Logica per l'Informatica

Soluzioni laboratorio del:

28/11/2023

Esercizio 4.
1)
Dobbiamo dimostrare:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \forall m : \texttt{Nat}.$$
$$((\,\texttt{parity}\ n = \texttt{true} \to \texttt{parity}\ (n+m) = \texttt{parity}\ m\,)$$
$$\wedge$$
$$(\,\texttt{parity}\ n = \texttt{false} \to \texttt{parity}\ (n+m) = \texttt{not}\ (\texttt{parity}\ m)\,)).$$

Dimostrazione. Andiamo per induzione su $n : \texttt{Nat}$ per dimostrare:

$$\forall m : \texttt{Nat}.$$
$$((\,\texttt{parity}\ n = \texttt{true} \to \texttt{parity}\ (n+m) = \texttt{parity}\ m\,)$$
$$\wedge$$
$$(\,\texttt{parity}\ n = \texttt{false} \to \texttt{parity}\ (n+m) = \texttt{not}\ (\texttt{parity}\ m)\,)).$$

Per definizione di `Nat`, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

- Caso `O`.

  La formula che dobbiamo dimostrare diventa allora:

$$\forall m : \texttt{Nat}.$$
$$((\,\texttt{parity}\ \texttt{O} = \texttt{true} \to \texttt{parity}\ (\texttt{O}+m) = \texttt{parity}\ m\,)$$
$$\wedge$$
$$(\,\texttt{parity}\ \texttt{O} = \texttt{false} \to \texttt{parity}\ (\texttt{O}+m) = \texttt{not}\ (\texttt{parity}\ m)\,)).$$

  Assumiamo $m_0 : \texttt{Nat}$.

– Dimostriamo la prima implicazione:

Supponiamo $\texttt{parity}\ \texttt{0} = \texttt{true}$, e dimostriamo $\texttt{parity}\ (\texttt{0}{+}m) = \texttt{parity}\ m$.

Per definizione di $+$ (vedi il testo dell'esercizio), si ha $\texttt{0} + m = m$, dunque abbiamo $\texttt{parity}\ (\texttt{0} + m) = \texttt{parity}\ m$, che era quello che volevamo dimostrare. Commento: Osserva che non abbiamo usato l'ipotesi dell'implicazione... come in alcuni esercizi dei primi laboratori di DN!

– Dimostriamo la seconda implicazione:

Supponiamo $\texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false}$ e dimostriamo $\texttt{parity}\ (\texttt{0}{+}m) = \texttt{not}\ (\texttt{parity}\ m)$.

Ma $\texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false}$ contraddice la definizione di $\texttt{parity}$, dunque dalla contraddizione deduciamo la nostra tesi[1].

Quindi abbiamo dimostrato la "$\wedge$" delle due implicazioni, ovvero abbiamo finito.

- Caso $\texttt{S}\,n$.

  Per comodità, scriviamoci subito l'Ipotesi Induttiva, che è la formula (II) seguente:

$$\forall m : \texttt{Nat}.$$

$$(\,\texttt{parity}\ n = \texttt{true} \to \texttt{parity}\ (n + m) = \texttt{parity}\ m \tag{II1}$$

$$\wedge$$

$$\texttt{parity}\ n = \texttt{false} \to \texttt{parity}\ (n + m) = \texttt{not}\,(\texttt{parity}\ m)\,). \tag{II2}$$

  Qui intendo che la formula (II) è $\forall m : \texttt{Nat}.\,(\text{II1}) \wedge (\text{II2})$.

  Noi dobbiamo dimostrare la formula $(\star)$ seguente:

$$\forall m : \texttt{Nat}.$$

$$(\,\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n) = \texttt{true} \to \texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n + m) = \texttt{parity}\ m \tag{$\star_1$}$$

$$\wedge$$

$$\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n) = \texttt{false} \to \texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n + m) = \texttt{not}\,(\texttt{parity}\ m)\,). \tag{$\star_2$}$$

  Come prima, intendo che la formula $(\star)$ è $\forall m : \texttt{Nat}.\,(\star_1) \wedge (\star_2)$.

  Assumiamo dunque $m_0 : \texttt{Nat}$.

[1]Alcune volte, nello scrivere le dimostrazioni, si abbrevia questo argomento dicendo che siccome questo caso è contraddittorio allora "non è possibile", e quindi possiamo ignorarlo. Logicamente parlando, ciò che c'è dietro è proprio la regola di eliminazione del $\perp$ di DN.

– Dimostriamo $(\star_1)$:

Supponiamo $\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n) = \texttt{true}$ e dimostriamo $\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n + m_0) = \texttt{parity}\ m_0$.

Siccome $\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n) = \texttt{not}\,(\texttt{parity}\,n)$, dalla nostra supposizione otteniamo[2] $\texttt{parity}\,n = \texttt{false}$. Ma allora possiamo applicare la parte (II2) di (II), ottenendo: $\texttt{parity}\,(n + m_0) = \texttt{not}\,(\texttt{parity}\ m_0)$.

Ma allora abbiamo:

$$\begin{array}{rcll}
\texttt{parity}\,(\texttt{S}\,n + m_0) & = & \texttt{parity}\,(\texttt{S}\,(n + m_0)) & \textit{per definizione di } + \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{parity}\,(n + m_0)) & \textit{per definizione di } \texttt{parity} \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{not}\,(\texttt{parity}\ m_0)) & \textit{per quando appena dimostrato} \\
& = & \texttt{parity}\ m_0 & \textit{vale in generale}^3.
\end{array}$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare (usando la transitività di =).

– Dimostriamo $(\star_2)$:

Supponiamo $\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n) = \texttt{false}$ e dimostriamo $\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n + m_0) = \texttt{not}\,(\texttt{parity}\ m_0)$.

Siccome $\texttt{parity}\ (\texttt{S}\,n) = \texttt{not}\,(\texttt{parity}\,n)$, dalla nostra supposizione otteniamo[4] $\texttt{parity}\,n = \texttt{true}$. Ma allora possiamo applicare la parte (II1) di (II), ottenendo: $\texttt{parity}\,(n + m_0) = \texttt{parity}\ m_0$.

Ma allora abbiamo:

$$\begin{array}{rcll}
\texttt{parity}\,(\texttt{S}\,n + m_0) & = & \texttt{parity}\,(\texttt{S}\,(n + m_0)) & \textit{per definizione di } + \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{parity}\,(n + m_0)) & \textit{per definizione di } \texttt{parity} \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{parity}\ m_0) & \textit{per quando appena dimostrato}
\end{array}$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare (usando la transitività di =).

Quindi abbiamo dimostrato la "∧" delle due implicazioni, ovvero abbiamo finito.

□

2)

Dobbiamo dimostrare:

$$\forall l : \texttt{listN}.\quad \texttt{parity}\ (\texttt{suml}\ (\texttt{repeat}\ l)) = \texttt{true}.$$

[2] Per essere pedanti, questo lo si dovrebbe mostrare con un lemma a parte, immediato da dimostrare, che dice: $\forall b : \texttt{Bool}.\,\texttt{not}\,b = \texttt{true} \to b = \texttt{false}$.

[3] Puoi immediatamente dimostrare il lemma: $\forall b : \texttt{Bool}.\,\texttt{not}\,(\texttt{not}\,b) = b$.

[4] Stiamo usando lo stesso lemma di prima.

Il testo ci ricorda che possiamo usare l'associatività di +, ovvero la formula:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \forall m : \texttt{Nat}. \forall r : \texttt{Nat}. \quad (n+m)+r = n+(m+r). \qquad (+\ \text{assoc.})$$

Il testo ci ricorda che possiamo usare anche la formula:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \quad n+n = \texttt{dbl}\, n. \qquad (\text{H})$$

Dimostrazione. Andiamo per induzione su l : **listN** per dimostrare $\texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) = \texttt{true}$.

Per definizione di **listN**, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

- Caso [].

  La formula che dobbiamo dimostrare diventa allora:

  $$\texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,[])) = \texttt{true}.$$

  Ma questo è immediato usando le definizioni delle funzioni che appaiono:

  $$\begin{array}{rcll} \texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,[])) & = & \texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,[]) & \textit{per definizione di } \texttt{repeat} \\ & = & \texttt{parity}\,\texttt{0} & \textit{per definizione di } \texttt{suml} \\ & = & \texttt{true} & \textit{per definizione di } \texttt{parity}\,. \end{array}$$

  Ci siamo dunque ricondotti a dimostrare $\texttt{true} = \texttt{true}$, che è ovvio per la riflessività di =.

- Caso $n :: l$, con l : **listN**.

  Per comodità, scriviamoci subito l'Ipotesi Induttiva, che è la formula:

  $$\texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) = \texttt{true}. \qquad (\text{II})$$

  La formula che dobbiamo dimostrare è:

  $$\texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,(n :: l))) = \texttt{true}.$$

  Si ha:

  $$\begin{array}{rcll} \texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,(n :: l))) & = & \texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(n :: (n :: \texttt{repeat}\,l))) & \textit{per def. di } \texttt{repeat} \\ & = & \texttt{parity}\,(n + \texttt{suml}\,(n :: \texttt{repeat}\,l)) & \textit{per def. di } \texttt{suml} \\ & = & \texttt{parity}\,(n + (n + \texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l))) & \textit{per def. di } \texttt{suml} \\ & = & \texttt{parity}\,((n+n) + \texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) & \textit{per } (+\ \text{assoc.}) \\ & = & \texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,n + \texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) & \textit{per } (\text{H}). \end{array}$$

Ci siamo dunque ricondotti a dover dimostrare la formula:

$$\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,n + \texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) = \texttt{true}.$$

Ora, osserviamo che, applicando il Theorem 3 dell'esercizio 2 (per $n : \texttt{Nat}$) (Che regola di DN stiamo usando?), otteniamo che $\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,n) = \texttt{true}$.
Ma allora applicando il Theorem 5 dell'esercizio 4 (per $\texttt{dbl}\,n : \texttt{Nat}$ e $\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l) : \texttt{Nat}$) (Che regola di DN stiamo usando?), otteniamo $\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,n + \texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) = \texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l))$.

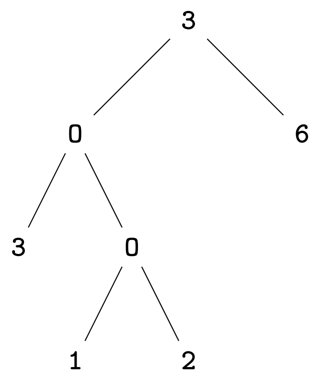
Ci siamo dunque ridotti a dover dimostrare la formula:

$$\texttt{parity}\,(\texttt{suml}\,(\texttt{repeat}\,l)) = \texttt{true}.$$

Ma questa formula è precisamente (II), dunque abbiamo finito.

$\square$

Esercizio 5: Il tipo degli alberi binari etichettati con numeri naturali.
T_0 rappresenta l'albero seguente:



1)

$$\begin{array}{lll}
\texttt{rmost}\,(\texttt{Leaf}\,n) & := & n \\
\texttt{rmost}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2) & := & \texttt{rmost}\,T_2, \quad \textit{con } n : \texttt{Nat},\ T_1 : \texttt{Tree} \textit{ e } T_2 : \texttt{Tree}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\texttt{lmost}\,(\texttt{Leaf}\,n) & := & n \\
\texttt{lmost}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2) & := & \texttt{lmost}\,T_1, \quad \textit{con } n : \texttt{Nat},\ T_1 : \texttt{Tree} \textit{ e } T_2 : \texttt{Tree}.
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{lll}
\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\,n) & := & n :: [\,] \\
\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2) & := & \texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,T_1)\,(\texttt{Tree}T_2), \quad \textit{con } n : \texttt{Nat},\ T_1 : \texttt{Tree} \textit{ e } T_2 : \texttt{Tree}.
\end{array}$$

Per esempio, calcoliamo $\texttt{foglie}\,T_0$, dove T_0 è l'albero di sopra. Si ha:

$$
\begin{aligned}
\texttt{foglie}\,T_0 &= \texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\,\texttt{0}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{3})\,(\texttt{Node}\,\texttt{0}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{1})\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{2}))))\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{6}))\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{3}))\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\,\texttt{0}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{1})\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{2}))))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{app}\,(\texttt{3}::[])\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{1}))\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\,\texttt{2}))))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{app}\,(\texttt{3}::[])\,(\texttt{app}\,(\texttt{1}::[])\,(\texttt{2}::[])))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{3}::(\texttt{app}\,[]\,(\texttt{app}\,(\texttt{1}::[])\,(\texttt{2}::[]))))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{3}::(\texttt{app}\,(\texttt{1}::[])\,(\texttt{2}::[])))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{3}::(\texttt{1}::(\texttt{app}\,[]\,(\texttt{2}::[]))))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{app}\,(\texttt{3}::(\texttt{1}::(\texttt{2}::[])))\,(\texttt{6}::[])\\
&= \texttt{3}::(\texttt{app}\,(\texttt{1}::(\texttt{2}::[]))\,(\texttt{6}::[]))\\
&= \texttt{3}::(\texttt{1}::(\texttt{app}\,(\texttt{2}::[])\,(\texttt{6}::[])))\\
&= \texttt{3}::(\texttt{1}::(\texttt{2}::(\texttt{app}\,[]\,(\texttt{6}::[]))))\\
&= \texttt{3}::(\texttt{1}::(\texttt{2}::(\texttt{6}::[])))
\end{aligned}
$$

che infatti è il risultato corretto.

Esercizio 6.

1)

Dobbiamo dimostrare la formula:

$$\forall l : \texttt{listN}.\, \forall l' : \texttt{listN}. \qquad l \neq [] \to \texttt{head}\ (\texttt{app}\ l\, l') = \texttt{head}\ l.$$

Dimostrazione. Andiamo per induzione su $l : \texttt{listN}$ per dimostrare

$$\forall l' : \texttt{listN}. \qquad l \neq [] \to \texttt{head}\ (\texttt{app}\ l\, l') = \texttt{head}\ l.$$

Per definizione di $\texttt{listN}$, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

- Caso $[]$.

  Dobbiamo dimostrare la formula:

  $$\forall l' : \texttt{listN}. \qquad [] \neq [] \to \texttt{head}\ (\texttt{app}\ []\, l') = \texttt{head}\ [].$$

  Sia dunque $l_0 : \texttt{listN}$, supponiamo $[] \neq []$ e dimostriamo $\texttt{head}\ (\texttt{app}\ []\, l_0) = \texttt{head}\ []$. Ma $[] \neq []$ è una contraddizione, dunque abbiamo finito. (Commento: In maniera più formale, qui stiamo usando la riflessività di $=$, che ci dice che, in particolare, $[] = []$. Siccome abbiamo $[] \neq []$ (ovvero $\neg([] = [])$) tra le ipotesi, per la regola di eliminazione del $\neg$ otteniamo $\bot$, e poi usiamo la regola di eliminazione di $\bot$ per concludere).

- Caso $n :: l$, con l : `listN`.

  Per comodità, scriviamoci subito l'Ipotesi Induttiva, che è la formula:

  $$\forall l' : \texttt{listN}. \qquad l \neq [\,] \rightarrow \texttt{head}\,(\texttt{app}\, l\, l') = \texttt{head}\, l. \tag{II}$$

  Noi dobbiamo dimostrare la formula:

  $$\forall l' : \texttt{listN}. \qquad (n :: l) \neq [\,] \rightarrow \texttt{head}\,(\texttt{app}\,(n :: l)\, l') = \texttt{head}\,(n :: l).$$

  Sia l_0 : `listN` e supponiamo $(n :: l) \neq [\,]$.

  Dobbiamo dimostrare $\texttt{head}\,(\texttt{app}\,(n :: l)\, l_0) = \texttt{head}\,(n :: l)$.

  Sviluppando il membro destro abbiamo $\texttt{head}\,(n :: l) = n$, per definizione di `head` .

  Sviluppando il membro sinistro abbiamo:

  $$\begin{array}{rcll} \texttt{head}\,(\texttt{app}\,(n :: l)\, l_0) & = & \texttt{head}\,(n :: (\texttt{app}\, l\, l_0)) & \textit{per def. di } \texttt{app} \\ & = & n & \textit{per def. di } \texttt{head}\,. \end{array}$$

  Dunque ci siamo ricondotti a dover dimostrare $n = n$, che è ovvio per la riflessività di $=$, ed abbiamo finito.

  Commento: Osserva che non abbiamo né usato la supposizione (che tra l'altro è una formula sempre dimostrabile, dunque non ci dà nulla di nuovo), né l'Ipotesi Induttiva.

$\square$

2)
Dobbiamo dimostrare la formula:

$$\forall T : \texttt{Tree}. \qquad \texttt{head}\ (\texttt{foglie}\ T) = \texttt{lmost}\ T.$$

Dimostrazione. Andiamo per induzione su T : `Tree` per dimostrare $\texttt{head}\ (\texttt{foglie}\ T) = \texttt{lmost}\ T$.

Per definizione di `Tree`, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

- Caso $\texttt{Leaf}\, n$, con n : `Nat`.

  Dobbiamo dimostrare $\texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\, n)) = \texttt{lmost}\,(\texttt{Leaf}\, n)$.

  Sviluppando il membro destro abbiamo $\texttt{lmost}\,(\texttt{Leaf}\, n) = n$, per definizione di `lmost` .

Sviluppiamo il membro sinistro abbiamo:

$$\begin{array}{rcll} \texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\,n)) & = & \texttt{head}\,(n :: []) & \textit{per def. di } \texttt{foglie} \\ & = & n & \textit{per def. di } \texttt{head}\,. \end{array}$$

Ci siamo ricondotti dunque a dover dimostrare $n = n$, che è ovvio per la riflessività di $=$.

- Caso $\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2$, con $n : \texttt{Nat}$, $T_1 : \texttt{Tree}$ e $T_2 : \texttt{Tree}$.

  Per comodità, scriviamoci subito *le* Ipotesi Induttiv*e*, che sono le formule:

  $$\texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,T_1) = \texttt{lmost}\,T_1 \qquad (II_1)$$

  e

  $$\texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,T_2) = \texttt{lmost}\,T_2. \qquad (II_2)$$

  Noi dobbiamo dimostrare la formula:

  $$\texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2)) = \texttt{lmost}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2). \qquad (\star)$$

  Sviluppando il membro di destra abbiamo: $\texttt{lmost}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2) = \texttt{lmost}\,T_1$, per definizione di $\texttt{lmost}$.

  Sviluppando il membro di sinistra abbiamo: $\texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\,n\,T_1\,T_2)) = \texttt{head}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,T_1)\,(\texttt{foglie}\,T_2))$, per definizione di $\texttt{foglie}$.

  Ci siamo dunque ricondotti a dover dimostrare la formula:

  $$\texttt{head}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,T_1)\,(\texttt{foglie}\,T_2)) = \texttt{lmost}\,T_1.$$

  A questo punto, intuiamo che vogliamo applicare il punto 1) dell'esercizio 6 per ottenere $\texttt{head}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,T_1)\,(\texttt{foglie}\,T_2)) = \texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,T_1)$, in modo da poter poi invocare l'Ipotesi Induttiva II_1 e concludere... ma per applicare il punto 1) dell'esercizio 6 dobbiamo usare $\texttt{foglie}\,T_1 \neq []$, che non abbiamo tra le ipotesi! Dimostriamolo dunque in generale, ed usiamolo come lemma.

  Usando il seguente:

  Lemma 1.

  $$\forall T : \texttt{Tree}. \quad \texttt{foglie}\,T \neq [].$$

  la cui dimostrazione sarà fornita più sotto, abbiamo:

  $$\begin{array}{rcll} \texttt{head}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\,T_1)\,(\texttt{foglie}\,T_2)) & = & \texttt{head}\,(\texttt{foglie}\,T_1) & \textit{usando Lemma } (1) \textit{ + pt. 1) es. 6} \\ & = & \texttt{lmost}\,T_1 & \textit{per } (II_1). \end{array}$$

  Ci siamo dunque ricondotti a dover dimostrare $\texttt{lmost}\,T_1 = \texttt{lmost}\,T_1$, che è triviale per la riflessività di $=$, ed abbiamo finito.

  Commento: Osserva che non abbiamo usato l'Ipotesi Induttiva (II_2), ma solo l'Ipotesi Induttiva (II_1).

$\square$

Rimane da fare:

Affinché la nostra dimostrazione precedente sia completa, dobbiamo dimostrare il Lemma 1 che abbiamo invocato. Ecco fatto:

Dimostrazione. Andiamo per induzione su $T : \texttt{Tree}$ per dimostrare $\texttt{foglie}\, T \neq []$.

- Caso $\texttt{Leaf}\, n$, con $n : \texttt{Nat}$.

  Dobbiamo dimostrare $\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\, n) \neq []$. Supponiamo dunque $\texttt{foglie}\,(\texttt{Leaf}\, n) = []$ e cerchiamo una contraddizione. (Osserva che questa non è una dimostrazione per assurdo, stiamo semplicemente usando la regola di introduzione di $\neg$). Ma questa la troviamo immediatamente dalla definizione di $\texttt{foglie}$, quindi abbiamo finito.

- Caso $\texttt{Node}\, n\, T_1\, T_2$, con $n : \texttt{Nat}$, $T_1 : \texttt{Tree}$ e $T_2 : \texttt{Tree}$.

  Per comodità, scriviamoci subito le ipotesi induttive, che sono le formule: $\texttt{foglie}\, T_1 \neq []$ e $\texttt{foglie}\, T_2 \neq []$.

  Noi dobbiamo dimostrare $\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\, n\, T_1\, T_2) \neq []$.

  Supponiamo dunque $\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\, n\, T_1\, T_2) = []$ e cerchiamo una contraddizione. (Osserva che questa non è una dimostrazione per assurdo, stiamo semplicemente usando la regola di introduzione di $\neg$).

  Siccome $\texttt{foglie}\,(\texttt{Node}\, n\, T_1\, T_2) = \texttt{app}\,(\texttt{foglie}\, T_1)\,(\texttt{foglie}\, T_2)$, la nostra supposizione implica che $\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\, T_1)\,(\texttt{foglie}\, T_2) = []$.

  Ma allora applicando $\texttt{head}$ ad ambo i membri di quest'ultima uguaglianza otteniamo[5]: $\texttt{head}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\, T_1)\,(\texttt{foglie}\, T_2)) = \texttt{head}\,[]$. Dalla definizione di $\texttt{head}$ sappiamo che $\texttt{head}\,[] = \bot$. Inoltre, dalla prima Ipotesi Induttiva (ovvero: $\texttt{foglie}\, T_1 \neq []$), applicando il punto 1) dell'esercizio 6, abbiamo: $\texttt{head}\,(\texttt{app}\,(\texttt{foglie}\, T_1)\,(\texttt{foglie}\, T_2)) = \texttt{head}\,(\texttt{foglie}\, T_1)$.

  Dunque otteniamo infine: $\texttt{head}\,(\texttt{foglie}\, T_1) = \bot$.

  Ma, vista la definizione di $\texttt{head}$, questo implica[6] che $\texttt{foglie}\, T_1 = []$. Ma questo contraddice la prima Ipotesi Induttiva, dunque abbiamo finito.

□

[5] Stiamo usando l'assioma che dice che se ho due cose uguali, allora applicando la stessa funzione ad entrambe, continuo ad avere cose uguali.

[6] Per essere precisi, qui stiamo invocando un altro lemma, che è:

$$\forall l : \texttt{listN}. \quad \texttt{head}\, l = \bot \to l = []$$

la cui dimostrazione è immediata (per induzione!).