

Prerequisiti per seguire “Metodi logici per la filosofia”

Appunti di **Foxy** (Stefano Volpe) per l'a.a. 2022-23: se trovi qualcosa di sbagliato, non esitare a **caricare la correzione**. Questi appunti coprono solo le prime lezioni del prof., pensate per chi non ha mai seguito un corso di logica di base.

01-30. Presentazione del corso

Organizzazione

- Libro: il primo titolo in bibliografia funge da manuale del corso. Non serve acquistarlo: il prof. invia copie gratuite in PDF a chi lo richiede. Puoi trovarlo fra i **libri**.
- Notazioni: capita che il prof. le usi in modo inconsistente, ma noi dobbiamo consistentemente usare lo stile del manuale.
- Orari: si comincia ai 15, si finisce ai 45.
- Capienza aule: se le aule raggiungono la piena capienza e alcune persone devono rimanere fuori, il prof. pensa a soluzioni alternative (come le registrazioni, che in casi normali non vengono mai fatte).
- Lezioni: frontali, con “mini-interrogazioni” e compitini a casa (entrambi non valutati) per aiutarci a seguire.
- Registrazioni: ci sono quelle degli anni scorsi, ma quest'anno no.
- Ricevimenti: previo appuntamento via email.
- Seminario: chi vuole, in solitaria o in piccoli gruppi, tiene brevi seminari durante il corso su argomenti collegati a quelli trattati dal prof. (ma non gli stessi). Il tempo di esposizione varia in base all'argomento. Chi tiene un seminario ha un orale di molto semplificato.
- Consigli: se ci si perde una lezione, non si capisce molto di quelle dopo. Si studia volta per volta! Storicamente, va meglio all'esame chi lo sostiene appena terminate le lezioni (il prof. non fa preferenze ma avere gli argomenti freschi aiuta).
- Orale: si parte da una domanda a scelta, e poi il prof. prosegue con domande decise da lui. Siccome vengono chiesti enunciati e dimostrazioni, all'orale si usano carta e penna o lavagna e gesso.

Le dimostrazioni del corso

Le nostre dimostrazioni formali non useranno la deduzione naturale, ma il calcolo dei sequenti (anch'esso introdotto da Gentzen). Il metateorema principale (*Hauptsatz*) di Gentzen che riguarda questo sistema ci permette di fare a meno della regola del taglio, ottenendo un sistema deduttivo analitico e non sintetico. Questo ci garantisce l'esistenza di prove concise e meccaniche. Molto meglio della deduzione naturale!

I contenuti del corso

Questo insegnamento parla di logiche modali. Esse aggiungono due nuovi operatori proposizionali prefissi unari: \Box e \Diamond . Sono duali: $\Diamond P \leftrightarrow \neg\Box\neg P$ o, equivalentemente, $\Box P \leftrightarrow \neg\Diamond\neg P$. In generale, il loro ruolo è rappresentare operazioni logiche non vero-funzionali. Possono avere diverse interpretazioni:

- i. aletica: “è necessario che” vs “è possibile che”;
- i. epistemica: “si sa che” vs “???” (nessuna interpretazione immediata in linguaggio naturale);
- i. doxastica: “si crede che” vs “???” (nessuna interpretazione immediata in linguaggio naturale);
- i. deontica: “è obbligatorio che” vs “è possibile che”.

Tutte queste interpretazioni sono non vero-funzionali. Infatti, se tentassimo di esprimere i concetti di cui sopra tramite tabelle di verità, non riusciremmo a decidere come riempire alcune celle. Se una semantica delle tabelle di verità, quindi, non basta, ricorriamo a quella di Kripke dei mondi possibili. La semantica di questi operatori quantificherà su un certo sottoinsieme dei mondi possibili, asserendo che la proposizione modale sia vera sulla base dello stato di cose nei suddetti mondi. A seconda di quale interpretazione scegliamo, opteremo per una diversa relazione insiemistica che, dato un mondo attuale, ci permetta di risalire ai mondi da esso “visibili” (e cioè da considerare nella nostra semantica degli operatori modali).

Dopo aver definito in modo rigoroso sintassi e semantica di diversi sistemi modali sulla base di queste considerazioni, passeremo a risultati metalogici di teoria delle dimostrazioni che ci rivelano proprietà particolari di questi sistemi.

02-01. Ripasso di logica classica proposizionale (1)

Cos'è la logica?

Si dice che una proposizione è conseguenza logica di (o “segue logicamente da”) altre quando, se le ultime sono vere, allora lo deve essere anche la prima.

In particolare, un argomento o ragionamento si dice corretto o valido se la sua conclusione è conseguenza logica delle sue premesse.

La logica è la disciplina che studia la conseguenza logica.

Cos'è la logica proposizionale classica?

Una proposizione (semplicisticamente) è una parte del discorso che potrebbe essere vera o falsa.

Una logica si dice proposizionale quando tratta solo proposizioni.

Noi ripasseremo la logica proposizionale classica (e cioè quella comunemente usata) prima di vedere quelle modali.

Essa è formata da un insieme infinito di atomi logici (fungono da variabili vere o false che rappresentano le proposizioni semplici del linguaggio naturale),

$$\Phi := p_0, p_1, p_2, \dots$$

alcuni connettivi logici primitivi (fungono da vero-funzioni, ovvero funzioni che prendono in ingresso 0, 1 o più proposizioni per formarne una nuova),

$$\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$$

e le parentesi tonde (e) come simboli ausiliari per disambiguare il nostro linguaggio.

Andiamo ora a definire per induzione l'insieme Fm^Φ delle formule ammesse dal linguaggio della logica classica proposizionale:

1. se $p_i \in \Phi$, allora $p_i \in Fm^\Phi$;
2. $\perp \in Fm^\Phi$;
3. se $A \in Fm^\Phi$, allora $\neg A \in Fm^\Phi$;
4. se $A, B \in Fm^\Phi$, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \in Fm^\Phi$;
5. nessun'altra formula appartiene al linguaggio.

Ci saranno utili alcune definizioni “di comodo”, ovvero abbreviazioni sintattiche:

$$\top \equiv \perp \rightarrow \perp$$

$$(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$$

Siccome dover sempre usare le parentesi tonde per disambiguare la nostra grammatica stanca, adottiamo alcune utili convenzioni per non doverle usare quando il significato della formula si capisce anche senza:

1. se una coppia di parentesi si trova ai margini sinistro e destro della formula, lo possiamo sottointendere;
2. priorità: la negazione lega più forte di congiunzione e disgiunzione, che a loro volta legano più forte del condizionale materiale;
3. associatività: la congiunzione e la disgiunzione associano a sinistra (ma non fra di loro).

Le definizioni per induzione sono utili: si sposano bene con la struttura con cui abbiamo definito le nostre formule, e forniscono un modo algoritmico per calcolare gli oggetti di cui parlano. Per esempio, possiamo definire la lunghezza

lg (o “peso”) di una formula o come il numero di occorrenze di connettivi logici unari o binari che ne fanno parte o, equivalentemente, per induzione:

$$lg(p_i) = lg(\perp) = 0$$

$$lg(\neg A) = lg(A) + 1$$

$$lg(A \wedge B) = lg(A \vee B) = lg(A \rightarrow B) = lg(A) + lg(B) + 1$$

Se siamo familiari con il concetto di dimostrazione per induzione sui numeri naturali in teoria dei numeri, possiamo ora effettuare dimostrazioni per induzione sulla lunghezza delle formula della logica proposizionale classica.

Principio di induzione (versione “classica”):

- se $P(0)$ (passo base);
- se $\forall m \in \mathbb{N} (P(m) \rightarrow P(m + 1))$ (passo di induzione);
- allora $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$ (tesi).

Talvolta ci conviene usare invece una sua variante, detta “principio di induzione forte” (l’ipotesi induttiva viene fortificata):

- se $P(0)$;
- se $\forall m \in \mathbb{N} : ((\forall n \in \mathbb{N} : (n \leq m \rightarrow P(n))) \rightarrow P(m + 1))$;
- allora $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

Siccome dover risalire dalla lunghezza della formula alle “tipologie” (schemi, costruttori) che potrebbero avere tale lunghezza, tedia, spesso dimostriamo per induzione direttamente elencando le vaire “tipologie” di formula con le quali potremmo avere a che fare.

Esercizio per casa

$$\#_i(A) = \#_j(A)$$

dove $\#_a(A)$ significa “il numero di occorrenze di a in A ”.

02-02. Esercizi sulla sintassi della logica classica proposizionale

Esercizio svolto in aula

$$\#_{p_i, \perp}(A) \geq \#_{\wedge, \vee, \rightarrow}(A)$$

L’esercizio, volendo, si semplifica dimostrando la disuguaglianza stretta al posto di quella lasca.

02-06. Semantica della logica classica proposizionale (1)

Cos'è la semantica?

La semantica di un linguaggio formale è il significato che associamo ai suoi elementi. Senza semantica, potremmo costruire formule ben formate secondo le regole della sintassi, ma senza poterci accordare su cosa rappresentino.

La semantica della logica proposizionale

La semantica della logica proposizionale si basa sul concetto di *interpretazione*. Una possibile interpretazione I relativa al nostro linguaggio è un qualsiasi sottoinsieme dell'insieme Φ degli atomi logici:

$$I \subseteq \Phi$$

Intuitivamente, l'interpretazione rappresenta l'insieme di tutte e sole le proposizioni atomiche che essa rende vere: le proposizioni atomiche lasciate fuori dall'interpretazione saranno quindi false secondo essa. Siccome una interpretazione è un sottoinsieme di Φ , possiamo sempre definirla anche come la funzione caratteristica del suddetto sottoinsieme, e cioè la funzione $I : \Phi \rightarrow 0, 1$ che associa a ogni proposizione atomica che vorremmo fosse resa vera 1, e 0 alle proposizioni atomiche che vorremmo fossero rese false.

Questi due modi di concepire le interpretazioni fanno uso di oggetti matematici diversi, ma sono entrambi funzionali. Di volta in volta, capiremo quale stiamo usando dal contesto. In logica modale, però, spesso è più comoda la prima.

In entrambi i casi, siccome partiamo da un insieme Φ infinito, avremo un numero infinito di possibili interpretazioni. Per dire che una formula A vale rispetto a una certa interpretazione I (o che "I rende vera A "), scriviamo $I \vDash A$. Siamo ora pronti a definire la semantica della logica proposizionale classica:

- $I \vDash p_i$ sse $p_i \in I$ (oppure, usando la funzione caratteristica $I(p_i) = 1$)
- $I \not\vDash \perp$
- $I \vDash \neg A$ sse $I \not\vDash A$
- $I \vDash A \wedge B$ sse $I \vDash A$ e $I \vDash B$
- $I \vDash A \vee B$ sse $I \vDash A$ o $I \vDash B$ (disgiunzione inclusiva)
- $I \vDash A \rightarrow B$ sse $I \not\vDash A$ o $I \vDash B$ (disgiunzione inclusiva)

Applicabilità del metodo delle tavole di verità

Un metodo meccanico e concettualmente semplice (anche se potenzialmente lungo) per verificare quali interpretazioni soddisfino una data formula A è quello delle cosiddette "tavole di verità". Per mostrarne l'applicabilità, però, abbiamo prima bisogno di un risultato preliminare. Per sommi capi, questo "lemma" ci assicura che, per capire se una formula sia vera o meno rispetto a una data interpretazione, è sufficiente sapere come questa interpretazione si collochi rispetto

agli atomi logici che effettivamente compaiono nella formula. In altre parole, se un atomo logico non compare nella formula, non ci interessa se sia vero o falso in una data interpretazione per capire se questa renda vera la formula o meno.

Sia A una formula e siano I e I' due interpretazioni. Se, per ogni atomo logico p_i che occorre almeno una volta in A , $I(p_i) = I'(p_i)$, allora vale che

$$I \models A \quad sse \quad I' \models A$$

Esercizio per casa

Si dimostri, per induzione strutturale sul numero naturale k :

$$I \models A \quad sse \quad I \models \neg^{2k} A$$

Utili definizioni per la semantica

Siano A una formula, I un'interpretazione e Γ un insieme di formule. Allora:

- “ A è soddisfatta da I ” significa $I \models A$ (siccome siamo ancora in logica proposizionale)
- “ A è soddisfacibile” significa $\exists I : I \models A$
- $\models A$ (si legge “ A è valida”, “ A è una verità logica” o, finché restiamo nella logica classica proposizionale, “ A è una tautologia”) significa $\forall I : I \models A$
- $\Gamma \models A$ (si legge “ A è conseguenza logica di Γ ”) significa $\forall I : ((\forall B \in \Gamma : I \models B) \rightarrow I \models A)$

Il teorema di deduzione

Il teorema di deduzione è un risultato di semantica molto importante, perché ci permette di capire che, in virtù della semantica che abbiamo associato ad esso, il condizionale materiale \rightarrow all'interno del nostro linguaggio la nozione di conseguenza logica:

$$\Gamma, A \models B \quad sse \quad \Gamma \models A \rightarrow B$$

Altri esercizi per casa

Scegliere alcune tautologie a piacere e dimostrare (senza tavole di verità) che esse siano effettivamente tautologie.

02/08. Conseguenza logica e soddisfacibilità

Così come il teorema di deduzione ci ha permesso di stabilire un legame fra conseguenza logica e condizionale materiale, così il seguente teorema stabilisce un legame fra conseguenza logica e soddisfacibilità:

$$\Gamma \vDash A \quad \text{sse} \quad \Gamma, \neg A \quad \text{insoddisfacibile}$$

Enunciando questo teorema, stiamo implicitamente estendendo la nozione di (in)soddisfacibilità agli insiemi di formule, che diciamo essere soddisfacibili quando i loro elementi lo sono congiuntamente, e insoddisfacibili in caso contrario.

Esercizio per casa

Della doppia implicazione del teorema precedente, dimostrare l'implicazione da destra verso sinistra (da sinistra verso destra è già stato fatto in aula).

Conclusione

Qui si conclude la parte di prerequisiti per un corso di logica modale. Gli appunti sulla logica modale in sé sono coperti dagli **appunti di altri autori**.