Logica per l'Informatica

Soluzioni laboratorio del:

28/11/2023

Commento: Le parti in blu sono dei commenti a varie parti degli esercizi, che quindi non fanno ufficialmente parte della soluzione ma sono solo per vostra comprensione. Trovate dei commenti anche in alcuni pié di pagina.

Esercizio 1: Il tipo dei numeri naturali (in unario).

1)

$$\begin{array}{lcl} \texttt{dbl}\ \texttt{O} & := & \texttt{O} \\ \texttt{dbl}\ (\texttt{S}\, n) & := & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\ n)) \qquad \textit{con}\ n : \texttt{Nat}. \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{rcl} \texttt{dbl 3} & := & \texttt{dbl}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,\texttt{O}))) \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,\texttt{O})))) \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,(\texttt{S}\,\texttt{O}))))) \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\ \texttt{O})))))) \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,\texttt{O}))))) \\ & =: & \texttt{6}. \end{array}$$

Esercizio 2: Il tipo delle liste di numeri naturali.

1)

$$\begin{array}{lcl} \texttt{repeat}\ [] & := & [] \\ \texttt{repeat}\ (n :: l) & := & n :: n :: (\texttt{repeat}\ l), \qquad \textit{dove}\ n : \texttt{Nat}\ \textit{e}\ l : \texttt{listN}. \end{array}$$

2)

Dobbiamo dimostrare $\forall l : \texttt{listN}.\ \ \texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ l) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ l)$.

Per fare ciò, *andiamo per induzione su* $l : \texttt{listN}$ *per dimostrare* $\texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ l) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ l)$.

Di fatto, con questa scrittura indichiamo che stiamo scrivendo un programma che, dato un valore $l : \texttt{listN}$ ritorna una dimostrazione (che di solito può essere scritta in DN o simili) della formula $\texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ l) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ l)$. Questo è ciò che dimostrare $\forall l : \texttt{listN}.\quad \texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ l) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ l)$ significa[1]. Nota che, invece, in DN, per dimostrare un $\forall l$ saremmo stati obbligati ad usare una delle varie regole che abbiamo visto (introduzione del $\forall$, andare per assurdo, ecc).

Per definizione di `listN`, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

- Caso $[]$.

  Dobbiamo dimostrare la formula:

  $$\texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ []) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ []). \tag{$\star$}$$

  Sviluppando il membro sinistro dell'equazione si ha:

  $$\begin{aligned} \texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ []) &= \texttt{len}\ [] && \textit{per definizione di } \texttt{repeat} \\ &= \texttt{0} && \textit{per definizione di } \texttt{len}\,. \end{aligned}$$

  Sviluppando il membro destro dell'equazione si ha:

  $$\begin{aligned} \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ []) &= \texttt{dbl 0} && \textit{per definizione di } \texttt{len} \\ &= \texttt{0} && \textit{per definizione di } \texttt{dbl}\,. \end{aligned}$$

  Allora, per la transitività di $=$, la formula che dobbiamo dimostrare è equivalente a:

  $$\texttt{0} = \texttt{0},$$

  che a sua volta è triviale per la riflessività di $=$ e quindi abbiamo finito[2].

  Commento: Logicamente parlando, ci siamo *ridotti* a dimostrare $\texttt{0} = \texttt{0}$, ovvero abbiamo dimostrato che $(\texttt{0} = \texttt{0}) \to (\star)$, ed abbiamo concluso (che regola di DN stiamo usando?) perché $\texttt{0} = \texttt{0}$ lo otteniamo trivialmente dalla riflessività di $=$.

[1] Qui la stiamo scrivendo in linguaggio naturale, ma questa strategia di dimostrazione per induzione può essere scritta, per esempio, in Matita.

[2] Osserva che, spesso, l'argomento che abbiamo appena fatto (in particolare l'uso della riflessività e la transitività di $=$) lo si lascia implicito, scrivendolo sotto forma di un'unica catena di uguaglianze, come segue:

$$\begin{aligned} \texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ []) &= \texttt{len}\ [] && \textit{per definizione di } \texttt{repeat} \\ &= \texttt{0} && \textit{per definizione di } \texttt{len} \\ &= \texttt{dbl 0} && \textit{per definizione di } \texttt{dbl} \\ &= \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ []) && \textit{per definizione di } \texttt{len}\,. \end{aligned}$$

Osserva che puoi leggerla sia da sinistra verso destra che da destra verso sinistra: questo fatto è proprio la transitività di $=$. Nel seguitò, rimarrò pedante e *non* userò questo modo di scrivere.

- Caso $n :: l$, con $l : \texttt{listN}$.

  Scriviamoci subito, per comodità, l'Ipotesi Induttiva, che è la formula:

$$\texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ l) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ l) \tag{II}$$

  Commento: Visto che stiamo facendo una dimostrazione per induzione, la formula (II) è, logicamente parlando, una *ipotesi*, e la possiamo usare a piacere. Di fatto, l'uso di questa ipotesi significa fare una chiamata ricorsiva del programma/dimostrazione che stiamo scrivendo.

  La formula che dobbiamo dimostrare è:

$$\texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ (n :: l)) = \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ (n :: l)). \tag{$\star$}$$

  Commento: Come prima, il nostro scopo è *ricondurci* all'Ipotesi Induttiva (o qualcosa che sappiamo dimostrare usando essa), partendo dalla formula che dobbiamo dimostrare, ovvero ($\star$). Come prima, il verbo "ricondursi", significa che logicamente stiamo procedendo al contrario: non stiamo usando ($\star$) per arrivare fino a (II), ma il contrario, ovvero mostriamo che da (II) otteniamo ($\star$), ovvero, in simboli logici: (II) $\to$ ($\star$).

  Sviluppando il membro sinistro di ($\star$) abbiamo:

$$\begin{array}{rcll} \texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ (n :: l)) & = & \texttt{len}\ (n :: n :: \texttt{dbl}\, l) & \textit{per definizione di } \texttt{repeat} \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{len}\,(n :: \texttt{repeat}\ l)) & \textit{per definizione di } \texttt{len} \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{len}\,(\texttt{dbl}\ l))) & \textit{per definizione di } \texttt{len}\,. \end{array}$$

  Sviluppando il membro destro di ($\star$) abbiamo:

$$\begin{array}{rcll} \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ (n :: l)) & = & \texttt{dbl}\ (\texttt{S}\,(\texttt{len}\, l)) & \textit{per definizione di } \texttt{len} \\ & = & \texttt{S}\ (\texttt{S}\,(\texttt{repeat}\,(\texttt{len}\, l))) & \textit{per definizione di } \texttt{dbl}\,. \end{array}$$

  Allora, per la transitività di $=$, la formula ($\star$) che dobbiamo dimostrare è equivalente a:

$$\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{len}\,(\texttt{repeat}\, l))) = \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ l))).$$

  Ma questo possiamo dimostrarlo immediatamente usando l'Ipotesi Induttiva[3] (II). Dunque, abbiamo finito[4].

[3] Per essere precisi stiamo usando il fatto che, se due cose sono uguali, allora se applico lo stesso simbolo di funzione ad entrambi ottendo due cose uguali. Una volta tradotto questo fatto in formula, tale formula è tacitamente presa come assioma. Osserva che, in realtà, questo assioma lo hai gia tacitamente usato in tutte le precedenti uguaglianze!

[4] Scrivendo l'argomento precedente in maniera più compatta, sotto forma di un'unica catena

Esercizio 3: Il tipo dei booleani.

1)

$$\begin{array}{lcl} \texttt{not true} & := & \texttt{false} \\ \texttt{not false} & := & \texttt{true} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \texttt{parity}\ \texttt{0} & := & \texttt{true} \\ \texttt{parity}\ (\texttt{S}\, n) & := & \texttt{not}\ (\texttt{parity}\ n) \end{array}$$

2)

Dobbiamo dimostrare la formula: $\forall n : \texttt{Nat}.\ \ \texttt{parity}\ (\texttt{dbl}\ n) = \texttt{true}$.

Per fare ciò, *andiamo per induzione su* $n : \texttt{Nat}$ *per dimostrare* $\texttt{parity}\ (\texttt{dbl}\ n) = \texttt{true}$.

Per definizione di $\texttt{Nat}$, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

- Caso $\texttt{0}$.

  Dobbiamo dimostrare $\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,\texttt{0}) = \texttt{true}$.

  Sviluppiamo il membro sinistro dell'equazione da dimostrare:

$$\begin{array}{lcll} \texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,\texttt{0}) & = & \texttt{parity}\,\texttt{0} & \textit{per definizione di } \texttt{dbl} \\ & = & \texttt{true} & \textit{per definizione di } \texttt{parity} \end{array}$$

  e dunque ci siamo ricondotti a $\texttt{true} = \texttt{true}$, la cui dimostrazione è triviale grazie alla riflessività di $=$.

- Caso $\texttt{S}\, n$, with $n : \texttt{Nat}$.

  Per comodità, scriviamoci subito l'Ipotesi Induttiva:

$$\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\, n) = \texttt{true}. \tag{II}$$

  La formula che dobbiamo dimostrare è:

$$\texttt{parity}\ (\texttt{dbl}\ (\texttt{S}\, n)) = \texttt{true}.$$

---

di uguaglianze, come accennavo prima, avremmo:

$$\begin{array}{lcll} \texttt{len}\ (\texttt{repeat}\ (n :: l)) & = & \texttt{len}\ (n :: n :: \texttt{dbl}\, l) & \textit{per definizione di } \texttt{repeat} \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{len}\,(n :: \texttt{repeat}\ l)) & \textit{per definizione di } \texttt{len} \\ & = & \texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{len}\,(\texttt{repeat}\, l))) & \textit{per definizione di } \texttt{len} \\ & = & \texttt{S}\ (\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,(\texttt{len}\, l))) & \textit{per Ipotesi Induttiva } (\mathrm{II}) \\ & = & \texttt{dbl}\ (\texttt{S}\,(\texttt{len}\, l)) & \textit{per definizione di } \texttt{dbl} \\ & = & \texttt{dbl}\ (\texttt{len}\ (n :: l)) & \textit{per definizione di } \texttt{len}\,. \end{array}$$

Sviluppiamo il membro sinistro della formula da dimostrare:

$$\begin{array}{rcll}
\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,(\texttt{S}\,n)) & = & \texttt{parity}\,(\texttt{S}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,n))) & \textit{per definizione di } \texttt{dbl} \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{parity}\,(\texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,n))) & \textit{per definizione di } \texttt{parity} \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{not}\,(\texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\,n))) & \textit{per definizione di } \texttt{parity} \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{not}\,(\texttt{true})) & \textit{per Ipotesi Induttiva } (\mathrm{II}) \\
& = & \texttt{not}\,(\texttt{false}) & \textit{per definizione di } \texttt{not} \\
& = & \texttt{true} & \textit{per definizione di } \texttt{not}\,.
\end{array}$$

Ci siamo dunque ricondotti a dover dimostrare $\texttt{true} = \texttt{true}$, la cui dimostrazione è triviale grazie alla riflessività di $=$.

Commento: Quest ultimo passo è, di fatto, sempre lasciato implicito nella scrittura usuale di una dimostrazione, ma non nella scrittura formale in un linguaggio come DN, o Matita o simili).

Dunque, abbiamo finito.

3)
Dobbiamo dimostrare:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \forall m : \texttt{Nat}. \quad (n = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\ m) \to \texttt{parity}\ n = \texttt{false}).$$

Commento: Il testo ci indica che, se pur potremmo procedere senza induzione, vuole che lo facciamo lo stesso per induzione.

Il testo ci dice anche che possiamo assumere la seguente formula come assioma[5]:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \quad \texttt{0} \neq \texttt{S}\,n. \tag{H1}$$

Il testo si è scordato di scriverlo, ma possiamo anche assumere la seguente formula come assioma[6]:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \forall m : \texttt{Nat}. \quad \texttt{S}\,n = \texttt{S}\,m \to n = m. \tag{H2}$$

Per fare ciò, *andiamo per induzione su* $n : \texttt{Nat}$ *per dimostrare* $\forall m : \texttt{Nat}. \quad (n = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\ m) \to \texttt{parity}\ n = \texttt{false})$.

Per definizione di $\texttt{Nat}$, questo significa che abbiamo esattamente i seguenti due casi:

[5]Non serve per l'esercizio, ma osserva che questo implica che $\texttt{S}$ non è una funzione suriettiva. Un giorno rivedrete questo assioma.

[6]Non serve per l'esercizio, ma osserva che questo significa che $\texttt{S}$ è una funzione iniettiva. Un giorno rivedrete questo assioma.

- Caso $\texttt{0}$.

  La formula che dobbiamo dimostrare diventa allora:

  $$\forall m : \texttt{Nat}. \quad (\texttt{0} = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m) \to \texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false}).$$

  Assumiamo $m_0 : \texttt{Nat}$ fissato, ed allora ci basta dimostrare:

  $$\texttt{0} = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m_0) \to \texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false} \qquad (\star)$$

  Ovvero, dobbiamo dimostrare $\texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false}$ sotto l'ipotesi $\texttt{0} = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m_0)$.

  Osserva che $\texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false}$ contraddice la definizione di $\texttt{parity}$, ma non è un problema: non lo stiamo dimostrando in assoluto, ma sotto una ipotesi supplementare (che infatti sarà una ipotesi contraddittoria essa stessa)!

  Usando (che regola di DN stiamo usando?) (H1) su $\texttt{dbl}\,m_0 : \texttt{Nat}$ (sappiamo che è di tipo $\texttt{Nat}$ per definizione di $\texttt{dbl}$ e per l'assunzione su m_0), abbiamo che $\texttt{0} \neq \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m_0)$.

  Dunque dall'ipotesi $\texttt{0} = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m_0)$ abbiamo una contraddizione (in DN diremo che abbiamo dimostrato la formula $\bot$).

  Dalla contraddizione deduciamo (che regola di DN stiamo usando?) $\texttt{parity}\,\texttt{0} = \texttt{false}$, ed alla fine abbiamo dimostrato $(\star)$.

  Questo conclude questo caso della dimostrazione.

- Caso $\texttt{S}\,n$, con $n : \texttt{Nat}$.

  Per comodità, scriviamoci subito l'Ipotesi Induttiva che abbiamo a disposizione, che è:

  $$\forall m : \texttt{Nat}. \quad (n = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m) \to \texttt{parity}\,n = \texttt{false}). \qquad \text{(II)}$$

  Allora la formula che dobbiamo dimostrare diventa (metto tutte le parentesi, per chiarezza):

  $$\forall m : \texttt{Nat}. \quad ((\texttt{S}\,n = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m)) \to (\texttt{parity}\,(\texttt{S}\,n) = \texttt{false})). \qquad (\star)$$

  Dimostriamo ora $(\star)$ (ovvero, stiamo dimostrando: (II) $\to$ $(\star)$).

  Assumiamo $m_0 : \texttt{Nat}$ e dimostriamo:

  $$(\texttt{S}\,n = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m_0) \to \texttt{parity}\,(\texttt{S}\,n) = \texttt{false}), \qquad (\star')$$

  ovvero supponiamo $\texttt{S}\,n = \texttt{S}\,(\texttt{dbl}\,m_0)$ e dimostriamo $\texttt{parity}\,(\texttt{S}\,n) = \texttt{false}$.

Ma tale ipotesi, più (H2) (applicata su n ed $\texttt{dbl}\, m_0$), ci dà: $n = \texttt{dbl}\, m_0$.

Ma nell'esercizio 2) avevamo dimostrato che:

$$\forall n : \texttt{Nat}. \quad \texttt{parity}\ (\texttt{dbl}\ n) = \texttt{true}$$

e dunque applicando quest'ultima formula ad m_0, otteniamo $\texttt{parity}\, n = \texttt{parity}\,(\texttt{dbl}\ n) = \texttt{true}$ (ovvero $\texttt{parity}\, n = \texttt{true}$, per transitività di $=$).

Ma allora dalla definizione di $\texttt{parity}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \texttt{parity}\,(\texttt{S}\, n) &= \texttt{not}\,(\texttt{parity}\, n) \\ &= \texttt{not}\,\texttt{true} \\ &= \texttt{false}, \end{aligned}$$

che era quello che volevamo dimostrare.

Abbiamo dunque dimostrato $(\star')$, e questo conclude questo caso della dimostrazione.

Commento: Osserva che, quando scriviamo i casi di una dimostrazione per induzione, consideriamo per esempio l'esercizio 2, non scriviamo i casi come "Caso $l = []$" e "Caso $l = n :: l'$, ma semplicemente "Caso $[]$" e "Caso $n :: l$"! Stessa cosa per il tipo $\texttt{Nat}$ negli e per tutti i tipi sui quali facciamo induzione, i casi sono $\texttt{O}$ e $\texttt{S}\, n$, *non* $n = \texttt{O}$ ed $n = \texttt{S}\, n'$!

Il motivo è che non stiamo facendo alcuna analisi per casi su alcun $n : \texttt{Nat}$, ma il "principio di induzione" ci permette direttamente di dimostrare $\forall n.P(n)$ riconducendoci a fornire una dimostrazione di $P(\texttt{O})$ ed una di $P(\texttt{S}\, n)$, per un $n : \texttt{Nat}$ generico, nella quale possiamo fare chiamate ricorsive ad una dimostrazione di $P(n)$.

Detto ciò, quando si scrivono le dimostrazione in maniera non formale (ovvero non in un linguaggio come Matita o DN o simili), spesso si commette l'imprecisione di scrivere "Caso $n = \texttt{O}$" ecc... sforzatevi di *non* commettetela anche voi!