**Rendere un prob. di ottim. P un prob. decisionale R** → Fr = { g ∈ Fp | cp(g) = Zp} → serve conoscere valore ottimo di P.
Oppure dato un k si può formulare Rk decisionale (min) → $Fr_k$ = { g ∈ Fp | cp(g) ≤ k} → Scelgo k sempre più piccoli per avvicinarmi a Zp
Un **rilassamento** di P è un P* definito come: min{cp*(g) | g ∈ Fp*} → Fp* ⊇ Fp e Zp* < Zp → Se cp*(g*) = cp(g*) allora cp*(g*) = Zp* ≤ Zp ≤ cp(g*) = cp*(g*)
**Sel. sottoins.** → det. D ⊆ F (⊆ N) costo min → P. **copertura** → N almeno uno D (>= 1); P. **partizione** → N uno D (=1); P. **riempimento** → N al più uno D (<= 1)
**Val. ass.** → Vincoli: |g(x)| <= b →g(x) <= b; -g(x) <= b; Nella FO: confronto valori ottimi max {|f(x)|} → max {f(x)} e max{- f(x)}

---

**Vincoli** → domanda e offerta globale si equivalgono; il flusso conserva; il flusso deve ammissibile (l < x < u)
**MCF in PL** = min cx; 0 <= x <= u; Ex= b (b = sbil)
**Rendere le Lij = 0**: si sottrae lij a bj e a uij → si aggiunge lij a bi → si aggiunge alla FO $\sum_{(i,j \in A)} cij * lij$ → ad un flusso Xij corrisponde Xij + lij.
Il **valore di un flusso ammissibile** è sempre minore o uguale della capacità di qualunque taglio → v = x(Ns, Nt) ≤ u(Ns, Nt)
Se x è un **flusso ammissibile massimo, allora Gx non ha cammini aumentanti** → se ci fossero, x non sarebbe massimo + **esiste taglio con capacità v**
Il **valore del massimo flusso è uguale alla minima capacità dei tagli** → x ammissibile e max quindi Gx non ha camm. aumentanti, quindi esiste taglio cap. v
**Etichettatura valida** → per i, j se hanno capacità residua: di – dj <= 1; per j, i se il flusso è > 0: di – dj <= 1 → **Arco ammissibile** → se non saturo + di = dj+1
Th (**Struttura degli pseudoflussi**): Siano x e y due pseudoflussi qualunque: esistono k ≤ n + m cammini aumentanti P1, …, Pk, per x, di cui al più m sono cicli,
t.c: z1 = x; zi+1 = zi ⊕ θiPi; zk+1 = y; 0 ≤ i ≤ θ(Pi, zi) Inoltre, tutti i Pi hanno come estremi dei nodi in cui lo sbilanciamento di x è diverso da quello di y.
**Pseudoflusso minimale** → pseudoflusso x che ha costo minimo tra tutti gli pseudoflussi aventi lo stesso vettore di sbilanciamento ex
**Uno pseudofl. è minimale (o un flusso ammiss. è ottimo) sse non esistono cicli aum. di costo negativo** → dim: supporre non minim. di x ed esistenza ciclo
**Complessità algoritmi** → FF O(mnU) → EK O(NA^2) → GT O(N^2A) → Camm min succ. O(sbil.iniziale *NA) → canc. cilci O(Na^2 * max(uij) * max(cij))

---

**Iperpiano** → ax = b; **<u>Semispazio</u>** → ax <= b; **<u>Poliedro</u>** → Inters. di semispazi (mat. A e vett. b |P = {x | Ax <= b}); **<u>Ins. convesso</u>** → punti che conn. x,y sono in C
$\mathbf{P_I}$ = {x |$A_I$x = $b_I$ and $A_{I^*}$x <= $b_{I^*}$} → **Faccia** → $P_I$, se non è vuoto → max 2^m → dimens. faccia = più piccolo sottosp. che la contenga
Se determinata da mat rango k ha dim n-k (se k = n **vertice**, se rango = n-1 **spigolo**) → i vertici di P sono tutte e sole le sue soluzioni di base ammissibili.
**Vincoli attivi** → Se X ∈ P, vincoli soddisfatti come uguaglianze → **I(x)** = insieme vincoli attivi
Per ogni J ∈ I(x), l'insieme PJ è una faccia di P, e PI(x) è la faccia minimale tra esse.
Rappr. per punti dei poliedri dato insieme di punti X→ **Inviluppo convesso** conv(X) = { x = $\sum_{i=1}^{s} \lambda i * xi$ | $\sum_{i=}^{s} \lambda i = 1 \; and \; \lambda i \geq 0$} (ins. più piccolo a conten. X)
conv(X) è un **politopo**, ossia un poliedro limitato, i cui vertici sono tutti in X.
**Cono** → Ins. C ⊆ Rn in cui ∀x ∈ C e a ∈ R+ ax ∈ C → **Coni convessi** → x, y ∈ C and $\lambda, \mu$ ∈ R → $\lambda$x + $\mu$y ∈ C.
**Rappr. sulle direz. coni conv**. → dato un insieme V = {v1, …,vt} ⊆ Rn, il cono finit. generato da V è: **cono(v)** = {v = $\sum_{i=1}^{t} Vi * vi$ | $Vi$ ∈ R+} (ins più picc. con. V)
**Motzkin** → P ⊆ Rn è un poliedro sse esistono X, V finiti tali che P = conv(X) + cono(V) → P gen. da punti in X e direz in V → minimale → elem = raggi esterni
**Th**: sia P gen. secondo Motzkin → il problema max {cx | Ax ≤ b} ha **ottimo finito** sse cvj ≤ 0 per ogni j ∈ {1, …, t}. Esiste k ∈ {1, …,s} tale che xk è una sol. ott.
**Dualità** → si basa su def. di un'involuzione (funzione inversa di sé stessa) che mappa ogni prob. PL nel suo duale.
**TDD** → Se x e y sono soluzioni ammissibili per il primale e il duale, rispettivamente, allora cx <= yb. → (max {cx | Ax <= b} e min {yb | (yA = c) and y >= 0})
**Coroll:** → primale ill. = duale vuoto → Se x, y sol. amm. per prim. e duale e cx = yb allora x e y sono sol. ottime
Un vet. **ε ∈ Rn è detto direzione Ammissibile** se esiste λ* > 0 | x(λ) = x* + λε è amm. nel prim. ∀λ ∈ [0; λ*]. ε è direzione ammissibile per x sse $AI_{(x^*)}$ ε ≤ 0.
**ε è una direzione di crescita per x*** se uno spost. λ lungo ε fa crescere il valore della FO (se c di cx = 0 sol. ammiss. ottime, altrim. esiste dir. amm. di cr. per x)
**Invarianti simplesso** → B è amm.; x è sol amm. per prim. (sempre vertice); yA = c (y sol. per duale sse yB >= 0).
Sia λ* il valore min {λi | i ∈ N}: Se 0 < λ* < +inf allora x(λ) * ammissibile per ogni λ ∈[0, λ*] → Possiamo spostarci da B a B U {k} – {h} ovvero un altro vertice