# Linguaggi

## 8: I connettivi della logica proposizionale classica

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

10/11/2020

# Outline

# Connettivi

Wikipedia: “*Un connettivo logico, o operatore logico, è quell’operazione che instaura fra due proposizioni A e B una qualche relazione che dia origine ad una terza proposizione C con un valore vero o falso, in base ai valori delle due proposizioni fattori ed al carattere del connettivo utilizzato.*

Ovvero, come complicarsi la vita in una definizione senza dire nulla…

# Connettivi e tabelle di verità

Ogni connettivo $n$-ario viene definito da una tabella di verità con $2^n$ righe.

Equivalentemente, un connettivo $n$-ario è una funzione $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$

Viceversa ogni tabella di verità con $2^n$ righe definisce un connettivo.

Quanti connettivi $n$-ari distinti esistono? $2^{2^n}$

Solo per alcuni di questi è stata data una connotazione.

- Perchè proprio quelli?
- Perchè non altri?

# Connettivi e tabelle di verità

Ogni connettivo $n$-ario viene definito da una tabella di verità con $2^n$ righe.

Equivalentemente, un connettivo $n$-ario è una funzione $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$

Viceversa ogni tabella di verità con $2^n$ righe definisce un connettivo.

Quanti connettivi $n$-ari distinti esistono? $2^{2^n}$

Solo per alcuni di questi è stata data una connotazione.

- Perchè proprio quelli?
- Perchè non altri?

# Connettivi 0-ari

| $[\![\bot]\!]^v$ | $[\![\top]\!]^v$ |
|---|---|
| 0 | 1 |

Tutti i $2^{2^0} = 2^1 = 2$ connettivi 0-ario hanno una connotazione.

# Connettivi 1-ari

| $v(F)$ | | | $[\![\neg F]\!]^v$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Dei $2^{2^1} = 2^2 = 4$ connettivi 1-ari, solo il $\neg$ ha una connotazione. I rimanenti, non particolarmente utili, sono:

- Il connettivo costante falso
- Il connettivo identità
- Il connettivo costante vero

| $F_1$ | $F_2$ | | $\wedge$ | | | | | $\oplus$ | $\vee$ | $\tilde{\vee}$ | $\iff$ | | | | $\Rightarrow$ | $\tilde{\wedge}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Dei $2^{2^2} = 16$ connettivi 2-ari, solo alcuni hanno una connotazione e solo alcune sono state incluse nella sintassi.

- Il connettivo $\oplus$ è noto come XOR o "o esclusivo"
- Il connettivo $\tilde{\vee}$ è noto come NOR
- Il connettivo $\tilde{\wedge}$ è noto come NAND
- Il connettivo $\iff$ si legge "se e solamente se" o doppia implicazione
- Fra gli anonimi ce ne sono di inutili (costanti, identità) e di (potenzialmente) utili

# Altri connettivi

A nessun altro connettivo è stata data una connotazione.

# Riduzione fra connettivi

Talvolta è possibile esprimere un connettivo logico usandone altri e l'equivalenza logica.

Esempi:

$$
\begin{array}{lcl}
A \Rightarrow B & \equiv & \neg A \vee B \\
\neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\
A \iff B & \equiv & (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)
\end{array}
$$

ovvero:

- l'implicazione è riducibile alla negazione e alla disgiunzione
- la negazione è riducibile all'implicazione e al bottom
- la doppia implicazione è riducibile all'implicazione e alla congiunzione

# Riduzione fra connettivi

Definizione: un insieme di connettivi è ridondante se contiene un connettivo riducibile ai restanti

Definizione: un insieme di connettivi è funzionalmente completo se ogni altro connettivo è riducibile a questi

Notazione: siano $S$ e $T$ insiemi di connettivi; scriviamo $S \triangleright T$ quando ogni connettivo di $S$ è riducibile ai connettivi di $T$.

Teorema: se $S$ è funzionalmente completo e $S \triangleright T$, allora $T$ è funzionalmente completo.
Dimostrazione: ogni connettivo è riducibile a $S$ poichè $S$ è funzionalmente completo. Poichè ogni connettivo di $S$ è esprimibile solo con connettivi di $T$, allora ogni connettivo è riducibile a $T$. Quindi $T$ è funzionalmente completo.

# Insiemi funzionalmente completi

Domande:

- Esistono insiemi funzionalmente completi di connettivi?
  Risposta: sì, $\{\wedge, \vee, \bot, \top, \neg\}$ lo è (dimostrazione omessa)
- Quali sono gli insiemi funzionalmente completi di cardinalità minima?

Innanzi tutto $\{\wedge, \vee, \bot, \top, \neg\}$ è ridondante:

- $\bot \equiv A \wedge \neg A$ quindi $\bot$ è ridondante
- $\top \equiv A \vee \neg A$ quindi $\top$ è ridondante
- $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ quindi $\wedge$ è ridondante
- Teorema: l'insieme $\{\vee, \neg\}$ è funzionalmente completo non ridondante.
  Dim.: senza il $\vee$ si possono esprimere solo $A$, $\neg A$, $\neg\neg A \equiv A$, $\neg\neg\neg A \equiv \neg A$, .... Quindi $\bot$ non si esprime.
  Senza il $\neg$ si possono esprimere solo $A$, $A \vee B$, $A \vee B \vee C$, ... e quindi il $\bot$ non si esprime.

# Insiemi funzionalmente completi

Analogamente si dimostra che:

- anche $\{\wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo non ridondante
- anche $\{\Rightarrow, \neg\}$ è funzionalmente completo non ridondante

Esistono anche insiemi singoletto funzionalmente completi: $\{\tilde{\vee}\}$ e $\{\tilde{\wedge}\}$. Esempio: dimostriamo che $\{\tilde{\vee}\}$ lo è.

- $\neg A \equiv A \tilde{\vee} A$
- $A \vee A \equiv \neg(A \tilde{\vee} A) \equiv (A \tilde{\vee} A) \tilde{\vee} (A \tilde{\vee} A)$
- Abbiamo già dimostrato che $\{\vee, \neg\}$ è funzionalmente completo.

# Scelta dei connettivi

Riassumendo:

- È possibile esprimere tutti i connettivi a partire da un insieme funzionalmente completo
- Esistono insiemi funzionalmente completi di cardinalità 1

Ma allora perchè abbiamo scelto i connettivi $\wedge, \vee, \bot, \top, \neg, \Rightarrow$?

1. La scelta è un compromesso fra l'esigenza di considerare un insieme piccolo (ma funzionalmente completo) e un insieme che permetta di catturare naturalmente, direttamente espressioni del linguaggio naturale.
2. La nozione di riduzione fra connettivi è dipendente dalla semantica: per esempio nella semantica intuizionista (che vedremo) l'insieme $\{\vee, \Rightarrow, \neg\}$ non sarà ridondante.
3. I connettivi scelti hanno una rilevanza matematica/informatica. P.e.: $(\wedge, \vee, \bot, \top, \neg, \Rightarrow)$ vengono usati direttamente per definire $(\cap, \cup, \emptyset, \cdot, \bar{\cdot}, \subseteq)$.

# Equivalenze logiche notevoli (1/2)

Commutatività':

$A \vee B \equiv B \vee A, \quad A \wedge B \equiv B \wedge A$

Associatività':

$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C, \quad A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

Idempotenza:

$A \vee A \equiv A, \quad A \wedge A \equiv A$

Distributività:

$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Assorbimento:

$A \vee (A \wedge B) \equiv A, \quad A \wedge (A \vee B) \equiv A$

Elemento neutro:

$A \vee \bot \equiv A, \quad A \wedge \top \equiv A$

Annichilamento:

$A \vee \top \equiv \top, \quad A \wedge \bot \equiv \bot$

# Equivalenze logiche notevoli (2/2)

Doppia negazione:
$\neg\neg A \equiv A$
De Morgan:
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \quad \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Nota: quelle in rosso non varranno per la semantica intuizionista che vedremo in seguito!

Teorema (completezza): siano $P$ e $Q$ due formule della logica proposizionale. $P \equiv Q$ (usando la definizione di equivalenza logica) sse posso dimostrare $P \equiv Q$ usando solamente le equivalenze notevoli appena elencate.
Dimostrazione: interessante, ma lunga e complessa.

# Equivalenze logiche notevoli

Osservazioni: quando si cerca di dimostrare $P \equiv Q$

- Le regole di commutatività e associatività ci dicono che possiamo ignorare l'associatività e l'ordine nelle disgiunzioni e congiunzioni
- Le regole di idempotenza, elemento neutro, e annichilamento sono regole di semplificazione (si usando quasi sempre da sx a dx)
- Le regole di distributività e assorbimento sono quelle difficili da usare in quanto
  - a volte vanno usate in senso contrario alla "semplificazione" (da dx a sx)
  - possono portare a cicli
    Esempio: $A \vee (A \wedge B) \equiv (A \wedge A) \vee (A \wedge B) \equiv A \vee (A \wedge B) \equiv (A \vee A) \wedge (A \vee B) \equiv A \wedge (A \vee B)$
  - Non vi è un semplice algoritmo basato su queste regole per dimostrare $P \equiv Q$

I seguenti problemi restano quindi aperti:

1. Dimostrare che $\{\wedge, \vee, \bot, \top, \neg\}$ è funzionalmente completo
DIMOSTRAZIONE OMESSA PER QUEST'ANNO: basata sulle mappe di Karnaugh / metodo di Queen Mc Cluskey
Grande rilevanza in elettronica.
2. Trovare un algoritmo efficiente per decidere se $P \equiv Q$
Le tabelle di verità non sono efficienti
Con le equivalenze notevoli non si riesce a dare semplicemente un algoritmo