Metodi logici per la filosofia

Giuliano Ricciardi

Febbraio - Marzo 2023

Indice

Breve introduzione

Precisazioni banali:

- Questi appunti riguardano esclusivamente la prima metà del corso di Orlandelli dell'anno accademico 2022/23.
- Sfortunatamente non potrò seguire la seconda metà del corso. Se il prossimo anno avrò voglia di seguire anche la seconda parte, questi appunti verranno estesi.

Precisazioni utili per la lettura degli appunti:

- Non dovrebbero esserci errori troppo gravi, ma è molto probabile che si trovino imprecisioni.
- Se trovi errori, soprattutto se gravi, per favore fammelo presente (giuliano.ricciardi@studio.unibo.it).
- Su questi appunti si trova tutto ciò che è stato dimostrato dal professore.
  Uniche eccezioni:
  a) Alcuni esercizi per casa. (ho riportato il testo, potrebbero essere richiesti per l'esame)
  b) Dimostrazione di convergenza non esprimibile. (ho riportato il testo, sono richiesti per l'esame)
  c) Dimostrazione di connessione non esprimibile. (ho riportato il testo, sono richiesti per l'esame)
  d) Tutte le dimostrazioni nei calcoli assiomatici (non chiesti all'esame).
- Al posto di scrivere "a sse b", ho preferito scrivere b sotto ad a. Questa è solo una convenzione con la quale mi sono trovato bene, ma <u>non va fatto all'esame</u>. Esempio:

Al posto di scrivere: $\vDash_w \Box A \quad \text{sse} \quad \forall v \in W \; (wRv \;\; implica \;\; \vDash_v A)$

Ho scritto: $\vDash_w \Box A$
$\forall v \in W \; (wRv \;\; implica \;\; \vDash_v A)$

- Buon divertimento :)

Logica proposizionale

2.1 Costruzione linguaggio

Elementi costitutivi:

- ☐ Variabili enunciative (Φ): P_0, P_1, P_2 ...
- ☐ Simboli[1]: $\neg$, $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\to$
- ☐ Simboli ausiliari: ( )

Definizione dell'insieme delle formule modali proposizionali (FmΦ[2])

1. Se $\mathcal{P}_i \in \Phi$, allora $\mathcal{P}_i \in$ FmΦ
2. $\perp \in$ FmΦ
3. Se A $\in$ FmΦ, allora $\neg$A $\in$ FmΦ
4. Se A,B $\in$ FmΦ, allora $\left\{ \begin{array}{c} (A \wedge B) \\ (A \vee B) \\ (A \to B) \end{array} \right\} \in$ FmΦ
5. Nient'altro appartiene a FmΦ.

[1] Non hanno sfumature temporali.

[2] Φ è un insieme non vuoto di variabili enunciative.

Simboli ausiliari (convenzionali)

- $\top \equiv \bot \rightarrow$[3] $\bot$
- $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Convenzioni

a) Omettere le parentesi esterne a tutto[4].

b) $\neg$ lega più di $\wedge, \vee$, che legano più di $\rightarrow$.[5]

c) $\wedge, \vee$ associano a sinistra.[6]

2.2 Definizione di lunghezza di una formula A

1. $lg(\mathcal{P}_i) = 0$
2. $lg(\bot) = 0$
3. $lg(\neg A) = lg(A) + 1$
4. $lg(A \wedge B) = lg(A \vee B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$

2.3 Principio di induzione matematica

Esempio sui numeri naturali:

Definizione dei numeri naturali[7]

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. se $n \in \mathbb{N}$, allora $n + 1 \in \mathbb{N}$
3. Nient'altro $\in \mathbb{N}$

[3] Un'implicazione con l'antecedente *sempre* vero, come nel caso di $\bot$, è sempre vera.

[4] Più precisamente, se una coppia di parentesi si trova ai margini sinistro e destro della formula, lo possiamo sottointendere.

[5] Ad esempio, la formula $A \wedge B \rightarrow C$ deve essere letta $(A \wedge B) \rightarrow C$.

[6] Ad esempio, la formula $A \wedge B \wedge C \wedge D$ deve essere letta $((A \wedge B) \wedge C) \wedge D$

[7] Questa definizione è implicita e per ricorsione.

- Versione classica:

Base: $P(0)$

Passo induttivo: $\forall m \in \mathbb{N}(P(m) \to P(m+1))$

Conclusione: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

- Principio di induzione <u>forte</u>:

Base: $P(0)$[8]

Passo induttivo: $\forall m \in \mathbb{N} : ((\forall n \in \mathbb{N} : (n \leq m \to P(n))) \to P(m+1))$[9]

Conclusione: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$[10]

Dimostrazione per induzione

Si deve dimostrare che: $\underline{\forall A \in Fm\Phi(\#_{(}(A) = \#_{)}(A))}$[11]

Questo viene raggiunto soddisfacendo le condizioni sottostanti:

Base: P vale per ogni A di lunghezza 0.

IH (ipotesi di induzione):

- Assumo che P valga per le FmΦ di $lg \leq m$
- Mostro che P vale per le FmΦ di $lg \leq m+1$

Inizio dimostrando che la proprietà P vale per tutte le formule di lunghezza zero. Nel nostro linguaggio, come è possibile notare dalla definizione di lunghezza di una formula in 1 e 2, ciò che si trova nella clausula di base (def. di P_i e $\perp$) ha lunghezza 0.

Dimostrazione delle formule di base:

- $(\#_{(}(P_i) = \#_{)}(P_i))$ per 1[12]
- $(\#_{(}(\perp) = \#_{)}(\perp))$ per 2

[8] Base: la proprietà P vale per 0.

[9] Passo induttivo: ∀m Se P vale per FmΦ di lunghezza ≤ m (ossia $\forall n \in \mathbb{N} : (n \leq m \to P(n))$), allora P vale per FmΦ di lunghezza m + 1.

[10] Conclusione: P vale per tutte le formule.

[11] Il simbolo #, in questo caso, prende in pasto una variabile e restituisce il numero di parentesi aperte nella formula.

[12] Quando è stata definita la formula, non è stato specificato l'uso delle parentesi. Questo vale per la prima e la seconda clausula di base.

In seguito, si dimostra che anche le FmΦ derivanti dal passo induttivo hanno la proprietà P.

Questo richiede che sia vero:

a) $P(B) \to P(\neg B)$

b) $\begin{pmatrix} P(B) \wedge P(C) \\ P(B) \vee P(C) \\ P(B) \to P(C) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P(B \wedge C) \\ P(B \vee C) \\ P(B \to C) \end{pmatrix}$

Per dimostrare (a), si assume:

$$(\#_((B) = \#_)(B))$$

Dal momento che durante la definizione della formula di negazione ($\neg$) non sono state aggiunte parentesi, è possibile conseguire che:

$$(\#_((B) = \#_((\neg B))$$
$$(\#_)(B) = \#_)(\neg B))$$

Quindi, utilizzando la proprietà commutativa e la proprietà associativa si conclude:

$$(\#_((\neg B) = \#_)(\neg B))$$

In questo modo è stato dimostrato che la proprietà P, se vale per la formula di lunghezza m (B), vale anche per la formula di lunghezza $m + 1$ ($\neg B$) contente il simbolo $\neg$.

Nel caso (b) la dimostrazione è analoga per $\wedge$, $\vee$ e $\to$. In questi appunti, per evitare ripetizioni, è riportato solo il caso di $\wedge$. Dunque, per dimostrare (b), si assume:

IH$_1$: $(\#_((B) = \#_)(B))$

IH$_2$: $(\#_((C) = \#_)(C))$

Partendo da ciò che si vuole dimostrare e andando a ritroso, si arriva ad una uguaglianza "banale".

1. Ciò che si vuole dimostrare: $\#_((B \wedge C) = \#_)(B \wedge C)$
2. Per la 4 definizione di lunghezza della formula, si può riscrivere l'uguaglianza:

$$\#_((B) + \#_((C) + 1 = \#_)(B) + \#_)(C) + 1$$

3. Per IH_1 e IH_2, è possibile sostituire $\#_{)}(B)$[13] e $\#_{)}(C)$, ottenendo l'uguaglianza "ovvia":

$$\#_{(}(B) + \#_{(}(C) + 1 = \#_{(}(B) + \#_{(}(C) + 1$$

Dimostrazione per induzione (2)

Si deve dimostrare che: $\underline{\#_{P_i,\perp}(A) > \#_{\wedge,\vee,\to}(A)}$

Quindi, parto dimostrando che le FmΦ di lunghezza 0 abbiano la proprietà P, per poi dimostrare che anche tutte le FmΦ di lunghezza $m+1$ hanno la proprietà P.

Iniziando dalla base (formule di lunghezza zero), è sufficiente sostituire ad 'A' il simbolo $\perp$ e la variabile enunciativa generica P_i:

$\#_{P_i,\perp}(P_i) > \#_{\wedge,\vee,\to}(P_i)$

$\#_{P_i,\perp}(\perp) > \#_{\wedge,\vee,\to}(\perp)$

Sono entrambe vere perché l'occorrenza di $\perp$ e di P_i è sempre maggiore.

A questo punto, si deve dimostrare come la proprietà P valga per tutte le FmΦ di lunghezza $m+1$ contenenti i simboli $\neg, \wedge, \vee, \to$.
Iniziando da $\neg$, l'IH[14] è:

$$\#_{P_i,\perp}(B) > \#_{\wedge,\vee,\to}(B)$$

Ciò che si deve dimostrare è:

$$\#_{P_i,\perp}(\neg B) > \#_{\wedge,\vee,\to}(\neg B)$$

La dimostrazione è ovvia per IH. Infatti, negare B non comporta nessun cambiamento sulla verità della formula assunta per IH.

Per dimostrare $\wedge$ assumo le due ipotesi induttive:

[13] Visto che l'IH_1: $\#_{(}(B) = \#_{)}(B)$) posso sostituire $\#_{(}(B)$ a $\#_{)}(B)$, grazie alle proprietà di sostituzione. Lo stesso vale per $\#_{)}(C)$.

[14] Per arrivare alla conclusione che tutte le FmΦ abbiano la proprietà P, è necessario che $P(B) \to P(\neg B)$ sia vera. L'ipotesi di induzione (IH) è ciò che dobbiamo supporre per rendere questa implicazione vera.

IH$_1$: $\#_{P_i,\perp}(B) > \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B)$

IH$_2$: $\#_{P_i,\perp}(C) > \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(C)$

Ciò che si ha intenzione di dimostrare è: $\boxed{\#_{P_i,\perp}(B \wedge C) > \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B \wedge C)}$

In quanto nel primo membro della formula non si trovano occorrenze di P$_i$ o $\perp$, è possibile riscriverlo come:

$$\#_{P_i,\perp}(B) + \#_{P_i,\perp}(C)$$

Invece, nel secondo membro compare una occorrenza di $\wedge$, quindi:

$$\#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B) + \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(C) + 1$$

Di conseguenza, la disequazione può essere riscritta in questo modo:

$$\#_{P_i,\perp}(B) + \#_{P_i,\perp}(C) > \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B) + \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(C) + 1$$

Per IH$_1$ è noto che $\#_{P_i,\perp}(B)$ deve essere strettamente maggiore di $\#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B)$. Dato che il simbolo # 'conta' partendo da 0 e aumentando sempre di 1 unità, $\#_{P_i,\perp}(B)$ deve essere almeno una unità più grande di $\#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B)$. Quindi, sostituisco $\#_{P_i,\perp}(B)$ con $\#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B)$ + 1 + k, dove k $\geq$ 0. La disequazione può essere riscritta così:

$$\#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B) + 1 + k \quad + \#_{P_i,\perp}(C) > \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B) + \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(C) + 1$$

Mettendo in atto la stessa operazione per $\#_{P_i,\perp}(C)$, quindi utilizzando l'IH$_2$, si ricava:

$$\#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B) + 1 + k \quad + \quad \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(C) + 1 + k \quad > \quad \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(B) + \#_{\wedge,\vee,\rightarrow}(C) + 1$$

Riducendo la formula ai minimi termini, è banale arrivare ad una disequazione sempre vera:

$$1 + k > 0 \quad (\text{con } k \geq 0)$$

La soluzione di $\vee$ e $\rightarrow$ è analoga.

2.4 Semantica

!Assunzioni implicite (perché si lavora in logica classica)

- Ogni enunciato è vero o falso.
- Ogni enunciato ha esattamente un valore di verità.

Fino a questo momento è stato definito il linguaggio formale, che di per sé non ha una interpretazione. Ad esempio, la $\wedge$ non rappresenta una congiunzione, ma un simbolo.

Per interpretare il linguaggio si ricorre alle funzioni enunciative. Quindi, come prima cosa, si attribuisce un valore alle variabili enunciative:

$$\boxed{I:\ \Phi \to \{0,1\}} \quad \text{oppure} \quad \boxed{I \subseteq \{\Phi\}}$$ [15]

Successivamente si interpretano le FmΦ. (Da conoscere: ■ $I \vDash A$[16])

1. $I \vDash P_i$ sse $P_i \in I$ [17] (oppure $I \vDash P_i$ sse $I(P_i) = 1$)
2. $I \nvDash \bot$[18]
3. $I \vDash \neg A$ sse $I \nvDash A$
4. $I \vDash A \wedge B$ sse $I \vDash A$ e $I \vDash B$
5. $I \vDash A \vee B$ sse $I \vDash A$ oppure $I \vDash B$
6. $I \vDash A \to B$ sse $I \nvDash A$ oppure $I \vDash B$

---

[15] La prima funzione interpretativa assegna ad ogni variabile enunciativa il valore di 1 o 0. La seconda è un sottoinsieme delle variabili enunciative vere.

[16] Significa che la formula A è vera rispetto alla sua interpretazione.

[17] $I \vDash P_i$ sse $P_i \in I$ si legge come: "l'interpretazione rende vera P_i se e solo se P_i appartiene all'interpretazione".

[18] Non si dà $\vDash$ ma la sua negazione, in quanto la logica classica è bivalente.

$\boxed{\textbf{Teorema}}$[19]

Se: $\quad I(P_i) = I'(P_i) \quad \forall P_i \in A$

Allora: $\quad I \vDash A \quad$ sse $\quad I' \vDash A$

■ Dimostrazione: (per induzione sulla struttura della formula A)

- Caso P_i, si deve dimostrare che: $\quad I \vDash P_i \quad sse \quad I' \vDash P_i$

  Per 1 riscrivo: $\quad I(P_i) = 1 \quad sse \quad I'(P_i) = 1$

  Dimostrazione ovvia per ipotesi.

- Caso $\perp$, si deve dimostrare che: $\quad I \vDash \perp \quad sse \quad I' \vDash \perp$

  Sia nel caso di I, che in quello di I', $\perp$ sarà sempre falso. Di conseguenza il *sse* è ovvio.

- Caso $\neg$, si deve dimostrare che: $\quad I \vDash \neg B \quad sse \quad I' \vDash \neg B$

  Per 3, riscrivo: $\quad I \nvDash B \quad sse \quad I' \nvDash B$

  Il simbolo $\neg$ è di lunghezza $m + 1$, quindi l'IH è m.

$$IH: \quad I \vDash B \quad sse \quad I' \vDash B$$

  In quanto la logica classica è bivalente, quindi ha due valori, se l'IH si comporta in un modo in un caso, quando la si nega, si deve comportare nello stesso modo. Quindi, per IH: $I \nvDash B$ sse $I' \nvDash B$

- Caso $\wedge$, si deve dimostrare che: $\quad$ (a) $\quad I \vDash B \wedge C \quad sse \quad I' \vDash B \wedge C$

  Si hanno due ipotesi di induzione:

  IH$_1$: $I \vDash B \quad sse \quad I' \vDash B$

  IH$_2$: $I \vDash C \quad sse \quad I' \vDash C$

  Per 4, riscrivo (a):

$$I \vDash B \quad \text{e} \quad I \vDash C \qquad sse \qquad I' \vDash B \quad \text{e} \quad I' \vDash C$$

[19] Se l'interpretazione di una qualsiasi variabile enunciativa è uguale ad un'altra interpretazione della stessa variabile enunciativa, allora so che la formula avrà lo stesso valore di verità nelle due interpretazioni.

Per IH_1 e IH_2:

$$I' \vDash B \quad \text{e} \quad I' \vDash C \qquad sse \qquad I' \vDash B \quad \text{e} \quad I' \vDash C$$

- Dimostrazione analoga per $\vee$ e $\rightarrow$

Questo teorema permette di stabilire che, per sapere il valore di verità di una formula, è sufficiente conoscere il valore di verità delle variabili enunciative. Ciò giustifica l'utilizzo delle tavole di verità.

‡ Esercizio: $I \vDash A$ sse $I \vDash^{2k} A$ (da dimostrare su induzione su k. Quindi, si dimostra che la proprietà valga per $k = 0$, e poi anche per $k + 1$.)

2.5 Definizioni: validità, conseguenza logica

- ■ A è soddisfatta da I, sse $\quad I \vDash A$[20]
- ■ A è soddisfacibile, sse $\quad \exists I(I \vDash A)$[21]
- ■ A è valida ($\vDash A$), sse $\quad \forall I(I \vDash A)$[22]
- ■ A è conseguenza logica ($\Gamma \vDash A$) di Γ con $\Gamma \subseteq Fm\Phi$, sse $\quad \forall I\ (I \vDash \Gamma\ \ allora\ \ I \vDash A)$[23]

Teorema di deduzione

■ $\boxed{\Gamma, A \vDash B \quad sse \quad \Gamma \vDash A \rightarrow B}$

$\boxed{\rightarrow}$

Per ipotesi: $\quad \Gamma, A \vDash B$

Perché congiunzione logica, si può riscrivere: $\quad \forall I\ (I \vDash \Gamma, A\ \ allora\ \ I \vDash B)$

Si deve dimostrare: $\quad \Gamma \vDash A \rightarrow B$

Perché congiunzione logica, si può riscrivere: $\quad \forall I\ (I \vDash \Gamma\ \ allora\ \ I \vDash A \rightarrow B)$

---

[20] A è soddisfatta quando $\vDash$, e non lo è quando $\nvDash$.

[21] A è soddisfacibile quando esiste almeno una interpretazione che la rende vera.

[22] A è valida quando è vera indipendentemente dall'interpretazione o dal valore di verità della variabile. In logica classica proposizionale è chiamata tautologia.

[23] Se da premesse vere, segue la verità della conclusione, allora è conseguenza logica. Quindi per ogni I, tale che I rende veri tutti gli enunciati in Γ, risulta che I renda vero anche A. Questo perché parto dall'insieme Γ e arrivo all'insieme A.

Assunzione: $I' \models \Gamma$

Si danno due casi:[24]

$$\begin{tikzcd}
 & I' \models A \arrow[r, dash] & I' \models A \to B \quad \text{(vera per ipotesi)[25]} \\
I' \models \Gamma \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & I' \not\models A \arrow[r, dash] & I' \models A \to B \quad \text{(sempre vera)}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\leftarrow}$

Per ipotesi:	$\Gamma \models A \to B$
Perché congiunzione logica, si può riscrivere:	$\forall I\ (I \models \Gamma\ \textit{allora}\ I \models A \to B)$
	$\forall I\ (I \models \Gamma\ \textit{allora}\ (I \not\models A\ \textit{oppure}\ I \models B)$
Si deve dimostrare:	$\Gamma, A \models B$
Perché congiunzione logica, si può riscrivere:	$\forall I\ (I \models \Gamma, A\ \textit{allora}\ I \models B)$

(I_1) Assumo:[26] $I \models \Gamma, A$

Per I_1, $I \models \Gamma$. Quindi, per ipotesi: $I \not\models A$ o $I \models B$

Per I_1, $I \models A$. Di conseguenza, $I \models B$

‡ Esercizio: $\models (A \wedge B) \to A$ (da provare dimostrazione diretta + per assurdo)

Teorema

■ $\Gamma \models A$ *sse* $\Gamma, \neg A$ è insoddisfacibile

[24] Un caso in cui A è vera rispetto alla sua interpretazione, e uno in cui A è falsa.

[25] Per ipotesi, se I rende vera A, allora rende vera anche B. In questo caso A è vera, di conseguenza, per ipotesi, B è vera (sempre rispetto alla sua interpretazione).

[26] Una implicazione è vera se l'antecedente è falso, o se il conseguente è vero. Di conseguenza, assumiamo che l'antecedente sia vero, visto che in caso contrario l'intera implicazione sarebbe sempre vera.

$\boxed{\rightarrow}$

Ipotesi: $\forall I \; (I \vDash \Gamma \quad allora \quad I \vDash A)$

Per soddisfare l'ipotesi, o l'antecedente è falso, o il conseguente è vero. Quindi, assumendo entrambi i casi, si mostra che $\Gamma, \neg A$ è insoddisfacibile.

caso 1: $\exists B \in \Gamma$ t.c. $I \nvDash B$ $\qquad$ ($\underline{\Gamma}, \neg A$ è insoddisfatto da I)

caso 2: $I \vDash A$ $\qquad$ ($\Gamma, \underline{\neg A}$ è insoddisfatto da I)

Potrebbe essere sbagliato. Da rivedere.

$\boxed{\leftarrow}$

Dimostrazione molto simile.

‡ Esercizio: $\vDash (\neg A \vee \neg B)$ sse $\neg(A \wedge B)$

Logica modale

3.1 Costruzione linguaggio

!La costruzione del linguaggio è identica a quella della logica proposizionale, con l'aggiunta di $\Diamond$ e $\Box$, che ho deciso di differenziare con questo colore!

Elementi costitutivi:

- Variabili enunciative (Φ): P_0, P_1, P_2 ...
- Simboli: $\neg$, $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Diamond$, $\Box$[1]
- Simboli ausiliari: ( )

Definizione dell'insieme delle formule modali proposizionali (FmΦ)

1. Se $\mathcal{P}_i \in \Phi$, allora $\mathcal{P}_i \in \mathrm{Fm}\Phi$
2. $\bot \in \mathrm{Fm}\Phi$
3. Se $A \in \mathrm{Fm}\Phi$, allora $\neg A$, $\Diamond$, $\Box \in \mathrm{Fm}\Phi$

[1] Questi due operatori sono chiamati *operatori modali*.

④ Se A,B $\in$ FmΦ, allora $\left\{\begin{matrix} (A \wedge B) \\ (A \vee B) \\ (A \rightarrow B) \end{matrix}\right\} \in$ FmΦ

⑤ Nient'altro appartiene a FmΦ.

Definizione di lunghezza di una formula A

① $lg(\mathcal{P}_i) = 0$

② $lg(\perp) = 0$

③ $lg(\neg A) = lg(\Diamond), lg(\Box) = lg(A) + 1$

④ $lg(A \wedge B) = lg(A \vee B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$

Principio di induzione matematica

Una volta collegata la formula a numeri naturali, è possibile applicare il principio di induzione matematica direttamente alle formule.

Base: P($\perp$), P(P_i)

Passo induttivo:

Assumo: P(A), P(B)

Mostro: P($\neg A$)

$$\begin{pmatrix} P(A \wedge B) \\ P(A \vee B) \\ P(A \rightarrow B) \end{pmatrix}$$

$P(\Diamond)$, $P(\Box)$

Conclusione: $\forall A \in Fm\Phi \; (P(A))$[2]

[2]Per ogni formula A appartenente all'insieme delle formule, vale la proprietà P.

3.2 Semantica

Struttura relazionale (frame)	$F =< W, R >$
Modello:	$M =< W, R, I >$
In cui:	W è un insieme non vuoto di mondi.
	R è un insieme di coppie di mondi ($R \subseteq WxW$).
	$I : \Phi \rightarrow P$[3](W)[4]

- Si utilizzeranno u,w,v... come metavariabili che rappresentano mondi.
- wRv significa che v è accessibile da w (w vede v).
- M è basato su F, se $M =< W, R, I >$ e $F =< W, R >$

Definizione di verità ($\vDash_w^M$)[5]

$\vDash_w^M (P_i)$	sse	$w \in I(P_i)$
$\nvDash_w^M (\bot)$		
$\vDash_w^M (\neg B)$	sse	$\nvDash_w^M (B)$
$\vDash_w^M (B \wedge C)$	sse	$\vDash_w^M (B)$ e $\vDash_w^M (B)$
$\vDash_w^M (B \vee C)$	sse	$\vDash_w^M (B)$ o $\vDash_w^M (B)$
$\vDash_w^M (B \rightarrow C)$	sse	$\nvDash_w^M (B)$ o $\vDash_w^M (B)$
$\vDash_w^M \Box B$	sse	$\forall v \in W\ (wRv\ implica\ \vDash_w^M B)$[6]
$\vDash_w^M \Diamond B$	sse	$\exists v \in W\ (wRv\ e\ \vDash_w^M B)$
$\nvDash_w^M \Box B$	sse	$\exists v \in W\ (wRv\ e\ \nvDash_v^M B)$
$\nvDash_w^M \Diamond B$	sse	$\forall v \in W\ (wRv\ implica\ \nvDash_v^M B)$

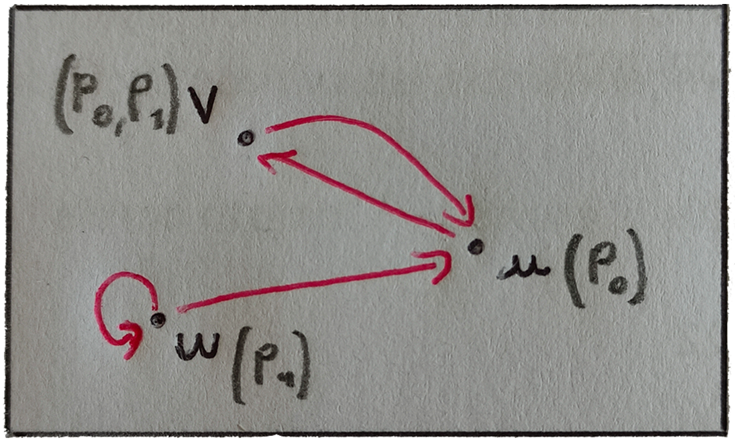
[3]La P (in realtà sarebbe dovuta essere una P in corsivo) esclusivamente in questo è l'operatore di potenza che ad ogni insieme associa l'insieme dei suoi sottoinsiemi.

[4]La funzione prende in pasto le variabili enunciative e, per ciascuna di esse, restituisce un insieme di mondi. È equivalente a $I(P_i) \subseteq W$.

[5]Restituisce la verità di A in un punto w del modello M. Quindi, se il mondo w non fa parte dell'interpretazione della variabile enunciativa P, allora P è falsa in quel mondo.

[6]Per ogni oggetto del dominio è vero B, a condizione che sia dentro W.

$\boxed{\text{Esempio per capire meglio}}$



$F = \left\langle \overbrace{\{u, v, w\}}^{W}, \overbrace{\{< w, w >, < w, u >, < u, v >, < v, u >\}}^{R} \right\rangle$

Per creare un modello, servono anche le interpretazioni. In questo caso si assume di averne due:

$I(P_0)$[7] $= \{v, u\}$

$I(P_1) = \{w, v\}$

$\vDash_w = \Box(P_0)$ sse $\underbrace{\vDash_w (P_0)}_{Falso}$[8] e $\underbrace{\vDash_u (P_0)}_{Vero}$

L'operatore modale $\Box$ richiede che in tutti i mondi 'visti' da w valga P_0. In questo caso, quindi, l'intera uguaglianza è falsa.

3.3 Dualità nella logica modale

(dimostrazioni non sipegate nell'anno 2022/23)

Nella logica classica si ha una dualità tra il quantificatore universale e l'esistenziale. I due sono interdefinibili:

[7] Dice che la variabile enunciativa P_0 è vera nei mondi v e u.

[8] P_0 non è vera in w perché $I(P_0) = \{v, u\}$ non contiene w.

(a) $\models \forall_x A \leftrightarrow \neg\exists_x \neg A$

(b) $\models \exists_x A \leftrightarrow \neg\forall_x \neg A$

Anche in logica modale esiste la dualità tra Box ($\Box$) e Diamond ($\Diamond$):

1 $\models^M_w \Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

2 $\models^M_w \Diamond A \leftrightarrow \neg\Box\neg A$

Dimostrazione di 1

Metodi di dimostrazione

Metodo diretto: Sia w, M tali che $\models^M_w \Box A$
Mostro $\models^M_w \neg\Diamond\neg A$

Metodo per assurdo: $\exists w, M$ tali che $\models^M_w \Box A$ e $\not\models^M_w \neg\Diamond\neg A$[9]

$\boxed{\rightarrow}$

- Dimostrazione tramite metodo diretto:

$\models^M_w \Box A$ sse $\forall v \in W\ (wRv \rightarrow \models_w A)$

$\models^M_w \neg\Diamond\neg A$ sse $\not\models^M_w \Diamond\neg A$

$\forall v \in W\ (wRv \rightarrow \not\models_w \neg A)$[10]

$\forall v \in W\ (wRv \rightarrow \models_w A)$

- Dimostrazione per assurdo:

---

[9] Una volta mostrato che ciò porta a contraddizione, la dimostrazione è conclusa.

[10] Dalla definizione di verità del Diamond, si ricava che $\models^M_w \Diamond A$ sse $\forall v \in W\ (wRv \rightarrow \not\models_w A)$.

Si assume che l'implicazione non valga[11]: $\exists w, M$ t.c. $\underbrace{\models_w^M \Box A}_{(a)}$ e $\underbrace{\not\models_w^M \neg\Diamond\neg A}_{(b)}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(a)}\ \models_w^M \Box A & \text{sse} & \forall v \in W\ (wRv \rightarrow \models_w A \\
\text{(b)}\ \not\models_w^M \neg\Diamond\neg A & \text{sse} & \models_w^M \Diamond\neg A \\
 & & \exists u \in W\ (wRu\ \ e\ \ \models_u \neg A)
\end{array}
$$

Il caso (a) mostra che per tutti i mondi visibili da w vale A.

Il caso (b) mostra che esiste un mondo (u) visibile da w in cui è vero $\neg A$.

Nel mondo u, sia una formula che la sua negazione sono vere, e questa è una contraddizione.

Quindi, non esiste un punto di un modello che rende falsa questa implicazione. Ciò significa che questa implicazione è vera in ciascun punto di ciascun modello.

$\boxed{\leftarrow}$

$$\models_w^M \neg\Diamond\neg A \ \rightarrow\ \Box A$$

Dim. per assurdo: $\exists w, M$ t.c. $\not\models_w^M \neg\Diamond\neg A \ \rightarrow\ \Box A$

Per dimostrare l'assurdo, si deve dimostrare che ciò porta a contraddizione. In questo caso l'unico modo per avere una implicazione falsa (causa $\not\models$) è porre l'antecedente come vero e il conseguente come falso.

$$
\begin{array}{lll}
\models_w^M \neg\Diamond\neg A & \text{sse} & \not\models_w^M \Diamond\neg A \\
 & & \forall v \in W\ (wRv \rightarrow \underbrace{\not\models_w^M \neg A}_{\models_w^M A})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\not\models_w^M \Box A & \text{sse} & \exists u \in W\ (wRu\ \ e\ \not\models_w^M A)
\end{array}
$$

Tutti i mondi visti da w devono rendere vera A, ma il generico mondo u (visto da w) <u>non</u> rende

[11] L'implicazione non è vera se l'antecedente è vero e il conseguente falso.

vera A. Ciò porta a contraddizione.

3.4 Verità, validità, conseguenza logica

- Verità in un modello ($\vDash^M A$):[12] $\vDash^M A \quad sse \quad \forall w \in W\ (\vDash^M_w A)$
- Validità di una struttura ($F =< W, R >$): $F \vDash A \quad sse \quad \forall M$ basato su[13] $F(\vDash^M A)$
- Validità ($\vDash A$): $\vDash A \quad sse \quad \forall F\ (F \vDash A)$
- Validità su una classe (C) di strutture: $C \vDash A \quad sse \quad \forall F \in C\ (F \vDash A)$
- Conseguenza logica (locale):[14] $\Gamma \vDash A \quad sse \quad \forall w\ di\ ciascun\ M\ (se\ \vDash^M_w \Gamma\ allora\ \vDash^M_w A)$
- Conseguenza logica (globale):[15] $\Gamma \vDash_C A \quad sse \quad \forall\ modello\ M\ (se\ \vDash^M \Gamma\ allora\ \vDash^M A)$

‡ Esercizio: $\vDash \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

‡ $K := \vDash \Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

Regole che preservano la validità[16]

■ Modus Ponens

$$\boxed{\frac{\vDash A \qquad \vDash A \rightarrow B}{\vDash B}}$$

A è una formula valida
$A \rightarrow B$ è una formula valida
B è valida

[12] Una formula è vera in un modello quando tutti i punti del modello rendono vera la formula.

[13] Un modello è basato su una struttura se il modello è stato costruito prendendo una struttura ($F =< W_1, R_1 >$) e aggiungendo una funzione di interpretazione ($M =< W_1, R_1, I_\alpha >$).

[14] Ciò che viene definito è la versione generalizzata. Per la versione più ristretta ($\vDash^C$): A è conseguenza logica di Γ (insieme di formule) nella classe C di strutture, sse data C classe di strutture, se per ogni punto ($\forall v$) di ogni modello basato su una struttura in C vale che: se quel punto rende vero B ($\vDash^M_w B$) per ogni formula B in Γ, allora rende vere tutte le formule in Γ ($\vDash^M_w A$).

[15] La differenza tra la conseguenza logica globale e locale è che: in quella globale se B è vera in tutti i punti del modello, allora A è vera in tutti i punti del modello; mentre in quella locale, in ciascun punto in cui B è vera, anche A è vera.

[16] Si preserva la verità in un generico punto di un generico modello. Da questo segue la preservazione della verità su tutto il modello. Da ciò segue la preservazione della validità su una generica struttura.

- Dimostrazione

I_1: $\forall M \, \forall w \in M \quad \vDash_w^M A$

I_2: $\forall M \, \forall w \in M \quad \vDash_w^M (A \to B)$

Da I_2: (a) $\nvDash_w^M A$ oppure (b) $\vDash_w^M B$

(a) è un caso impossibile per ipotesi. Quindi, (b) deve essere vero (causa disgiunzione).

- Necessitazione

$$\boxed{\frac{\vDash A}{\vDash \Box A}}$$

A è una una formula valida
$\Box A$ è una formula valida

- Dimostrazione

Assumo: M tale che $\vDash^M A$ (A è vera in tutti i punti di M)

Se A è vera in ogni punto di ogni modello,
Allora in ciascun modello t.c. A, anche in ogni punto accessibile sarà vero A.

Quindi, anche $\Box A$ è vero in tutti i punti di quel modello.

Dal fatto che si preserva la verità su un modello,
Segue che se ne preserva la validità (ma non la validità in un punto di un modello).

- Regola (non spiegata nell'anno 2022/23)

$$\boxed{\frac{\vDash A \to B}{\vDash \Box A \to \Box B}}$$

- Dimostrazione diretta

Ip$_1$: $\forall w \in W \ (\vDash_w A \to B)$

Ip$_2$: $\forall w \in W \ (\vDash_w \Box A)$

$\forall v \ (wRv \to \vDash_v A)$

Allora: $\forall v \ (wRv \to \vDash_v A \ \ e \ \ \vDash_v A \to B)$

$\forall v \ (wRv \to \vDash_v B)$

$\vDash_w \Box B$

$\boxed{\textbf{Teorema}}$ (non spiegato nell'anno 2022/23)

■ $\Gamma \vDash A \quad sse \quad \vDash \Gamma \to A$

Γ è un insieme definito $B_1, B_2, ..., B_n$.

$\boxed{\to}$ Dimostrazione diretta $\longrightarrow$ $B \vDash A \quad sse \quad \vDash B \to A$

Ip: $B \vDash A$

$\forall w \ \ di\ ciascun\ M\ (se \vDash_w B \ \ allora \ \ \vDash_w A)$

$\vDash B \to A$ sse se $\vDash B$ allora $\vDash A$

Da dimostrare: $\vDash_w B \to A$

$\forall w \ \ di\ ciascun\ M\ (se \vDash_w B \ \ allora \ \ \vDash_w A)$

$\boxed{\leftarrow}$ dimostrazione analoga.

Se $B \vDash_C A \ \ allora \ \ \vDash B \to A$ non vero - non ho ben capito perché)

3.5 Regola di sostituzione uniforme

Definizione: $A[{}^B\!/\!_P]$ (A con B al posto di P)

Questa formula è ottenuta rimpiazzando in A ciascuna occorrenza di P (atomo), con una occorrenza di B.

Definizione induttiva

$$q[{}^{B}\!/\!_{P}] \equiv \begin{cases} q & se \quad q \not\equiv P \\ B & se \quad q \equiv P \end{cases}$$

$$\perp [{}^{B}\!/\!_{P}] \equiv \perp$$

$$(*A)\ [{}^{B}\!/\!_{P}] \equiv *\ (A[{}^{B}\!/\!_{P}]) \quad \text{dove} \quad * \in \{\neg, \Box, \Diamond\}$$

$$(A \circ C)\ [{}^{B}\!/\!_{P}] \equiv A[{}^{B}\!/\!_{P}]\ \circ\ C[{}^{B}\!/\!_{P}] \quad \text{dove} \quad \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$$

Regola di sostituzione uniforme (SU)

$$\frac{\models A}{\models A[{}^{B}\!/\!_{P}]}$$

(SU) non preserva la verità sul modello (è possibile $M \models A$ e $M \not\models A[{}^{B}\!/\!_{P}]$).

(SU) preserva la <u>validità</u> su una qualsiasi <u>struttura</u>.

<u>Dimostrazione per contrapposizione</u>

Assumo: $F \not\models A[{}^{B}\!/\!_{P}]$

Mostro: $F \not\models A$

Per assunzione, esiste un modello $M =< W, R, I >$
e un punto w di M t.c. $\not\models^M_w A[{}^{B}\!/\!_{P}]$.[17]

Definisco l'insieme: $H_B = \{v \in W\ :\ \models^M_V B\}$[18]

Definisco il modello: $M^* =< W, R, I^* >$

[17] Questo perché basta un punto di un modello basato su F che renda falsa la formula.

[18] H_B è l'insieme che contiene tutti i mondi in cui B è vera.

$$I^*(q) \begin{cases} I(q) \quad se \quad q \not\equiv P & (a) \\ H_B \quad se \quad q \equiv P & (b) \end{cases}$$

(a) Se P non occorre, il modello si comporta come quello di partenza su tutte le formule in cui non occorre P.

(b) Se P occorre, P lo interpreto su quello che nel modello originale era l'interpretazione di B.

$\longrightarrow$ L'interpretazione nei due modelli sarà la medesima.

Quindi, **Lemma**, per ogni formula ben formata (fbf) D e per ogni $u \in V$:

$$\vDash_u^M D[^B/_P] \quad \text{sse} \quad \vDash_u^{M^*} D[^B/_P]$$

Ciò che si ha intenzione di mostrare è che il modello originale e quello modificato si comportano allo stesso modo sulla formula sostituita e su quella non sostituita.

<u>Dimostrazione per induzione sulla costruzione di D</u>

Caso $D \equiv \bot$ $\qquad \nvDash_u^M \bot\ [^B/_P] \qquad \nvDash_u^{M^*} \bot\ [^B/_P]$[19]

Caso $D \equiv q$ $\qquad \begin{cases} (a)\ q \not\equiv P \\ (b)\ q \equiv P \end{cases}$

$(a)\ q \not\equiv P$

$$\vDash_u^M q[^B/_P]$$
$$\vDash_u^M q$$
$$u \in I(q)$$
$$u \in I^*(q)$$[20]

[19] $\bot$ è sempre falso in ogni punto di ogni modello.

[20] Per costruzione di $I^*(q)$ so che $I^*(q) = I(q)$.

$$\models_u^{M*} q$$

(b) $q \equiv P$ $\quad$ $\models_u^{M} q[{}^{B}/{}_{P}]$

$\models_u^{M} B$

$\models_u^{M*} P$ [21]

Caso $D \equiv (\neg C)$

IH: $\models_u^{M} C[{}^{B}/{}_{P}] \quad sse \quad \models_u^{M*} (C)$

Assumo: $\models_u^{M} (\neg C)\ [{}^{B}/{}_{P}]$

$\models_u^{M} \neg(C\ [{}^{B}/{}_{P}])$

Per IH: $\models_u^{M*} \neg(C)$

Caso $D \equiv (D \wedge E)$ $\quad$ $\models_u^{M} (D \wedge E)\ [{}^{B}/{}_{P}]$

$\models_u^{M} D\ [{}^{B}/{}_{P}] \ \wedge \ \models_u^{M} E\ [{}^{B}/{}_{P}]$[22]

$\models_u^{M} D\ [{}^{B}/{}_{P}] \ e \ \models_u^{M} E\ [{}^{B}/{}_{P}]$[23]

Per IH_1 e IH_2: $\models_u^{M*} D\ [{}^{B}/{}_{P}] \ e \ \models_u^{M*} E\ [{}^{B}/{}_{P}]$

$\models_u^{M*} D\ [{}^{B}/{}_{P}] \ \wedge \ \models_u^{M*} E\ [{}^{B}/{}_{P}]$

$\models_u^{M*} D \wedge E$

Casi $\vee$, $\rightarrow$: analoghi.

Caso: $D \equiv \Box C$ $\quad$ $\models_u^{M} (\Box C)\ [{}^{B}/{}_{P}]$

$\models_u^{M} \Box(C\ [{}^{B}/{}_{P}])$

$\forall t \in W\ (uRt \rightarrow \models_t^{M} C[{}^{B}/{}_{P}])$[24]

Per IH: $\forall t \in W\ (uRt \rightarrow \ \models_t^{M*} C)$

$\models_u^{M*} \Box C$

[21] Questo perché per costruzione di $I(q)$ so che $I^*(q) = H_B$ e H_B è l'insieme di tutti i mondi che rendono vera B.

[22] Per definizione di sostituzione.

[23] Per definizione di congiunzione devono essere vere entrambe.

[24] t rappresenta un punto generico.

Caso $\Diamond$ analogo.

Grazie a questa dimostrazione, è stato dimostrato il lemma: $\vDash_u^M D[^B/_P]$ sse $\vDash_u^{M^*} D$

Per il lemma: $\exists M \exists w$ t.c. $\nvDash_w^M A[^B/_P]$ allora $\nvDash_u^{M^*} A$

Dunque $F \nvDash A$

3.6 Teoria della corrispondenza

Affermiamo che A corrisponde a P sse $\forall F\ (F \vDash A\ sse\ F \rhd$ [25] $P)$

- $A \in Fm$
- P è una formula del primo ordine definita da:

  (a) R: Un predicato binario (interpretato come relazione di accessibilità).

  (b) $=$: Predicato d'identità.

Infatti, è possibile mostrare come certe formule modali siano valide su una struttura sse la relazione di accessibilità di quella struttura soddisfa certe proprietà del 1° ordine.

Schema T

■ $T := \Box A \rightarrow A$

$\forall F\ (F \vDash \Box A$ [26] $\rightarrow A\ sse\ \underbrace{F \rhd \forall w\ (wRw)}_{F \text{ è riflessiva}})$

[25] Il simbolo $\rhd$ rappresenta 'soddisfa' o 'gode di'. In questo caso, quindi, è vero se la formula P è valida sulla struttura F.

[26] In questo caso A è una formula arbitraria.

$\boxed{\rightarrow}$ <u>Dimostrazione diretta</u> $\longrightarrow$ $\underline{F \vDash \Box A \to A \ \to \ F \text{ è riflessiva}}$

Assumo:	Sia F t.c. $F \vDash \Box A \to A$[27]
IP_1	Sia M un F-modello t.c. $I(P) = \{v : wRv\}$ [28]
	$\vDash^M_w \Box P$
IP_2	$\vDash^M_w \Box P \to P$
MP	$\vDash^M_w P$
	$w \in I(P)$
Da IP_1:	wRw [29]
	$\forall v\ (vRv)$[30]

$\boxed{\rightarrow}$ <u>Dimostrazione per contrapposizione</u> $\longrightarrow$ $\underline{F \vDash \Box A \to A \ \to \ F \text{ è riflessiva}}$

- Funzionamento dimostrazione per contrapposizione:

Contrapposizione: $\vDash A \to B \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$

(a) Assumo ($\neg B$):	F non riflessiva
	w t.c. $\neg(wRw)$
Mostro ($\neg A$):	$F \nvDash \Box A \to A$
	$\nvDash_w \Box P \to P$ [31]

[27] Si considera una struttura (F), in cui si assume che la formula $F \vDash \Box A \to A$ sia valida, ossia vera in ogni punto di ciascun modello.)

[28] L'interpretazione del particolare atomo P è uguale all'insieme di punti del modello tale che siano visti dal mondo generico w.

[29] In quanto w appartiene all'interpretazione di P, uno dei mondi visti da w, è proprio w.

[30] w è stato scelto come un mondo generico, quindi, se la proprietà vale per w, allora vale per tutti i mondi.

[31] Per mostrare la falsità di una implicazione, è necessario far vedere che, dato l'antecedente, ne risulti la negazione del conseguente.

(b) IP: $\models^M_w \Box P$

$\forall v\ (wRv \to \models^M_v P)$

I_P: Interpretazione più piccola di (b): $\forall v \in W\ (v \in I(P)\ \ sse\ \ wRv)$[32]

Per (a) e (b): $w \notin I(P)$[33]

$\not\models^M_w P$

$\boxed{\leftarrow}$ <u>Dimostrazione diretta</u> $\longrightarrow$ <u>F è riflessiva $\to$ $F \models \Box A \to A$</u>

Assumo: $\forall w\ (wRw)$

Mostro: $F \models \Box A \to A$

Assumo: $\models_w \Box P$

$\forall v \in W\ (wRv$ implica $\models_v P)$ (v generico mondo)

M.P.
$$\frac{wRv \to \models_v A \qquad wRw}{\models_w A}$$

$\boxed{\textbf{Schema 4}}$

■ $4 := \Box A \to \Box\Box A$

$$\forall F\ (F \models \Box A \to \Box\Box A\ \ sse\ \ \underbrace{F \rhd \forall w, v, u\ ^{34}\ (wRv\ e\ vRu\ \to\ wRu)}_{F \text{ è transitiva}})$$

$\boxed{\rightarrow}$ <u>Dimostrazione diretta</u> $\longrightarrow$ <u>$F \models \Box A \to \Box\Box A$ $\to$ F è transitiva</u>

[32] Questa è la più piccola interpretazione che soddisfa (b), infatti, comprende esclusivamente i mondi visti da w che hanno P.

[33] Sappiamo: (I) Per costruzione, che nessun mondo vede sé stesso ($\neg(wRw)$); e (II) secondo I_P, che solo i mondi visti da w hanno P. Di conseguenza, se w non vede w (a), allora non fa parte dell'interpretazione di P.

[34] Si può sostituire $F \rhd \forall w, v, u$ con $\forall w, v, u \in F$.

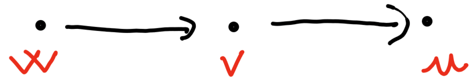
Assumo: F t.c. $F \vDash \Box \rightarrow \Box\Box A$

(I_1) Costruisco I t.c. $\vDash_w \Box P$

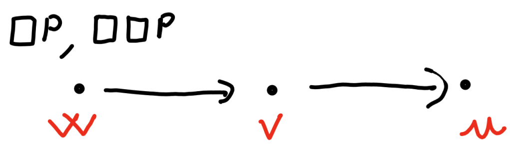
$I(P) = \{v \in W : wRv\}$

(I_2) MP: $\vDash_w \Box\Box P$

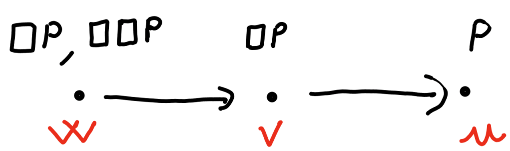
Assumo: wRv e vRu[35]



Per I_1,I_2: w rende vere $\Box P$ e $\Box\Box P$.



Di conseguenza, tutti i mondi 'distanti' da w di un passo, rendono vera $\Box P$. Mentre, quelli distanti due passi rendono vera P.



Quindi, dato che $u \in I(P)$, per la definizione di interpretazione, wRu.[36]

[35]Nella transitività, simmetria, ecc. si può assumere l'antecedente del conseguente solo quando transitività, simmetria, ecc. si trovano dalla parte del conseguente.

[36]Questo perché, per l'interpretazione di P, tutti i mondi in cui P è vera, sono visti da w.

$\boxed{\leftarrow}$ $\underline{F \text{ è transitiva } \rightarrow F \vDash \Box A \rightarrow \Box\Box A}$

"tengo a mente"[37]: $\forall w, v, u\, (wRv \text{ e } vRu \rightarrow wRu)$

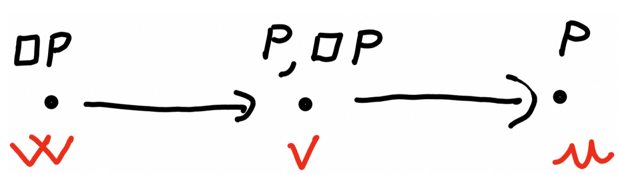
Assumo: $\vDash^M_w \Box P$

Ragionamento per casi:

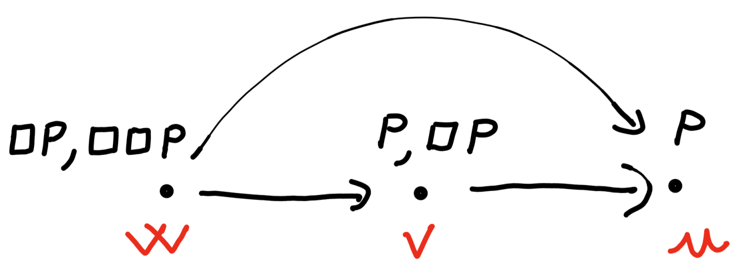
(a) w non vede niente: $\vDash_w \Box\Box P$

(b) Assumo che esista: v visto da w

Con lo stesso ragionamento sui casi, si costruisce una freccia tra v e un altro generico mondo u.[38] Per ragionamento analogo a quello su w, anche $\vDash_V \Box P$ e $\vDash_u P$



Di conseguenza, se u si trova a due punti di distanza da w, e la proprietà P è vera in u, allora $\vDash_w \Box\Box P$.



[37]Uso l'espressione "tengo a mente" per dire che la proprietà (in questo caso la proprietà transitiva) è valida nella struttura. Probabilmente non è la soluzione più elegante, accetto consigli :(

[38]Se il generico mondo v non vedesse nessun altro mondo, $\Box\Box P$ sarebbe vera, e la corrispondenza sarebbe dimostrata. In caso contrario, si assume che v veda un generico mondo u.

$\boxed{\textbf{Schema D}}$

■ $D := \Box A \to \Diamond A$

$\forall F \; (F \vDash D \;\; sse \;\; \underbrace{\forall w, \exists v \; (wRv)}_{F \text{ è seriale } 39})$

$\boxed{\rightarrow}$ Dimostrazione diretta $\longrightarrow$ $F \vDash \Box A \to \Diamond A \;\; \to \;\; F$ è seriale

Assumo: F t.c. $F \vDash \Box P \to \Diamond P$

Costruisco un generico F-modello: $I(P) \; = \; \{v \; : \; wRv\}$

Quindi: $\vDash^M_w \Box P$

So che: $\vDash^M_w \Box P \to \Diamond P$

MP: $\vDash^M_w \Diamond P$

$\exists v \in W \; (wRv \;\; e \;\; \vDash_v \; P)$

Conclusione (visto che w è generico): $\forall w \; (\exists v (wRv))$

$\boxed{\leftarrow}$ Dimostrazione diretta $\longrightarrow$ F è seriale $\;\to\;$ $F \vDash \Box A \to \Diamond A$

Assumo: F è seriale

Mostro: $\Box A \to \Diamond A$

Assumo: $\vDash_w \Box A$

$\forall v \in W \; (wRv \to \vDash_v A)$

Quindi: $\exists u \in W \; (wRu \;\; e \;\; \vDash_u A)$[40]

$\vDash_w \Diamond A$

---

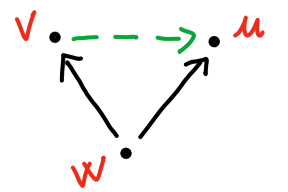
[39] Una struttura è seriale se ogni mondo ne vede almeno un altro.

[40] In quanto la struttura è seriale (ogni mondo ne vede almeno un altro), w vede almeno un mondo. Inoltre, tutti i mondi visti da w rendono vera A. Quindi almeno un mondo visto da w rende vera A, ossia $\vDash_w \Diamond A$.

$\boxed{\textbf{Schema 5}}$

■ $5 := \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

$\forall F\ (F \vDash 5\ \ sse\ \ \underbrace{\forall w, v, u\ (wRv \wedge wRu \rightarrow \exists u(vRu)))}_{F \text{ è Euclidea}}$



$\boxed{\rightarrow}$ <u>Dimostrazione diretta</u> $\longrightarrow$ <u>$F \vDash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A\ \ \rightarrow\ \ F$ è Euclidea</u>

Assumo: $F \vDash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

Assumo: wRu e wRv

Costruisco F-modello: $I(P) = \{x \in W\ :\ x = v\}$[41]

Quindi: $\vDash_w \Diamond P$

M.P. $\vDash_w \Box\Diamond P$

Per $\vDash_u \Diamond P$, u deve vedere almeno un mondo che rende vero P.

Per $I(P)$, solo v rende vero P.

Di conseguenza, uRv.

$\boxed{\leftarrow}$ <u>Dimostrazione diretta</u> $\longrightarrow$ <u>F è Euclidea $\ \rightarrow\ F \vDash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$</u>

"tengo a mente": F è Euclidea

Assumo: $\vDash_w \Diamond P$

Per mondo generico v: $\vDash_v P$

[41] Per semplificare, il prof. scrive $I(P) = \{v\}$.

Trick (perché Euclidea): $wRv \wedge wRv \rightarrow vRv$

$\vDash_v \Diamond A$[42]

Allora, in quanto:

- wRv,
- v è un mondo generico,
- $\vDash_v \Diamond P$,

tutti i mondi visti da w rendono vero $\Diamond P$.

Quindi, $\vDash_w \Box\Diamond P$

Schema B

■ $B := A \rightarrow \Box\Diamond A$

$$\forall F\,(F \vDash B \;\; sse \;\; \underbrace{\forall w, u\,(wRu \rightarrow uRw)}_{F \text{ è simmetrica}})$$

$\boxed{\rightarrow}$ Dimostrazione diretta $\longrightarrow$ $F \vDash A \rightarrow \Box\Diamond A \;\rightarrow\; F$ è simmetrica

Assumo: $F \vDash P \rightarrow \Box\Diamond P$

Assumo: wRu [43]

Costruisco I minimale: $I(P) = \{w\}$

Quindi: $\vDash_w P$

M.P. $\vDash_w \Box\Diamond P$

[42] Questo perché v rende vero P e vede sé stesso.

[43] Se non lo assumessi, la simmetria sarebbe sempre vera (perché l'antecedente è falso).

Dato che <u>solamente</u> w rende vero P (per $I(P)$),

Allora: uRw

$\boxed{\leftarrow}$ <u>Dimostrazione diretta</u> $\longrightarrow$ <u>F è simmetrica $\rightarrow$ $F \vDash A \rightarrow \Box\Diamond A$</u>

"tengo a mente":	F è simmetrica
Assumo:	$\vDash_w P$
Costruisco I minimale:	$I(P) = \{w\}$

- Caso $\neg(wRu$[44]$)$:	$\vDash_w \Box\Diamond P$ sempre vera.
- Caso wRu:	uRw per ipotesi.
Per $I(P)$:	$\exists w(uRw \text{ e } \vDash_w P)$
	$\vDash_u \Diamond P$

Essendo u generico, lo stesso ragionamento si può estendere per tutti i mondi visti da w, i quali renderanno vero $\Diamond P$.

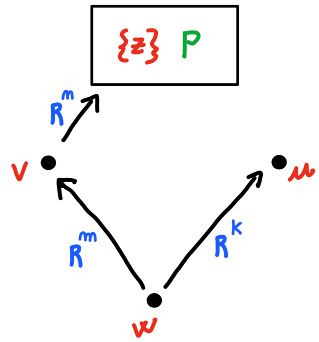
Allora: $\vDash_w \Box\Diamond P$

[44] Come al solito, u mondo generico.

$\boxed{\text{Schema di Lemmon}}$

$$\forall F\ (F \models \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^j A \quad sse \quad \forall w, v, u\ (wR^m v\ \ e\ \ wR^k u \to \exists t(vR^n t\ \ e\ \ uR^j t)))$$

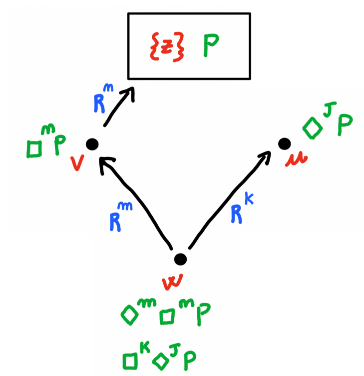
$\boxed{\to}$ Dimostrazione diretta



Assumo: $F \models \Diamond^m \Box^n A \to \Box^k \Diamond^j A$

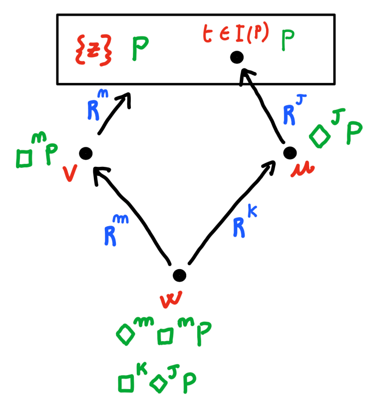
Assumo: $wR^m v$ e $wR^k u$

Costruisco F-modello: $I(P) = \{z\ :\ vR^n z\}$



Quindi: $\models_w \Diamond^m \Box^n P$

M.P. $\models_w \Box^k \Diamond^j P$



Per $\models_u \Diamond^j P$ $\exists t(uR^j t\ \ e\ \ \underline{\models_t P})$

$t \in I(P)$

$vR^n t$

$\boxed{\leftarrow}$ Dimostrazione per assurdo

"tengo in mente": $\forall w, v, u \, (wR^m v \;\; e \;\; wR^k u \to \exists t(vR^n t \;\; e \;\; uR^j t))$

Assumo: $\vDash_w \Diamond^m \Box^n P$

$\exists v \, (wR^m v \;\; e \;\; \underline{\vDash_V \Box^n P})$

$\exists v \, (wR^m v \;\; e \;\; \underline{\forall t_1 \in W \, (vR^n t_1 \quad implica \quad \nvDash_{t_1} P)})$

Assumo: $\nvDash_w \Box^k \Diamond^j P$

$\exists u \, (wR^k u \;\; e \;\; \nvDash_u \Diamond^j P)$

$\exists u \, (wR^k u \;\; e \;\; \underline{\forall t_2 \in W \, (uR^j t_2 \;\; implica \;\; \nvDash_{t_2} P)})$

Per Lemmon:[45] $\exists t \in W \, (vR^n t \;\; e \;\; uR^j t)$

Quindi: $\exists t \in W \, ((vR^n t \;\; e \;\; uR^j t) \quad implica \quad \vDash_t P \;\; e \;\; \nvDash_t P)$

$\longrightarrow$ $\bot$

Il ragionamento è stato strutturato così:

Ragionando per assurdo posso assumere che:

- w veda v (in m numero di passi)
- w veda u (in k numero di passi)

Ciò permette di garantire le premesse per l'implicazione da "tenere a mente" che, per ipotesi, è valida nella struttura. $\forall w, v, u(\underline{wR^m v \;\; e \;\; wR^k u} \to \exists t(vR^n t \quad e \quad uR^j t))$

Per modus ponens[46]: v e u vedranno un punto t, rispettivamente a n e j passi di distanza.

[45] Grazie alla dimostrazione per assurdo, abbiamo assunto l'antecedente dell'implicazione da "tenere a mente", che è valida nella struttura. Quindi, possiamo assumere il conseguente.

[46] Ho assunto $wR^m v \;\; e \;\; wR^k u$. Inoltre, so che $wR^m v \;\; e \;\; wR^k u \to \exists t(vR^n t \quad e \quad uR^j t)$. Quindi: $\exists t(vR^n t \quad e \quad uR^j t)$.

Sapendo che:

- Tutti i punti visti da v rendono vera P (perché $\vDash_V \Box P$)
- Tutti i punti visti da u rendono falsa P (perché $\nvDash_u \Diamond P$)

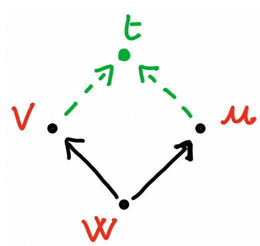
Allora, il mondo t visto sia da u che da v renderà P sia vero che falso.

$\rightarrow \bot$

$\boxed{\textbf{Schema 2}}$

■ $2 := \Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

$$\forall F\ (F \vDash 2\ \ sse\ \ \underbrace{\forall w, v, u\ (wRv\ \ e\ \ wRu \rightarrow\ \exists t(vRt\ \ e\ \ uRt))}_{F \text{ è debolmente convergente}})$$



↑ Dimostrazione analoga a quella dello Schema di Lemmon.

3.7 Sotto-modello generato

Notazione aggiuntiva: wR^*v sse $\exists n\,(wR^n v)$ $\quad n \in \mathbb{N}$

DEF.

Sia dato $M =< W, R, I >$

Il sottomodello generato da un punto $x \subset W$: $\quad M^x =< W^x, R^x, I^x >$

$W^x = \{y \, : \, xR^*y\}$[47]

$R^x = R \cap \, (W^x \times W^x)$[48]

$I^x(P) = I(P) \cap W^x$ [49]

Lemma del sottomodello generato

$\forall M, \forall x \in W^{y \in W}, \, \forall A \in Fm^{\Phi} \quad (\vDash_x^M A \;\; sse \;\; \vDash_x^{M^y} A)$[50]

Fisso M t.c. $M =< W, R, I >$

Dimostrazione per induzione sulla struttura di A

Sia $A \equiv P$: $\quad \vDash_x^M P$

$x \in I(P)$

[47] Insieme dei mondi (del modello M) visti in un qualche numero di passi da x.

[48] Quindi, nel modello generato si mantiene la relazione di accessibilità originale. A cambiare è solo l'insieme dei punti che, nel caso di W^x, sono esclusivamente i punti visti in $*$ passi da x.

[49] Anche nel caso della interpretazione, come in quello della relazione di accessibilità, l'interpretazione rimane identica, solo che "agisce" su un insieme di mondi ristretto a quelli visti in $*$ passi da w.

[50] Definizione informale: (in ogni modello) Ogni mondo (x) che fa parte dell'insieme dei mondi del sottomodello generato (W^y) rende vera ogni formula ($\forall A$) sse la rende vera anche nel modello originale (M).

Per $I^y(P)$ e $x \in W^y$: $x \in I^y(P)$ [51]

$\vDash_x^{M\,y} P$

Sia $A \equiv \perp$: ovvio

Sia $A \equiv \neg B$: $\vDash_w^M \neg B$

$\nvDash_w^M B$

Per IH: $\nvDash_x^{M\,y} B$

$\vDash_x^{M\,y} \neg B$

Sia $A \equiv B \wedge C$: $\vDash_x^M B \wedge C$

$\vDash_x^M B$ e $\vDash_x^M C$ [52]

Per IH[53]: $\vDash_x^{M\,y} B$ e $\vDash_x^{M\,y} C$

$\vDash_x^{M\,y} B \wedge C$

$\vee$, $\rightarrow$: dim. analoga.

Casi modali:

Sia $A \equiv \Box B$

Devo dimostrare: $\forall x \in W^y$ ($\vDash^M \Box B$ sse $\vDash_x^{M\,y} \Box B$)

(I_1) Fisso x t.c. $x \in W^y$

$\longrightarrow$

(I_2) Assumo: $\vDash_x^M \Box B$

$\forall z \in W$ (xRz *implica* $\vDash_z^M B$)

[51] Questo perché l'interpretazione del sottomodello è costruita dall'intersezione tra l'interpretazione del modello originale $I(P)$, e l'insieme di mondi del sottomodello generato ($W^y = \{k : y\}$). x fa parte sia di $I(P)$ (per costruzione) che di W^y (per definizione).

[52] Per costruzione, $\vDash_x^M B \wedge C$ si può dividere in $\vDash_x^M B$ $\boxed{\wedge}$ $\vDash_x^M C$. Per la clausula di verità della congiunzione: $\vDash_x^M B$ $\boxed{e}$ $\vDash_x^M C$ (per rendere vera la congiunzione, tutti i membri devono essere veri).

[53] Da qui in poi non espliciterò sempre il/gli IH. Comunque in questo caso IH$_1$: $\vDash_x^M B$ sse $\vDash_x^{M\,y} B$, IH$_2$: $\vDash_x^M C$ sse $\vDash_x^{M\,y} C$

Devo dimostrare: $\vDash^{M^y}_g \Box B$

$\forall g \in W^y \ (xR^y g \ \ implica \ \vDash^{M^y}_g B)$

(I_3) Fisso g t.c. $g \in W^y$

(I_4) Assumo: $xR^y g$

Devo dimostrare: $\vDash^{M^y}_g B$

Per IH: $\vDash^{M}_g B$

(I_5) Per I_3: $g \in W$ [54]

(I_6) Per I_4: xRg

Per I_2,I_5,I_6: $\vDash^{M}_g B$ [55]

$\longleftarrow$

(I_2) Assumo: $\vDash^{M^y}_x \Box B$

$\forall z \in W^y \ (xR^y z \ \ implica \ \vDash^{M^y}_z B)$

Devo dimostrare: $\vDash^{M}_x \Box B$

$\forall g \in W \ (xRg \ \ implica \ \ \vDash^{M}_g B)$

(I_3) Fisso g t.c. $g \in W$

(I_4) Assumo: xRg

Devo dimostrare: $\vDash^{M}_g B$

Per IH: $\vDash^{M^y}_g B$

(I_5) Per I_4 $xR^* g$ [56]

Ricordo che: $W^y = \{j \ : \ yR^* j\}$

---

[54] Dopo aver assunto che g fa parte dell'insieme sottogenerato da y, g deve far parte anche dell'insieme di mondi originario (perché $W^y \subseteq W$).

[55] Per I_2, z è un generico mondo visto da x in W, per questo rende vero B (quindi tutti i mondi visti da x in W, renderanno vero B). Essendo anche g un generico mondo visto da x (in W), anche g renderà vero B.

[56] Per I_4 sappiamo che x vede g (xRg). Ciò è equivalente a $xR^1 g$, che si può riscrivere come $xR^* g$ (con $n = 1$).

(I_6) Per I_1, I_5: $g \in W^y$ [57]

Ricordo che: $Ry = R \cap W^y$

(I_7) Per (I_6): $xR^y g$

Per I_2, I_6, I_7,: $\vDash_g^{My} B$

Caso $\Diamond$, dim. quasi analoga. (se ho tempo lo faccio)

$\boxed{\textbf{Convergenza non è esprimibile}}$

Convergenza: $\forall x, y\ \exists z\ (xRz\ \ e\ \ yRz)$[58]

Si vuole dimostrare che non esiste una formula modale per esprimere la convergenza:

$$\nexists A \in Fm\Phi \text{ t.c. } \forall F(\ \underbrace{F \vDash A}_{A \text{ è valido su } F} \qquad sse \qquad \underbrace{\forall x, y \exists z\ (xRz\ \ e\ \ yRz)}_{F \text{ è convergente}})$$

Dimostrazione su quaderno (per assurdo), pagina 1. Viene presa una struttura che non è convergente, ma con i sottomodelli generati che sono convergenti. Grazie al lemma precedente, si dimostra per assurdo.

$\boxed{\textbf{Connessione non è esprimibile}}$

Connessione: $\forall x, y\ (xRy\ \ oppure\ \ yRx)$[59]

Si vuole dimostrare che non esiste una formula modale per esprimere la convergenza:

[57] Per I_1 sappiamo che x appartiene all'insieme dei mondi del modello sotto-generato, quindi è visto in n-passi da y. Inoltre, sappiamo che g è visto in m-passi da x. Di conseguenza, g è visto in $n+m$-passi da y. Allora, yR^*g, ossia g fa parte dell'insieme dei mondi W^y.

[58] Presi due punti a caso, esiste un punto visto da entrambi.

[59] Presi due punti a caso, c'è almeno una freccia tra i due.

$\nexists A \in Fm\Phi$ t.c. $\forall F(F \vDash A \quad sse \quad \underbrace{\forall x, y\, (xRy \;\; oppure \;\; yRx)}_{F \text{ è connessa}})$

Dimostrazione su quaderno (per assurdo), pagina 2. Viene presa una struttura che non gode della proprietà di connessione, ma con i sotto-modelli generati che godono di quella proprietà. Grazie al lemma precedente, si dimostra per assurdo.

3.8 P-Morfismo

DEF

P-morfismo tra **strutture**:

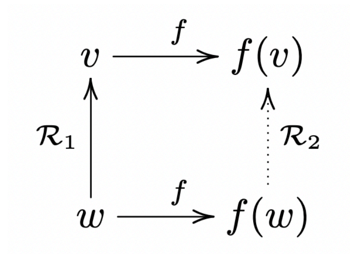
$F_1 =< W_1, R_1 >$

$F_2 =< W_2, R_2 >$

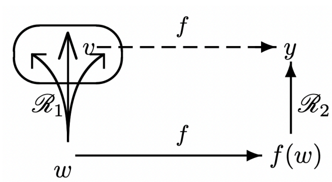
$f : W_1 \longrightarrow W_2$ [60]

<u>Deve soddisfare:</u>

1. Forth condition: $\forall w, v \in W_1\; (wR_1v \quad implica \quad f(w)R_2f(v))$



2. Back condition: $\forall w \in W_1, \forall y \in W_2\; (f(w)R_2y \;\; implica \;\; \exists u \in W_1(wR_1u \;\; e \;\; f(u) = y)$



[60] Relazione binaria in cui $\forall x \in W_1, \exists y \in W_2$ $(< x \in W_1, y \in W_2 >)$. In pratica è una funzione (x,y) in cui il primo elemento (x) viene da F_1, e il secondo elemento (y) viene da F_2.

P-morfismo tra **modelli**:

$M_1 =< W_1, R_1, I_1 >$

$M_2 =< W_2, R_2, I_2 >$

$f : W_1 \longrightarrow W_2$

Deve soddisfare:

1. Forth condition.
2. Back condition.
3. $\forall w \in W_1 \ (w \in I_1(P) \ sse \ f(w) \in I_2(P))$[61]

Lemma del P-morfismo tra modelli [62]

Dato f P-morfismo tra M_1 e M_2: $\quad \forall x \in W_1 \ (\models_x^{M_1} A \ sse \ \models_{f(x)}^{M_2} A)$

■ Dimostrazione per induzione sulla struttura A

Casi non modali (P, $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$): dimostrazione analoga alle dimostrazioni precedenti.

Sia $A \equiv \Box B$: $\quad (\models_x^{M_1} \Box B \ sse \ \models_{f(x)}^{M_2} \Box B)$

$\longrightarrow$

(I_1) Assumo: $\quad \models_x^{M_1} \Box B$

$\forall y \in W_1 \ (xR_1 y \ implica \ \models_y^{M_1} B)$

Mostro: $\quad \models_{f(x)}^{M_2} \Box B$

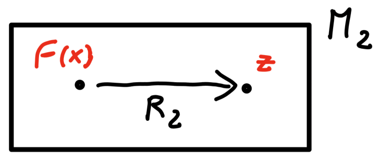
[61] I due modelli si comportano allo stesso modo rispetto alla verità degli atomi.

[62] Ricordo che questo lemma, come quello del sotto-modello generato, ha la funzione di prendere la definizione di costruzione ed estenderla ad ogni punto, quindi ad ogni formula arbitraria.

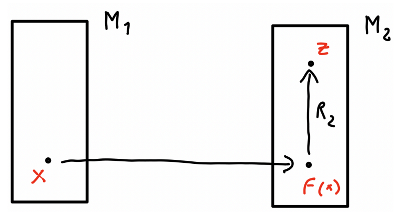
$$\forall z \in W_2\, (f(x) R_2 z \ \textit{implica}\ \models_z^{M_2} B)$$

Fisso z t.c. $z \in W_2$

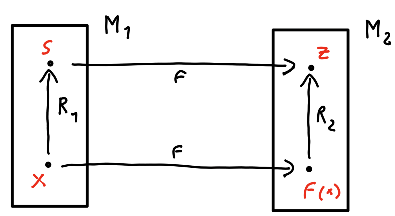
(I_2) Assumo: $f(x) R_2 z$



(I_3) Per P-morfismo: $x \longrightarrow f(x)$



(I_4) Da I_2, I_3, Back condition: $\exists s \in W_1 (w R_1 s\ \ e\ \ f(s) = z)$



Devo mostrare: $\models_z^{M_2} B$

Per IH: $\models_{z_1}^{M_1} B$

Da I_4: $z_1 = s$

Da I_1: $\models_s^{M_1} B$

Caso $\longleftarrow$ analogo. (si utilizza la forth condition)

Caso $\Diamond B$ analogo. (in $\rightarrow$ si usa forth condition)

(in $\leftarrow$ si usa back condition)

Lemma del P-morfismo suriettivo tra modelli

$f\ :\ W_1 \longrightarrow W_2$ suriettiva: $\quad \forall y \in W_2\ \exists x \in W_1\ (y = f(x))$[63]

Se $f\ :\ W_1 \longrightarrow W_2$ è un P-morfismo suriettivo,
Allora $\vDash^{M_1} A$ sse $\vDash^{M_2} A$

Dimostrazione diretta

$(\rightarrow)$ $\vDash^{M_1} A$ implica $\vDash^{M_2} A$

(I_1) Assumo:	$\vDash^{M_1} A$
	$\forall x \in W_1\ (\vDash^{M_1}_x A)$
(I_2) Per lemma del P-morfismo:	$\forall z \in W_1\ (\vDash^{M_1}_z A\ sse\ \vDash^{M_2}_{f(z)} A)$
(I_3) Per F suriettiva:	$\forall y \in W_2\ \exists y \in W_1 (y = f(x))$
Da I_1, I_2, I_3 :	$\forall x \in W_2\ (\vDash^{M_2}_{f(x)} A)$
	$\vDash^{M_2} A$

Spiegato a parole:

- Da I_2, per ogni punto, se quel punto rende vera A nell'insieme di mondi W_1, allora anche l'immagine di quel punto rende vera A nell'insieme W_2.
- Da I_1 sappiamo che ogni punto rende vera A nell'insieme W_1.
- Da I_3 sappiamo che ogni punto di W_2 è immagine p-morfa di almeno un punto di W_1.
- Quindi, l'immagine di ogni punto rende vera A nell'insieme W_2, ossia la definizione di verità in un modello.

$(\leftarrow)$ $\vDash^{M_2} A$ implica $\vDash^{M_1} A$ $\qquad$ Dimostrazione analoga (al contrario)

[63]Per ogni punto di W_2 esiste almeno un punto di W_1 tale che ogni punto y di W_2 è immagine P-morfa di almeno un punto x di W_1.

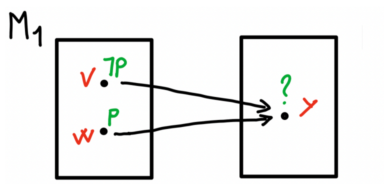
Lemma

Dato f: P-morfismo tra strutture F_1 e F_2,

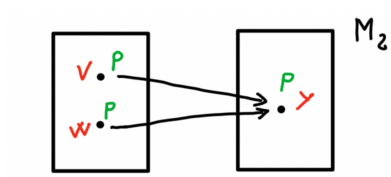
Per ogni F_2-modello M_2, esiste un F_1-modello M_1 t.c. f è P-morfismo tra i modelli M_1 e M_2.

(! il contrario non vale)

Caso in cui abbiamo M_1: non si può costruire il p-morfismo tra modelli, visto che potrebbe accadere che solo $w \in I_1(P)$. Quindi l'immagine (y) di w e di v dovrebbe rendere vera sia P che $\neg P$.



Caso in cui abbiamo M_2: si può costruire il p-morfismo tra modelli.



Quindi: $\quad I_1(P) = \{x \in W_1 \ : \ f(x) \in I_2(P)\}$[64]

Lemma del P-morfismo suriettivo tra strutture

Dato f P-morfismo suriettivo tra strutture F_1 e F_2,

$F_1 \vDash A \rightarrow \ F_2 \vDash A$

<u>Dimostrazione per contrapposizione</u>

(I_1) Assumo:	$F_2 \nvDash A$
(I_2) Da I_1:	$\exists M_2$ basato su F_2 t.c. $\nvDash^{M_2} A$
	$\exists y \in W_2 \ (\nvDash^{M_2}_y A)$

[64] Il punto di W_1 appartiene a $I_1(P)$ solo se l'immagine di quel punto appartiene a $I_2(P)$.

Per lemma: $\exists M_1$ basato su F_1 t.c. f è P-morfismo tra M_1 e M_2.

Per f suriettivo (lemma): $\exists x \in W_1\ (\not\models_x^{M_1} A)$

$\not\models^{M_1} A$

$F_1 \not\models A$

Irriflessività non è esprimibile

Irriflessività: $\forall w\ \neg(wRw)$[65]

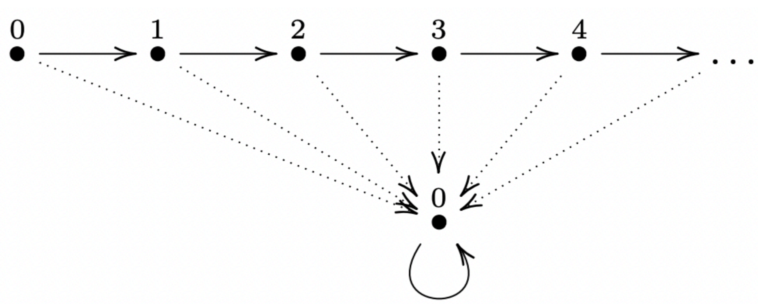
Dimostrazione per assurdo

Assumo: A corrisponde a $\forall w\ \neg(wRw)$

Costruisco struttura (irriflessiva) $F_1 = \langle \mathbb{N}, < \rangle$

Costruisco struttura (riflessiva) $F_2 = \langle 0, \{< w, w >\} \rangle$

F_2 è immagine P-morfa di F_1, secondo la funzione $f(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$



[66]

Devo mostrare che f è un P-morfismo, quindi la back condition e la forth condition devono essere rispettate.

- Forth condition: $\forall n, k \in W_1\ (nR_1k \quad implica \quad f(n)R_2f(k))$

---

[65] "Irriflessività" significa che nessun punto vede sé stesso. "Essere non riflessivo" significa che un punto specifico non vede sé stesso.

[66] Per semplicità vengono omesse le freccie di transitività (es. $1 \to 3$, $1 \to 4$, ecc.).

Scelgo n e k t.c. $n, k \in W_1$, $n < k$

Devo mostrare: $f(n) R\, f(k)$

Per costruzione $0\, R_2\, 0$

$f(n) = f(k) = 0$

$f(n) R\, f(k)$

• Back condition: $\forall n \in W_1, \forall 0 \in W_2\ (f(n) R_2 0\ \ implica\ \ \exists u \in W_1 (n R_1 u\ \ e\ \ f(u) = 0)$

Non dimostrata formalmente dal prof, ma semplice da capire intuitivamente. (per dim. formale vedi p.23)

Inoltre, per costruzione della funzione, questo P-morfismo è suriettivo, in quanto:
$\forall f(n) \in W_2\, \exists n \in W_1\ (n = f(n))$.

Per costruzione F_1 è irriflessiva: $F_1 \vDash A$

Per costruzione F_2 è riflessiva: $F_2 \nvDash A$

Da lemma del P-morfismo suriettivo tra strutture: $F_2 \vDash A$

Antisimmetria non è esprimibile

■ Antisimmetria: $\forall w, v\ (wRv\ \ e\ \ vRw\ \ implica\ \ w = v)$[67]

$\nexists A \in Fm\Phi$ t.c. $\forall F\ (F \vDash A \quad sse \quad F \rhd$ antisimmetria)

Dimostrazione per assurdo

Dimostrazione chiarissima sul libro, pagina 24.

[67] L'unico caso di freccia simmetrica è quando la relazione è riflessiva.

3.9 Calcoli assiomatici

■ Logica K

- Assiomi:

(taut)	Tutte le tautologie classiche
(k)	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
(def$\Diamond$)	$\Diamond A \leftrightarrow \neg A$

- Regole:

MP $$\frac{\Gamma \vdash \text{[68]} A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}$$

N $$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

Cubo delle logiche assiomatizzabili

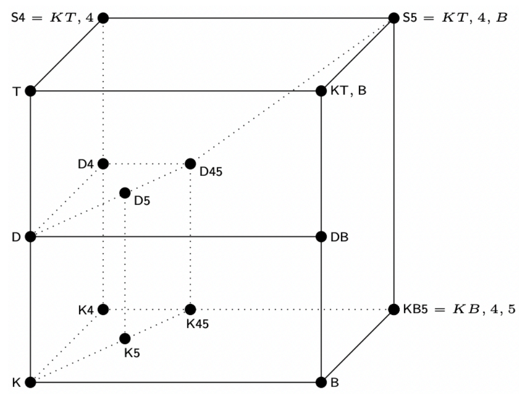
I seguenti assiomi vengono aggiunti a quelli della logica K, per costruire altre logiche. (es. logica $D :=$ logica $K+$ assioma D)

Assiomi:

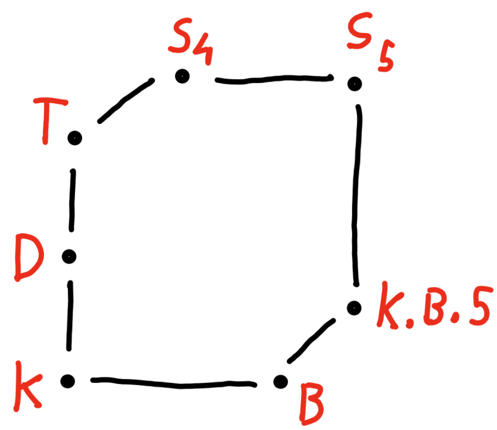
D	$:=$	$\Box A \to \Diamond A$	(seriale)
T	$:=$	$\Box A \to A$	(riflessivo)
4	$:=$	$\Box A \to \Box\Box A$	(transitivo)
5	$:=$	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	(Euclideo)
B	$:=$	$A \to \Box\Diamond A$	(simmetrico)

[68] Il simbolo $\vdash$ sta per "è derivabile da".

Cubo delle logiche assiomatizzabili



Cubo semplificato



Il professore richiede di conoscere solo le logiche K, D, T, S4, S5, B.

- S4 = $K.T.4$

- S5 = $K.T.5$ (sarebbe uguale a $K.T.4.B$)

- Storiella che ho (inutilmente) inventato per ricordare i cinque schemi:

Dante (*D*), tutto serio (*seriale*), esige di entrare in casa tua. In qualche modo è già riuscito ad addentrarsi nel tuo giardino, che, da bravo perfezionista, hai fatto costruire in perfetta forma quadrata ($\Box$). Continua a suonare il campanello, ma tu, non capendone il motivo, rifiuti di aprire la porta. Al che, Dante (che ragazzo brillante!), gironzola intorno alla casa cercando un'entrata alternativa. "Idea!" esclama. Pochi secondi dopo è già sbucato magicamente dallo specchio di camera tua, che, per risparmiare in vetro, avevi comprato a forma di diamante ($\Diamond$).

Ciò non ti destabilizza minimamente, in quanto, come prevenzione a situazioni simili, avevi comprato lo specchio dal cartomante Totti (T). Totti è una persona abbastanza riflessiva (o almeno così mi aveva detto) e, dopo aver riflettuto ($riflessivo$) molti mesi e molti fallimenti, è riuscito ad aprire un business di successo. Ora è famoso e acclamato, ma in realtà, come tutti, anche lui aveva iniziato dalla strada. La sua prima startup era scaturita da una passione; la passione dell'urlo contro altri. Per provare a soddisfarla senza finire in galera, Totti aveva deciso di comprare una stanza insonorizzata con un grosso diamante al centro ($\Diamond$). In cambio di denaro, una persona qualsiasi, doveva mettersi sulla punta del cubo e farsi urlare da Totti. Sfortunatamente, il business, causa "difficoltà riperimento clienti" e "spese esagerate in diamanti" aveva chiuso. Tuttavia, Totti non si era dato per vinto, e dopo quel fallimento ha ideato, e realizzato, un business degno di un geniale imprenditore. Funzionamento del business: il venditore (Totti), forniva uno specchio magico al compratore (tu), il quale, era obbligato a farsi urlare contro "Aaaaaaaaaaaaaaaa!" (A) per 60 secondi [69].

Oltre all'urlo, il cliente, doveva pagare 4 (4) euro. Ripensando nuovamente all'accaduto, noti qualcosa che non va. C'è stata un ingiustizia, non avresti dovuto pagare! Dopo un minuto di mormorii tra te e te, capisci di essere stato fregato! Riesci a recuperare dalla memoria un ricordo importante: il tanto proclamato "Totti" in realtà era femmina! Allora, in quanto hai una mente logica, per risolvere il problema, inizi scomponendolo in due "scatoline" ($\Box\Box$):

1) Totti: maschio.

[69] Ormai, visto il picco di vendite dell'azienda, Totti riusciva a non respirare per i primi 45 secondi.

2) Totti: femmina.

Però, sentendoti in colpa per non aver incluso altri generi, dopo una accurata scelta, decidi di <u>anteporre</u> alle prime due scatoline, una "scatolina"($\Box$) zero.

0) Totti: transessuale (*transitivo*).

Adesso davanti a te hai tre "scatoline" e sei indeciso. Che problema!

Quando arrivi finalmente a considerare i sistemi interconnessi, Dante ha già setacciato tutta la casa in cerca del suo oggetto del piacere. Tuttavia, in quanto sei un logico, la tua casa ha solo 5 (5) stanze, con 5 statue di Euclide (*Euclidea*) in ognuna di esse (Tot: 25). Quindi, Dante, amareggiato (stava cercando una donna, mica Euclide!) esce di casa dallo specchio a forma di diamante ($\Diamond$). Lancia un'occhiata al giardino del vicino, che, oltre ad avere l'erba più verde, ha anche una scatola ($\Box$) in più di te. Dante, che astutamente aveva ascoltato i tuoi mormorii, era rimasto affascinato dal problema delle scatole. Perciò, decide di dirigersi verso il giardino del vicino, con l'intenzione di controllare il contenuto della scatola. Arrivato a pochi passi dalla famigerata scatola, sente un rumore acuto, e un dito spunta prepotentemente dal centro della scatola. Dante, tutto spaventato, corre a gambe levate verso lo specchio a forma di diamante ($\Diamond$) e ci si tuffa dentro.

Sfortunatamente, per l'emozione, Dante non riesce a gestire bene la magia e non riesce ad entrare in casa. Deluso e ancora sconcertato dall'accaduto, si adagia a terra. Pensa tra sé e sé: "Bleah, quella brutta mano, quel brutto dito, quel brutto smalto...", ma al proferire di queste ultime parole, Dante, si ricorda di aver già visto quello smalto rosa! È lo stesso che viene utilizzato dal suo oggetto del piacere. "Beatrice!" esclama l'uomo con gli occhi lucidi. Intanto, sente un "Aaaaaaaaaa!" (A) provenire dalla scatola. Con determinazione, Dante esclama: "Non ti preoccupare ammor mij, arrivo!" (Dante era napoletano). Corre immediatamente verso la scatola luccicante ($\Box$), ed entusiasta la apre. Al suo interno trova qualcosa che non si sarebbe mai aspettato, ma finalmente capisce TUTTO. Tale realizzazione lo destabilizza e, anche se molto agitato, cambia obiettivo, decidendo di venire ad aiutarti. Corre ancora verso lo specchio-Diamante ($\Diamond$), ma questa volta, grazie alla sua forte determinazione, riesce ad entrare in casa. Arriva vicino a te, ancora intento a cercare una simmetria (*simmetria*) tra le tre assi (maschi, femmina, transessuale) e urla "Ho trovato la prima simmetria! Totti non è né maschio né femmina!”.

The end.