MODELLIZZAZIONE

Esercizio 1.1. Una banca ha un capitale di C miliardi di euro e due possibilità di investimento in azioni.

1. Ha un ritorno annuo del 15% e un fattore di rischio di $\frac{1}{3}$.
2. Ha un ritorno annuo del 25% e un fattore di rischio di 1.

Il fattore di rischio rappresenta la massima frazione di capitale investito che può essere persa. Un fattore di rischio di 0.25 indica che se vengono comprate azioni per 100€ allora si possono perdere fino a 25€. Si richiede che almeno la metà di C sia senza rischio. L'ammontare di euro investiti in azioni di tipo (2) non può essere maggiore del doppio dei soldi investiti in (1). Almeno $\frac{1}{6}$ di C deve essere investito in azioni di tipo (1). Si dia una formulazione in termini di programmazione lineare per il problema tale che il profitto sia massimizzato. Si dia poi una formulazione dello stesso problema nel caso di n diverse possibilità di investimento, ognuna con il proprio ritorno annuo e il proprio fattore di rischio.

vincoli

X_1 capitale investito in azioni del tipo 1.

X_2 capitale investito in azioni del tipo 2.

funzione obiettivo

$$\max \frac{15}{100} \cdot x_1 + \frac{25}{100} x_2$$

variabili

$$x_2 \leq 2x_1 \qquad \frac{1}{3}x_1 + 1x_2 \leq C \cdot \frac{50}{100}$$

$$\frac{1}{6}C \leq x_1$$

$$x_1 + x_2 = C \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$$

Esercizio 1.2. Una raffineria produce due tipi di benzina, mischiando tre tipi di olio secondo le regole seguenti. L'ultima colonna indica il ricavo in €/barile.

	Olio 1	Olio 2	Olio 3	Ricavo
Benzina A	$\leq 30\%$	$\geq 40\%$	–	5.5
Benzina B	$\leq 50\%$	$\geq 10\%$	–	4.5

Ciascun tipo di olio ha la propria disponibilità e il proprio costo, secondo quanto riportato nella seguente tabella.

Olio	Disponibilità	Costo
1	3000	3
2	2000	6
3	4000	4

Si dia una formulazione in programmazione lineare per il problema di determinare un piano di produzione che massimizzi il profitto. Si svolga poi nuovamente il problema considerando un numero arbitrario di tipi di benzina e di olio.

benzina
$A = O1 + O2 + O3$
$B = O1 + O2 + O3$

Variabili

$X_{i,j} \longrightarrow$ quantità di olio usato per il tipo di benzina
$i \in \{A, B\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$
$y_i \rightarrow$ tipo di benzina

funzione obiettivo

max profitto
ricavo di ogni tipologia di benzina − costo di ogni tipo d'olio

$$\max\ (5.5\,y_A + 4.5\,y_B) - (3(X_{A1} + X_{B1}) + 6(X_{A2} + X_{B2}) + (4(X_{A3} + X_{B3})))$$

vincoli

$X_{A1} + X_{B1} \leq 3000$
$X_{A2} + X_{B2} \leq 2000$
$X_{A3} + X_{B3} \leq 4000$

$y_A = X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}$

$y_B = X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}$

$X_{A1} \leq 0.3 \cdot y_A$

$X_{A2} \geq 0.4\, y_A$

$X_{B1} \leq 0.5\, y_B$

$X_{B2} \geq 0.1\, y_B$

$x_{ij}, y_i \in \mathbb{R}^+$
$\forall i \{A, B\}, \forall j \{1, 2, 3\}$

- **Parametri:** Per ogni tipo i di benzina indichiamo con m_{ij} la minima percentuale di olio j da utilizzare per produrre i, con M_{ij} la percentuale massima e con r_i il ricavo per barile. Indichiamo con d_j la disponibilità dell'olio j e con c_j il suo costo.
- **Variabili:**
  - y_i con $i \in \{1 \dots n\}$ rappresenta il numero di barili prodotti di benzina di tipo i.
  - x_{ij} con $i \in \{1 \dots n\}$ e $j \in \{1 \dots m\}$ rappresenta la quantita di olio j utilizzata per produrre la benzina i.
- **Funzione obiettivo:** $\max z = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot y_i - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_j \cdot x_{ij}$
- **Vincoli:**

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{n} x_{xij} & \leq & d_j & \forall j \in \{1 \dots m\} \\
x_{ij} & \leq & M_{ij} \cdot y_i & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\} \\
x_{ij} & \geq & m_{ij} \cdot y_i & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\} \\
\sum_{j=1}^{m} x_{xij} & = & y_i & \forall i \in \{1 \dots n\} \\
x_{ij}, y_i & \in & \mathbb{R}^+ & \forall i \in \{1 \dots n\}, \forall j \in \{1 \dots m\}
\end{array}$$

Esercizio 1.3. Una compagnia deve affittare dei computer per soddisfare il lavoro dei prossimi quattro mesi.

Mese	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile
Requisito	9	5	7	9

Il costo dell'affitto dipende dalla lunghezza dell'affitto stesso.

Lunghezza	1 mese	2 mesi	3 mesi
Costo	200	350	450

Si dia una formulazione in programmazione lineare intera per il problema di trovare un piano di affitto di minimo costo.

Variabili

r_i = computer richiesti per ogni mese

X_{ij} = numero di computer affitati nel mese i per il mese j.

$i \in \{\text{mesi}\} \rightarrow 1,2,3,4$

$j \in \{\text{piano tariffario} = 1,2,3\}$ $\quad c_j$ = costo nel mese

funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} c_j x_{ij}$$

Vincoli

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 9 = r_1$$
$$X_{12} + X_{13} + X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 5$$
$$X_{13} + X_{22} + X_{23} + X_{31} + X_{32} + X_{33} \leq 7$$
$$X_{23} + X_{32} + X_{33} + X_{41} + X_{42} + X_{43} \leq 9$$

$$X_{ij} \in \mathbb{Z}^+$$

Esercizio 1.4 (Tema d'esame del 11 Gennaio 2019). Una compagnia aerea dispone di n aerei $1, \ldots, n$, e deve decidere in quale aeroporto, tra gli m in cui opera, svolgere le operazioni di manutenzione di ciascun aereo. Ogni aereo i è normalmente basato sull'aeroporto $a_i \in \{1, \ldots, m\}$. Svolgere le operazioni di manutenzione di un aereo presso l'aeroporto j costa c_j euro. Se le operazioni di manutenzione si svolgono in un aeroporto diverso da quello in cui ogni aereo è basato, occorre poi sostenere un costo fisso pari a s. Si formuli in PLI il problema di minimizzare i costi complessivi di manutenzione.

Variabili

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'aereo } i \text{ è mantenuto nell'aeroporto } j \\ 0 \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'aereo } i \text{ non è mantenuto nell'aeroporto } a_i \\ 0 \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\, c_j + \sum_{i=1}^{n} y_i\, s$$

Variabili

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

$$(m-1)\, y_i \geq \sum_{j=1}^{m} |a_i - j| \cdot x_{ij} \geq y_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

Esercizio 1.5. Nell'ambito del problema descritto nell'Esercizio 1.4, si consideri la seguente variazione del problema e la si formuli opportunamente in PLI. Si supponga che la distanza tra l'aeroporto j e l'aeroporto k sia pari a d_{jk} chilometri, e che occorra far volare ogni aereo dall'aeroporto in cui è basato verso l'aeroporto in cui avviene la manutenzione *e viceversa*. Si supponga altresì che far volare ogni aereo per un chilometro costi h Euro.

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}(c_j + 2 d_{ik} \cdot h) + \sum_{i=1}^{n} y_i\, s$$

Esercizio 1.6 (Tema d'esame del 2 Febbraio 2015)**.** Una radio privata deve fare arrivare il suo segnale in una città che si trova al di là di una catena montuosa rispetto alla città da cui trasmette. Per fare ciò decide di installare n ripetitori sulla cima di altrettante colline, ciascuna delle quali si trova ad un'altitudine pari ad a_i. Il costo di costruzione di ogni ripetitore dipende dalla sua altezza: ogni metro costa c_i. Occorre soddisfare solo un vincolo: il dislivello, in metri, tra la cima di un ripetitore e la cima del successivo non può superare una soglia pari a k. Si formuli, in PL, il problema di decidere le altezze dei ripetitori in modo che il relativo costo sia minimo.

Vincoli

h_i = altezza del ripetitore i
$i \in \{1,\dots,n\}$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$$

Variabili

$$-K \leq \sum_{i=1}^{m} (a_{i+1} + h_{i+1}) - (a_i + h_i) \leq K \qquad h_i \in \mathbb{R}^+ \qquad i \in \{1,\dots,m\}$$

Esercizio 1.7 (Tema d'esame del 18 Gennaio 2016). Un'azienda di trasporti ha bisogno di acquistare n litri di carburante ogni mese. Affinché gli autoveicoli funzionino a dovere, occorre che il numero di ottani del carburante utilizzato sia almeno k. L'azienda acquista il suo carburante da due fornitori A e B, che vendono carburante da k_A e k_B ottani, rispettivamente. Sia A che B applicano un prezzo al litro piuttosto alto (p_A e p_B, rispettivamente) per i primi s litri di carburante acquistati dall'azienda (ogni mese). Se il numero di litri acquistati ogni mese supera s, i due fornitori applicano invece un prezzo al litro più basso (ossia b_A e b_B, rispettivamente), ma solo ai litri eccedenti s. Si formuli in PL il problema di determinare da chi acquistare il carburante necessario ogni mese in modo da minimizzare il costo complessivo e da rispettare il requisito sugli ottani.

Vincoli

- x_i con $i \in \{A,B\}$ i litri da acquistare di benzina di tipo i
- y_i con $i \in \{A,B\}$ tale che

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x_i \geq s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- z_{i1} tale che

$$z_{i1} = \begin{cases} x_i & \text{se } 0 \leq x_i \leq s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- z_{i2} tale che

$$z_{i2} = \begin{cases} x_i - s & \text{se } s < x_i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i \in \{A,B\}} z_{i1} p_i + b_i z_{i2} + s p_i y_i$$

variabili

$$\sum_{i \in (A,B)} x_i = n \qquad \frac{1}{n} \sum_{i \in (A,B)} x_i k_i \geq k$$

$$(y_i - 1) \cdot s \leq x_i - s \leq y_i \cdot n \qquad \forall i \in \{A,B\}$$

$$x_i = z_{i1} + 0 \leq z_{i1} \leq s(1-y_i) \qquad \forall i \in \{A,B\}$$

$$0 \leq z_{i2} \leq (n-s) y_i \qquad \forall i \in \{A,B\}$$

$$x_i \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall i \in \{A,B\}$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in \{A,B\}$$

1.2.1 Temi d'esame 2013

Esercizio 1.8. Un'azienda ha a disposizione n operai e ha bisogno di svolgere m attività diverse. Basta che un operaio si dedichi ad un'attività perché quest'ultima possa ritenersi completata. Diversi operai impiegano tempi diversi per svolgere la stessa attività; indichiamo quindi con c_{ij} il costo che l'azienda sostiene nel far svolgere l'attività j all'operaio i, dove $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Occorre ovviamente che tutte le attività siano svolte. Inoltre, l'operaio i non può svolgere più di b_i attività diverse, per ragioni contrattuali. Si formuli il problema di minimizzare il costo complessivo sostenuto dall'azienda come problema PLI.

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{operaio } i \text{ svolge l'attività } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i \in \{1 \dots n\}$ e $j \in \{1 \dots m\}$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_i \sum_j x_{ij} \, c_{ij}$$

Vincoli

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1$$

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq b_i$$

Esercizio 1.9. Un'azienda ha bisogno, per portare a termine la produzione, di una soluzione contenente i tre componenti chimici A, B e C. Il composto deve contenere almeno il 20% di A, almeno il 15% di B e almeno il 30% di C. L'azienda è in contatto con tre fornitori: `Alfa`, `Beta` e `Gamma`. `Alfa` vende essa stessa un composto contente per metà la sostanza A e per metà la sostanza B; il prezzo è di 120 euro al litro. `Beta` vende invece un composto contenente per un terzo A e per due terzi C, il cui prezzo è 140 euro al litro. `Gamma` vende invece i tre componenti chimici separatamente, rispettivamente a 100, 140 e 160 euro al litro. Si formuli il problema di determinare il costo minimo di un litro di soluzione come problema di programmazione lineare.

Variabili

X_α = numero di litri che compro da α
X_β = " " " " " " β
$X_{\gamma A}$ = " " " " " " γ di tipo A
$X_{\gamma B}$ = " " " " " " " " " B
$X_{\gamma C}$ = " " " " " " " " " C
X_{TOT} = TOTALE DI LITRI COMPRATI

	A	B	C	€/L
α	50%	50%		120
β	1/3		2/3	140
γ	100€L	140€L	160€L	

funzione obiettivo

$$\min \; 120 X_\alpha + 140 x_\beta + 100 x_{\gamma A} + 140 x_{\gamma B} + 160 x_{\gamma C}$$

vincoli

$$x_{TOT} = x_\alpha + x_\beta + x_\gamma + x_{\gamma A} + x_{\gamma B} + x_{\gamma C}$$

$$\left(\frac{1}{2}x_\alpha + \frac{1}{3}x_\beta + x_{\gamma A}\right) \ge \frac{20}{100}\, x_{TOT}$$

$$\left(\frac{1}{2}x_\alpha + x_{\gamma B}\right) \ge \frac{15}{100}\, x_{TOT}$$

$$\left(\frac{2}{3}x_\beta + x_{\gamma C}\right) \ge \frac{30}{100}\, x_{TOT}$$

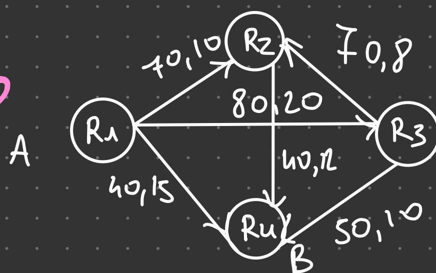
Esercizio 1.10. Un'azienda deve strutturare una rete di comunicazione in modo da garantire una banda di 10 Mbps tra una macchina A e una macchina B, che si trovano in due sedi diverse dell'azienda. Per mettere in comunicazione A e B, l'azienda può far passare i dati attraverso i router R_1, R_2, R_3, R_4 e alcune linee dati esistenti tra di essi, che però devono essere affittate. A si può supporre adiacente a R_1, mentre B è adiacente a R_4 Le capacità (in Mbps) u_{ij} e i costi di affitto (in Euro al Mbps) c_{ij} di ciascuna linea dati *monodirezionale* fra il router i e il router j (dove $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$) sono riassunti di seguito:

$u_{12} = 70$	$u_{13} = 80$	$u_{14} = 40$	$u_{32} = 70$	$u_{24} = 40$	$u_{34} = 50$
$c_{12} = 10$	$c_{13} = 20$	$c_{14} = 15$	$c_{32} = 8$	$c_{24} = 12$	$c_{34} = 10$

Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo di affitto delle linee di comunicazione.

variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il cammino da } i \text{ a } j \text{ viene scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i, j \in \{1,2,3,4\}$$



funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}\, c_{ij}$$

vincoli

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} x_{i4}u_{i4} \ge 10 \\ &\sum_{i=1}^{4} x_{i1}u_{i1} \ge 10 \end{aligned}\right\} \text{quello che entra in } R_1 \text{ e } R_4 \text{ sia almeno 10 Mps}$$

condizione per che sia un cammino

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \sum_{j=1}^{4} x_{ji} \quad \forall i \ne 1,4$$

ciò che entra deve essere uguale a ciò che esce

Dato un grafo pesato non direzionato $G=(V,E)$ trovare il cammino di costo minimo da $s \in V$ a $t \in V$. I costi sono contenuti nelle variabili c_{ij}

<u>Variabili</u>

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se scelgo l'arco } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall (i,j) \in E$$

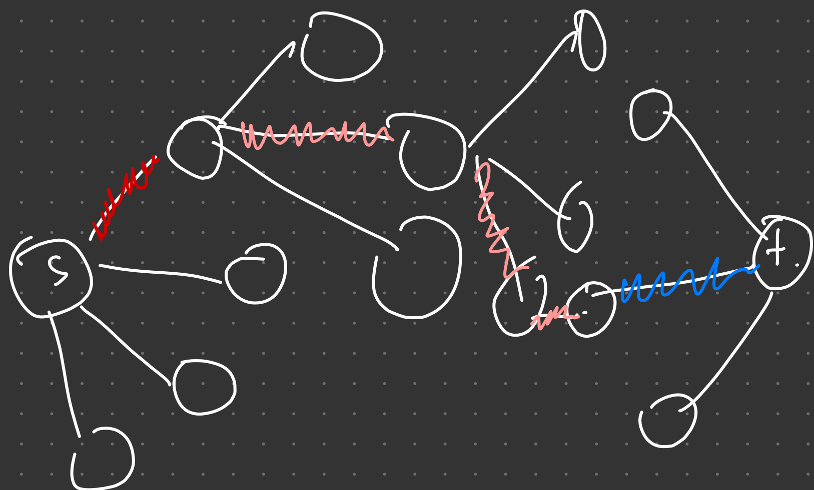
<u>funzione obbiettivo</u>

$$\min \sum_{(i,j)\in E} x_{ij} c_{ij}$$

<u>vincoli</u>

$$\sum_{(s,j)\in E} x_{sj} = 1 \qquad \sum_{(i,t)\in E} x_{it} = 1$$

$$\sum_{(h,j)\in E} x_{hj} = \sum_{(i,h)\in E} x_{ih} \qquad \forall h \in V \setminus \{s,t\}$$



Esercizio 1.11. Una software house deve assumere un certo numero di programmatori, da scegliere tra n candidati $1, \ldots, n$. Ogni programmatore i è in grado di scrivere, ogni settimana, p_i righe di codice nel linguaggio `Python` e j_i righe di codice nel linguaggio `Java`. A tutti i candidati viene offerto lo stesso tipo di contratto e quindi lo stesso stipendio. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo totale dei programmatori assunti, tenendo conto che complessivamente l'azienda ha bisogno di scrivere ogni settimana a righe di codice `Python` e b righe di codice `Java`.

Variabili

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se il dipendente i-esimo viene assunto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geq a$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i j_i \geq b$$

Esercizio 1.12. Un'azienda sta rinnovando il sistema informativo, e decide di acquistare nuovo software e in particolare un programma di videoscrittura, un foglio elettronico e un programma per la contabilità aziendale. Il mercato mette a disposizione n programmi di videoscrittura diversi, m fogli elettronici diversi, e p programmi diversi per la contabilità aziendale. Ciascuno di essi richiede un certo numero di librerie prese da un unico insieme $\{1, \dots, r\}$. Si determini la scelta più conveniente per l'azienda, sapendo che:

- L'i-esimo programma di videoscrittura ha un costo pari a c_i e ha bisogno delle n_i librerie $a_i^1, \dots, a_i^{n_i} \in \{1, \dots, r\}$.
- L'i-esimo foglio elettronico ha un costo pari a d_i e ha bisogno delle m_i librerie $b_i^1, \dots, b_i^{m_i} \in \{1, \dots, r\}$.
- L'i-esimo programma di contabilità aziendale ha un costo pari ad e_i e ha bisogno delle p_i librerie $c_i^1, \dots, c_i^{p_i} \in \{1, \dots, r\}$.
- L'i-esima libreria ha un costo pari a f_i.

PARAMETRI

n programmi di videoscrittura $\longrightarrow$ c_i costo del programma i-esimo
n_i librerie $a_i^1, \dots, a_i^{n_i} \in \{1, \dots, r\}$

r librerie

m fogli elettronici $\longrightarrow$ d_i costo dell'i-esimo foglio
m_i librerie $b_i^1, \dots, b_i^{m_i} \in \{1, \dots, r\}$

p programmi di contabilità aziendale $\longrightarrow$ e_i costo dell'i-esimo programma
p_i librerie $c_i^1, \dots, c_i^{p_i} \in \{1, \dots, r\}$

f_i costo della i-esima libreria

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in \{a_i^1, \dots, a_i^{n_i}\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in \{b_i^1, \dots, b_i^{m_i}\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in \{c_i^1, \dots, c_i^{p_i}\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VARIABILI

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{se acquista l'}i\text{-esimo programma di videoscrittura} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g_i = \begin{cases} 1 & \text{se acquista l'}i\text{-esimo foglio elettronico} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{se acquista l'}i\text{-esimo programma di contabilità} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$u_j = \begin{cases} 1 & \text{se usa la libreria } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{i=1}^{n} v_i c_i + \sum_{i=1}^{m} g_i d_i + \sum_{i=1}^{p} t_i e_i + \sum_{j=1}^{r} f_j u_j$$

VINCOLI

$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ compra un solo programma di videoscrittura

$\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$ compra un solo foglio elettronico

$\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$ compra un solo programma di compatibilità

$$u_j \leq \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} g_i b_{ij} + \sum_{i=1}^{p} t_i c_{ij}$$

$$M \cdot u_j \leq \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} g_i b_{ij} + \sum_{i=1}^{p} t_i c_{ij}$$

$$M \cdot u_j \geq \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} g_i b_{ij} + \sum_{i=1}^{p} t_i c_{ij} \geq u_j$$

$\forall j \in \{1, \dots, r\}$ con M grande

Esercizio 1.13. Una raffineria di petrolio ha la necessità di produrre Benzina Verde e Gasolio. I ricavi per litro, le quantità massime da produrre, e la viscosità massima dei due tipi di prodotto sono riassunti nella tabella seguente.

	Ricavi al litro	Quantità max	Viscosità max
Benzina Verde	0.725	20000	5.2
Gasolio	0.615	18000	8.1

La raffineria ha accesso a due tipi di petrolio, il primo di origine nazionale, il secondo di origine internazionale. Queste due varietà di prodotto hanno costi diversi, disponibilità massime diverse, ma anche viscosità differenti, come riassunto nella tabella seguente:

	Costi al litro	Disponibilità max	Viscosità
Nazionale	0.225	12000	4.6
Internazionale	0.195	50000	7.8

Si formuli in PL il problema di determinare il piano di produzione ottimo per la raffineria in oggetto.

variabili

x_A = litri di Benzina Verde

x_B = litri di Gasolio

$y_{i,j}$ = litri di petrolio della i-esima tipologia per la j-esima tipologia

funzione obiettivo

$$\max \; 0.725 x_A + 0.615 x_B - (0.225(y_{N,A} + y_{N,B}) + 0.195(y_{I,A} + y_{I,B}))$$

vincoli

$$\left.\begin{aligned} x_A &\le 20\,000 \\ x_B &\le 18\,000 \\ y_{N,A} + y_{N,B} &\le 12\,000 \\ y_{I,A} + y_{I,B} &\le 50\,000 \end{aligned}\right\} \text{vincoli per la quantità}$$

$$4.6\, y_{N,A} + 7.8\, y_{I,A} \le 5.2\, x_A$$

$$7.8\, y_{I,B} + 4.6\, y_{N,B} \le 8.1\, x_B$$

$$y_{N,A} + y_{I,A} = x_A$$

$$y_{I,B} + y_{N,B} = x_B$$

Esercizio 1.14. Un'azienda di trasporti si trova nella necessità di trasportare alcuni fusti, ciascuno contenente un composto chimico. Indichiamo gli n fusti con i numeri $1, \dots, n$. Ciascun fusto i pesa k_i Kg e il suo prezzo è di p_i Euro. Il camion di cui dispone l'azienda può trasportare al più s tonnellate di materiale. Alcuni fusti non possono essere trasportati assieme, per ragioni di sicurezza. In dettaglio abbiamo due insiemi $A, B \subsetneq \{1, \dots, n\}$ i cui elementi sono fusti che non possono essere trasportati contemporaneamente. Si scriva un programma lineare per il problema di massimizzare il costo dei fusti trasportati in *un singolo* viaggio del camion.

VARIABILI

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo fusto viene scelto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PARAMETRI

$$c_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i,j \in A \text{ o } i,j \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(i e j sono compatibili)

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max \sum_{i}^{n} x_i p_i$$

VINCOLI

$$x_i x_j \leq c_{ij} \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{i}^{n} x_i k_i \leq s \cdot 1000$$

Esercizio 1.15. Uno studio tecnico sta progettando un'autostrada lunga 100 Km e si trova nella situazione di dover decidere come posizionare le n colonnine per il soccorso sanitario e meccanico. Il costo complessivo delle colonnine dipende dalla quantità di cablaggio necessario a collegare ciascuna delle n colonnine alla centrale telefonica (posta ad una estremità del percorso) e alla centrale informatica (posta all'altra estremità). Lo stesso cavo telefonico può essere usato per collegare tutte le colonnine, una di seguito all'altra. Ogni colonnina, invece, avrà bisogno di un cavo di rete distinto. C'è poi un'ultimo vincolo: ogni colonnina non può trovarsi a meno di 2 Km dalla successiva. Si formuli in programmazione lineare il problema di determinare la posizione delle n colonnine lungo il percorso dell'autostrada, in modo che il costo totale del cablaggio sia minimo.

Variabili

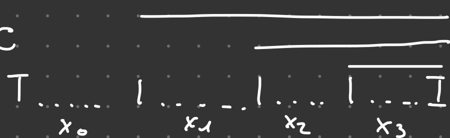
x_i = distanze tra i e $i+1$, o la distanze tra i e 100km se $i=n$ $\forall i \{0,\dots,n\}$

PARAMETRI

t = costo del filo tel per ogni chilometro

C = costo del cavo di rete per ogni km

Considero T a 0 Km e I a 100km



Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=0}^{n-1} (x_i t) + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \overset{x+1\dots}{\dots} + x_n\right) C$$

$$C\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_j\right)$$

Vincoli

$x_0 \geq 0$

$x_i \geq 2$ $\forall i \in \{1,\dots,m-1\}$

$x_n \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = 100$$

Esercizio 1.16. Un programmatore si trova nella situazione di dover far svolgere n task diversi agli m processori della macchina a sua disposizione, ciascuno capace di eseguire s_i istruzioni per secondo. Ogni task i (con $1 \leq i \leq n$) richiede l'esecuzione di t_i istruzioni. Le istruzioni necessarie a passare da un task al successivo prendono tempo trascurabile. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il tempo necessario a completare gli n task, assumendo che gli m processori lavorino in parallelo.

VARIABILI

x_{ij} $\begin{cases} 1 & \text{la task i-esima viene svolta dalla j-esima macchina} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad j \in \{1, \dots, m\}$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{j}^{m} \left(\sum_{i}^{n} x_{ij} t_i \right) \frac{1}{s_j}$$

task1 → 2 istruzioni → t_1
task2 → 3 istruzioni t_2
machina 5 → 5 istruzioni
machina 8 → 3 istruzioni
min

VINCOLI

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Esercizio 1.17. Un'azienda ha la necessità di trasportare n fusti contenenti sostanze chimiche tramite m container. Ciascun fusto i (con $1 \leq i \leq n$) ha un costo pari a c_i, la concentrazione di acido fosforico in esso è pari ad a_i, e la sua capacità ammonta a r_i. Si formuli in PLI il problema di allocare i fusti ai container, in modo che il (massimo) costo dei fusti in ciascun container risulti minimo (in modo da ridurre la perdita nel caso in cui uno dei container risulti disperso). Occorre poi garantire che la concentrazione di acido fosforico in ogni container non sia superiore al limite di legge, fissato a v.

PARAMETRI

$1 \dots n$ fusti
$1 \dots m$ container
c_i costo del fusto i
a_i quantità di acido fosforico
r_i capacità del fusto i-esimo

VARIABILI

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo fusto è nel j-esimo container} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i \in \{1, \dots, n\}$ $j \in \{1, \dots, m\}$

$z =$ costo massimo che possono contenere i container

FUNZIONE OBIETTIVO

$\min z$

VINCOLI

$$\sum_{i}^{n} x_{ij} a_i \cdot r_i \leq v \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{j}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$z \geq \sum_{i} x_{ij} c_i$$

Esercizio 1.18. Un'azienda deve far eseguire n lavori $1, \dots, n$ ad una singola macchina, che può eseguire un solo lavoro alla volta. Alcuni di questi n lavori possono essere eseguiti solo se altri sono stati già precedentemente svolti. Formalmente, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, esiste un sottoinsieme D_i di $\{1, \dots, n\}$ i cui elementi sono tutti lavori che devono essere necessariamente eseguiti prima di i. Ovviamente, D_i è un parametro del problema, ed è quindi a disposizione dell'azienda. Il costo di esecuzione di un lavoro i dipende da quanti lavori sono stati eseguiti prima di i: se i è il j-esimo lavoro ad essere eseguito, il suo costo è c_{ij}, anch'esso parametro del problema. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo d'esecuzione dei lavori.

PARAMETRI

n → lavori da far eseguire a una singola macchina

D_i di $\{1,\dots,n\}$ lavori che devono essere eseguiti prima di i

PREPROCESSIONE

$$\forall i,j \in \{1\dots n\} \qquad d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in D_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VARIABILI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se eseguo l'i-esimo lavoro per il j-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

VINCOLI

$0 \le x_{ij} \le 1 \quad \forall i,j \in \{1\dots n\}$ (perché la variabile x è logica)

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1\dots n\} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1\dots n\} \end{array}\right\} \text{(matrice di permutazione)}$$

2 modi:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\, x_{ik}}_{t(i)} < \underbrace{\sum_{j=1}^{n} k\, x_{jk}}_{t(j)} + \overset{n}{\overset{\parallel}{M}}(1-d_{ij}) \quad \forall i,j \in \{1\dots n\}$$

$\vee$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k\, x_{ik}}_{t(i)} < \underbrace{\sum_{j=1}^{n} k\, x_{jk}}_{t(j)} \quad \forall j \in \{1\dots n\} \; i \in D_j$$

Esercizio 1.19. Un gruppo di n amici e m amiche, dove $n + m = 2k$, decidono di organizzare una partita di calcio in cui ciascuna squadra sia formata da k giocatori. I numeri reali positivi $a_1, \dots, a_n$ sono un'indice della qualità tecnica di ciascun giocatore maschio. Similmente per i numeri reali positivi $b_1, \dots, b_m$ e le giocatrici. Si formuli in programmazione lineare il problema di determinare quale sia, tra tutte le possibili, la composizione delle due squadre che garantisca la minor differenza (in valore assoluto) tra la somma delle qualità tecniche dei componenti della prima squadra e della seconda. Occorre anche garantire che ciascuna squadra abbia tra le sue fila almeno q giocatrici.

Variabili

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{maschio i-esimo che va nella squadra A} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

$$y_j \begin{cases} 1 & \text{femmina j-esima che va nella squadra A} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \forall j \in \{1 \dots m\}$$

Funzione obiettivo

$$\min \left| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \sum_{j=1}^{m} y_j b_j \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} (1-x_i) a_i + \sum_{j=1}^{m} (1-y_j) b_j \right) \right|$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j = k$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \geq q$$

$$\sum_{j=1}^{m} (1-y_j) \geq q$$

Esercizio 1.20. Un allevamento bovino deve decidere in che misura miscelare gli n mangimi che il mercato mette a disposizione. Per ogni $1 \leq i \leq n$, c_i è il costo di un chilogrammo del mangime i. Ogni grammo del mangime i, contiene p_i milligrammi di proteine, g_i milligrammi di grassi, e a_i calorie. Si formuli in PL il problema di determinare in che modo formare un chilogrammo di mangime in modo che il suo costo sia minimo, ma che esso contenga almeno 170 milligrammi di proteine, al più 200 milligrammi di grassi, e al più 1100 calorie.

Variabili

x_i = quantità di grammi che compro del i-esimo mangime $\forall i \in \{1 \dots m\}$

n mangimi
c_i costo al kg per ogni $i \in \{1 \dots m\}$
ogni grammo di i
p_i mg proteine
g_i mg grassi
a_i calorie

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot 10^{-2} \cdot c_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} 100 x_i p_i \geq 170$$

$$\sum_{i=1}^{m} 100 x_i g_i \geq 200$$

$$\sum_{i=1}^{m} 100 x_i a_i \geq 1100$$

$x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1 \dots m\}$

1.2.3 Temi d'esame 2015

Esercizio 1.21. Un'azienda informatica produce tre modelli diversi di PC. Ciascun esemplare del modello i (con $1 \leq i \leq 3$) ha bisogno, per essere costruito, di m_i minuti per il montaggio, di o_i minuti per l'installazione del software, e di g_i minuti per la spedizione. I reparti dell'azienda che si occupano di montaggio, installazione del software e spedizioni, possono mettere a disposizione rispettivamente n, s e p ore di lavoro al mese. Si supponga poi che il guadagno indotto dalla vendita del modello i sia pari ad a_i. Per ragioni di mercato, infine, l'azienda vuole evitare che ciascuno dei tre modelli venga prodotto in un numero di unità *superiore* alla metà del numero totale dei PC prodotti. Si scriva un programma lineare che permetta all'azienda di determinare la produzione di pezzi di ogni modello, in modo che il guadagno complessivo risulti massimo.

Variabili

x_i = quantità di pc che produco di un modello

$tot = m_i + o_i + g_i$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$n \quad s \quad p$

$a_i \rightarrow$ guadagno dalla vendita dell'i-esimo modello

Funzione obiettivo

$$\max \sum_{i=1}^{3} x_i a_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{3} x_i m_i \leq n \cdot 60$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i o_i \leq s \cdot 60$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i g_i \leq p \cdot 60$$

$$x_i \leq \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{2}$$

$x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$

Esercizio 1.22. Una compagnia aerea deve rinnovare completamente la sua flotta. Il mercato mette a disposizione n modelli di aerei, ciascuno con un costo pari a c_i e un'autonomia di volo pari ad a_i chilometri. Di ciascun modello, la compagnia può ovviamente comprare un qualunque numero di esemplari. Ogni giorno, la compagnia in questione deve effettuare m voli, ciascuno di una distanza pari a d_j chilometri. Ogni aereo può fare v voli ogni giorno. Se si acquista il modello di aereo i, occorre anche addestrare un'equipe che si occuperà di manutenzione, che costa t_i. Si scriva un programma lineare che permetta alla compagnia aerea di minimizzare il costo totale del rinnovo della sua flotta.

Variabili

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se la compagnia acquista un aereo del i-esimo modello} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

x_i = quantità di aerei che la compania compra dell' i-esimo modello

$$h_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il j-esimo volo viene svolto dall'iesimo } i \in \{1 \dots n\} \text{ modello} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{m} y_i x_i c_i + y_i t_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} h_{ij} a_i \geq d_j \qquad \forall j \in \{1 \dots m\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} h_{i,j} = 1 \qquad \forall j \in \{1 \dots m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} h_{i,j} \leq v x_i \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

$$h_{i,j} \leq y_i \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\} \ \forall j \in \{1 \dots m\}$$ non posso avere far fare un volo a un aere se non lo posseggo

$M = m$ (numeri di voli)

$$x_i \leq M y_i \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

$$x_i \geq y_i \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

Esercizio 1.23. Un corso di programmazione prevede che gli studenti effettuino un progetto, suddivisi in gruppi di esattamente 5 studenti. Gli studenti sono complessivamente n (che supponiamo per semplicità essere un multiplo di 5) e la media aritmetica dei voti di ciascun studente i è m_i. Ogni studente i può indicare uno studente $s_i \in \{1, \ldots, n\}$ con il quale preferisce non lavorare. Se i si trova nello stesso gruppo di s_i diremo che si sta verificando un'*incompatibilità*. Si determini, in PLI, come costruire i gruppi in modo tale che la media delle medie aritmetiche degli studenti di ogni gruppo sia inclusa tra 24 e 28, e che il numero di incompatibilità sia minimo.

PARAMETRI

$m = \frac{n}{5}$

$i \in \{1, \ldots, n\}$

$j \in \{1, \ldots, \frac{n}{5}\}$

$a_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } j = s_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

VARIABILI

$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo studente è nel } j\text{-esimo gruppo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} a_{ij}$$

Vincoli

$$24 \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} m_i}{5}}{m} \leq 28$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 5 \qquad \forall j \in \{1 \ldots m\}$$

Esercizio 1.24. Una compagnia petrolifera dispone di n giacimenti petroliferi e m raffinerie. Da ogni giacimento petrolifero i vengono estratte p_i tonnellate di greggio al giorno, mentre ogni raffineria j può raffinare r_j tonnellate di greggio al giorno. Ogni giacimento i è connesso alla raffineria j tramite un oleodotto dedicato di capacità giornaliera a_{ij} (in tonnellate) e il cui costo operativo giornaliero è c_{ij}. Si costruisca un programma lineare che determini come instradare la produzione giornaliera degli n giacimenti in modo da minimizzare il costo operativo complessivo.

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo giacimento è collegato alla j-esima raffineria} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} c_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} a_{ij} \leq p_i \qquad \forall j \in \{1 \dots m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} a_{ij} \leq r_j \qquad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

Esercizio 1.25. Si consideri un grafo diretto $G = (V, E)$ in cui $V = \{1, \dots, n\}$ e $E \subseteq V \times V$. Si supponga che per ogni $(i, j) \in E$ sia definito un costo $c_{ij} \geq 0$. Siano fissati un nodo sorgente $s \in V$ ed un nodo destinazione $t \in V$ diverso da s. Si formuli in PLI il problema di determinare un cammino di costo minimo tra s e t. Si ricorda che un tale cammino è nient'altro che una sequenza di archi adiacenti che connettano s a t, e il suo costo è la somma dei costi degli archi che lo compongono.

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se scelgo l'arco } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in E$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} c_{ij}$$

Vincoli

$$\boxed{\sum_{(s,d) \in E} x_{s,d} = 1} \qquad \sum_{(o,t) \in E} x_{o,t} = 1$$

$$\sum_{(o,j) \in E} x_{oj} = \sum_{(j,d) \in E} x_{jd} \qquad \forall o, d \in V \setminus \{s, t\}$$

ciò che entra deve essere uguale a ciò che esce

Esercizio 1.26. Una casa editrice deve realizzare un CD-ROM contenente n documenti $1, \dots, n$, ciascuno di dimensione pari a s_i Kbyte. Ha a disposizione m programmi di compressione $1, \dots, m$. Ciascun programma di compressione j comprime il documento i di una percentuale c_{ij}. (Ad esempio, se $c_{ij} = \frac{1}{10}$, il j-esimo programma di compressione trasformerebbe il documento i in un file di dimensione pari a $\frac{s_i}{10}$ byte.) Oltre ai file compressi, il CD-ROM deve anche contenere i programmi di compressione, ciascuno dei quali occupa d_j Kbyte. L'utilizzo del j-esimo programma di compressione comporta un costo (fisso) pari p_j Euro (a causa delle relative licenze). Si formuli in PL il problema di scegliere quali software di compressione utilizzare, in modo da minimizzare il prezzo, ma con il vincolo di tenere la dimensione del CD al di sotto di 650 Mbyte.

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se i-esimo documento viene compresso dal j-esimo programma} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se acquisto il j-esimo programma} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} y_j p_j$$

Vincoli

$$\sum_{j}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}$$

$$\sum_{i}^{m} \sum_{j}^{n} x_{ij} s_i c_{ij} + \sum_{j} y_j d_j \le 650 \cdot 1000$$

$$\sum_{i}^{n} x_{ij} \ge y_j \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_{ij} \le y_j \ge 1$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}$$

Esercizio 1.27. Un agente di commercio ha bisogno di trasportare n oggetti $1, \ldots, n$. Ciascun oggetto i pesa p_i chilogrammi. L'agente di commercio ha a disposizione m scatoloni $1, \ldots, m$, ciascuno in grado di contenere oggetti pesanti al più c_j chilogrammi. Si formuli in PLI il problema di determinare il minor numero possibile di scatoloni che possano contenere *tutti* gli n oggetti.

Variabile

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo oggetto lo metto nel j-esimo scatolone} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j \begin{cases} 1 & \text{se uso il j-esimo scatolone} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} y_j$$

Vincoli

$$x_{ij} \leq y_j \geq 1 \qquad \forall i \in \{1 \ldots m\}, \forall j \in \{1 \ldots m\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq y_j \qquad \forall j \in \{1 \ldots m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1 \ldots m\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} p_i \leq c_j \qquad \forall j \in \{1 \ldots m\}$$

Esercizio 1.28. Il Corso di Laurea Magistrale in Informatica di un certo Ateneo (certo non di quello bolognese!) è organizzato in modo molto liberale: vengono offerti n corsi $1, \ldots, n$, ciascuno dei quali di c_i crediti, e gli unici vincoli da rispettare al momento della formulazione di un piano degli studi sono i seguenti:

- I crediti dei corsi scelti devono sommare a 120;
- Per ogni corso i esiste un insieme di corsi $d_i \subseteq 1, \ldots, n$, gli elementi del quale sono quei corsi che occorre includere nel piano degli studi qualora i stesso sia tra i corsi scelti.

Supponi di volerti inscrivere a questa Laurea Magistrale, e di aver già determinato, per ogni corso i, un indice della relativa difficoltà, $t_i \in \mathbb{R}$. Supponi inoltre di aver determinato l'insieme $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ dei corsi che effettivamente ti interessano. Formula, in PLI, il problema di determinare un piano di studi:

- che soddisfi i vincoli di cui sopra;
- tale che la difficoltà media dei corsi che hai scelto sia inferiore ad una soglia $k \in \mathbb{R}$;
- tale che il numero dei crediti dei corsi che ti interessano (tra quelli scelti) sia massimo.

PARAMETRI

n corsi $\longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha: c_i = crediti del corso i

$d_i \subseteq \{1, \ldots, n\}$ = insieme dei corsi da includere qualora i sia tra i corsi scelti

t_i = difficoltà del corso i

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in d_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ = insieme dei corsi che ti interessano $\longrightarrow z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in I \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

K = soglia di difficoltà massima

VARIABILI

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il corso } i \in I \text{ viene inserito nel piano di studi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il corso } i \notin I \text{ viene inserito nel piano di studi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\max \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot c_i)$$

VINCOLI

$$x_i \leq z_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot c_i + y_i \cdot c_i) = 120$$

$$x_i = 1 - y_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$x_i \cdot d_{ij} \leq y_j + x_j \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot t_i + y_i \cdot t_i)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)} \leq K$$

1.2.4 Temi d'esame 2016

Esercizio 1.29. Un'azienda ha appena creato n nuovi reparti deve allocare a tali reparti alcune delle m fotocopiatrici a disposizione. Ad ogni reparto possono essere allocate anche più fotocopiatrici. Ogni fotocopiatrice i ha un costo di gestione mensile pari a c_i e può fotocopiare al massimo f_i fogli al mese. Ogni reparto j, di contro, ha bisogno di effettuare r_j fotocopie al mese. Per ragioni di spazio, ciascun reparto non può ricevere più di 5 fotocopiatrici. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di minimizzare il costo di gestione complessivo delle fotocopiatrici utilizzate.

Variabili $\quad j \in \{1 \dots n\}, \; i \in \{1 \dots m\}$

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima fotocopiatrice è collocata nel j-esimo reparto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 5 \quad \forall j \in \{1 \dots n\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} f_i \geq r_j \quad \forall j \in \{1 \dots n\}$$

Esercizio 1.30. La mappa di una certa città può essere vista come un grafo indiretto i cui nodi sono n punti di interesse e i cui archi sono le vie che collegano tali punti di interesse: un tale arco $\{i, j\}$ rappresenta una strada di lunghezza $l_{\{i,j\}}$ che collega il punto di interesse i al punto di interesse j. Si scriva un programma lineare che permetta di determinare il percorso (che può comprendere più strade) di lunghezza complessiva minima tra due punti di interesse s e t (dove $s \neq t$).

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 \text{ se percorro il percorso che collega } i \text{ a } j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, l_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{o=1}^{n} x_{s,o} = 1$$

$$\sum_{d=1}^{n} x_{d,t} = 1$$

$$\sum_{o=1}^{n} x_{i,o} = \sum_{d=1}^{n} x_{d,i} \qquad \forall i \in \{1 \dots n\} \setminus \{s,t\}$$

Esercizio 1.31. In una mensa universitaria c'è la necessità di acquistare grandi quantità di pasta. Per evitare complicazioni, la mensa acquista sempre e solo spaghetti. Il fornitore di riferimento può offrire confezioni di spaghetti di n tipi diversi. La confezione i (con $1 \leq i \leq n$) pesa p_i grammi e costa c_i Euro. Un chilo di spaghetti del tipo i contiene g_i grammi di grassi e a_i grammi di carboidrati. Sapendo che la mensa ha bisogno di acquistare k chili di pasta al mese, si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo per l'acquisto di pasta, sapendo che per legge la pasta offerta agli studenti non può contenere più di r grammi di grassi e b grammi di carboidrati per ogni etto.

Variabili

x_i = numero di confezioni dell'i-esimo tipo acquistate $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i c_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i g_i \leq r \cdot 100$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i a_i \leq b \cdot 100$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \geq k \cdot 1000$$

Esercizio 1.32. Il CEO di una grande azienda decide di affidarsi ad n fornitori di servizi cloud per la memorizzazione dei suoi dati, che al massimo possono arrivare ad occupare t Terabyte. Il costo di utilizzo annuale per l'i-esimo fornitore è pari a c_i Euro al Gigabyte. L'i-esimo fornitore, inoltre, garantisce che il trasferimento di dati in download avvenga ad una velocità di almeno d_i Megabit al secondo, mentre il trasferimento dei dati in upload avvenga ad una velocità di almeno u_i Megabit al secondo. Sapendo che l'azienda deve fare in modo che la la velocità *media* di accesso, sia in download che in upload, sia di almeno v Megabit al secondo, si formuli in PL o PLI il problema di minimizzare il costo annuale sostenuto dall'azienda.

Variabili

x_i = numero di GB allocati al provaider i

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i c_i$$

Vincoli

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \geq v \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i u_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i} \geq v$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq t \cdot 1024$$

$$x_i \leq y_i t \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

$$x_i \geq y_i \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

Esercizio 1.33. Un'azienda di trasporti ha a disposizione n camion $1, \ldots, n$, ciascuno in grado di percorrere al massimo m_i chilometri di strada ogni anno. I camion sono equivalenti rispetto al consumo di carburante, ma *non* rispetto ai costi assicurativi. La polizza relativa al camion i ha un costo annuo pari a c_i se i chilometri percorsi da i sono al più k_i, ma diventa $d_i > c_i$ se i chilometri percorsi sono superiori a k_i. Complessivamente, l'azienda ha bisogno che gli n camion percorrano complessivamente due milioni di chilometri ogni anno. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo complessivo sostenuto dall'azienda.

Variabile

x_i = Km percorsi dall'i-esimo camion

$$y_i \begin{cases} 1 \text{ se } x_i \le k_i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i c_i + (1-y_i) d_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2 \cdot 10^6$$

$$x_i \le m_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$x_i \le y_i k_i + m_i(1-y_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

$$x_i \ge k_i(1-y_i) \qquad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Esercizio 1.34. Un'azienda appena costituita ha la necessità di formare m team di lavoro $1, \ldots, m$ assumendo alcuni tra gli n candidati $1, \ldots, n$. $D \subseteq \{1, \ldots, n\}$ è noto e indica l'insieme dei candidati di sesso femminile, ed e_i indica l'età di ciascun candidato i. Ciascuno candidato i, se assunto, costerebbe all'azienda c_i Euro all'anno. Si formuli in PLI il problema di minimizzare il costo annuale sostenuto dall'azienda, sapendo che:

- Almeno il 30% dei componenti di ciascun gruppo di lavoro deve essere di sesso femminile;
- L'età media di ogni gruppo deve essere di al più 40 anni.
- Ogni team di lavoro j deve consistere di almeno t_j persone.

Variabili

$i \in \{1, \ldots, n\}$ $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il candidato } i\text{-esimo finisce nel } j\text{-esimo gruppo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$o_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i \in D \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} c_i$$

Vincoli

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i}{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}} \leq 40 \qquad \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq t_j \qquad \forall j \{1, \ldots, m\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} o_{ij} \geq 30\% \cdot \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad \forall j \{1, \ldots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \{1, \ldots, n\}$$

NODI → archi

Esercizio 1.35. Dato un grafo indiretto (V, E) e un valore reale positivo $c_{\{i,j\}}$ per ciascun arco $\{i, j\} \in E$, si formuli in PLI il problema di determinare un ciclo hamiltoniano di costo minimo. si ricordi che un ciclo si dice hamiltoniano se passa per tutti i vertici del grafo esattamente una volta.

Variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se percorro l'arco } (i,j) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\{i, j\} \in E$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} c_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall (V', V'') \in (V, E)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = 2 \qquad \forall i \in \{1 \dots m\}$$

n post. PC

m fornitori → m modelli

p_i prezzo dell'i esimo

Esercizio 1.36. Una scuola deve rinnovare il suo laboratorio informatico, in cui si trovano n postazioni PC. Gli m fornitori propongono ciascuno alla scuola un modello di PC, ciascuno dei quali, chiamiamolo i, ha un prezzo pari a p_i, un disco rigido di capacità pari a d_i GB, e un numero di porte ethernet pari a e_i. Per ragioni strutturali, occorre che tutti i PC, tranne al più $k < n$ abbiano almeno 2 porte ethernet. Inoltre, occorre che la capacità complessiva del laboratorio in termini di memoria secondaria sia di almeno c TB. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di minimizzare il costo complessivo che la scuola deve sostenere.

Variabili

x_i = numero di pc comprati dal fornitore i

$i \in \{1, \dots, m\}$

Parametri

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se } e_i \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i d_i \geq c$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \geq n-k$$

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, \dots m\}$$

1.2.5 Temi d'esame 2017

Esercizio 1.37. Una azienda appena creata ha individuato n task $1, \dots, n$, tutti di natura informatica, che intende far svolgere ai suoi dipendenti con l'ausilio dei computer che ha acquistato. Il mercato mette a disposizione m pacchetti software $1, \dots, m$. Il pacchetto software j mette a disposizione funzionalità tali da poter risolvere i task nell'insieme $D_j \subseteq \{1, \dots, n\}$ e ha un costo pari a c_j Euro. Si modelli in PLI il problema di decidere quali pacchetti software acquistare, in modo che il relativo costo sia minimo e che tutti i task possano essere risolti.

(2) Si riformuli il modello, tenendo conto delle seguenti ulteriori informazioni a disposizione dell'azienda. Ogni pacchetto software j è prodotto da un'azienda $a_j \subseteq \{1, \dots, k\}$. Ogni azienda $a \in \{1, \dots, k\}$, poi, è disposta a concedere uno sconto di s_a Euro qualora il numero di pacchetti acquistati sia uguale o superiore ad una soglia g_a.

Variabili

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{se acquisto il } j \text{ software} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$y_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } i \in D_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j c_j$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{m} x_j y_{ij} = n \qquad \forall i \in \{1 .. n\}$$

Variabili $o \in \{1 .. k\}$

$$y_o \begin{cases} 1 & \text{se ho lo sconto dell'azienda } o \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$h_{i,o} \begin{cases} 1 & \text{se } a_j = o \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} x_j c_j - \sum_{o=1}^{k} y_o S_o$$

vincoli

$$\sum_{j=1}^{m} x_j h_{j,o} \geq y_o S_o \qquad \forall o \in \{1, \dots, k\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_j h_{j,o} \leq y_o M + S_o \qquad \forall o \in \{1, \dots, k\}$$

$$M = m$$

Esercizio 1.38. Un'azienda deve allocare i suoi n^2 dipendenti ai suoi n stabilimenti, ad ognuno di essi destinando esattamente n dipendenti. Ogni dipendente $i \in \{1, \ldots, n^2\}$ abita nella città $c_i \in \{1, \ldots, m\}$, ed ogni città $k \in \{1, \ldots, m\}$ dista d_{kj} dallo stabilimento $j \in \{1, \ldots, n\}$. Obiettivo dell'azienda è minimizzare i rimborsi spese dovuti complessivamente ai dipendenti, che sono proporzionali alla distanza tra la città di residenza e lo stabilimento di lavoro. Si formuli in PLI tale problema.

Si consideri il seguente, ulteriore vincolo. Ogni dipendente $i \in \{1, \ldots, n^2\}$ può fissare un giorno della settimana $g_i \in \{1, \ldots, 7\}$ in cui il dipendente stesso non è libero. Occorre però garantire che in ogni stabilimento j e in ogni giorno della settimana, ci siano almeno un certo numero p di dipendenti disponibili a lavorare in quel giorno presso lo stabilimento j. Si formuli tale vincolo.

PARAMETRI

$1, \ldots, n^2$ dipendenti

n stabilimenti $\longrightarrow$ con n dipendenti

$\{1, \ldots, m\} \longleftarrow c_i$ città in cui abita l'i-esimo dipendente

d_{kj} distanza tra la città k-esima e il j-esimo stabiglimento $\longrightarrow k \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$

$g_i \in \{1, \ldots, 7\}$ è il giorno della settimana scelto dell' i-esimo dipendente

VARIABILE

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo dipendente è allocato nel j-esimo stabilimento} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2ª parte

$$g_{i,b} \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esimo dipendente sceglie il b-esimo giorno per stare a casa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

FUNZIONE OBIETTIVO

minimizzare il rimborso spese

$$\min \sum_{j}^{n} \sum_{i}^{n^2} x_{ij} \, d_{c_i,j}$$

VINCOLI

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n^2\}$$

$$\sum_{i=1}^{n^2} x_{ij} = n \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}(1 - g_{i,b}) \geq p \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad \forall b \in \{1, \ldots, 7\}$$

$$x_{i,j}, g_{i,b} \in \{1, 0\}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n^2\} \quad \forall b \in \{1, \ldots, 7\}$$
$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Esercizio 1.39. Nel laboratorio informatico di una software house è necessario compilare n progetti tramite m macchine, dove $m < n$. La compilazione del progetto i richiede t_{ij} minuti se eseguita dalla macchina j. Scopo dell'azienda è, ovviamente, quello di minimizzare il tempo complessivo di compilazione, tenendo conto del fatto che le m macchine possono lavorare in parallelo tra loro, ma che ogni macchina può compilare in ogni istante al più un progetto. Si scriva un programma lineare che corrisponda a tale problema.

Si consideri lo scenario seguente. Ogni macchina $j \in \{1, \ldots, m\}$ consuma e_j unità di energia elettrica ogni ora. L'azienda vuole fare in modo che le unità di energia elettrica complessivamente spese non superino un certo limite superiore u. Come è possibile catturare tale vincolo?

Variabili

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il } i\text{-esimo progetto viene compilato dalla } j\text{-esima macchina} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i \in \{1 \ldots n\}$ $j \in \{1 \ldots m\}$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} t_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in \{1 \ldots n\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall j \in \{1 \ldots m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} e_j \leq u \qquad \forall i \in \{1 \ldots n\}$$

IL 1.40 L'HO FATTO NEL FILE PROVE D'ESAME

Esercizio 1.44. Un'azienda si occupa di m progetti $1, \dots, m$ e deve assegnare un numero di nuovi assunti pari a d_j a ciascun progetto $j \in \{1, \dots, m\}$. L'azienda riceve n curriculum da altrettanti candidati $1, \dots, n$. Ciascun candidato $i \in \{1, \dots, n\}$, se assunto, darebbe luogo ad un costo per l'azienda pari a c_i e le sue competenze lo renderebbero adatto a lavorare sui progetti in $p_i \subseteq \{1, \dots, m\}$. Si supponga che ogni lavoratore possa essere assegnato ad *al più* k progetti distinti. Si scriva un programma lineare intero che modellizzi il problema di minimizzare i costi in modo da garantire che a tutti i progetti vengano assegnati almeno il numero di dipendenti necessari.

Si consideri la seguente variazione del problema e la si formuli opportunamente in PLI. Si supponga che ogni progetto j abbia bisogno non di d_j dipendenti, ma di o_j ore di lavoro a settimana. Parimenti, si supponga che ogni dipendente i possa lavorare presso l'azienda per 36 ore a settimana.

Variabili

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se assumo il candidato i-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \quad i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

$$z_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se assegno i-esimo candidato al j-esimo progetto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se } i \in d_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i c_i$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{m} z_{ij} \leq k \qquad \forall i \{1 \dots m\}$$

$$x_i \leq \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \qquad \forall i \{1 \dots m\}$$

Esercizio 1.45. Il problema di definire una playlist contenente un certo numero di brani può essere visto come un problema di ottimizzazione. Supponiamo che i brani a disposizione siano n e che per ogni brano $i \in \{1, \dots, n\}$ sia nota una valutazione v_i della qualità del brano, che possiamo supporre essere un numero reale compreso tra 0 e 10. La playlist che vogliamo costruire è composta da m brani, dove m è tipicamente molto più piccolo di n. Ad ogni brano i può essere attribuito un genere musicale $g_i \in \{1, \dots, k\}$. Si formuli in PLI il problema di determinare una playlist in modo che la qualità dei brani scelti sia massima e che tutti i generi musicali siano rappresentati nella playlist.

Si considerino i seguenti ulteriori vincoli al problema, e li si formuli nel linguaggio della PLI. (2) Occorre innanzitutto garantire che due brani consecutivi nella playlist *non* siano mai dello stesso genere musicale. Occorre poi garantire che per ogni genere j, la *qualità media* dei brani del genere j tra quelli scelti sia almeno pari ad un limite minimo q.

Variabili

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se scelgo il brano } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$\theta_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se } j = g_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\max \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i v_i}{m}$$

PERCHÈ?

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \theta_{ij} \geq 1 \qquad \forall j \in \{1 \dots k\}$$

Variabili (2)

$$y_{i,l} \begin{cases} 1 & \text{se inserisco il brano } i \text{ nella posizione } l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i,l} = 1 \qquad \forall l \in \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{l=1}^{m} y_{i,l} \leq 1 \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_i \geq y_{i,l} \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall l \in \{1, \dots, m\}$$

$$x_i \leq \sum_{l=1}^{m} y_{i,l} \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} y_{i,l-1} g_i - \sum_{i=1}^{n} y_{i,l} g_i \right| > 0 \qquad \forall l \in \{2, \dots, m\}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i u_{ij} v_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i u_{ij}} \geq q \qquad \forall j \in \{1, \dots, K\}$$

Esercizio 1.47. Un'azienda informatica sta cercando di ottimizzare i costi relativi alla corrente elettrica. In particolare, l'azienda deve decidere a quali fornitori di energia elettrica sia conveniente appoggiarsi. L'azienda presume di aver bisogno di un numero di kWh pari a c, su base mensile. I fornitori dai quali l'azienda riceve un offerta sono $1, \ldots, n$. Ciascun fornitore i propone un costo al kWh pari a p_i euro. Inoltre, il fornitore i impone un canone mensile pari a m_i euro, da pagarsi, ovviamente, una sola volta al mese e solo se l'azienda acquista corrente da i. Si osservi come sia possibile, per l'azienda, appoggiarsi su *più fornitori* contemporaneamente. Si formuli in programmazione lineare il problema di determinare a quali fornitori e in che misura l'azienda debba rivolgersi, in modo da minimizzare il costo complessivo.

Si consideri il seguente ulteriore vincolo e lo si modelli anch'esso in programmazione lineare. L'azienda vorrebbe evitare di pagare troppo per i canoni mensili, e vorrebbe essere sicura che questi ultimi non incidano per più del 20% sul costo totale.

VARIABILI

$i \in \{1, \ldots, n\}$

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se scelgo di acquistare KWh dall'azienda } i\text{-esima} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

y_i = quantità di KWh che acquisto da i

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i p_i + x_i m_i$$

VINCOLI

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = c$$

$$y_i \leq x_i c \qquad \forall i \in \{1 .. m\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i m_i \leq \frac{20}{100} \sum_{i=1}^{m} y_i p_i + x_i m_i$$

Esercizio 1.48. Un'azienda di trasporti deve decidere come trasportare n contenitori tra due dei suoi stabilimenti. Per farlo, utilizza una flotta di al più n camion, ciascuno dei quali ha una capacità, in tonnellate, pari a c, e in metri cubi pari a m. Ogni contenitore i pesa a_i chilogrammi e occupa b_i metri cubi. Si modellizzi, in PL, il problema di minimizzare il numero di camion necessari a trasportare tutti gli n contenitori, sapendo che ogni camion può ovviamente trasportare più di un contenitore, se ciò non va contro i suoi limiti di capacità.

Si consideri la seguente variazione del problema. Ogni camion j ha un costo operativo pari a d_j, che ovviamente va sostenuto solo se il camion è utilizzato. L'obiettivo diventa quindi quello di minimizzare il costo complessivo, anziché il numero di camion utilizzati. Si formalizzi tutto questo in PL.

Variabili

(Ho invertito le i con le j rispetto al testo del problema)

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se uso i-esimo cammion} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il pacco j-esimo è sul cammion i-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i d_i$$

Vincoli

$$y_{ij} \leq x_i \qquad \forall i,j \in \{1,\dots,m\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq x_i \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} a_j \leq c \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} b_j \leq m \qquad \forall i \in \{1,\dots,m\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1 \qquad \forall j \in \{1,\dots,m\}$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0,1\}$$

1.2.7 Temi d'esame 2019

Esercizio 1.49. Il reparto di produzione di un'azienda metalmeccanica ha a disposizione dieci macchine saldatrici. All'inizio di ogni mese, il settore commerciale trasmette l'elenco delle n commesse raccolte, che indicheremo con $1, \ldots, n$. Ciascuna commessa i richiede un tempo pari a t_{ij} giorni se evasa tramite la macchina j. Inoltre, ciascuna commessa i darebbe luogo ad un guadagno g_i se evasa nel mese in questione oppure ad una penale p_i se non evasa in tale mese. Si formuli in PLI il problema di massimizzare il guadagno complessivo, al netto delle penali, tenendo conto delle capacità produttive, per il mese di Marzo 2019. Si tenga conto che l'azienda è operativa in tutti i giorni della settimana.

Si consideri il seguente ulteriore vincolo. Ogni commessa i proviene dal fornitore $f_i \in \{1, \ldots, k\}$ e l'azienda, per ragioni commerciali, desidera che almeno la metà delle commesse di ciascun fornitore siano effettivamente evase.

Variabili

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se raccolgo l'i-esima commessa} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se assegno la commessa i-esima alla macchina j-esima} \\ 0 & \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i - (1-x_i) p_i$$

Parametri $h = \{1 \ldots k\}$

$$F_h = \{ i \in \{1 \ldots m\} \mid f_i = h \}$$

Vincoli

$$x_i = \sum_{j=1}^{10} y_{ij} \quad \forall i \in \{1 \ldots m\}$$

$$\sum_{j=1}^{10} y_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1 \ldots m\}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} t_{ij} \leq 31 \quad \forall j \in \{1 \ldots 10\}$$

Vincoli

$$\sum_{i \in F_h} x_i \geq \frac{|F_h|}{2}$$

Esercizio 1.50. Un'azienda informatica ha la necessità di organizzare i turni nel prossimo mese, ossia in Luglio 2019. In ogni giorno di tale mese è necessario che almeno k persone siano presenti dalle 8 alle 16, ovvero nel momento della giornata in cui il call-center dell'azienda è attivo. Ci sono due turni di lavoro, il primo fino alle 12 e il secondo dalle 12 a fine servizio. L'azienda dispone di n dipendenti $1, \ldots, n$. Il dipendente i può lavorare, per contratto per al più o_i turni mensili, a cui si possono sommare al più s_i turni di straordinario, pagati più degli altri. Ciascun dipendente non può essere assegnato ad entrambi i turni dello stesso giorno. Si scriva un modello di PLI che permetta all'azienda di minimizzare i costi del personale, supponendo che la paga oraria (ordinaria e straordinaria) sia la stessa per ogni lavoratore.

Si supponga che la paga oraria di ciascun dipendente i non sia più la stessa, ma sia rispettivamente di r_i Euro nel caso di lavoro ordinario e di t_i Euro nel caso di lavoro straordinario. Si modifichi il modello in modo da considerare questo nuovo scenario.

Variabili

Esercizio 1.51. Un'azienda informatica dove allocare i k terabyte di dati che gestisce tra i suoi n data-center $1, \ldots, n$. Ogni data-center i può gestire al più c_i gigabyte di dati e l'azienda vuole assicurarsi che la capacità di ogni data-center sia utilizzata per al più il 90%. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di minimizzare i costi complessivi dell'allocazione, sapendo che immagazzinare un gigabyte di dati nel data-center i costa p_i Euro al mese.

Si supponga l'impiego di ciascun data-center i abbia dei costi fissi mensili pari a s_i Euro *oltre* ai costi per gigabyte. Tali costi fissi sono da sostenersi solo se al data-center i sono allocati dei dati, indipendentemente dalla loro quantità.

[1 terabyte = 1024 gigabyte]

Variabili (1)

x_i = numero di GB gestiti nel i-esimo data-center $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i}^{n} x_i p_i$$

Vincoli

$$x_i \leq c_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1024k$$

$$x_i \geq \frac{90}{100} c_i$$

$$\forall i \in \{1 \ldots m\}$$

$$x_i \in$$

Variabili (2)

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se nel i-esimo data-c. sono stati allocati dei dati} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i}^{n} x_i p_i + y_i s_i$$

Vincoli

$$x_i \leq c_i y_i$$

$$x_i \geq y_i$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

Esercizio 1.52. Un'azienda informatica deve pianificare il lavoro dei suoi n collaboratori per l'anno 2020. Ciascun collaboratore i è competente in un sottoinsieme S_i dell'insieme $\{1,\ldots,k\}$ di tutti i linguaggi di programmazione che l'azienda utilizza. Nel 2020 l'azienda ha in programma di svolgere m progetti $1,\ldots,m$. Per ciascun progetto j, esiste un sottoinsieme R_j di $\{1,\ldots,k\}$ che include tutti e soli i linguaggi con cui j è realizzato. Per ciascun linguaggio l in R_j, occorre allocare a j almeno un collaboratore che conosca l. Si scriva un modello PLI che permetta di minimizzare il costo complessivo delle collaborazioni, sapendo che allocare il collaboratore i al progetto j costa all'azienda p_{ij} Euro.

Si supponga che lo scopo dell'azienda non sia la minimizzazione del costo complessivo, ma la minimizzazione del numero dei collaboratori assegnati ad *almeno* un progetto.

Variabili (1)

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se il collaboratore } i\text{-esimo viene assegnato il progetto } j\text{-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$c_{ij\ell} \begin{cases} 1 & \text{se } \ell = S_i \\ 0 & \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\, p_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, c_{ij} \geq 1 \quad \forall j \in \{1,\ldots,m\},\ \ell \in R_j$$

$c_{ij}, x_{ij} \in \{0,1\}$

$\forall i \in \{1,\ldots n\}$

$\forall j \in \{1,\ldots,m\}$

Variabili (2)

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se a } i \text{ è assegnato almeno un progetto} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Vincoli

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in \{1\ldots m\},\ j \in \{1\ldots m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq y_i \quad \forall i \in \{1\ldots m\}$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in \{1\ldots m\}$$

Esercizio 1.53. Un concessionario di automobili dispone di n auto usate $1, \dots, n$, che desidera vendere realizzando il ricavo massimo possibile. L'azienda si rende conto che vendere le auto singolarmente non sarebbe redditizio. Decide quindi di vendere le auto ad altre aziende, che però preferiscono acquistare *gruppi* di auto, piuttosto che a *singole* auto. Nello specifico, il concessionario riceve m offerte $1, \dots, m$. Ciascuna offerta j consiste in un sottoinsieme S_j di $\{1, \dots, n\}$ e di un prezzo p_j, ossia il prezzo di vendita proposto. Si aiuti il concessionario a massimizzare il suo guadagno, sapendo che per quest'ultimo è possibile rottamare le auto invendute a costo zero.

Variabili

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se vendo il blocco di macchine } S_j \text{ all'acquirente } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Parametri

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in S_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\max \sum_{j=1}^{m} x_j p_j$$

Vincoli

$$\sum_{j}^{m} x_j c_{ij} \leq 1 \qquad \forall i$$

AUTO OFFERTE

$$i \in \{1, \dots, n\} \quad j \in \{1 \dots m\}$$

$$x_j, c_{ij} \in \{0, 1\}$$

Esercizio 1.54. Un'azienda con n impiegati $1, \ldots, n$ apre una seconda sede a pochi chilometri di distanza dalla prima e si trova a dover decidere quanti e quali degli n dipendenti allocare a ciascuna delle due sedi. Un vincolo da rispettare è certamente quello relativo agli spazi: sia la sede vecchia che quella nuova hanno spazio a sufficienza per $k < n$ impiegati. Occorre poi anche minimizzare i disagi relativi all'apertura della nuova sede: per ogni coppia (i, j) con $i \neq j$, l'azienda riesce a stimare il tempo t_{ij} che i spenderebbe ad interagire a distanza con j qualora non si trovasse più nella stessa sede di lavoro di j. Si scriva un programma PLI che permetta di minimizzare il tempo di interazione a distanza indotto dall'allocazione, e che assicuri che i vincoli siano rispettati.

Variabili

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se il dipendente i-esimo viene spostato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se i non viene spostato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i (1 - x_j) t_{ij}$$

Vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq k \qquad i \in \{1, \ldots, m\} \qquad y_i = 1 - x_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(1 - x_j)}_{y_i} \leq k \qquad x_i \in \{0, 1\}$$

1.2.8 Temi d'esame 2020

Esercizio 1.55. In una nuova biblioteca c'è la necessità di collocare gli n libri di cui la biblioteca dispone negli m scaffali appena comprati. Ogni libro i dovrebbe, per ragioni tematiche, finire in un certo scaffale $s_i \in \{1, \ldots, m\}$. Nello scaffale $j \in \{1, \ldots, m\}$, però, possono stare al più k_j libri in totale. Si scriva un programma lineare che modellizzi il problema di collocare i libri negli scaffali in modo da minimizzare il numero di libri i che vengono collocati in scaffali diversi da s_i.

Si supponga ora di voler minimizzare la distanza media tra un libro i e lo scaffale s_i, dove per ogni coppia di scaffali (j, k) è noto un numero reale positivo $\delta_{j,k}$, ossia proprio la distanza tra j e k.

VARIABILI

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il libro } i \text{ finisce sullo scafale } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$i \in \{1, \ldots, n\}$
$j \in \{1, \ldots, m\}$

$x_{14} = 1 \iff y_1 = 4 \quad \forall i$

y_i = scaffale in cui metto i

Parametri

$$o_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = s_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

→ se mettendo i in j si ha il collocamento ottimo

FUNZIONE OBIETTIVO

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(1 - o_{ij})$$

VINCOLI

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \ \forall i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le k_j \ \forall j$$

Funzione Obiettivo

$$\min \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i, s_i}}{n}$$

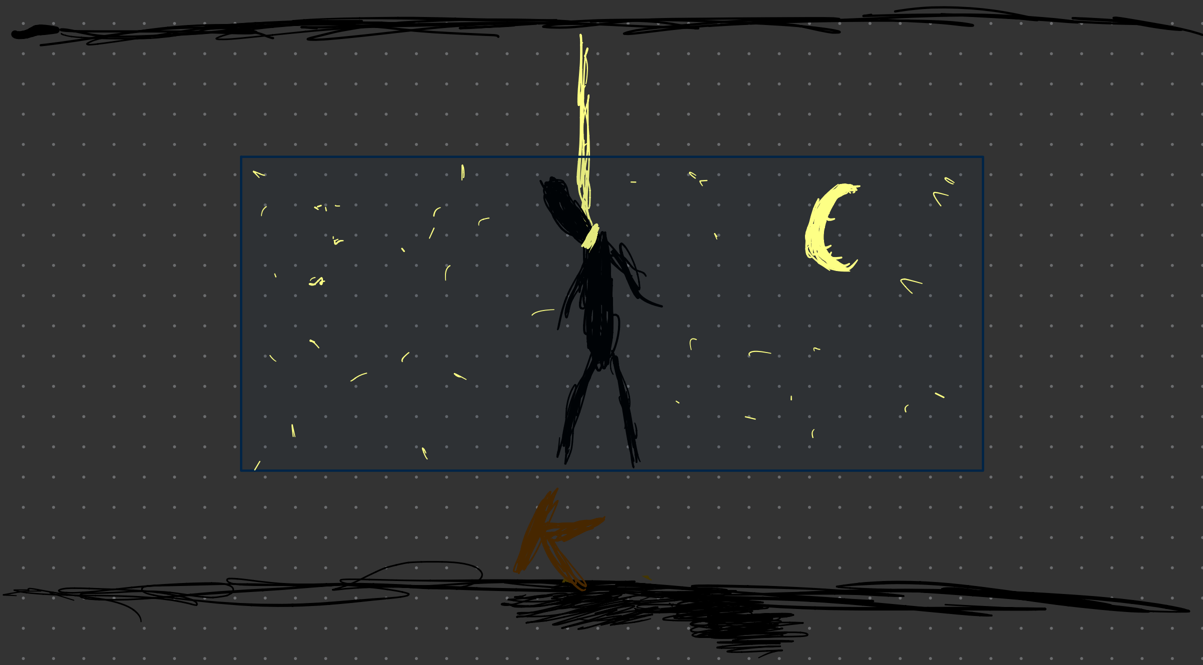
Vincoli

$$\forall i \qquad y_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \cdot j$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} x_{ij} o_{ik} \delta_{jk} \right)$$

j ↓ dove abbiamo messo i

→ Se abbiamo messo il libro i in j e k la sua posizione ottima allora sono la distanza δ_{jk}



Me in two weeks :(LMAO