Linguaggi

9: Deduzione semantica

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

15/11/2019

Outline

Ancora sui connettivi

Conclusione lezione precedente:

- La scelta dell'insieme dei connettivi è parzialmente arbitraria
- L'insieme scelto è ridondante (per la logica classica)
- I connettivi $\{\wedge, \vee, \neg, \top, \bot\}$ hanno un ruolo importante.
- L'implicazione materiale non cattura la causalità

Domande:

- Cosa cattura veramente l'implicazione materiale?
- Perchè includere anche l'implicazione materiale?

Teorema di deduzione semantica & affini

Vedremo una serie di lemmi (teoremi) tecnici che chiarificano il rapporto fra alcuni connettivi ($\Rightarrow$, $\iff$, $\neg$, $\top$, $\bot$) e le nozioni di conseguenza ed equivalenza logica.

Anticipiamo le principali conclusioni:

- L'implicazione materiale internalizza nella sintassi la nozione di conseguenza logica
- La doppia implicazione internalizza nella sintassi la nozione di equivalenza logica
- La negazione permette di passare dalle tautologie alle contraddizioni
- Il $\bot$, assieme al $\Vdash$, permette di esprimere la soddisfacibilità
- Il $\top$, assieme all'$\equiv$, permette di esprimere l'essere una tautologia

Teorema di deduzione semantica

Teorema (di deduzione semantica):
per ogni formula F e G si ha $\Gamma \Vdash F \Rightarrow G$ sse $\Gamma, F \Vdash G$.

Dimostrazione:

- Parte $\Rightarrow$:
  Per ipotesi $\Gamma \Vdash F \Rightarrow G$.
  Ovvero in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma$ si ha
  $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = \max\{1 - [\![F]\!]^v, [\![G]\!]^v\} = 1$
  ovvero $[\![F]\!]^v = 0$ oppure $[\![G]\!]^v = 1$.
  Dobbiamo dimostrare che in ogni mondo v tale che
  $v \Vdash \Gamma, F$ si ha $[\![G]\!]^v = 1$.
  Sia v un mondo generico ma fissato.
  Per ipotesi si ha $v \Vdash F$ ovvero $[\![F]\!]^v = 1$.
  Quindi necessariamente $[\![G]\!]^v = 1$.

Teorema di deduzione semantica

Teorema (di deduzione semantica):
per ogni formula F e G si ha $\Gamma \Vdash F \Rightarrow G$ sse $\Gamma, F \Vdash G$.

Dimostrazione:

- Parte $\Leftarrow$:
  Per ipotesi $\Gamma, F \Vdash G$.
  Ovvero in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma, F$ si ha $[\![G]\!]^v = 1$.
  Dobbiamo dimostrare che in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma$ si ha $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = \max\{1 - [\![F]\!]^v, [\![G]\!]^v\} = 1$.
  Sia v un mondo generico ma fissato.
  Per ipotesi si ha $v \Vdash \Gamma$.
  Se $[\![F]\!]^v = 1$, allora $v \Vdash \Gamma, F$ e quindi necessariamente $[\![G]\!]^v = 1$ e $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = 1$.
  Altrimenti, se $[\![F]\!]^v = 0$, allora $[\![F \Rightarrow G]\!]^v = 1$.

Teorema di deduzione semantica

Teorema (di deduzione semantica, caso n-ario):
per tutte le formule $F_1, \ldots, F_n, G$ si ha

$$F_1, \ldots, F_n \Vdash G \text{ sse } \Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow G$$

Dimostrazione: procediamo per induzione su n.
Caso base: $\Vdash G$ sse $\Vdash G$ ovvio.
Passo induttivo (caso n): sia $\Gamma = F_1, \ldots, F_{n+1}$.
Ipotesi induttiva: $\forall G,\ F_1, \ldots, F_n \Vdash G \text{ sse } \Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow G$
Si applica il teorema di deduzione semantica appena dimostrato per concludere

$$F_1, \ldots, F_n, F_{n+1} \Vdash G \text{ sse } F_1, \ldots, F_n \Vdash F_{n+1} \Rightarrow G$$

Il teorema segue dall'ipotesi induttiva

$$F_1, \ldots, F_n \Vdash F_{n+1} \Rightarrow G \text{ sse } \Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F_{n+1} \Rightarrow G$$

Altri teoremi

Nota: il teorema di deduzione semantica è importantissimo perchè se le ipotesi sono in numero finito ci dice che il concetto di conseguenza logica è riducibile a quello di tautologia e viceversa.

Teorema: $\Vdash F$ sse $F \equiv \top$
Dimostrazione: ovvia.

Teorema: $\Vdash F$ see $\neg F$ è insoddisfacibile
Dimostrazione:
$\Vdash F$ sse per ogni mondo v si ha $[\![F]\!]^v = 1$
sse per ogni mondo v non è vero che $[\![F]\!]^v = 0$
sse per ogni mondo v non è vero che $[\![\neg F]\!]^v = 1$
sse non esiste un mondo v tale che $[\![\neg F]\!]^v = 1$
sse $\neg F$ è insoddisfacibile.

Altri teoremi

Teorema: $\Gamma \Vdash F$ sse $\Gamma, \neg F$ è insoddisfacibile
Dimostrazione:
$F_1, \ldots, F_n \Vdash F$ sse $\Vdash F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F$
sse $\neg(F_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow F_n \Rightarrow F)$ è insoddisfacibile
sse $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg F$ è insoddisfacibile
sse $F_1, \ldots, F_n, \neg F$ è insoddisfacibile

Altri teoremi

Teorema: Γ è insoddisfacibile sse $\Gamma \Vdash \bot$
Dimostrazione: $\Gamma \Vdash \bot$ sse in ogni mondo v tale che $v \Vdash \Gamma$ si ha $[\![\bot]\!]^v = 1$ il che non accade mai.
Quindi non esiste nessun mondo v tale che $v \Vdash \Gamma$ ovvero Γ è insoddisfacibile.

Corollario: Γ è soddisfacibile sse $\Gamma \nVdash \bot$

Teorema: $\neg F \equiv F \Rightarrow \bot$
Dimostrazione: equivalenza delle definizioni.