Ex 1:

$\neg B \to \neg A \vdash A \to B$

(Classica)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad \dfrac{\neg B \to \neg A \qquad [\neg B]}{\neg A}\,{\scriptstyle \to elim}}{\bot}\,{\scriptstyle \neg elim}}{B}\,{\scriptstyle RAA}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to intro}$$

$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$

(Classica)

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,{\scriptstyle EM} \qquad \dfrac{\dfrac{[A]}{B \to A}\,{\scriptstyle \to intro}}{(A \to B) \vee (B \to A)}\,{\scriptstyle \vee intro} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A] \qquad [A]}{\bot}\,{\scriptstyle \neg elim}}{B}\,{\scriptstyle \bot elim}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to intro}}{(A \to B) \vee (B \to A)}\,{\scriptstyle \vee intro}}{(A \to B) \vee (B \to A)}\,{\scriptstyle \vee elim}$$

$A \to B \vdash \neg A \vee B$

(Classica)

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,{\scriptstyle EM} \qquad \dfrac{\dfrac{A \to B \qquad [A]}{B}\,{\scriptstyle \to elim}}{\neg A \vee B}\,{\scriptstyle \vee intro} \qquad \dfrac{[\neg A]}{\neg A \vee B}\,{\scriptstyle \vee intro}}{\neg A \vee B}\,{\scriptstyle \vee elim}$$

$\neg A \vee B \vdash A \to B$

(Intuicionista)

$$\dfrac{\dfrac{\neg A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A] \qquad [A]}{\bot}\,{\scriptstyle \neg elim}}{B}\,{\scriptstyle \bot elim} \qquad [B]}{B}\,{\scriptstyle \vee elim}}{A \to B}\,{\scriptstyle \to intro}$$

Ex 2:

$\exists x.\neg P(x) \vdash \neg\forall x.P(x)$

(Intuizionista)

Osserva che la regola $\exists$elim è applicata bene perché l'albero destro sopra essa dimostra l'enunciato: $\neg P(x_0), \forall x.P(x) \vdash \bot$ (pensatelo come l'enunciato: $\forall x.P(x) \vdash \neg P(x_0) \to \bot$), e dunque x_0 non occorre libera in nessuna ipotesi tranne $\neg P(x_0)$ e neanche nella conclusione $\bot$.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.\neg P(x) \qquad \dfrac{[\neg P(x_0)] \qquad \dfrac{[\forall x.P(x)]}{P(x_0)}\,\forall\text{elim}}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\bot}\,\exists\text{elim}}{\neg\forall x.P(x)}\,\neg\text{intro}$$

$\neg\forall x.P(x) \vdash \exists x.\neg P(x)$

(Classica)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x.\neg P(x)] \qquad \dfrac{[\neg P(x_0)]}{\exists x.\neg P(x)}\,\exists\text{intro}}{\bot}\,\neg\text{elim}}{P(x_0)}\,\text{RAA}}{\forall x.P(x)}\,\forall\text{intro} \qquad \neg\forall x.P(x)}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\exists x.\neg P(x)}\,\text{RAA}$$

Osserva che l'applicazione della regola $\forall$intro è corretta perché l'albero sopra di lei è una dimostrazione dell'enunciato: $\neg\exists x.\neg P(x) \vdash P(x_0)$, quindi x_0 non occorre libera nelle ipotesi.

(questa ipotesi diventa morta solo in seguito nell'applicazione dell'ultima regola RAA, in basso.)

Osserva che invece l'albero seguente è una "dimostrazione" SBAGLIATA!!

$$\dfrac{\dfrac{}{P(x_0)\lor\neg P(x_0)}\,\text{EM} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(x_0)]}{\forall x.P(x)}\,\forall\text{intro} \qquad \neg\forall x.P(x)}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\exists x.\neg P(x)}\,\bot\text{elim} \qquad \dfrac{[\neg P(x_0)]}{\exists x.\neg P(x)}\,\exists\text{intro}}{\exists x.\neg P(x)}\,\lor\text{elim}$$

È sbagliata perchè l'applicazione della regola $\forall$intro non è corretta: infatti, la dimostrazione sopra di lei è l'albero:

$$P(x_0)$$

che è una dimostrazione dell'enunciato $P(x_0)\vdash P(x_0)$, dunque x_0 occorre libera in una ipotesi, e quindi non possiamo applicare $\forall$intro. Osserva che $P(x_0)$ sembra scaricata, ma in realtà è scaricata solo dopo, con la regola $\lor$elim.

Ex3:

Fissiamo un termine a del linguaggio.

$$\exists x.\, x\in a \vdash \neg\forall x.\, x\notin a$$

(Intuizionista)

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.\, x\in a \qquad \dfrac{[x_0\in a] \qquad \dfrac{[\forall x.\, x\notin a]}{x_0\notin a}\,\forall\text{elim}}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\bot}\,\exists\text{elim}}{\neg\forall x.\, x\notin a}\,\neg\text{intro}$$

Osserva che la regola $\exists$elim è applicata correttamente perchè l'albero destro sopra essa dimostra l'enunciato:

$$x_0\in a,\ \forall x.\, x\notin a \vdash \bot$$

e dunque x_0 non occorre libera in nessuna ipotesi tranne $x_0\in a$ e neanche in $\bot$.

$\neg\forall x.\, x\notin a \vdash \exists x.\, x\in a$

(Classica)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\exists x.\, x\in a] \qquad \dfrac{[x_0\in a]}{\exists x.\, x\in a}\,\exists\text{intro}}{\bot}\,\neg\text{elim}}{x_0\notin a}\,\neg\text{intro}}{\forall x.\, x\notin a}\,\forall\text{intro} \qquad \neg\forall x.\, x\notin a}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\exists x.\, x\in a}\,\text{RAA}$$

Stessa considerazione dell'esercizio 2: l'applicazione della regola $\forall$intro è corretta perchè la formula $x_0\in a$, che contiene x_0 come variabile libera, è scaricata prima dell'applicazione della regola (è scaricata dalla regola $\neg$intro), e dunque l'albero sopra la regola $\forall$intro dimostra l'enunciato $\neg\exists x.\, x\in a \vdash x_0\notin a$, ed x_0 è dunque generica.

Come prima, la seguente "dimostrazione" è SBAGLIATA!!

$$\dfrac{\dfrac{}{x_0\in a \vee x_0\notin a}\,\text{E.M.} \qquad \dfrac{[x_0\in a]}{\exists x.\, x\in a} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[x_0\notin a]}{\forall x.\, x\notin a}\,\forall\text{intro} \qquad \neg\forall x.\, x\notin a}{\bot}}{\exists x.\, x\in a}}{\exists x.\, x\in a}\,\vee\text{elim}$$

È sbagliata per lo stesso motivo di prima: l'albero sopra alla regola $\forall$intro è una dimostrazione dell'enunciato:

$$x_0\notin a \vdash x_0\notin a$$

nel quale x_0 occorre libera ~~nella~~ ipotesi.

Tale ipotesi viene scaricata solo dopo, con l'applicazione di $\vee$elim.

Siano $\text{identity} := \forall a.\ a = a$

ax_succ [redacted]

$:= \forall a \forall b.\ ((b = a \lor b \in a) \leftrightarrow b \in succ(a))$.

Dimostriamo:

$$\begin{array}{l}\text{identity} \\ \text{ax\_succ}\end{array} \vdash \forall n. \exists m. \exists k. (n \in m \land m = succ(k))$$

(Intuizionista)

$$\dfrac{\text{ax\_succ}}{\forall x. ((x = n_0 \lor x \in n_0) \leftrightarrow x \in succ(n_0))}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{\forall x. ((x = n_0 \lor x \in n_0) \leftrightarrow x \in succ(n_0))}{(n_0 = n_0 \lor n_0 \in n_0) \leftrightarrow n_0 \in succ(n_0)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{(n_0 = n_0 \lor n_0 \in n_0) \leftrightarrow n_0 \in succ(n_0)}{(n_0 = n_0 \lor n_0 \in n_0) \to n_0 \in succ(n_0)}\ \land\text{elim}$$

$$\dfrac{\text{identity}}{n_0 = n_0}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{n_0 = n_0}{n_0 = n_0 \lor n_0 \in n_0}\ \lor\text{intro}$$

$$\dfrac{(n_0 = n_0 \lor n_0 \in n_0) \to n_0 \in succ(n_0) \qquad n_0 = n_0 \lor n_0 \in n_0}{n_0 \in succ(n_0)}\ \to\text{elim}$$

$$\dfrac{\text{identity}}{succ(n_0) = succ(n_0)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{n_0 \in succ(n_0) \qquad succ(n_0) = succ(n_0)}{n_0 \in succ(n_0) \land succ(n_0) = succ(n_0)}\ \land\text{intro}$$

$$\dfrac{n_0 \in succ(n_0) \land succ(n_0) = succ(n_0)}{\exists k. (n_0 \in succ(n_0) \land succ(n_0) = succ(k))}\ \exists\text{intro}$$

$$\dfrac{\exists k. (n_0 \in succ(n_0) \land succ(n_0) = succ(k))}{\exists m \exists k. (n_0 \in m \land m = succ(k))}\ \exists\text{intro}$$

$$\dfrac{\exists m \exists k. (n_0 \in m \land m = succ(k))}{\forall n \exists m \exists k. (n \in m \land m = succ(k))}\ \forall\text{intro}$$

Osserva che la regola $\forall$intro è applicata correttamente

Ex 4:

Fissiamo un termine V del linguaggio.

Siano $\text{ax\_empty} := \forall a.\ a \notin \emptyset$

$$\text{extensionality} := \forall a \forall b. \big((\forall c. (c \in a \leftrightarrow c \in b)) \leftrightarrow a = b \big)$$

Dimostriamo:

$$\begin{matrix}\text{ax\_empty} \\ \text{extensionality}\end{matrix} \vdash \overbrace{\underbrace{(\forall c.\ c \notin V)}_{\text{“V è un insieme vuoto”}} \to V = \emptyset}^{\text{“l'insieme vuoto è unico”}}$$

(Intuizionista)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{extensionality}}{\forall x. ((\forall y. (y \in V \leftrightarrow y \in x)) \leftrightarrow V = x)}\,\scriptstyle\forall\text{elim}}{(\forall y. (y \in V \leftrightarrow y \in \emptyset)) \leftrightarrow V = \emptyset}\,\scriptstyle\forall\text{elim}}{(\forall y. (y \in V \leftrightarrow y \in \emptyset)) \to V = \emptyset}\,\scriptstyle\wedge\text{elim} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall c.\ c \notin V]}{x_0 \notin V}\,\scriptstyle\forall\text{elim} \quad [x_0 \in V]}{\bot}\,\scriptstyle\neg\text{elim}}{x_0 \in \emptyset}\,\scriptstyle\bot\text{elim}}{x_0 \in V \to x_0 \in \emptyset}\,\scriptstyle\to\text{intro} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ax\_empty}}{x_0 \notin \emptyset}\,\scriptstyle\forall\text{elim} \quad [x_0 \in \emptyset]}{\bot}\,\scriptstyle\neg\text{elim}}{x_0 \in V}\,\scriptstyle\bot\text{elim}}{x_0 \in \emptyset \to x_0 \in V}\,\scriptstyle\to\text{intro}}{x_0 \in V \leftrightarrow x_0 \in \emptyset}\,\scriptstyle\wedge\text{intro}}{\forall x. (x \in V \leftrightarrow x \in \emptyset)}\,\scriptstyle\forall\text{intro}}{V = \emptyset}\,\scriptstyle\to\text{elim}}{(\forall c.\ c \notin V) \to V = \emptyset}\,\scriptstyle\to\text{intro}$$

Osserva che la regola $\forall$intro è applicata bene perchè l'albero sopra essa è una dimostrazione dell'enunciato:

$$\forall c.\ c \notin V,\ \text{ax\_empty} \vdash x_0 \in V \leftrightarrow x_0 \in \emptyset$$

e dunque x_0 è generico, in quanto non occorre libera in nessuna ipotesi.

Come sempre, osserva che le due foglie $x_0 \in V$ e $x_0 \in \emptyset$ sono morte in quell'albero, in quanto scaricate <u>prima</u> dell'applicazione di $\forall$intro. La ~~foglia~~ foglia $\forall c.\ c \notin V$ invece è viva in quell'albero, in quanto viene scaricata <u>dopo</u> la regola $\forall$intro.

Ex5:

$$\vdash \exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))$$

(Classica)

Per dimostrarla ricordiamoci che all'esercizio 2 abbiamo dimostrato: $\neg\forall x.P(x) \vdash \exists x.\neg P(x)$ per un qualsiasi predicato unario P.

Dunque, applicando una regola $\to$intro, abbiamo:

$$\vdash \neg\forall x.B(x) \to \exists x.\neg B(x)$$

ovvero la formula:

$$ex2 := \neg\forall x.B(x) \to \exists x.\neg B(x)$$

è dimostrabile (classicamente).

Ora facciamo l'esercizio:

$$\dfrac{\dfrac{}{\forall y.B(y) \vee \neg\forall y.B(y)}\,\text{E.M.} \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall y.B(y)]}{B(x_0) \to \forall y.B(y)}\,\to\text{intro}}{\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))}\,\exists\text{intro} \qquad \dfrac{\dfrac{ex2 \quad [\neg\forall y.B(y)]}{\exists z.\neg B(z)}\,\to\text{elim} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B(z_0)] \quad [B(z_0)]}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\forall y.B(y)}\,\bot\text{elim}}{B(z_0) \to \forall y.B(y)}\,\to\text{intro}}{\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))}\,\exists\text{intro}}{\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))}\,\exists\text{elim}}{\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))}\,\vee\text{elim}$$

Osserva che l'applicazione della regola $\exists$elim è corretta, perché l'albero destro sopra di essa è una dimostrazione dell'enunciato:

$$\neg B(z_0) \vdash \exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))$$

(pensatela come una dimostrazione di:

$$\vdash \neg B(z_0) \to \exists x.(B(x) \to \forall y.B(y)),$$

può chiarificare le idee...).

Dunque z_0 non occorre libera nella conclusione $(\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y)))$ e non occorre libera in nessuna altra ipotesi (se non $\neg B(z_0)$).

Osserva che la foglia $B(z_0)$ è in realtà morta in tale albero, perché scaricata dalla regola $\to$intro prima di applicare la regola $\exists$elim.

Dunque la regola $\exists$elim è applicata correttamente.