Logica

6: Semantica classica della logica proposizionale

Claudio Sacerdoti Coen

<sacerdot@cs.unibo.it>

Universitá di Bologna

14-15/11/2019

Outline

Semantica

Wikipedia: "*La semantica é quella parte della linguistica che studia il significato delle parole (semantica lessicale), degli insiemi delle parole, delle frasi (semantica frasale) e dei testi.*
Sintassi = descrizione dell'insieme di tutte le connotazioni alle quali associamo una denotazione (semantica)

Semantica = ciò che viene associato alle connotazioni in un particolare dominio di interpretazione; insieme delle denotazioni

(Funzione) semantica (o interpretazione) = funzione che associa a ogni connotazione una denotazione in un dominio di interpretazione fissato

Semantica

Esempi:
semantica di un linguaggio di programmazione
semantica di una logica
semantica della lingua italiana

- È la semantica che determina il significato di un linguaggio
- Possiamo dare semantiche totalmente diverse allo stesso linguaggio
- In genere vi è una semantica “naturale” o “principale”, detta semantica intesa
- Semantiche alternative tanto più interessanti quanto distinte da quella intesa (e.s. interpreto $f(x)$ con il tempo necessario ad eseguire f sull’input x e un ciclo `while` con una sommatoria)
- Semantiche (della verità) in funzione dei mondi (o interpretazioni)

La semantica classica della logica proposizionale

$$F ::= \bot \mid \top \mid A \mid B \mid \ \ldots \ \mid \neg F \mid F \wedge F \mid F \vee F \mid F \Rightarrow F$$

- Semantica classica: associa a ogni denotazione il suo valore di verità in un qualche mondo (p.e. il falso a $\bot$)
- Il mondo determina il valore di verità delle variabili proposizionali $A, B, \ldots$ (p.e. A è vero nel mondo x, falso nel mondo y)
- La semantica dei connettivi è invece fissata
- Quando si assume la semantica classica, la logica si dice logica proposizionale classica

I mondi della logica classica

Logica classica: assunzioni sul mondo
Visione “Platonica”: in ogni mondo (preso singolarmente)

- Ogni enunciato è vero o falso
- Un enunciato non può essere vero e falso allo stesso tempo (non contraddizione)
- Il valore di verità non muta (staticità)
- Il valore di verità di un enunciato è sempre determinato (determinatezza)
- Staticità e determinatezza segnano un solco fra verità (classica) e conoscenza (non statica, ma monotona; possibilmente indeterminata)
- Staticità segna un solco fra verità e risorse (che si consumano)

Vedremo altre semantiche corrispondenti ad altre logiche.

Interpretazione classica

Useremo i naturali 0 e 1 per le denotazioni classiche di falsità e verità.

La scelta di usare naturali è di comodo (permette manipolazioni aritmetiche). Esempio di alternativa: i booleani.

Definizione: una (funzione di) interpretazione (classica) o mondo è una funzione dall'insieme delle variabili proposizionali $\{A, B, \ldots\}$ verso $\{0, 1\}$

Indicheremo le interpretazioni con v, v', v_1, v_2, ...

Esempio: se $v(A) = 1$ e $v'(A) = 0$ allora A denota il vero nel mondo v e il falso nel mondo v'.

Semantica della logica classica proposizionale

Definizione: data un'interpretazione (o mondo) v, la semantica $[\![\cdot]\!]^v : \mathcal{F} \to \{0,1\}$, è definita per induzione strutturale sulle connotazioni come segue:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![\bot]\!]^v & = & 0 \\
[\![\top]\!]^v & = & 1 \\
[\![A]\!]^v & = & v(A) \\
[\![\neg F]\!]^v & = & 1 - [\![F]\!]^v \\
[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v & = & \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} \\
[\![F_1 \vee F_2]\!]^v & = & \max\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\} \\
[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v & = & \max\{1 - [\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\}
\end{array}
$$

Nota: nel libro $[\![F]\!]^v$ viene indicata con $v(F)$ facendo (volutamente) confusione fra la v come interpretazione e la v come semantica. Si dice che la v come semantica estende l'interpretazione v dal dominio delle variabili a quello delle formule.

Semantica della logica classica proposizionale

Esercizi: dimostrare

- $[\![A \vee \top \Rightarrow B \wedge \top]\!]^v = [\![B]\!]^v$
  Soluzione:
  $[\![A \vee \top \Rightarrow B \wedge \top]\!]^v = \max\{1 - [\![A \vee \top]\!]^v, [\![B \wedge \top]\!]^v\} =$
  $\max\{1 - \max\{[\![A]\!]^v, [\![\top]\!]^v\}, \min\{[\![B]\!]^v, [\![\top]\!]^v\}\} =$
  $\max\{1 - \max\{v(A), 1\}, \min\{v(B), 1\}\} =$
  $\max\{1 - 1, v(B)\} = v(B) = [\![B]\!]^v$
- $[\![A \Rightarrow \neg A \Rightarrow B]\!]^v = 1$
- $[\![(B \Rightarrow B) \Rightarrow A \wedge \neg A]\!]^v = 0$

Tabelle di verità

Poichè $[\![\cdot]\!]^v$ è definita per ricorsione strutturale e poichè i connettivi hanno un numero finito n (= 0,1,2) di argomenti e questi possono denotare solamente due valori, è possibile rappresentarne la semantica con una tabella di verità con 2^n righe (possibili semantiche delle sottoformule immediate) e valori in $\{0, 1\}$ (semantica dell'intera formula).

$[\![\bot]\!]^v$
0

$[\![\top]\!]^v$
1

$[\![F]\!]^v$	$[\![\neg F]\!]^v$
0	1
1	0

$[\![F_1]\!]^v$	$[\![F_2]\!]^v$	$[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$[\![F_1]\!]^v$	$[\![F_2]\!]^v$	$[\![F_1 \vee F_2]\!]^v$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implicazione materiale

Il connettivo di implicazione materiale ("se ... allora") ha la seguente tabella che non cattura l'usuale nozione di causalità:

$[\![F_1]\!]^v$	$[\![F_2]\!]^v$	$[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Esempi (nel mondo inteso usuale v):

$[\![$se 2+2=5 allora gli asini volano$]\!]^v = 1$
basta che l'antecedente (2+2=5) sia falso

$[\![$se i politici sono onesti
allora Berlusconi è stato condannato in cassazione$]\!]^v = 1$
basta che il susseguente (Berlusconi ...) sia vero

Semantica Tarskiana

Con semplici manipolazione algebriche si vede che:

$[\![\bot]\!]^v$ è falsa (= 0)
$[\![\top]\!]^v$ è vera (= 1)
$[\![A]\!]^v = v(A)$
$[\![\neg F]\!]^v$ è vera sse $[\![F]\!]^v$ non è vera
$[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v$ è vera sse $[\![F_1]\!]^v$ è vera e $[\![F_2]\!]^v$ è vera
$[\![F_1 \vee F_2]\!]^v$ è vera sse $[\![F_1]\!]^v$ è vera o $[\![F_2]\!]^v$ è vera
$[\![F_1 \Rightarrow F_2]\!]^v$ è vera sse se $[\![F_1]\!]^v$ è vera allora $[\![F_2]\!]^v$ è vera

Questa semantica (detta alla Tarski):

- usa i connettivi della meta-logica per spiegare quelli della logica.
- non è molto informativa
- è (troppo) dipendente dalla semantica della meta-logica

Tabelle di verità

È possibile estendere le tabelle di verità dai connettivi a formule generiche?

Sì, ma la dimostrazione non è immediata (vedi prossimi lucidi)

e tale costruzione non scala alla logica del prim'ordine (che comprende i quantificatori universale $\forall$ ed esistenziale $\exists$)

Variabili

Definizione: la funzione $Var(F)$ (variabili di F, variabili che occorrono in F) è definita per ricorsione strutturale su F come segue:

$$
\begin{array}{lcl}
Var(\bot) & = & \emptyset \\
Var(\top) & = & \emptyset \\
Var(A) & = & \{A\} \\
Var(\neg F) & = & Var(F) \\
Var(F_1 \wedge F_2) & = & Var(F_1) \cup Var(F_2) \\
Var(F_1 \vee F_2) & = & Var(F_1) \cup Var(F_2) \\
Var(F_1 \Rightarrow F_2) & = & Var(F_1) \cup Var(F_2)
\end{array}
$$

Teorema: $Var(F)$ è sempre un insieme finito qualunque sia F.

Dimostrazione: per induzione strutturale su F.

Casi $\bot$, $\top$ e A: l'insieme vuoto e i singoletti sono finiti.

Caso $F_1 \wedge F_2$: per ipotesi induttiva $Var(F_1)$ e $Var(F_2)$ sono insiemi finiti e l'unione di insiemi finiti è finita.

...

Semantica classica

Teorema: $[\![F]\!]^v$ usa solamente la restrizione di v al dominio $Var(F)$

Corollario: se v_1 e v_2 sono tali che per ogni $X \in Var(F)$ si ha $v_1(X) = v_2(X)$, allora $[\![F]\!]^{v_1} = [\![F]\!]^{v_2}$.

Dimostrazione del teorema: per induzione strutturale su F.

Casi $\bot$, $\top$: non usano v.

Caso A: $[\![A]\!]^v = v(A)$ e $Var(A) = \{A\}$.

Caso $\neg F$:

Per ipotesi induttiva $[\![F]\!]^v$ usa solo la restrizione a $Var(F)$.

Si ha $[\![\neg F]\!]^v = 1 - [\![F]\!]^v$ e $Var(\neg F) = Var(F)$.

Caso $F_1 \wedge F_2$ (i casi $F_1 \vee F_2$ e $F_1 \Rightarrow F_2$ sono simili):

Per ipotesi induttiva $[\![F_1]\!]^v$ usa solo la restrizione a $Var(F_1)$ e $[\![F_2]\!]^v$ usa solo la restrizione a $Var(F_2)$

Si ha $[\![F_1 \wedge F_2]\!]^v = \min\{[\![F_1]\!]^v, [\![F_2]\!]^v\}$ che usa v sulla restrizione al dominio di F_1 e a quello di F_2 e $Var(F_1 \wedge F_2) = Var(F_1) \cup Var(F_2)$.

Tabelle di verità

In virtù dei precedenti teoremi è possibile rappresentare $[\![F]\!]^v$ al variare del mondo v con una tabella di verità di 2^n righe dove $n = |Var(F)|$. Ogni riga rappresenta un insieme di mondi che concordano su un numero finito di variabili e il numero di tali insiemi è finito.

$v(A)$	$v(B)$	$[\![A \vee B]\!]^v$	$[\![B \vee \bot]\!]^v$	$[\![A \vee B \Rightarrow B \vee \bot]\!]^v$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Conclusioni

- Logica classica = logica data su mondi statici e totalmente determinati
- Interpretazione (o mondo): assegna un valore di verità a ogni variabile che occorre in una formula
- Le variabili che occorrono in una formula sono in numero finito
- Semantica: estende le interpretazioni fissando la denotazione dei connettivi indipendentemente dai mondi
- Tabelle di verità: usate per rappresentare visivamente le denotazioni di una formula al variare dei mondi