fattore di rischio.

Soluzione 1.1.

- **Variabili:** x_1, x_2 che rappresentano rispettivamente il capitale investito in azioni di tipo 1 e 2.
- **Funzione obiettivo:** $\max z = 0.15 \cdot x_1 + 0.25 \cdot x_2$
- **Vincoli:**

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & C \\ \frac{1}{3} \cdot x_1 + x_2 & \leq & 0.5 \cdot C \\ x_2 & \leq & 2 \cdot x_1 \\ x_1 & \geq & \frac{1}{6} \cdot C \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

□

Esercizio 1.2. Una raffineria produce due tipi di benzina, mischiando tre tipi di olio secondo le regole seguenti. L'ultima colonna indica il ricavo in €/barile.

	Olio 1	Olio 2	Olio 3	Ricavo
Benzina A	$\leq 30\%$	$\geq 40\%$	–	5.5
Benzina B	$\leq 50\%$	$\geq 10\%$	–	4.5

Ciascun tipo di olio ha la propria disponibilità e il proprio costo, secondo quanto riportato nella seguente tabella.

Olio	Disponibilità	Costo
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4

Si dia una formulazione in programmazione lineare per il problema di determinare un piano di produzione che massimizzi il profitto. Si svolga poi nuovamente il problema considerando un numero arbitrario di tipi di benzina e di olio.

Soluzione 1.2.

- **Variabili:**
  - y_A, y_B rappresentano rispettivamente i barili prodotti di benzina A e B.
  - x_{ij} con $i \in \{A, B\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$ rappresenta la quantita di olio j utilizzata per produrre la benzina i.
- **Funzione obiettivo:** $\max z = 5.5 \cdot y_A + 4.5 \cdot y_B - 3 \cdot (x_{A1} + x_{B1}) - 6 \cdot (x_{A2} + x_{B2}) - 4 \cdot (x_{A3} + x_{B3})$
- **Vincoli:**

$$
\begin{array}{rcll}
x_{A1} + x_{B1} & \leq & 3000 & \\
x_{A2} + x_{B2} & \leq & 2000 & \\
x_{A3} + x_{B3} & \leq & 4000 & \\
x_{A1} & \leq & 0.3 \cdot y_A & \\
x_{A2} & \geq & 0.4 \cdot y_A & \\
x_{B1} & \leq & 0.5 \cdot y_B & \\
x_{B2} & \geq & 0.1 \cdot y_B & \\
x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} & = & y_A & \\
x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} & = & y_B & \\
x_{ij}, y_i, & \in & \mathbb{R}^+ & \forall i \in \{A, B\}, \forall j \in \{1, 2, 3\}
\end{array}
$$

Di seguito la soluzione nel caso generico con n tipi di benzina e m tipi di oli.

- **Parametri:** Per ogni tipo i di benzina indichiamo con m_{ij} la minima percentuale di olio j da utilizzare per produrre i, con M_{ij} la percentuale massima e con r_i il ricavo per barile. Indichiamo con d_j la disponibilità dell'olio j e con c_j il suo costo.
- **Variabili:**
  - y_i con $i \in \{1 \dots n\}$ rappresenta il numero di barili prodotti di benzina di tipo i.
  - x_{ij} con $i \in \{1 \dots n\}$ e $j \in \{1 \dots m\}$ rappresenta la quantita di olio j utilizzata per produrre la benzina i.
- **Funzione obiettivo:** $\max z = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot y_i - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} c_j \cdot x_{ij}$
- **Vincoli:**

$$
\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{n} x_{xij} & \leq & d_j & \forall j \in \{1 \dots m\} \\
x_{ij} & \leq & M_{ij} \cdot y_i & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\} \\
x_{ij} & \geq & m_{ij} \cdot y_i & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\} \\
\sum_{j=1}^{m} x_{xij} & = & y_i & \forall i \in \{1 \dots n\} \\
x_{ij}, y_i, & \in & \mathbb{R}^+ & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\}
\end{array}
$$

□

Esercizio 1.3. Una compagnia deve affittare dei computer per soddisfare il lavoro dei prossimi quattro mesi.

Mese	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile
Requisito	9	5	7	9

Il costo dell'affitto dipende dalla lunghezza dell'affitto stesso.

Lunghezza	1 mese	2 mesi	3 mesi
Costo	200	350	450

Si dia una formulazione in programmazione lineare intera per il problema di trovare un piano di affitto di minimo costo.

Soluzione 1.3.

- **Parametri:** chiamiamo c_j il costo dell'affitto per j mesi e r_i il requisito di computer per il mese i.
- **Variabili:** x_{ij} con $i \in \{1,2,3,4\}$ e $j \in \{1,2,3\}$ che rappresenta il numero di computer affittati nel mese i per j mesi.
- **Funzione obiettivo:** $\min z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_j \cdot x_{ij}$
- **Vincoli:**

$$
\begin{array}{rcll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} & \geq & r_1 & \\
x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} & \geq & r_2 & \\
x_{13} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} & \geq & r_3 & \\
x_{23} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} & \geq & r_4 & \\
x_{ij} & \in & \mathbb{Z}^+ & \forall i \in \{1,2,3,4\}, \forall j \in \{1,2,3\}
\end{array}
$$

□

Esercizio 1.4 (Tema d'esame del 11 Gennaio 2019)**.** Una compagnia aerea dispone di n aerei $1, \ldots, n$, e deve decidere in quale aeroporto, tra gli m in cui opera, svolgere le operazioni di manutenzione di ciascun aereo. Ogni aereo i è normalmente basato sull'aeroporto $a_i \in \{1, \ldots, m\}$. Svolgere le operazioni di manutenzione di un aereo presso l'aeroporto j costa c_j euro. Se le operazioni di manutenzione si svolgono in un aeroporto diverso da quello in cui ogni aereo è basato, occorre poi sostenere un costo fisso pari a s. Si formuli in PLI il problema di minimizzare i costi complessivi di manutenzione.

Soluzione 1.4.

- **Variabili:**
  - x_{ij} con $i \in \{1 \ldots n\}$ e $j \in \{1 \ldots m\}$ tale che

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'aereo } i \text{ è mantenuto nell'aeroporto } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}
$$

- y_i con $i \in \{1 \dots n\}$ tale che

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'aereo } i \text{ \underline{non} è mantenuto nell'aeroporto } a_i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- **Funzione obiettivo:** $\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} s \cdot y_i$

- **Vincoli:**

$$\begin{array}{rcccll} & & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in \{1 \dots n\} \\ (m-1) \cdot y_i & \geq & \sum_{j=1}^{m} |a_i - j| \cdot x_{ij} & \geq & y_i & \forall i \in \{1 \dots n\} \\ & & x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\} \end{array}$$

□

Esercizio 1.5. Nell'ambito del problema descritto nell'Esercizio 1.4, si consideri la seguente variazione del problema e la si formuli opportunamente in PLI. Si supponga che la distanza tra l'aeroporto j e l'aeroporto k sia pari a d_{jk} chilometri, e che occorra far volare ogni aereo dall'aeroporto in cui è basato verso l'aeroporto in cui avviene la manutenzione *e viceversa.* Si supponga altresì che far volare ogni aereo per un chilometro costi h Euro.

Soluzione 1.5.

- **Funzione obiettivo:** $\min z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (c_j + 2 \cdot d_{a_i j} \cdot h) \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} s \cdot y_i$

□

Esercizio 1.6 (Tema d'esame del 2 Febbraio 2015)**.** Una radio privata deve fare arrivare il suo segnale in una città che si trova al di là di una catena montuosa rispetto alla città da cui trasmette. Per fare ciò decide di installare n ripetitori sulla cima di altrettante colline, ciascuna delle quali si trova ad un'altitudine pari ad a_i. Il costo di costruzione di ogni ripetitore dipende dalla sua altezza: ogni metro costa c_i. Occorre soddisfare solo un vincolo: il dislivello, in metri, tra la cima di un ripetitore e la cima del successivo non può superare una soglia pari a k. Si formuli, in PL, il problema di decidere le altezze dei ripetitori in modo che il relativo costo sia minimo.

Soluzione 1.6.

- **Variabili:** x_i con $i \in \{1 \dots n\}$ che rappresenta l'altezza del ripetitore i.

- **Funzione obiettivo:** $\min z = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$

- **Vincoli:**

$$\begin{array}{rcccll} -k & \leq & a_i + x_i - (a_{i-1} + x_{i-1}) & \leq & k & \forall i \in \{2 \dots n\} \\ & & x_i & \in & \mathbb{R}^+ & \forall i \in \{1 \dots n\} \end{array}$$

□

Esercizio 1.7 (Tema d'esame del 18 Gennaio 2016)**.** Un'azienda di trasporti ha bisogno di acquistare n litri di carburante ogni mese. Affinché gli autoveicoli funzionino a dovere, occorre che il numero di ottani del carburante utilizzato sia almeno k. L'azienda acquista il suo carburante da due fornitori A e B, che vendono carburante da k_A e k_B ottani, rispettivamente. Sia A che B applicano un prezzo al litro piuttosto alto (p_A e p_B, rispettivamente) per i primi s litri di carburante acquistati dall'azienda (ogni mese). Se il numero di litri acquistati ogni mese supera s, i due fornitori applicano invece un prezzo al litro più basso (ossia b_A e b_B, rispettivamente), ma solo ai litri eccedenti s. Si formuli in PL il problema di determinare da chi acquistare il carburante necessario ogni mese in modo da minimizzare il costo complessivo e da rispettare il requisito sugli ottani.

Soluzione 1.7.

- **Variabili:**
  - x_i con $i \in \{A, B\}$ che rappresenta i litri da acquistare di benzina di tipo i.
  - y_i con $i \in \{A, B\}$ tale che
  $$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i \geq s, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
  - z_{i1} tale che
  $$z_{i1} = \begin{cases} x_i & \text{se } 0 \leq x_i \leq s, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
  - z_{i2} tale che
  $$z_{i2} = \begin{cases} x_i - s & \text{se } s < x_i \leq n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
- **Funzione obiettivo:** $\min z = \sum\limits_{i \in \{A,B\}} p_i \cdot z_{i1} + s \cdot p_i \cdot y_i + b_i \cdot z_{i2}$
- **Vincoli:**
$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i \in \{A,B\}} x_i & = & n & \\ \frac{1}{n} \sum\limits_{i \in \{A,B\}} x_i \cdot k_i & \geq & k & \\ 0 \leq z_{i1} & \leq & s(1 - y_i) & \forall i \in \{A, B\} \\ 0 \leq z_{i2} & \leq & (n - s)y_i & \forall i \in \{A, B\} \\ x_i & \in & \mathbb{R}^+ & \forall i \in \{A, B\} \\ y_i & \in & \{0, 1\} & \forall i \in \{A, B\} \end{array}$$

□

Gli esercizi 1.1, 1.2 e 1.3 sono tratti dalla collezione del prof. Amaldi, Politecnico di Milano.

1.2 Esercizi senza soluzioni

1.2.1 Temi d'esame 2013

Esercizio 1.8. Un'azienda ha a disposizione n operai e ha bisogno di svolgere m attività diverse. Basta che un operaio si dedichi ad un'attività perché quest'ultima possa ritenersi completata. Diversi operai impiegano tempi diversi per svolgere la stessa attività; indichiamo quindi con c_{ij} il costo che l'azienda sostiene nel far svolgere l'attività j all'operaio i, dove $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$. Occorre ovviamente che tutte le attività siano svolte. Inoltre, l'operaio i non può svolgere più di b_i attività diverse, per ragioni contrattuali. Si formuli il problema di minimizzare il costo complessivo sostenuto dall'azienda come problema PLI.

Esercizio 1.9. Un'azienda ha bisogno, per portare a termine la produzione, di una soluzione contenente i tre componenti chimici A, B e C. Il composto deve contenere almeno il 20% di A, almeno il 15% di B e almeno il 30% di C. L'azienda è in contatto con tre fornitori: `Alfa`, `Beta` e `Gamma`. `Alfa` vende essa stessa un composto contente per metà la sostanza A e per metà la sostanza B; il prezzo è di 120 euro al litro. `Beta` vende invece un composto contenente per un terzo A e per due terzi C, il cui prezzo è 140 euro al litro. `Gamma` vende invece i tre componenti chimici separatamente, rispettivamente a 100, 140 e 160 euro al litro. Si formuli il problema di determinare il costo minimo di un litro di soluzione come problema di programmazione lineare.

Esercizio 1.10. Un'azienda deve strutturare una rete di comunicazione in modo da garantire una banda di 10 Mbps tra una macchina A e una macchina B, che si trovano in due sedi diverse dell'azienda. Per mettere in comunicazione A e B, l'azienda può far passare i dati attraverso i router R_1, R_2, R_3, R_4 e alcune linee dati esistenti tra di essi, che però devono essere affittate. A si può supporre adiacente a R_1, mentre B è adiacente a R_4 Le capacità (in Mbps) u_{ij} e i costi di affitto (in Euro al Mbps) c_{ij} di ciascuna linea dati *monodirezionale* fra il router i e il router j (dove $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$) sono riassunti di seguito:

$$
\begin{array}{cccccc}
u_{12} = 70 & u_{13} = 80 & u_{14} = 40 & u_{32} = 70 & u_{24} = 40 & u_{34} = 50 \\
c_{12} = 10 & c_{13} = 20 & c_{14} = 15 & c_{32} = 8 & c_{24} = 12 & c_{34} = 10
\end{array}
$$

Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo di affitto delle linee di comunicazione.

Esercizio 1.11. Una software house deve assumere un certo numero di programmatori, da scegliere tra n candidati $1, \ldots, n$. Ogni programmatore i è in grado di scrivere, ogni settimana, p_i righe di codice nel linguaggio `Python` e j_i righe di codice nel linguaggio `Java`. A tutti i candidati viene offerto lo stesso tipo di contratto e quindi lo stesso stipendio. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo totale dei programmatori assunti, tenendo conto che complessivamente l'azienda ha bisogno di scrivere ogni settimana a righe di codice `Python` e b righe di codice `Java`.

1.2.2 Temi d'esame 2014

Esercizio 1.12. Un'azienda sta rinnovando il sistema informativo, e decide di acquistare nuovo software e in particolare un programma di videoscrittura, un foglio elettronico e un programma per la contabilità aziendale. Il mercato mette a disposizione n programmi di videoscrittura diversi, m fogli elettronici diversi, e p programmi diversi per la contabilità aziendale. Ciascuno di essi richiede un certo numero di librerie prese da un unico insieme $\{1, \ldots, r\}$. Si determini la scelta più conveniente per l'azienda, sapendo che:

- L'i-esimo programma di videoscrittura ha un costo pari a c_i e ha bisogno delle n_i librerie $a_i^1, \ldots, a_i^{n_i} \in \{1, \ldots, r\}$.

- L'i-esimo foglio elettronico ha un costo pari a d_i e ha bisogno delle m_i librerie $b_i^1, \ldots, b_i^{m_i} \in \{1, \ldots, r\}$.
- L'i-esimo programma di contabilità aziendale ha un costo pari ad e_i e ha bisogno delle p_i librerie $c_i^1, \ldots, c_i^{p_i} \in \{1, \ldots, r\}$.
- L'i-esima libreria ha un costo pari a f_i.

Esercizio 1.13. Una raffineria di petrolio ha la necessità di produrre Benzina Verde e Gasolio. I ricavi per litro, le quantità massime da produrre, e la viscosità massima dei due tipi di prodotto sono riassunti nella tabella seguente.

	Ricavi al litro	Quantità max	Viscosità max
Benzina Verde	0.725	20000	5.2
Gasolio	0.615	18000	8.1

La raffineria ha accesso a due tipi di petrolio, il primo di origine nazionale, il secondo di origine internazionale. Queste due varietà di prodotto hanno costi diversi, disponibilità massime diverse, ma anche viscosità differenti, come riassunto nella tabella seguente:

	Costi al litro	Disponibilità max	Viscosità
Nazionale	0.225	12000	4.6
Internazionale	0.195	50000	7.8

Si formuli in PL il problema di determinare il piano di produzione ottimo per la raffineria in oggetto.

Esercizio 1.14. Un'azienda di trasporti si trova nella necessità di trasportare alcuni fusti, ciascuno contenente un composto chimico. Indichiamo gli n fusti con i numeri $1, \ldots, n$. Ciascun fusto i pesa k_i Kg e il suo prezzo è di p_i Euro. Il camion di cui dispone l'azienda può trasportare al più s tonnellate di materiale. Alcuni fusti non possono essere trasportati assieme, per ragioni di sicurezza. In dettaglio abbiamo due insiemi $A, B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ i cui elementi sono fusti che non possono essere trasportati contemporaneamente. Si scriva un programma lineare per il problema di massimizzare il costo dei fusti trasportati in *un singolo* viaggio del camion.

Esercizio 1.15. Uno studio tecnico sta progettando un'autostrada lunga 100 Km e si trova nella situazione di dover decidere come posizionare le n colonnine per il soccorso sanitario e meccanico. Il costo complessivo delle colonnine dipende dalla quantità di cablaggio necessario a collegare ciascuna delle n colonnine alla centrale telefonica (posta ad una estremità del percorso) e alla centrale informatica (posta all'altra estremità). Lo stesso cavo telefonico può essere usato per collegare tutte le colonnine, una di seguito all'altra. Ogni colonnina, invece, avrà bisogno di un cavo di rete distinto. C'è poi un'ultimo vincolo: ogni colonnina non può trovarsi a meno di 2 Km dalla successiva. Si formuli in programmazione lineare il problema di determinare la posizione delle n colonnine lungo il percorso dell'autostrada, in modo che il costo totale del cablaggio sia minimo.

Esercizio 1.16. Un programmatore si trova nella situazione di dover far svolgere n task diversi agli m processori della macchina a sua disposizione, ciascuno capace di eseguire s_i istruzioni per secondo. Ogni task i (con $1 \leq i \leq n$) richiede l'esecuzione di t_i istruzioni. Le istruzioni necessarie a passare da un task al successivo prendono tempo trascurabile. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il tempo necessario a completare gli n task, assumendo che gli m processori lavorino in parallelo.

Esercizio 1.17. Un'azienda ha la necessità di trasportare n fusti contenenti sostanze chimiche tramite m container. Ciascun fusto i (con $1 \leq i \leq n$) ha un costo pari a c_i, la concentrazione di acido fosforico in esso è pari ad a_i, e la sua capacità ammonta a r_i. Si formuli in PLI il problema di allocare i fusti ai container, in modo che il (massimo) costo dei fusti in ciascun container risulti minimo (in modo da ridurre la perdita nel caso in cui uno dei container risulti disperso). Occorre poi garantire che la concentrazione di acido fosforico in ogni container non sia superiore al limite di legge, fissato a v.

Esercizio 1.18. Un'azienda deve far eseguire n lavori $1, \ldots, n$ ad una singola macchina, che può eseguire un solo lavoro alla volta. Alcuni di questi n lavori possono essere eseguiti solo se altri sono stati già precedentemente svolti. Formalmente, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, esiste un sottoinsieme D_i di $\{1, \ldots, n\}$ i cui elementi sono tutti lavori che devono essere necessariamente eseguiti prima di i. Ovviamente, D_i è un parametro del problema, ed è quindi a disposizione dell'azienda. Il costo di esecuzione di un lavoro i dipende da quanti lavori sono stati eseguiti prima di i: se i è il j-esimo lavoro ad essere eseguito, il suo costo è c_{ij}, anch'esso parametro del problema. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo d'esecuzione dei lavori.

Esercizio 1.19. Un gruppo di n amici e m amiche, dove $n + m = 2k$, decidono di organizzare una partita di calcio in cui ciascuna squadra sia formata da k giocatori. I numeri reali positivi $a_1, \ldots, a_n$ sono un'indice della qualità tecnica di ciascun giocatore maschio. Similmente per i numeri reali positivi $b_1, \ldots, b_m$ e le giocatrici. Si formuli in programmazione lineare il problema di determinare quale sia, tra tutte le possibili, la composizione delle due squadre che garantisca la minor differenza (in valore assoluto) tra la somma delle qualità tecniche dei componenti della prima squadra e della seconda. Occorre anche garantire che ciascuna squadra abbia tra le sue fila almeno q giocatrici.

Esercizio 1.20. Un allevamento bovino deve decidere in che misura miscelare gli n mangimi che il mercato mette a disposizione. Per ogni $1 \leq i \leq n$, c_i è il costo di un chilogrammo del mangime i. Ogni grammo del mangime i, contiene p_i milligrammi di proteine, g_i milligrammi di grassi, e a_i calorie. Si formuli in PL il problema di determinare in che modo formare un chilogrammo di mangime in modo che il suo costo sia minimo, ma che esso contenga almeno 170 milligrammi di proteine, al più 200 milligrammi di grassi, e al più 1100 calorie.

1.2.3 Temi d'esame 2015

Esercizio 1.21. Un'azienda informatica produce tre modelli diversi di PC. Ciascun esemplare del modello i (con $1 \leq i \leq 3$) ha bisogno, per essere costruito, di m_i minuti per il montaggio, di o_i minuti per l'installazione del software, e di g_i minuti per la spedizione. I reparti dell'azienda che si occupano di montaggio, installazione del software e spedizioni, possono mettere a disposizione rispettivamente n, s e p ore di lavoro al mese. Si supponga poi che il guadagno indotto dalla vendita del modello i sia pari ad a_i. Per ragioni di mercato, infine, l'azienda vuole evitare che ciascuno dei tre modelli venga prodotto in un numero di unità *superiore* alla metà del numero totale dei PC prodotti. Si scriva un programma lineare che permetta all'azienda di determinare la produzione di pezzi di ogni modello, in modo che il guadagno complessivo risulti massimo.

Esercizio 1.22. Una compagnia aerea deve rinnovare completamente la sua flotta. Il mercato mette a disposizione n modelli di aerei, ciascuno con un costo pari a c_i e un'autonomia di volo pari ad a_i chilometri. Di ciascun modello, la compagnia può ovviamente comprare un qualunque numero di esemplari. Ogni giorno, la compagnia in questione deve effettuare m voli, ciascuno di una distanza pari a d_j chilometri. Ogni aereo può fare v voli ogni giorno. Se si acquista il modello di aereo i, occorre anche addestrare un'equipe che si occuperà di manutenzione, che costa t_i. Si scriva un programma lineare che permetta alla compagnia aerea di minimizzare il costo totale del rinnovo della sua flotta.

Esercizio 1.23. Un corso di programmazione prevede che gli studenti effettuino un progetto, suddivisi in gruppi di esattamente 5 studenti. Gli studenti sono complessivamente n (che supponiamo per semplicità essere un multiplo di 5) e la media aritmetica dei voti di ciascun studente i è m_i. Ogni studente i può indicare uno studente $s_i \in \{1, \ldots, n\}$ con il quale preferisce non lavorare. Se i si trova nello stesso gruppo di s_i diremo che si sta verificando un'*incompatibilità*. Si determini, in PLI, come costruire i gruppi in modo tale che la media delle medie aritmetiche degli studenti di ogni gruppo sia inclusa tra 24 e 28, e che il numero di incompatibilità sia minimo.

Esercizio 1.24. Una compagnia petrolifera dispone di n giacimenti petroliferi e m raffinerie. Da ogni giacimento petrolifero i vengono estratte p_i tonnellate di greggio al giorno, mentre ogni raffineria j può raffinare r_j tonnellate di greggio al giorno. Ogni giacimento i è connesso alla raffineria j tramite un oleodotto dedicato di capacità giornaliera a_{ij} (in tonnellate) e il cui costo operativo giornaliero è c_{ij}. Si costruisca un programma lineare che determini come instradare la produzione giornaliera degli n giacimenti in modo da minimizzare il costo operativo complessivo.

Esercizio 1.25. Si consideri un grafo diretto $G = (V, E)$ in cui $V = \{1, \ldots, n\}$ e $E \subseteq V \times V$. Si supponga che per ogni $(i, j) \in E$ sia definito un costo $c_{ij} \geq 0$. Siano fissati un nodo sorgente $s \in V$ ed un nodo destinazione $t \in V$ diverso da s. Si formuli in PLI il problema di determinare un cammino di costo minimo tra s e t. Si ricorda che un tale cammino è nient'altro che una sequenza di archi adiacenti che connettano s a t, e il suo costo è la somma dei costi degli archi che lo compongono.

Esercizio 1.26. Una casa editrice deve realizzare un CD-ROM contenente n documenti $1, \ldots, n$, ciascuno di dimensione pari a s_i Kbyte. Ha a disposizione m programmi di compressione $1, \ldots, m$. Ciascun programma di compressione j comprime il documento i di una percentuale c_{ij}. (Ad esempio, se $c_{ij} = \frac{1}{10}$, il j-esimo programma di compressione trasformerebbe il documento i in un file di dimensione pari a $\frac{s_i}{10}$ byte.) Oltre ai file compressi, il CD-ROM deve anche contenere i programmi di compressione, ciascuno dei quali occupa d_j Kbyte. L'utilizzo del j-esimo programma di compressione comporta un costo (fisso) pari p_j Euro (a causa delle relative licenze). Si formuli in PL il problema di scegliere quali software di compressione utilizzare, in modo da minimizzare il prezzo, ma con il vincolo di tenere la dimensione del CD al di sotto di 650 Mbyte.

Esercizio 1.27. Un agente di commercio ha bisogno di trasportare n oggetti $1, \ldots, n$. Ciascun oggetto i pesa p_i chilogrammi. L'agente di commercio ha a disposizione m scatoloni $1, \ldots, m$, ciascuno in grado di contenere oggetti pesanti al più c_j chilogrammi. Si formuli in PLI il problema di determinare il minor numero possibile di scatoloni che possano contenere *tutti* gli n oggetti.

Esercizio 1.28. Il Corso di Laurea Magistrale in Informatica di un certo Ateneo (certo non di quello bolognese!) è organizzato in modo molto liberale: vengono offerti n corsi $1, \ldots, n$, ciascuno dei quali di c_i crediti, e gli unici vincoli da rispettare al momento della formulazione di un piano degli studi sono i seguenti:

- I crediti dei corsi scelti devono sommare a 120;
- Per ogni corso i esiste un insieme di corsi $d_i \subseteq 1, \ldots, n$, gli elementi del quale sono quei corsi che occorre includere nel piano degli studi qualora i stesso sia tra i corsi scelti.

Supponi di volerti inscrivere a questa Laurea Magistrale, e di aver già determinato, per ogni corso i, un indice della relativa difficoltà, $t_i \in \mathbb{R}$. Supponi inoltre di aver determinato l'insieme $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ dei corsi che effettivamente ti interessano. Formula, in PLI, il problema di determinare un piano di studi:

- che soddisfi i vincoli di cui sopra;
- tale che la difficoltà media dei corsi che hai scelto sia inferiore ad una soglia $k \in \mathbb{R}$;
- tale che il numero dei crediti dei corsi che ti interessano (tra quelli scelti) sia massimo.

1.2.4 Temi d'esame 2016

Esercizio 1.29. Un'azienda ha appena creato n nuovi reparti deve allocare a tali reparti alcune delle m fotocopiatrici a disposizione. Ad ogni reparto possono essere allocate anche più fotocopiatrici. Ogni fotocopiatrice i ha un costo di gestione mensile pari a c_i e può fotocopiare al massimo f_i fogli al mese. Ogni reparto j, di contro, ha bisogno di effettuare r_j fotocopie al mese. Per ragioni di spazio, ciascun reparto non può ricevere più di 5 fotocopiatrici. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di minimizzare il costo di gestione complessivo delle fotocopiatrici utilizzate.

Esercizio 1.30. La mappa di una certa città può essere vista come un grafo indiretto i cui nodi sono n punti di interesse e i cui archi sono le vie che collegano tali punti di interesse: un tale arco $\{i, j\}$ rappresenta una strada di lunghezza $l_{\{i,j\}}$ che collega il punto di interesse i al punto di interesse j. Si scriva un programma lineare che permetta di determinare il percorso (che può comprendere più strade) di lunghezza complessiva minima tra due punti di interesse s e t (dove $s \neq t$).

Esercizio 1.31. In una mensa universitaria c'è la necessità di acquistare grandi quantità di pasta. Per evitare complicazioni, la mensa acquista sempre e solo spaghetti. Il fornitore di riferimento può offrire confezioni di spaghetti di n tipi diversi. La confezione i (con $1 \leq i \leq n$) pesa p_i grammi e costa c_i Euro. Un chilo di spaghetti del tipo i contiene g_i grammi di grassi e a_i grammi di carboidrati. Sapendo che la mensa ha bisogno di acquistare k chili di pasta al mese, si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo per l'acquisto di pasta, sapendo che per legge la pasta offerta agli studenti non può contenere più di r grammi di grassi e b grammi di carboidrati per ogni etto.

Esercizio 1.32. Il CEO di una grande azienda decide di affidarsi ad n fornitori di servizi cloud per la memorizzazione dei suoi dati, che al massimo possono arrivare ad occupare t Terabyte. Il costo di utilizzo annuale per l'i-esimo fornitore è pari a c_i Euro al Gigabyte. L'i-esimo fornitore, inoltre, garantisce che il trasferimento di dati in download avvenga ad una velocità di almeno d_i Megabit al secondo, mentre il trasferimento dei dati in upload avvenga ad una velocità di almeno u_i Megabit al secondo. Sapendo che l'azienda deve fare in modo che la la velocità *media* di accesso, sia in download che in upload, sia di almeno v Megabit al secondo, si formuli in PL o PLI il problema di minimizzare il costo annuale sostenuto dall'azienda.

Esercizio 1.33. Un'azienda di trasporti ha a disposizione n camion $1,\ldots,n$, ciascuno in grado di percorrere al massimo m_i chilometri di strada ogni anno. I camion sono equivalenti rispetto al consumo di carburante, ma *non* rispetto ai costi assicurativi. La polizza relativa al camion i ha un costo annuo pari a c_i se i chilometri percorsi da i sono al più k_i, ma diventa $d_i > c_i$ se i chilometri percorsi sono superiori a k_i. Complessivamente, l'azienda ha bisogno che gli n camion percorrano complessivamente due milioni di chilometri ogni anno. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo sostenuto dall'azienda.

Esercizio 1.34. Un'azienda appena costituita ha la necessità di formare m team di lavoro $1,\ldots,m$ assumendo alcuni tra gli n candidati $1,\ldots,n$. $D \subseteq \{1,\ldots,n\}$ è noto e indica l'insieme dei candidati di sesso femminile, ed e_i indica l'età di ciascun candidato i. Ciascuno candidato i, se assunto, costerebbe all'azienda c_i Euro all'anno. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo annuale sostenuto dall'azienda, sapendo che:

- Almeno il 30% dei componenti di ciascun gruppo di lavoro deve essere di sesso femminile;
- L'età media di ogni gruppo deve essere di al più 40 anni.
- Ogni team di lavoro j deve consistere di almeno t_j persone.

Esercizio 1.35. Dato un grafo indiretto (V, E) e un valore reale positivo $c_{\{i,j\}}$ per ciascun arco $\{i, j\} \in E$, si formuli in PLI il problema di determinare un ciclo hamiltoniano di costo minimo. si ricordi che un ciclo si dice hamiltoniano se passa per tutti i vertici del grafo esattamente una volta.

Esercizio 1.36. Una scuola deve rinnovare il suo laboratorio informatico, in cui si trovano n postazioni PC. Gli m fornitori propongono ciascuno alla scuola un modello di PC, ciascuno dei quali, chiamiamolo i, ha un prezzo pari a p_i, un disco rigido di capacità pari a d_i GB, e un numero di porte ethernet pari a e_i. Per ragioni strutturali, occorre che tutti i PC, tranne al più $k < n$ abbiano almeno 2 porte ethernet. Inoltre, occorre che la capacità complessiva del laboratorio in termini di memoria secondaria sia di almeno c TB. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di minimizzare il costo complessivo che la scuola deve sostenere.

1.2.5 Temi d'esame 2017

Esercizio 1.37. Una azienda appena creata ha individuato n task $1,\ldots,n$, tutti di natura informatica, che intende far svolgere ai suoi dipendenti con l'ausilio dei computer che ha acquistato. Il mercato mette a disposizione m pacchetti software $1,\ldots,m$. Il pacchetto software j mette a disposizione funzionalità tali da poter risolvere i task nell'insieme $D_j \subseteq \{1,\ldots,n\}$ e ha un costo pari a c_j Euro. Si modelli in PLI il problema di decidere quali pacchetti software acquistare, in modo che il relativo costo sia minimo e che tutti i task possano essere risolti.

Si riformuli il modello, tenendo conto delle seguenti ulteriori informazioni a disposizione dell'azienda. Ogni pacchetto software j è prodotto da un'azienda $a_j \subseteq \{1,\ldots,k\}$. Ogni azienda $o \in \{1,\ldots,k\}$, poi, è disposta a concedere uno sconto di s_o Euro qualora il numero di pacchetti acquistati sia uguale o superiore ad una soglia g_o.

Esercizio 1.38. Un'azienda deve allocare i suoi n^2 dipendenti ai suoi n stabilimenti, ad ognuno di essi destinando esattamente n dipendenti. Ogni dipendente $i \in \{1,\ldots,n^2\}$ abita nella città $c_i \in \{1,\ldots,m\}$, ed ogni città $k \in \{1,\ldots,m\}$ dista d_{kj} dallo stabilimento $j \in \{1,\ldots,n\}$. Obiettivo dell'azienda è minimizzare i rimborsi spese dovuti complessivamente ai dipendenti, che sono proporzionali alla distanza tra la città di residenza e lo stabilimento di lavoro. Si formuli in PLI tale problema.

Si consideri il seguente, ulteriore vincolo. Ogni dipendente $i \in \{1, \ldots, n^2\}$ può fissare un giorno della settimana $g_i \in \{1, \ldots, 7\}$ in cui il dipendente stesso non è libero. Occorre però garantire che in ogni stabilimento j e in ogni giorno della settimana, ci siano almeno un certo numero p di dipendenti disponibili a lavorare in quel giorno presso lo stabilimento j. Si formuli tale vincolo.

Esercizio 1.39. Nel laboratorio informatico di una software house è necessario compilare n progetti tramite m macchine, dove $m < n$. La compilazione del progetto i richiede t_{ij} minuti se eseguita dalla macchina j. Scopo dell'azienda è, ovviamente, quello di minimizzare il tempo complessivo di compilazione, tenendo conto del fatto che le m macchine possono lavorare in parallelo tra loro, ma che ogni macchina può compilare in ogni istante al più un progetto. Si scriva un programma lineare che corrisponda a tale problema.

Si consideri lo scenario seguente. Ogni macchina $j \in \{1, \ldots, m\}$ consuma e_j unità di energia elettrica ogni ora. L'azienda vuole fare in modo che le unità di energia elettrica complessivamente spese non superino un certo limite superiore u. Come è possibile catturare tale vincolo?

Esercizio 1.40. Dopo una laurea a pieni voti diventi direttore del personale di una multinazionale informatica che ti affida il compito di assumere dei programmatori da impiegare in un nuovo progetto. Nel progetto si utilizzano n linguaggi di programmazione, che chiamiamo $1, \ldots, n$. I candidati che rispondo all'annuncio sono m. Ciascun candidato $j \in \{1, \ldots, m\}$ dichiara di saper programmare nei linguaggi del sottoinsieme $d_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$ e di conoscere bene i linguaggi in $b_j \subseteq d_j$. Obiettivo dell'azienda è quello di minimizzare i costi, ossia di assumere il numero di programmatori minore possibile. Contemporaneamente, occorre garantire che l'azienda abbia a disposizione, per ogni linguaggio j, almeno 5 programmatori che sappiano programmare in j e almeno 3 programmatori che conoscano bene j.

Esercizio 1.41. L'orario ferroviario di un certo paese può essere visto, semplificando molto, come specificato tramite n stazioni $1, \ldots, n$ e tramite i treni che collegano tra loro tali stazioni. Più nello specifico, per ogni coppia di stazioni (i, j) esistono m_{ij} treni che ogni giorno collegano i a j. Gli orari di partenza di tali treni sono specificati tramite la seguente lista di ore:

$$p_{ij}^1, \ldots, p_{ij}^{m_{ij}}.$$

Similmente, gli orari di partenza di tali treni sono specificati tramite la seguente lista di ore:

$$a_{ij}^1, \ldots, a_{ij}^{m_{ij}}.$$

Si scriva un programma lineare che permetta di determinare il modo più rapido per raggiungere una certa stazione h a partire da una certa stazione k, non necessariamente tramite un solo treno. Si supponga che il tempo di coincidenza possa essere arbitrariamente piccolo, purché non negativo.

Esercizio 1.42. Un'azienda dispone di n lavoratori $1, \ldots, n$ e deve far loro svolgere m progetti $1, \ldots, m$. Ogni lavoratore può venire allocato ad al più k progetti, ma ad ogni progetto devono essere attribuiti almeno p lavoratori. Accedendo ai dati a sua disposizione, l'azienda determina che ogni lavoratore i se impiegato nel progetto j darà luogo ad un indice di produttività intero positivo a_{ij}. Si scriva un programma lineare che permetta di determinare il modo di allocare i lavoratori ai progetti che massimizzi l'indice di produttività complessivo degli abbinamenti.

1.2.6 Temi d'esame 2018

Esercizio 1.43. Un'impresa edile deve svolgere in un anno (non bisestile) n lavori $1, \ldots, n$. L'impresa ha a disposizione m squadre $1, \ldots, m$. Ogni squadra $j \in \{1, \ldots, m\}$ ha le competenze per svolgere solo alcuni dei lavori, ovvero quelli in $c_j \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Ciascun lavoro $i \in c_j$ richiede g_{ij} giorni di lavoro per essere portato a termine dalla squadra j. Si formuli in PLI il problema di allocare i lavori alle squadre in modo da minimizzare il numero complessivo di giorni di lavoro necessari.

Si consideri la seguente variazione del problema e la si formuli opportunamente in PLI. Si supponga che ogni squadra j sia formata da o_j operai, e che ciascuno di essi abbia una costo giornaliero lordo per l'impresa pari a s_j euro. Si formuli quindi in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo per l'azienda, anziché il numero di giorni di lavoro.

Esercizio 1.44. Un'azienda si occupa di m progetti $1, \ldots, m$ e deve assegnare un numero di nuovi assunti pari a d_j a ciascun progetto $j \in \{1, \ldots, m\}$. L'azienda riceve n curriculum da altrettanti candidati $1, \ldots, n$. Ciascun candidato $i \in \{1, \ldots, n\}$, se assunto, darebbe luogo ad un costo per l'azienda pari a c_i e le sue competenze lo renderebbero adatto a lavorare sui progetti in $p_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$. Si supponga che ogni lavoratore possa essere assegnato ad *al più* k progetti distinti. Si scriva un programma lineare intero che modellizzi il problema di minimizzare i costi in modo da garantire che a tutti i progetti vengano assegnati almeno il numero di dipendenti necessari.

Si consideri la seguente variazione del problema e la si formuli opportunamente in PLI. Si supponga che ogni progetto j abbia bisogno non di d_j dipendenti, ma di o_j ore di lavoro a settimana. Parimenti, si supponga che ogni dipendente i possa lavorare presso l'azienda per 36 ore a settimana.

Esercizio 1.45. Il problema di definire una playlist contenente un certo numero di brani può essere visto come un problema di ottimizzazione. Supponiamo che i brani a disposizione siano n e che per ogni brano $i \in \{1, \ldots, n\}$ sia nota una valutazione v_i della qualità del brano, che possiamo supporre essere un numero reale compreso tra 0 e 10. La playlist che vogliamo costruire è composta da m brani, dove m è tipicamente molto più piccolo di n. Ad ogni brano i può essere attribuito un genere musicale $g_i \in \{1, \ldots, k\}$. Si formuli in PLI il problema di determinare una playlist in modo che la qualità dei brani scelti sia massima e che tutti i generi musicali siano rappresentati nella playlist.

Si considerino i seguenti ulteriori vincoli al problema, e li si formuli nel linguaggio della PLI. Occorre innanzitutto garantire che due brani consecutivi nella playlist *non* siano mai dello stesso genere musicale. Occorre poi garantire che per ogni genere j, la *qualità media* dei brani del genere j tra quelli scelti sia almeno pari ad un limite minimo q.

Esercizio 1.46. Aiutiamo il Professor Davoli a definire l'orario delle lezioni del Corso di Laurea in Informatica in modo che gli studenti fuori sede abbiano meno disagi possibile. Supponiamo che i corsi che si tengono nel semestre siano $1, \ldots, n$ e che le aule a disposizione siano $1, \ldots, m$. Supponiamo infine che gli slot orari a disposizione siano $1, \ldots, k$: ciascuno di essi corrisponde ad una fascia oraria in cui ciascuna aula può essere utilizzata (ad esempio, martedì dalle 10 alle 12). Supponiamo che il docente di ciascun corso i abbia richiesto di far lezione in un numero di fasce orarie pari a f_i. Infine, sia $D \subseteq \{1, \ldots, k\}$ un insieme di fasce orarie che sarebbe meglio evitare, vista la presenza di studenti fuori sede (per esempio la mattina presto o il venerdì pomeriggio). Si scriva un programma lineare che aiuti il Professor Davoli a minimizzare il numero di lezioni svolte in D, garantendo nel contempo che tutti i corsi siano svolti nel numero di fasce orarie richieste, senza sovrapposizioni.

Si consideri uno dei seguenti vincoli, a scelta, e lo si modelli in PLI:

- Si supponga che ogni corso i sia svolto dal docente $d_i \in \{1, \ldots, s\}$ e che quindi occorra garantire che ciascun docente non faccia lezione in due o più corsi nella stessa fascia oraria.
- Si supponga che ogni corso i faccia parte dei corsi dell'anno $a_i \in \{1, \ldots, p\}$ e che quindi sia opportuno garantire che gli studenti di ogni anno non debbano seguire due lezioni contemporaneamente.

Esercizio 1.47. Un'azienda informatica sta cercando di ottimizzare i costi relativi alla corrente elettrica. In particolare, l'azienda deve decidere a quali fornitori di energia elettrica sia conveniente appoggiarsi. L'azienda presume di aver bisogno di un numero di kWh pari a c, su base mensile. I fornitori dai quali l'azienda riceve un offerta sono $1, \ldots, n$. Ciascun fornitore i propone un costo al kWh pari a p_i euro. Inoltre, il fornitore i impone un canone mensile pari a m_i euro, da pagarsi, ovviamente, una sola volta al mese e solo se l'azienda acquista corrente da i. Si osservi come sia possibile, per l'azienda, appoggiarsi su *più fornitori* contemporaneamente. Si formuli in programmazione lineare il problema di determinare a quali fornitori e in che misura l'azienda debba rivolgersi, in modo da minimizzare il costo complessivo.

Si consideri il seguente ulteriore vincolo e lo si modelli anch'esso in programmazione lineare. L'azienda vorrebbe evitare di pagare troppo per i canoni mensili, e vorrebbe essere sicura che questi ultimi non incidano per più del 20% sul costo totale.

Esercizio 1.48. Un'azienda di trasporti deve decidere come trasportare n contenitori tra due dei suoi stabilimenti. Per farlo, utilizza una flotta di al più n camion, ciascuno dei quali ha una capacità, in tonnellate, pari a c, e in metri cubi pari a m. Ogni contenitore i pesa a_i chilogrammi e occupa b_i metri cubi. Si modellizzi, in PL, il problema di minimizzare il numero di camion necessari a trasportare tutti gli n contenitori, sapendo che ogni camion può ovviamente trasportare più di un contenitore, se ciò non va contro i suoi limiti di capacità.

Si consideri la seguente variazione del problema. Ogni camion j ha un costo operativo pari a d_j, che ovviamente va sostenuto solo se il camion è utilizzato. L'obiettivo diventa quindi quello di minimizzare il costo complessivo, anziché il numero di camion utilizzati. Si formalizzi tutto questo in PL.

1.2.7 Temi d'esame 2019

Esercizio 1.49. Il reparto di produzione di un'azienda metalmeccanica ha a disposizione dieci macchine saldatrici. All'inizio di ogni mese, il settore commerciale trasmette l'elenco delle n commesse raccolte, che indicheremo con $1, \ldots, n$. Ciascuna commessa i richiede un tempo pari a t_{ij} giorni se evasa tramite la macchina j. Inoltre, ciascuna commessa i darebbe luogo ad un guadagno g_i se evasa nel mese in questione oppure ad una penale p_i se non evasa in tale mese. Si formuli in PLI il problema di massimizzare il guadagno complessivo, al netto delle penali, tenendo conto delle capacità produttive, per il mese di Marzo 2019. Si tenga conto che l'azienda è operativa in tutti i giorni della settimana.

Si consideri il seguente ulteriore vincolo. Ogni commessa i proviene dal fornitore $f_i \in \{1, \ldots, k\}$ e l'azienda, per ragioni commerciali, desidera che almeno la metà delle commesse di ciascun fornitore siano effettivamente evase.

Esercizio 1.50. Un'azienda informatica ha la necessità di organizzare i turni nel prossimo mese, ossia in Luglio 2019. In ogni giorno di tale mese è necessario che almeno k persone siano presenti dalle 8 alle 16, ovvero nel momento della giornata in cui il call-center dell'azienda è attivo. Ci sono due turni di lavoro, il primo fino alle 12 e il secondo dalle 12 a fine servizio. L'azienda dispone di n dipendenti $1, \ldots, n$. Il dipendente i può lavorare, per contratto per al più o_i turni mensili, a cui si possono sommare al più s_i turni di straordinario, pagati più degli altri. Ciascun dipendente non può essere assegnato ad entrambi i turni dello stesso giorno. Si scriva un modello di PLI che permetta all'azienda di minimizzare i costi del personale, supponendo che la paga oraria (ordinaria e straordinaria) sia la stessa per ogni lavoratore.

Si supponga che la paga oraria di ciascun dipendente i non sia più la stessa, ma sia rispettivamente di r_i Euro nel caso di lavoro ordinario e di t_i Euro nel caso di lavoro straordinario. Si modifichi il modello in modo da considerare questo nuovo scenario.

Esercizio 1.51. Un'azienda informatica dove allocare i k terabyte di dati che gestisce tra i suoi n data-center $1, \ldots, n$. Ogni data-center i può gestire al più c_i gigabyte di dati e l'azienda vuole assicurarsi che la capacità di ogni data-center sia utilizzata per al più il 90%. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di minimizzare i costi complessivi dell'allocazione, sapendo che immagazzinare un gigabyte di dati nel data-center i costa p_i Euro al mese.

Si supponga l'impiego di ciascun data-center i abbia dei costi fissi mensili pari a s_i Euro *oltre* ai costi per gigabyte. Tali costi fissi sono da sostenersi solo se al data-center i sono allocati dei dati, indipendentemente dalla loro quantità.

Esercizio 1.52. Un'azienda informatica deve pianificare il lavoro dei suoi n collaboratori per l'anno 2020. Ciascun collaboratore i è competente in un sottoinsieme S_i dell'insieme $\{1, \ldots, k\}$ di tutti i linguaggi di programmazione che l'azienda utilizza. Nel 2020 l'azienda ha in programma di svolgere m progetti $1, \ldots, m$. Per ciascun progetto j, esiste un sottoinsieme R_j di $\{1, \ldots, k\}$ che include tutti e soli i linguaggi con cui j è realizzato. Per ciascun linguaggio l in R_j, occorre allocare a j almeno un collaboratore che conosca l. Si scriva un modello PLI che permetta di minimizzare il costo complessivo delle collaborazioni, sapendo che allocare il collaboratore i al progetto j costa all'azienda p_{ij} Euro.

Si supponga che lo scopo dell'azienda non sia la minimizzazione del costo complessivo, ma la minimizzazione del numero dei collaboratori assegnati ad *almeno* un progetto.

Esercizio 1.53. Un concessionario di automobili dispone di n auto usate $1, \ldots, n$, che desidera vendere realizzando il ricavo massimo possibile. L'azienda si rende conto che vendere le auto singolarmente non sarebbe redditizio. Decide quindi di vendere le auto ad altre aziende, che però preferiscono acquistare *gruppi* di auto, piuttosto che a *singole* auto. Nello specifico, il concessionario riceve m offerte $1, \ldots, m$. Ciascuna offerta j consiste in un sottoinsieme S_j di $\{1, \ldots, n\}$ e di un prezzo p_j, ossia il prezzo di vendita proposto. Si aiuti il concessionario a massimizzare il suo guadagno, sapendo che per quest'ultimo è possibile rottamare le auto invendute a costo zero.

Esercizio 1.54. Un'azienda con n impiegati $1, \ldots, n$ apre una seconda sede a pochi chilometri di distanza dalla prima e si trova a dover decidere quanti e quali degli n dipendenti allocare a ciascuna delle due sedi. Un vincolo da rispettare è certamente quello relativo agli spazi: sia la sede vecchia che quella nuova hanno spazio a sufficienza per $k < n$ impiegati. Occorre poi anche minimizzare i disagi relativi all'apertura della nuova sede: per ogni coppia (i, j) con $i \neq j$, l'azienda riesce a stimare il tempo t_{ij} che i spenderebbe ad interagire a distanza con j qualora non si trovasse più nella stessa sede di lavoro di j. Si scriva un programma PLI che permetta di minimizzare il tempo di interazione a distanza indotto dall'allocazione, e che assicuri che i vincoli siano rispettati.

1.2.8 Temi d'esame 2020

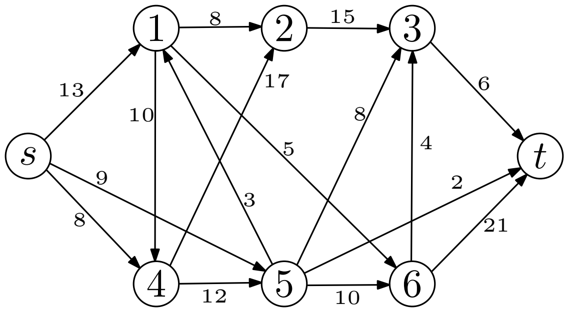
Esercizio 1.55. In una nuova biblioteca c'è la necessità di collocare gli n libri di cui la biblioteca dispone negli m scaffali appena comprati. Ogni libro i dovrebbe, per ragioni tematiche, finire in un certo scaffale $s_i \in \{1, \ldots, m\}$. Nello scaffale $j \in \{1, \ldots, m\}$, però, possono stare al più k_j libri in totale. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di collocare i libri negli scaffali in modo da minimizzare il numero di libri i che vengono collocati in scaffali diversi da d_i.

Si supponga ora di voler minimizzare la distanza media tra un libro i e lo scaffale d_i, dove per ogni coppia di scaffali (j, k) è noto un numero reale positivo $\delta_{j,k}$, ossia proprio la distanza tra j e k.

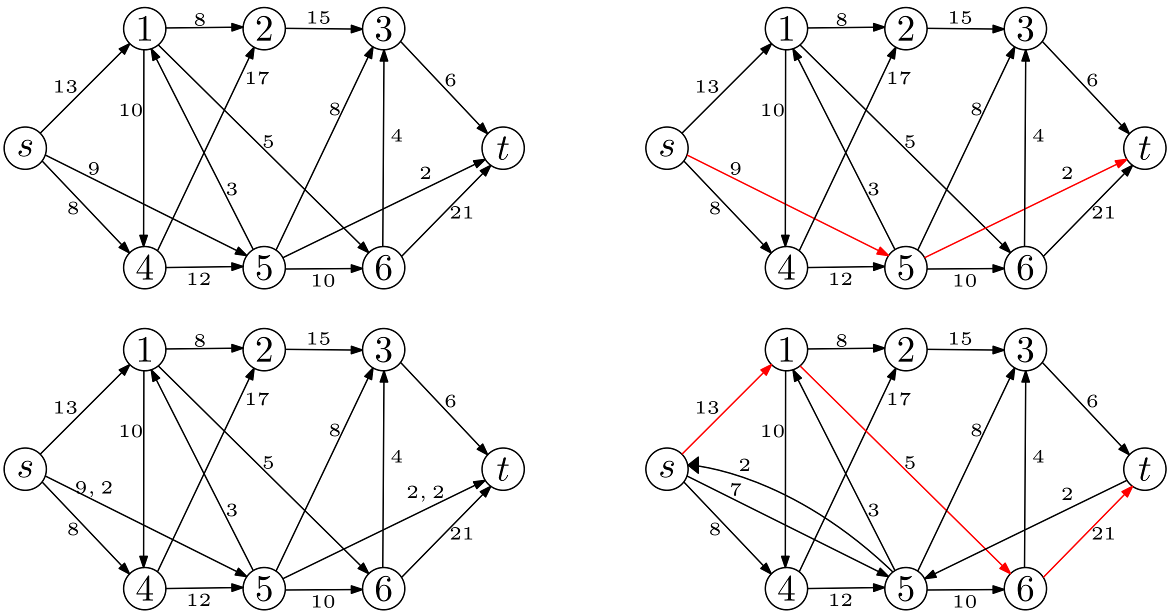
2 Reti di flusso

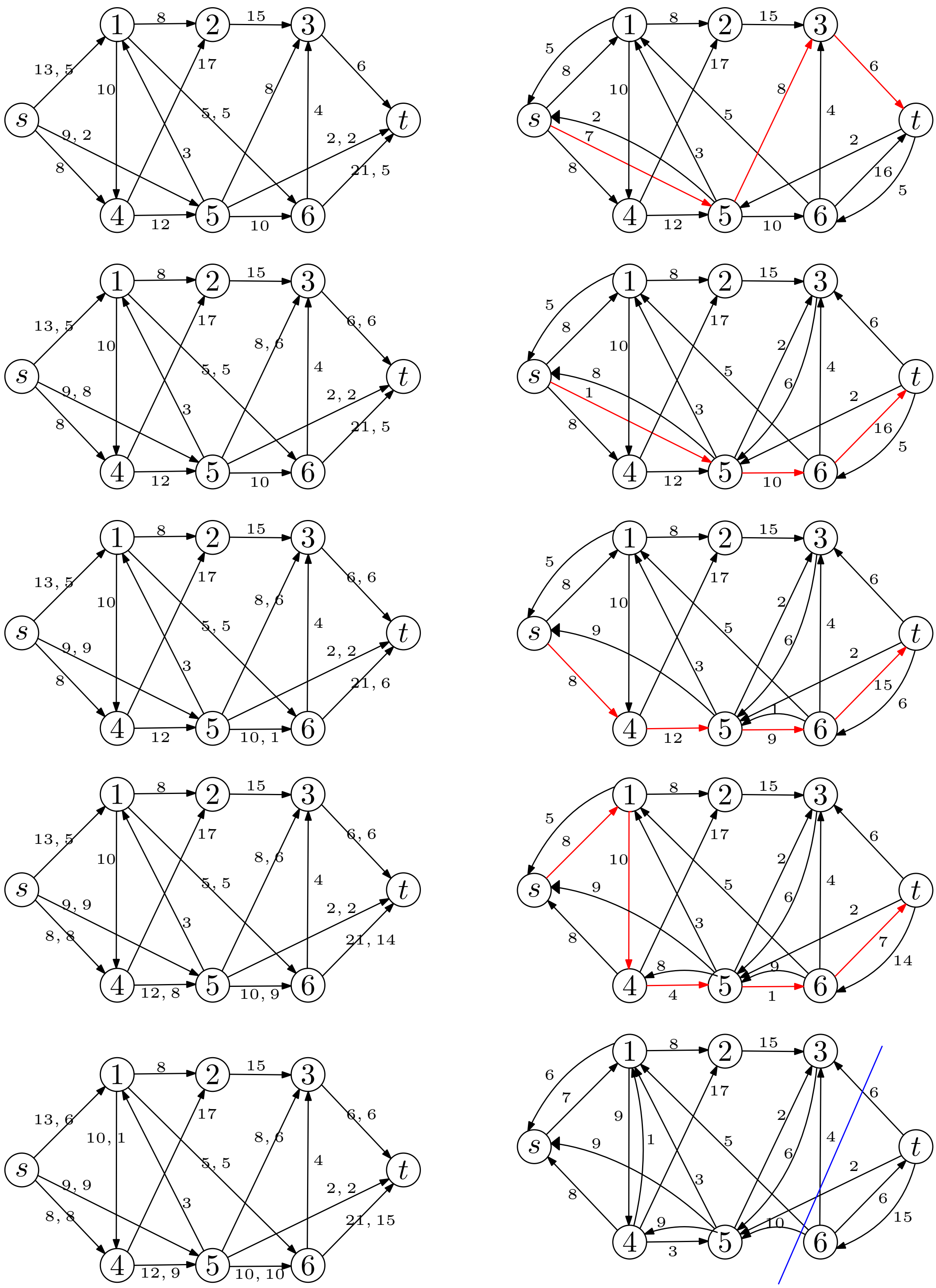
2.1 Esercizi con soluzioni

Esercizio 2.1. Si trovi il flusso massimo (e il taglio di capacità minima) nella rete seguente.



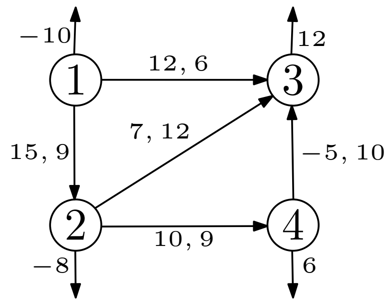
Soluzione 2.1. Di seguito i passaggi secondo l'algoritmo di Edmonds-Karp. La visita in ampiezza è fatta in ordine lessicografico. Nella colonna di destra il grafo con indicato il flusso aggiornato ad ogni iterazione. Le etichette sono del tipo (capacità, [flusso]). A sinistra il corrispondente grafo residuo. Il cammino aumentante di lunghezza minima è indicato in rosso.



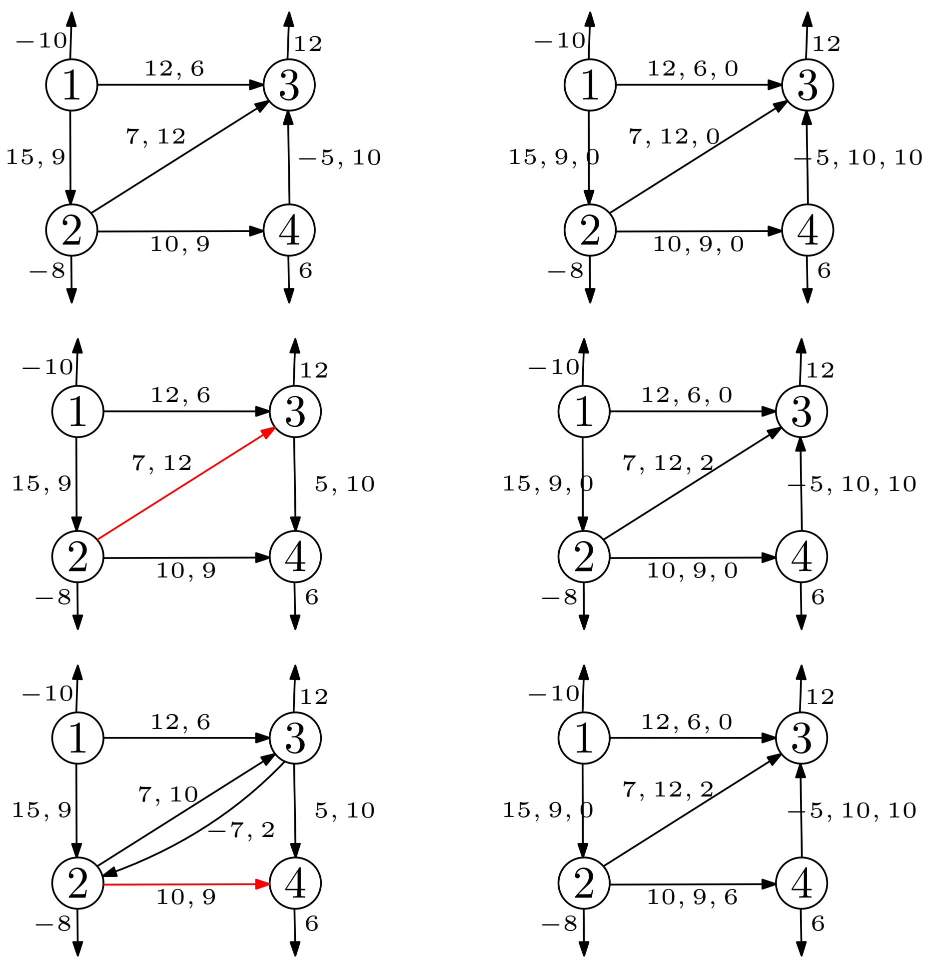


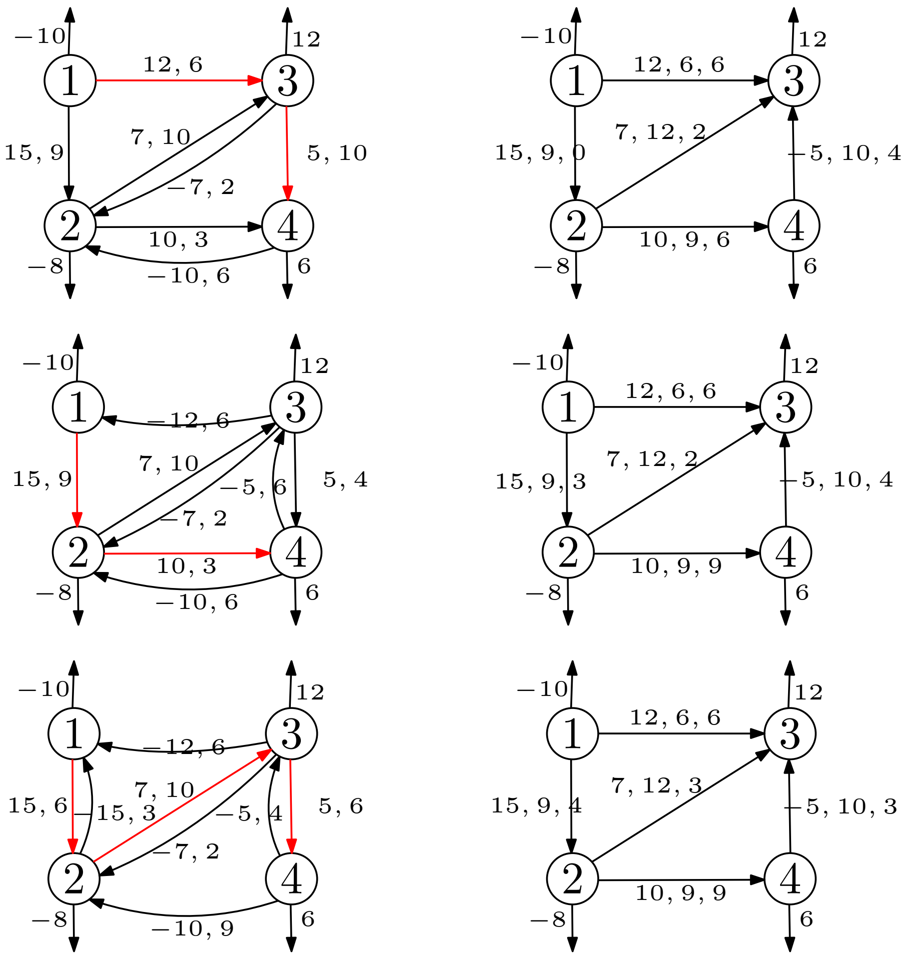
Il valore del flusso massimo (e dunque del taglio di minima capacità) è 23. □

Esercizio 2.2. Si risolva il seguente problema MCF tramite l'algoritmo dei cammini minimi successivi.



Soluzione 2.2. Di seguito i passaggi secondo l'algoritmo dei cammini minimi successivi. Lo pseudo flusso minimale iniziale utilizzato è quello banale: 0 se l'arco ha costo positivo e pari alla capacità dell'arco se questo ha costo negativo. Nella colonna sinistra sono presenti i grafi residui con indicato in rosso il cammino di costo minimo tra un nodo con eccesso positivo e un nodo con eccesso negativo. A destra sono presenti i grafi con i flussi aggiornati (ultima componente).

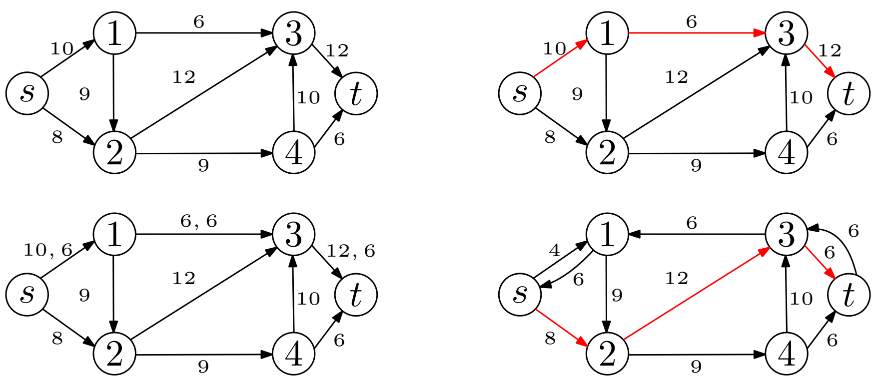


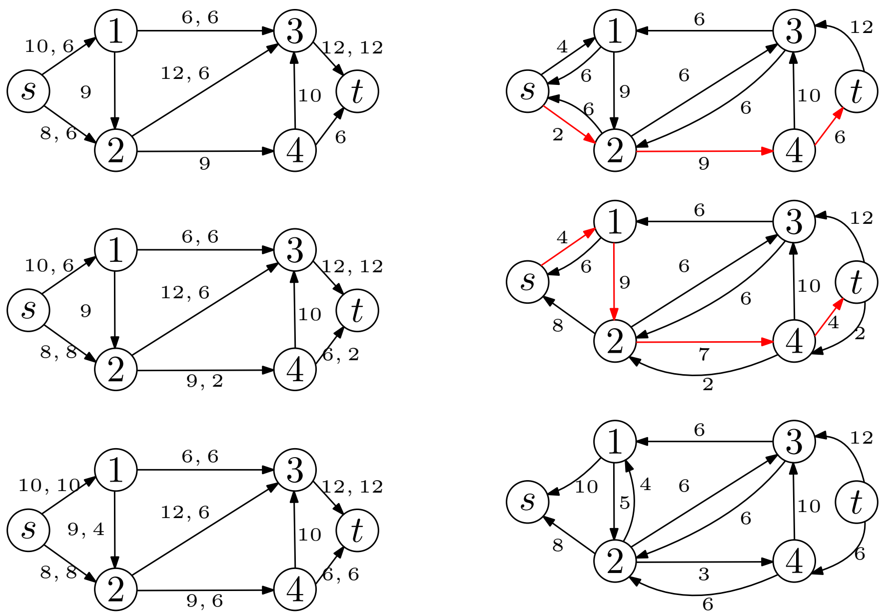


□

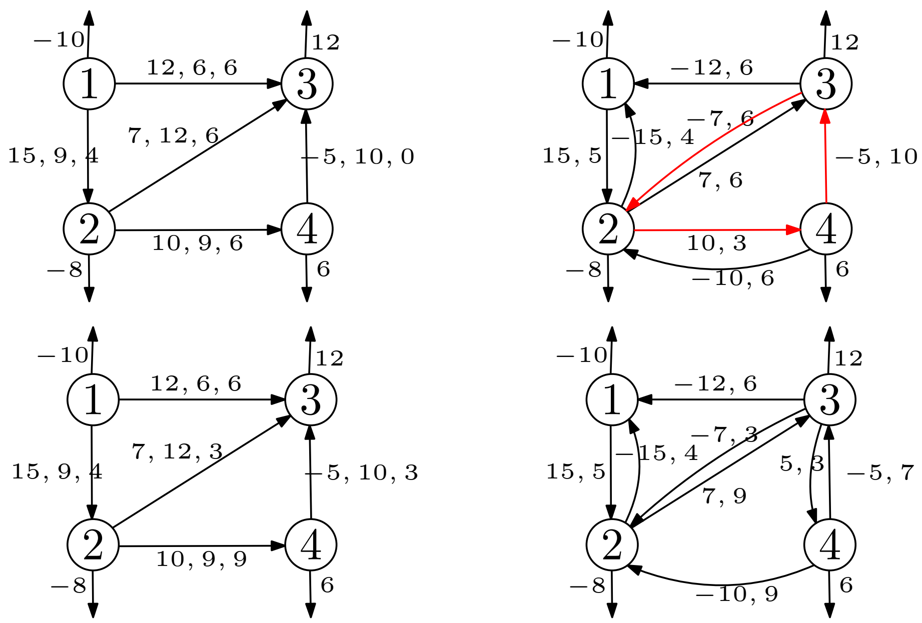
Esercizio 2.3. Si trovi il flusso di costo minimo per la rete dell'esercizio 2.2 tramite l'algoritmo di cancellazione dei cicli.

Soluzione 2.3. Il primo passo consiste nel trovare un flusso ammissibile per la rete. Procediamo riconducendo il problema a quello di trovare il flusso massimo nella rete seguente tramite l'algoritmo di Edmonds-Karp.



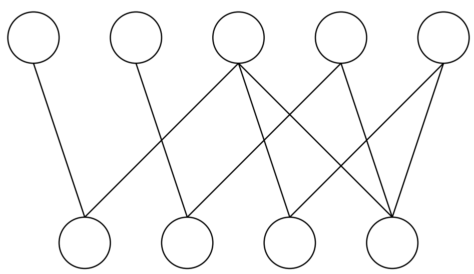


Procediamo ora attraverso l'algoritmo di cancellazione dei cicli.

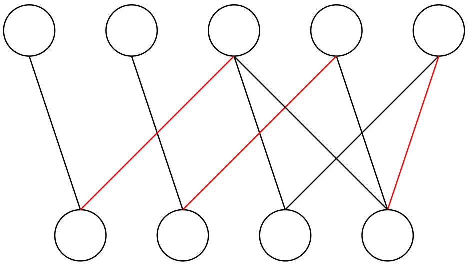


□

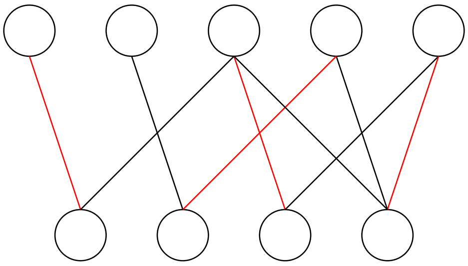
Esercizio 2.4. Si trovi un accoppiamento di massima cardinalità per il grafo seguente.



Soluzione 2.4. Immaginiamo di dirigere gli archi dall'insieme di nodi 1 (in alto) all'insieme di nodi 2 (in basso). Dobbiamo trovare dei cammini che inizino con un nodo dell'insieme 1 e finiscano con un nodo dell'insieme 2 non accoppiati e tali che gli archi percorsi in verso concorde non facciano parte dell'accoppiamento, mentre ne facciano parte quelli discordi. Aggiungiamo all'accoppiamento i primi mentre rimuoviamo i secondi. Un modo di procedere è il seguente.



In rosso sono evidenziati gli archi che fanno parte dell'accoppiamento. Sono ancora presenti dei percorsi del tipo cercato (di forma \/\ partendo dal primo nodo in alto a sinistra).

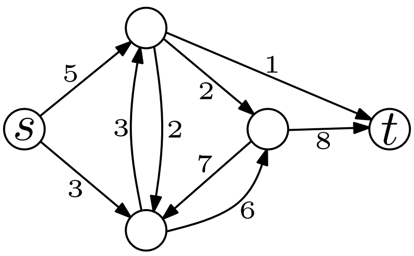


□

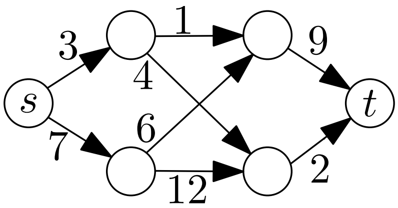
2.2 Esercizi senza soluzioni

2.2.1 Temi d'esame 2013

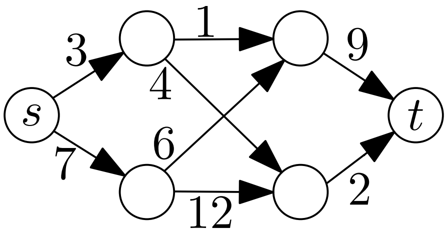
Esercizio 2.5. Si determini il flusso massimo tra s e t nel seguente grafo, utilizzando l'Algoritmo di Edmonds e Karp.



Esercizio 2.6. Si determini il flusso massimo tra s e t nel seguente grafo, utilizzando l'Algoritmo di Edmonds e Karp.

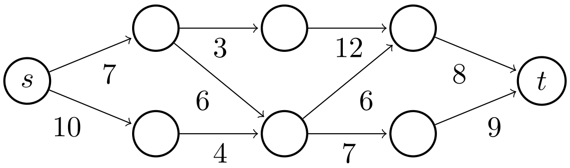


Esercizio 2.7. Si risolva, tramite l'algoritmo basato su preflussi, il seguente problema di flusso massimo.

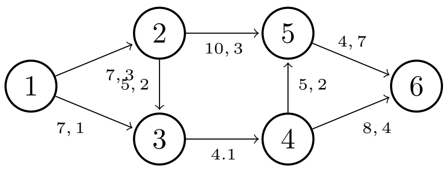


2.2.2 Temi d'esame 2014

Esercizio 2.8. Si risolva, tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp il seguente problema di flusso massimo.

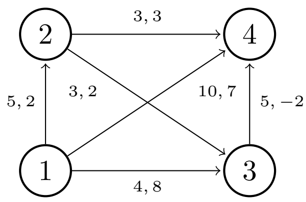


Esercizio 2.9. Si risolva, tramite l'algoritmo dei cammini minimi aumentanti, il seguente problema MCF.



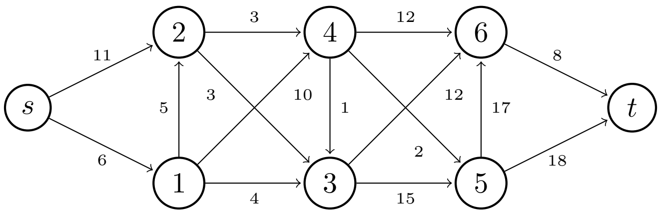
Il vettore b è $(-10, -2, 6, -6, 3, 9)$. Le etichette sugli archi indicano al solito la capacità (il primo numero) e il costo (il secondo numero).

Esercizio 2.10. Si risolva, tramite l'algoritmo dei cammini minimi successivi, il seguente problema MCF.

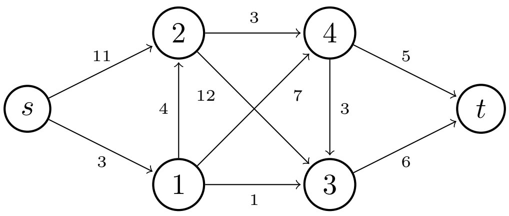


Il vettore b è $(-5, -1, -4, 10)$. Le etichette sugli archi indicano al solito la capacità (il primo numero) e il costo (il secondo numero).

Esercizio 2.11. Si determini il flusso massimo tra s e t nel seguente grafo,utilizzando l'Algoritmo di Edmonds e Karp.

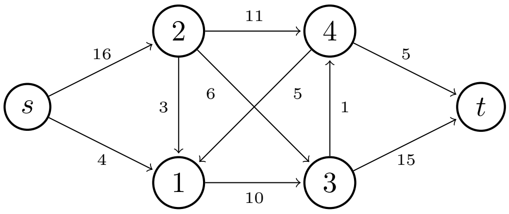


Esercizio 2.12. Si risolva, tramite l'algoritmo basato su preflussi, il seguente problema di flusso massimo.



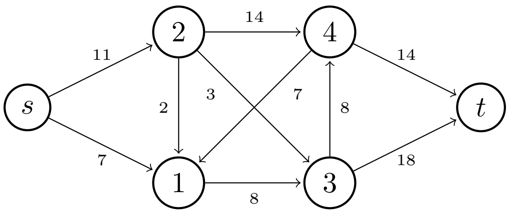
2.2.3 Temi d'esame 2015

Esercizio 2.13. Si risolva, tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp, il seguente problema di flusso massimo.



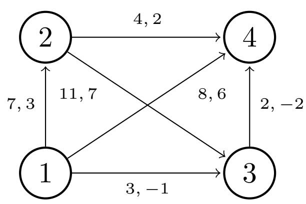
Si dia inoltre un taglio di capacità minima per la rete di cui sopra.

Esercizio 2.14. Si risolva, tramite l'algoritmo di Goldberg e Tarjan, il seguente problema di flusso massimo.



Si dia inoltre un taglio di capacità minima per la rete di cui sopra.

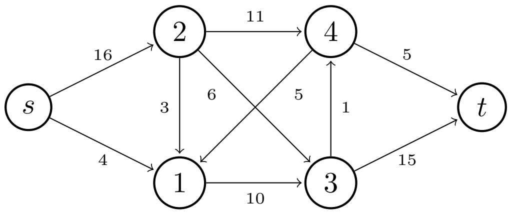
Esercizio 2.15. Si risolva, tramite l'algoritmo basato sull'eliminazione di cicli, il seguente problema MCF.



Il vettore b è $(-5, -10, 7, 8)$. Le etichette sugli archi indicano al solito la capacità (il primo numero) e il costo (il secondo numero).

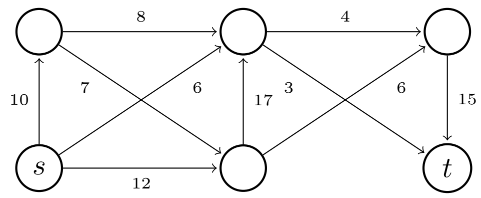
2.2.4 Temi d'esame 2016

Esercizio 2.16. Si risolva, tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp, il seguente problema di flusso massimo.



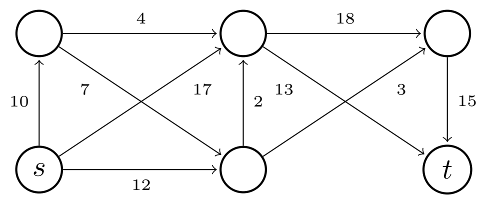
Si dia inoltre un taglio di capacità minima per la rete di cui sopra.

Esercizio 2.17. Si risolva, tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp, il seguente problema MF.



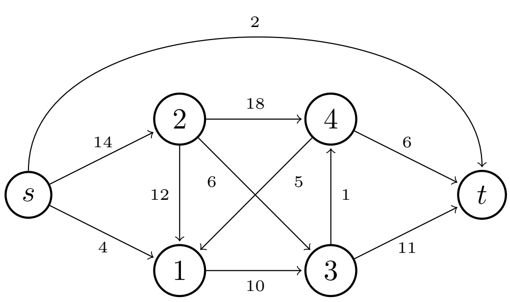
Si dia inoltre un taglio di capacità minima.

Esercizio 2.18. Si risolva, tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp, il seguente problema MF.



Si dia inoltre un taglio di capacità minima.

Esercizio 2.19. Si risolva, tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp, il seguente problema di flusso massimo.

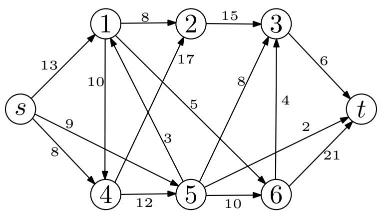


Si dia inoltre un taglio di capacità minima per la rete di cui sopra.

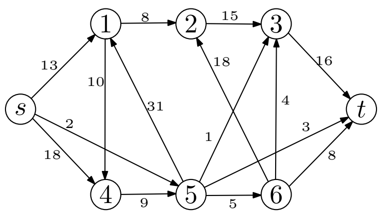
2.2.5 Temi d'esame 2017

Esercizio 2.20. Si dia un esempio di rete di flusso per il problema MCF, anche semplicissima purché abbia almeno tre nodi, e si costruiscano un flusso ammissibile e uno pseudoflusso minimale per essa.

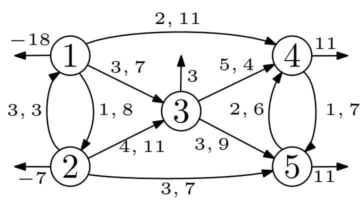
Esercizio 2.21. Si risolva il seguente problema MF con tramite l'algoritmo di Goldberg-Tarjan.



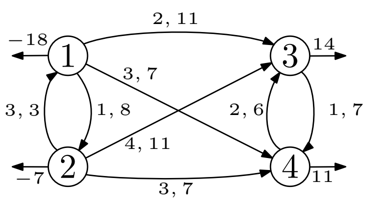
Esercizio 2.22. Si risolva il seguente problema MF con tramite l'algoritmo di Edmonds-Karp, determinando anche un taglio di capacità minima.



Esercizio 2.23. Si risolva il seguente problema MCF tramite l'algoritmo di cancellazione dei cicli.

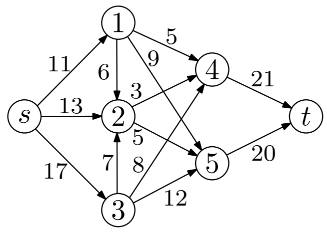


Esercizio 2.24. Si risolva il seguente problema MCF tramite l'algoritmo di cancellazione dei cicli.

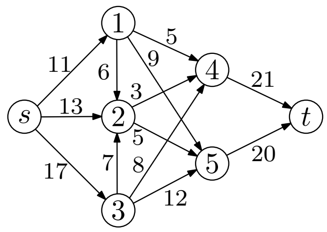


2.2.6 Temi d'esame 2018

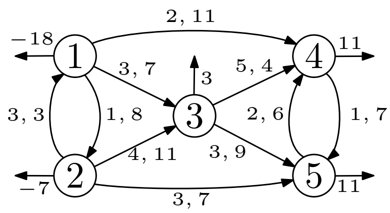
Esercizio 2.25. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si determini inoltre un taglio di capacità minima.



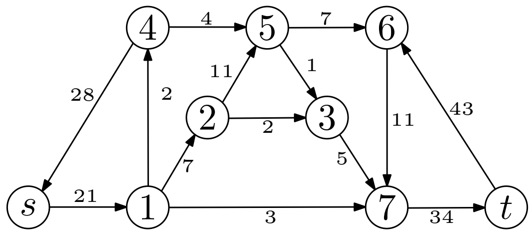
Esercizio 2.26. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Goldberg e Tarjan. Si determini inoltre un taglio di capacità minima.



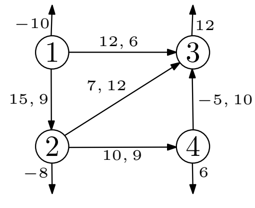
Esercizio 2.27. Si risolva il seguente problema di flusso di costo minimo tramite l'algoritmo basato sulla cancellazione di cicli. Ogni arco (i, j) è etichettato con la coppia c_{ij}, u_{ij} dove c_{ij} è il costo e u_{ij} è la capacità.



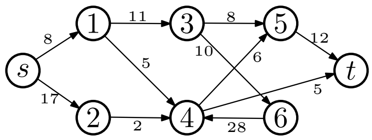
Esercizio 2.28. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si determini altresì un taglio di capacità minima.



Esercizio 2.29. Si risolva il seguente problema MCF tramite l'algoritmo dei camminimi minimi successivi.

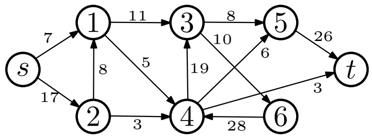


Esercizio 2.30. Si risolva il seguente problema di massimo flusso tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si determini altresì un taglio di capacità minima.

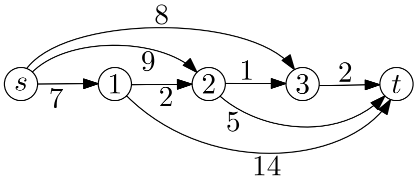


2.2.7 Temi d'esame 2019

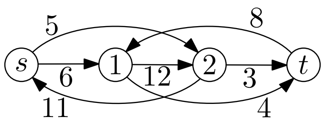
Esercizio 2.31. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si determini inoltre un taglio di capacità minima.



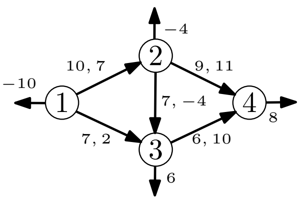
Esercizio 2.32. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Goldberg e Tarjan.



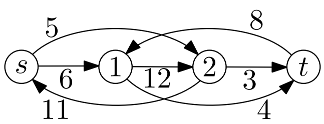
Esercizio 2.33. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp. Si determini altresì un taglio di capacità minima.



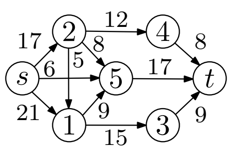
Esercizio 2.34. Si risolva il seguente problema di flusso di costo minimo tramite l'algoritmo di cancellazione di cicli:



Esercizio 2.35. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Goldberg e Tarjan:

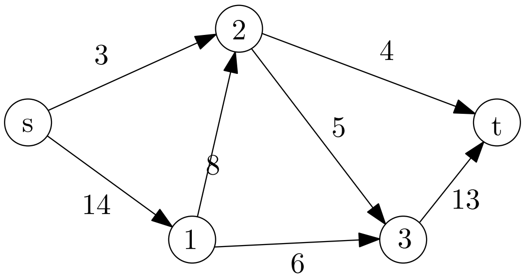


Esercizio 2.36. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds e Karp:



2.2.8 Temi d'esame 2020

Esercizio 2.37. Si risolva il seguente problema di flusso massimo tramite l'algoritmo di Edmonds-Karp e si indichi un taglio di capacità minima. [MF = 15]



3 Metodo del simplesso

3.1 Esercizi con soluzioni

Esercizio 3.1. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min 3x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &\geq 1 & \qquad x_2 + 1 &\geq 1 \\ x_2 &\leq 2x_1 + 2 & 2x_2 + 2 &\geq x_1 \\ x_2 + 2 &\geq x_1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima riga.

Soluzione 3.1. Per prima cosa riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{aligned} &\max cx \\ &Ax \leq b \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \max -3x_1 + x_2 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ \cancel{x_1 - 2x_2 \leq 2} \end{aligned}$$

Ci accorgiamo immediatamente che se sommiamo la seconda disequazione alla quarta otteniamo la quinta, che possiamo dunque eliminare dal sistema. Scriviamo esplicitamente la matrice A e i vettori x, b c.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Procediamo ora eseguendo l'algoritmo del simplesso.

Prima iterazione. $B_1 = \{1, 2\}$ dunque scriviamo A_{B_1}, calcoliamo la sua inversa e la soluzione di base.

$$A_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_{B_1} = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo l'ottimalità della soluzione calcolando la soluzione del problema duale e vedendo se è ammissibile.

$$y_{B_1} = cA_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La seconda componente è minore di zero, per cui non ammissibile. Il corrispondente vincolo esce dalla base, cioè $h = 2$. Cerchiamo ora quale vincolo entra in base. ξ_{B_1} corrisponde alla colonna h di $A_{B_1}^{-1}$ cambiata di segno, e A_{N_1} alla matrice ottenuta da A cancellando le righe corrispondenti ai vincoli di base.

$$\xi_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A_{N_1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{N_1}\xi_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'unico vincolo candidato ad entrare in base è dunque quello corrispondente alla terza riga di A, cioè $k = 3$.

Seconda iterazione. $B_2 = B_1 \cup \{k\} \setminus \{h\} = \{1, 3\}$ dunque scriviamo A_{B_2}, calcoliamo la sua inversa e la soluzione di base.

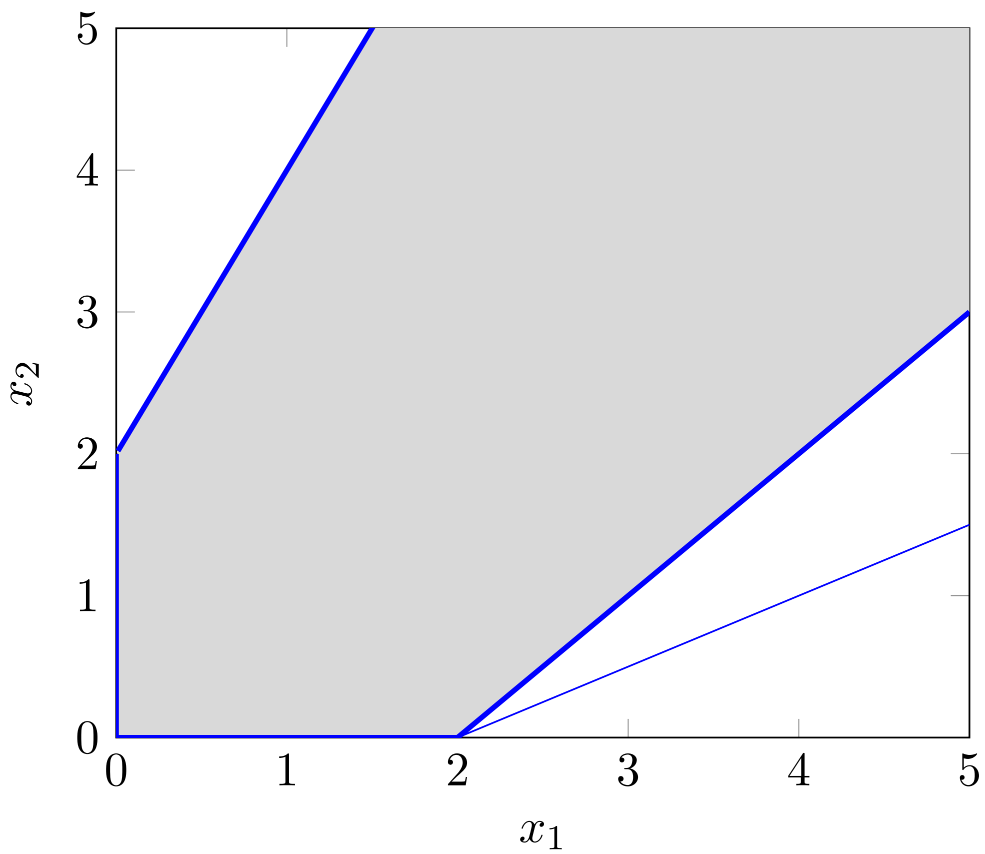
$$A_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x_{B_2} = A_{B_2}^{-1} b_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo l'ottimalità della soluzione calcolando la soluzione del problema duale e vedendo se è ammissibile.

$$y_{B_2} = cA_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il vettore y_{B_2} è non negativo per cui la soluzione è ammissibile per il duale e ottima sia per il primale sia per il duale. Il valore ottimo è $cx_{B_2} = 2$.

Interpretazione grafica.



□

Esercizio 3.2. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 + 4x_1 &\leq 4 \\ x_2 + 5 &\geq 5x_1 \\ 4 &\geq x_1 - x_2 \\ x_2 + x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_2 + 10 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Soluzione 3.2. Per prima cosa riscriviamo il sistema nella forma

$$\begin{aligned} \max cx \\ Ax \leq b \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \max -3x_1 - x_2 \\ 4x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 10 \\ -x_2 \leq -10 \end{aligned}$$

Scriviamo esplicitamente la matrice A e i vettori x, b c.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Procediamo ora eseguendo l'algoritmo del simplesso.

Prima iterazione. $B_1 = \{1, 2\}$ dunque scriviamo A_{B_1}, calcoliamo la sua inversa e la soluzione di base.

$$A_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad b_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x_{B_1} = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo l'ottimalità della soluzione calcolando la soluzione del problema duale e vedendo se è ammissibile.

$$y_{B_1} = cA_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

La prima componente è minore di zero, per cui non ammissibile. Il corrispondente vincolo esce dalla base, cioè $h = 1$. Cerchiamo ora quale vincolo entra in base. ξ_{B_1} corrisponde alla colonna h di $A_{B_1}^{-1}$ cambiata di segno, e A_{N_1} alla matrice ottenuta da A cancellando le righe corrispondenti ai vincoli di base.

$$\xi_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix} \qquad A_{N_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{N_1}\xi_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Due vincoli, corrispondenti alla terza e alla sesta riga della matrice A sono candidati ad entrare in base. Scegliamo quello che minimizza $\frac{b_i - A_i x_{B_1}}{A_i \xi}$.

$$\frac{b_3 - A_3 x_{B_1}}{A_3 \xi} = \frac{27}{4}$$
$$\frac{b_6 - A_6 x_{B_1}}{A_6 \xi} = 18$$

Per cui $k = 3$.

Seconda iterazione. $B_2 = B_1 \cup \{k\} \setminus \{h\} = \{2, 3\}$ dunque scriviamo A_{B_2}, calcoliamo la sua inversa e la soluzione di base.

$$A_{B_2} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad b_{B_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad x_{B_2} = A_{B_2}^{-1} b_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo l'ottimalità della soluzione calcolando la soluzione del problema duale e vedendo se è ammissibile.

$$y_{B_2} = cA_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La prima componente è minore di zero, per cui non ammissibile. Il corrispondente vincolo esce dalla base, cioè $h = 2$. Cerchiamo ora quale vincolo entra in base. ξ_{B_2} corrisponde alla colonna h di $A_{B_2}^{-1}$ cambiata di segno, e A_{N_2} alla matrice ottenuta da A cancellando le righe corrispondenti ai vincoli di base.

$$\xi_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad A_{N_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{N_2}\xi_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

L'unico vincolo che ha componente positiva nel vettore è il sesto, per cui $k = 6$.

Terza iterazione. $B_3 = B_2 \cup \{k\} \setminus \{h\} = \{3, 6\}$ dunque scriviamo A_{B_3}, calcoliamo la sua inversa e la soluzione di base.

$$A_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{B_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b_{B_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad x_{B_3} = A_{B_3}^{-1} b_{B_3} = \begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo l'ottimalità della soluzione calcolando la soluzione del problema duale e vedendo se è ammissibile.

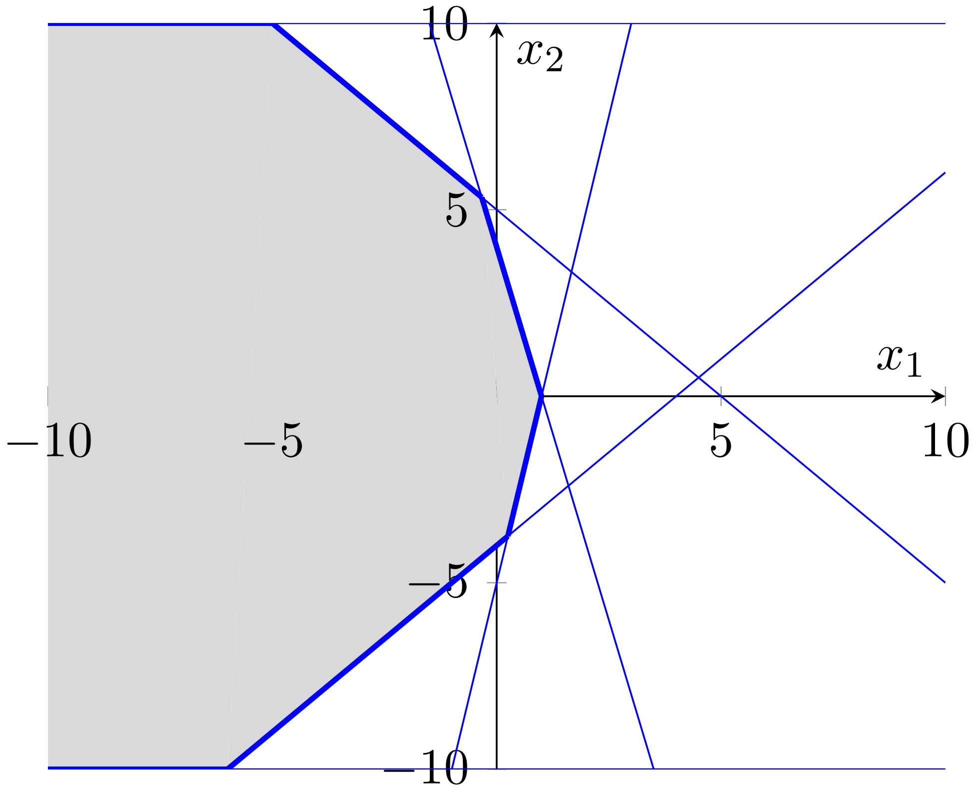
$$y_{B_3} = cA_{B_3}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La prima componente è minore di zero, per cui non ammissibile. Il corrispondente vincolo esce dalla base, cioè $h = 3$. Cerchiamo ora quale vincolo entra in base. ξ_{B_3} corrisponde alla colonna h di $A_{B_3}^{-1}$ cambiata di segno, e A_{N_2} alla matrice ottenuta da A cancellando le righe corrispondenti ai vincoli di base.

$$\xi_{B_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0 \end{pmatrix} \qquad A_{N_3} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{N_3}\xi_{B_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore è non positivo per cui il problema è illimitato.

Interpretazione grafica.



□

Esercizio 3.3. Si trovi una base ammissibile, se esiste, per il seguente problema di programmazione lineare.

$$\min y$$
$$\begin{aligned} x+2 &\geq 0 \\ x &\leq 4 \\ y &\leq x+2 \\ y+x &\leq 4 \end{aligned}$$

Soluzione 3.3. Per prima cosa trasformiamo il problema in forma

$$\max cx$$
$$Ax \leq b$$

per cui

$$\begin{aligned} \max -y \\ -x \leq 2 \\ x \leq 4 \\ -x + y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \end{aligned}$$

Scriviamo esplicitamente la matrice A e i vettori $\overline{x}, b$ e c.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A questo punto abbiamo bisogno di una base da cui partire (non per forza ammissibile). Consideriamo la base $B = \{1, 4\}$, da cui troviamo le matrici A_B e il vettore b_B.

$$A_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare

$$\overline{x}_B = A_B^{-1} \cdot b_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Possiamo trovare gli insiemi di vincoli H e J che rispettivamente sono soddisfatti e non lo sono. Per cui

$$H = \{1, 2, 4\} \qquad J = \{3\}$$

Siccome $J \neq \emptyset$, $\overline{x}_B$ non è ammissibile e allora possiamo scrivere un nuovo programma lineare (sicuramente non vuoto) come segue:

$$\begin{aligned} \min \nu \\ -x \leq 2 \\ x \leq 4 \\ -x + y - \nu \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ \nu \geq 0 \end{aligned}$$

L'intuizione è che per ogni vincolo non soddisfatto, cioè in J, abbiamo sottratto una quantità positiva ν. In questa maniera sicuramente questo nuovo problema è non vuoto. Siccome vogliamo trovare una soluzione ammissibile per il problema iniziale, andiamo a minimizzare ν. Se la soluzione ottima di questo nuovo problema vede $\nu = 0$, significa che le componenti di $\overline{x}$ danno una soluzione ammissibile di base per il problema originale. Altrimenti, se $\nu > 0$. allora il problema originale è vuoto.

Per risolvere questo problema eseguiamo l'algoritmo del simplesso partendo dalla base ammissibile "banale" $\overline{x} = \overline{x}_B$ e $\nu = A_j \cdot \overline{x}_B - b_j$. Per cui

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \nu = \begin{pmatrix} -1 & +1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 = 6$$

Risolvendo il problema troviamo $(\overline{x}^*, \nu^*) = (-2, 0, 0)$, per cui essendo $\nu^* = 0$ il problema originale è non vuoto, e $\overline{x}^* = (-2, 0)$ è soluzione di base ammissibile.

3.2 Esercizi senza soluzioni

3.2.1 Temi d'esame 2013

Esercizio 3.4. Si risolva tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 2x_2 \\ & x_2 \geq x_1 - 2 \\ & x_2 \leq 6 - x_1 \\ & x_2 \leq x_1 + 2 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile $B = \{4, 5\}$.

Esercizio 3.5. Si risolva tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 \geq -1 \\ & x_2 \geq x_1 - 1 \\ & x_2 \leq x_1 + 1 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq -1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile $B = \{4, 5\}$.

Esercizio 3.6. Si risolva tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \geq -1 \\ & x_2 \geq -1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & 2x_2 \leq 2 - x_1 \\ & x_2 + 3 \geq 2x_1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile $B = \{4, 5\}$.

Esercizio 3.7. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ x_2 &\geq -1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\leq x_1 \\ x_1 - 1 &\leq x_2 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile $B = \{1, 2\}$.

3.2.2 Temi d'esame 2014

Esercizio 3.8. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \quad x_2 - x_1$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 & \qquad x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_2 + 1 &\geq x_1 & 2x_2 &\leq 4x_1 + 2 \\ -x_2 &\geq -1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile costituita dai vincoli $x_1 \leq 1$ e $2x_2 + 1 \geq x_1$.

Esercizio 3.9. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \quad x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 \\ x_1 &\geq -1 \\ x_2 &\leq -x_1 + 1 \\ -x_2 &\geq -x_1 - 1 \\ x_2 &\geq x_1 - 2 \\ x_1 + x_2 + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile costituita dagli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.10. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max \quad x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ 0 &\leq x_2 \\ 2 &\geq x_2 \\ x_2 &\leq 2 - 2x_1 \\ x_1 &\leq x_2 + 1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile costituita dai primi due vincoli.

Esercizio 3.11. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min 2x_1 + x_2 + 3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq -2 & x_2 &\geq x_1 - 1 \\ x_2 &\leq -x_1 + 2 & x_2 + x_1 &\geq -1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli $x_2 \geq x_1 - 1$ e $x_2 \leq -x_1 + 2$.

3.2.3 Temi d'esame 2015

Esercizio 3.12. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\geq -2x_1 + 2 & x_2 &\leq -3x_1 + 7 \\ x_1 &\leq 2 & 2x_2 &\geq 1 - x_1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.13. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\geq -1 \\ x_1 &\geq -1 \\ x_2 &\leq x_1 + 1 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 2x_1 - 1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.14. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_2 + x_1 &\geq -1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.15. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6 &\geq 0 \\ 2x_2 + 4x_1 + 3 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.16. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6 &\geq 0 \\ 2x_2 + 4x_1 + 3 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

3.2.4 Temi d'esame 2016

Esercizio 3.17. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min -x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\geq -2x_1 + 2 & \qquad x_2 &\leq -3x_1 + 7 \\ x_1 &\leq 2 & 2x_2 &\geq 1 - x_1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.18. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + 2 &\geq 0 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3 &\geq 0 \\ 3 + x_1 - x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.19. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 10x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\geq -2 \\ 2x_1 - x_2 &\geq -4 \\ x_2 &\leq 3 + x_1 \\ x_2 &\leq 3 - x_1 \\ x_2 &\leq 4 - 2x_1 \\ x_1 &\leq 2 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.20. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 - 5 &\leq 0 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 + 5 &\geq 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2 &\leq 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.21. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min -x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 2x_2 + 2 \\ 3x_1 + x_2 + 1 &\geq -1 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 5 &\geq x_2 \\ x_1 + 5 &\geq 5 \\ x_1 - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.22. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 3x_2 - 10x_1$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &\geq 0 \\ x_1 - 2 &\leq 0 \\ x_2 &\geq -x_1 - 2 \\ x_2 &\geq 2x_1 - 2 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.23. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\geq 2x_1 - 1 \\ x_2 + x_1 + 1 &\geq 0 \\ x_1 &\geq -1 \\ x_2 &\leq x_1 + 1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

3.2.5 Temi d'esame 2017

Esercizio 3.24. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2 &\leq 0 \\ x_2 + 4 &\leq 0 \\ x_2 + 12 &\geq 10x_1 \\ 2x_2 - x_1 &\leq 5 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.25. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min 2x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 0 & \qquad 2x_2 &\leq x_1 \\ x_2 &\geq x_1 - 2 & \qquad x_2 &\leq x_1 + 1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima riga.

Esercizio 3.26. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 0 & x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_2 - x_1 + 4 &\geq 0 & x_1 + x_2 + 5 &\geq 0 \\ x_2 + 3 &\geq 0 & x_1 - x_2 + 2 &\geq 0 \\ x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima riga.

Esercizio 3.27. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 + 1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq x_1 - 2 \\ 2x_2 &\leq 2 - x_1 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

3.2.6 Temi d'esame 2018

Esercizio 3.28. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max y - x$$

$$\begin{aligned} y + 2 &\geq 0 \\ x - 3 &\leq 0 \\ y - 4 + x &\leq 0 \\ y + x + 2 &\geq 0 \\ x + 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.29. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 & x_2 &\leq 1 \\ 2x_2 &\leq 2 + x_1 & x_2 + 2 &\geq 2x_1 \\ x_1 + 4 + 2x_2 &\geq 0 & 2x_1 + x_2 + 4 &\geq 0 \\ 2x_2 + 2x_1 + 5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli nella prima riga.

Esercizio 3.30. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max x + y + 2$$

$$\begin{aligned} y + 2 &\geq 2 \\ x - 3 &\geq -3 \\ y + x - 4 &\leq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.31. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \min\ 2x_1 &+ x_2 \\ x_1 + 2 &\leq 0 \\ x_2 + 1 &\leq 0 \\ x_2 &\leq x_1 + 5 \\ x_2 + 10 &\geq x_1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.32. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \max\ x_2 & \\ x_2 &\geq x_1 \\ x_1 + x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1 + 1 &\geq 0 \\ x_2 + x_1 &\leq 10 \\ x_2 &\leq 10 + x_1 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

3.2.7 Temi d'esame 2019

Esercizio 3.33. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max x_1$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 0 \\ x_2 + 4 &\geq 0 \\ x_2 + 2x_1 &\leq 0 \\ x_2 + 2 &\geq 2x_1 \\ x_2 &\leq 2x_1 + 4 \\ x_2 + 8 + 2x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente agli ultimi due vincoli.

Esercizio 3.34. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_2$$

$$\begin{aligned}
x_2 &\leq x_1 + 3\\
x_2 + x_1 &\leq +3\\
x_2 + 2x_1 &\leq +6\\
x_1 &\leq 5\\
x_2 &\leq 2x_1 + 6\\
x_1 + 5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

Esercizio 3.35. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max 3x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq 0 & 2x_2 + x_1 - 4 &\geq 0\\
x_1 &\leq 4 & 2x_2 - x_1 - 3 &\leq 0\\
x_2 &\geq 1 & x_2 &\leq 4\\
x_2 + x_1 &\leq 7 & x_2 - x_1 + 2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai vincoli della prima linea.

Esercizio 3.36. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min x_1 + 4x_2$$

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq 4\\
x_2 &\leq 4\\
x_2 + 1 - x_1 &\geq 0\\
x_2 - x_1 - 1 &\leq 0\\
x_2 + 3 &\geq 0\\
x_1 + 3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli.

3.2.8 Temi d'esame 2020

Esercizio 3.37. Si risolva, tramite l'algoritmo del simplesso primale, il seguente problema di programmazione lineare:

$$\min -2x$$

$$\begin{aligned} y &\geq 0 \\ 3x - y &\geq 0 \\ -x + 10 &\geq 3y \\ 2x - 6 &\leq y \end{aligned}$$

Si parta dalla base ammissibile corrispondente ai primi due vincoli. $[x = (4, 2)]$

4 Teoria

4.1 Domande senza risposte

4.1.1 Temi d'esame 2013

Domanda 4.1. Si dia una definizione del concetto di *preflusso*, spiegandone brevemente il ruolo negli algoritmi per problemi di flusso visti durante il corso.

Domanda 4.2. Si enunci il Teorema di decomposizione dei poliedri (o Teorema di Motzkin) e se ne descriva il ruolo nella geometria della programmazione lineare.

Domanda 4.3. Che differenza c'è tra un vincolo di assegnamento e uno di semiassegnamento?

Domanda 4.4. Quanti e quali algoritmi abbiamo affrontato, durante questo corso, relativamente al *problema del flusso di costo minimo*? Se ne discutano brevemente le caratteristiche.

Domanda 4.5. Si enunci il Lemma di Farkas. Perché questo risultato è importante per la programmazione lineare?

Domanda 4.6. Come definiamo il *duale* di un dato problema di programmazione lineare? Si spieghi brevemente perché la dualità è un concetto importante nella geometria della programmazione lineare.

Domanda 4.7. Si considerino i problemi di flusso massimo e di flusso di costo minimo in un grafo. Ve n'è uno più generale dell'altro. Quale? Perché?

4.1.2 Temi d'esame 2014

Domanda 4.8. Si enunci il Teorema di Decomposizione di Motzkin e si spieghi la rilevanza dello stesso nell'Algoritmo del Simplesso.

Domanda 4.9. Si descriva il problema MCF e l'algoritmo basato su cammini minimi successivi.

Domanda 4.10. In un problema di flusso massimo, in che relazione stanno il valore del massimo flusso e la minima capacità dei tagli? Si motivi la risposta.

Domanda 4.11. In che misura la programmazione lineare intera è in grado di catturare la logica booleana a due valori?

Domanda 4.12. Che problema risolve l'algoritmo basato su cammini minimi successivi? Su cosa si basa la sua correttezza?

Domanda 4.13. L'algoritmo di Edmonds e Karp è un'istanza di uno schema più generale. Quale? Perché lo si introduce?

Domanda 4.14. Si enunci con precisione il Teorema Debole di Dualità.

Domanda 4.15. Nell'algoritmo del simplesso, la ricerca dell'ottimo è ristretta i vertici del poliedro che definisce la regione ammissibile. Perché?

Domanda 4.16. Cos'è un problema di accoppiamento? Che algoritmi abbiamo visto, a tal riguardo?

Domanda 4.17. Cos'è una funzione lineare a tratti? Perché questo è un concetto interessante in questo corso?

Domanda 4.18. Cosa si intende per *faccia* di un poliedro?

Domanda 4.19. Si enunci il Teorema Forte di Dualità.

4.1.3 Temi d'esame 2015

Domanda 4.20. Cos'è una *direzione di crescita*? E una *direzione ammissibile*?

Domanda 4.21. Si dimostri perché nel problema MCF un flusso ammissibile è ottimo sse non esistono cicli aumentanti di costo negativo.

Domanda 4.22. Se v è il valore di un flusso ammissibile, cosa si può dire rispetto alla relazione tra v, il flusso di un qualunque taglio e la capacità di tale taglio?

Domanda 4.23. Nel problema di flusso massimo, quale è l'algoritmo che garantisce la complessità più bassa tra tutti quelli che abbiamo visto? Si argomenti la risposta.

Domanda 4.24. Si parli brevemente dei due algoritmi per il problema del flusso di costo minimo che abbiamo visto, e della relativa complessità.

Domanda 4.25. Si enuncino i corollari del teorema debole di dualità di cui abbiamo parlato a lezione.

Domanda 4.26. Nella prima parte del corso abbiamo parlato del concetto di *modello*. Se ne discuta brevemente.

Domanda 4.27. Quale risultato permette di restringere drasticamente lo spazio delle soluzioni ammissibili (e quindi di rendere efficiente la ricerca della soluzione ottima) nei problemi di programmazione lineare?

Domanda 4.28. Si diano le definizioni di *cono convesso* e di *cono finitamente generato*.

Domanda 4.29. Che differenza c'è tra uno *pseudoflusso* e un *preflusso*?

Domanda 4.30. È vero che il problema del flusso di costo minimo è una generalizzazione del problema del flusso massimo? Oppure vale il contrario? Si motivi la risposta.

Domanda 4.31. Si enunci, senza dimostrarlo, il Teorema sulla struttura degli pseudoflussi.

Domanda 4.32. Si costruisca un insieme di vincoli $Ax \leq b$ (dove il vettore x consti di sole due variabili) tale che A abbia almeno due righe e $\{1, 2\}$ *non sia* una base ammissibile.

4.1.4 Temi d'esame 2016

Domanda 4.33. Si spieghi cosa si intende per vincoli di *assegnamento* e di *semi-assegnamento*.

Domanda 4.34. Il problema di accoppiamento di massima cardinalità può essere visto come un problema di PLI? Lo si dimostri.

Domanda 4.35. Si discuta dell'algoritmo MCF basato sulla cancellazione di cicli, discutendo la sua definizione e la sua correttezza.

Domanda 4.36. I problemi di ottimizzazione si possono classificare in quattro categorie rispetto ai relativi spazi delle soluzioni ammissibili e valori ottimi. Se ne discuta brevemente.

Domanda 4.37. L'algoritmo per il problema MCF e basato sulla cancellazione di cicli utilizza a sua volta un algoritmo per la costruzione di un flusso ammissibile. Si descriva brevemente quest'ultimo.

Domanda 4.38. Si enunci e si dimostri il teorema debole di dualità.

Domanda 4.39. L'algoritmo per il problema MCF e basato sulla cancellazione di cicli utilizza a sua volta un algoritmo per la costruzione di un flusso ammissibile. Si descriva brevemente quest'ultimo.

Domanda 4.40. Si dimostri che, nell'amubito del problema di massimo flusso, il valore di ogni flusso ammissibile è sempre minore o uguale alla capacità di qualunque taglio.

Domanda 4.41. Si definisca sinteticamente il grafo residuo G_x, nel contesto del problema MCF.

Domanda 4.42. Si descriva in modo preciso il problema MCF.

Domanda 4.43. Si enunci il Teorema sulla struttura degli pseudoflussi, discutendone l'importanza per gli algoritmi che abbiamo visto per il problema MCF.

4.1.5 Temi d'esame 2017

Domanda 4.44. Cosa succederebbe se l'algoritmo di Edmonds e Karp venisse modificato in modo che la ricerca del cammino aumentante producesse sempre un cammino di lunghezza *massima* anziché di lunghezza *minima*? L'algoritmo resterebbe corretto? Cosa si potrebbe dire della relativa complessità?

Domanda 4.45. Parlando di reti, abbiamo visto *due* diverse nozioni di grafo residuo. Quali? In che contesto? Che differenze intercorrono tra di esse?

Domanda 4.46. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente a che un vettore ξ sia direzione ammissibile per un punto $\overline{x}$.

Domanda 4.47. Si discuta brevemente della *complessità* dell'Algoritmo del Simplesso Primale.

Domanda 4.48. In che relazione sono la capacità dei tagli e il valore di ogni flusso ammissibile, nel problema del flusso massimo? Si dia una risposta precisa.

Domanda 4.49. Cosa si intende per algoritmi esatti ed algoritmi euristici?

4.1.6 Temi d'esame 2018

Domanda 4.50. Che differenza c'è tra un preflusso e uno pseudoflusso? Parlando di quali algoritmi abbiamo avuto l'occasione di incontrare ciascuno di essi?

Domanda 4.51. Cosa si intende per *selezione di sottoinsiemi*?

Domanda 4.52. Nella programmazione lineare, cosa si intende per *base ammissibile*?

Domanda 4.53. Nella programmazione lineare, cosa si intende per *poliedro* e che risultato, tra quelli che abbiamo visto, permette di caratterizzare i poliedri?

Domanda 4.54. Si modellizzi, in programmazione lineare, il problema dell'accoppiamento di massima cardinalità in un grafo bipartito.

Domanda 4.55. Si chiarisca per bene la differenza tra *valore ottimo* e *soluzione ottima* in un problema di ottimizzazione.

Domanda 4.56. Cosa si intende, nella geometria della programmazione lineare, per *vertice*?

4.1.7 Temi d'esame 2019

Domanda 4.57. Se il problema primale è illimitato, cosa si può dire del problema duale?

Domanda 4.58. Si parli brevemente delle tre tipologie di problemi di accoppiamento che abbiamo affrontato.

Domanda 4.59. Cosa si intende per *poliedro*? In che senso tale concetto è cruciale in questo corso?

Domanda 4.60. Come si può gestire, nella programmazione lineare, la modellizzazione delle variabili a valori discreti?

Domanda 4.61. Che relazione c'è, nel problema del flusso massimo, tra il flusso e la capacità di un (s,t)-taglio (N_s, N_t)?

Domanda 4.62. Si descrivano brevemente i due modi in cui è possibile catturare il concetto di *poliedro*.

4.1.8 Temi d'esame 2020

Domanda 4.63. Cosa si intende per "selezione di sottoinsiemi"?

Domanda 4.64. Cosa si intende per "semi-assegnamento"?