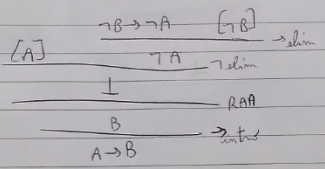


Ex 1:

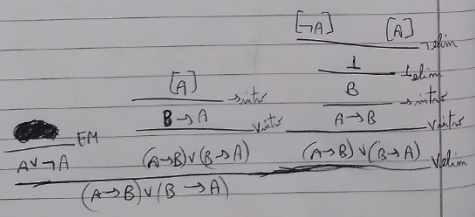
$\neg B \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow B$

(Classica)



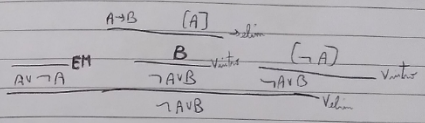
$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

(Classica)



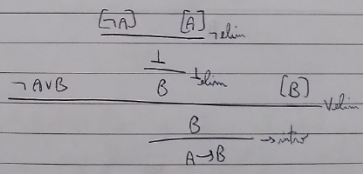
$A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

(Classica)



$\neg A \vee B \vdash A \rightarrow B$

(Intuitionista)



Ex 2:

$$\exists x. \neg P(x) \vdash \neg \forall x. P(x)$$

(Intuitionista)

Osserva che le regole  $\exists$ elim  
 è applicate bene perché  
 l'albero destro sopra erro  
 dimostra l'annunciato:  $\neg P(x_0), \forall x. P(x) \vdash \perp$   
 (pensabile come l'annunciato  $\forall x. P(x) \vdash \neg P(x_0) \rightarrow \perp$ ),  
 e dunque  $\exists$  non occorre libera in nessuna  
 ipotesi tranne  $\neg P(x_0)$  e neanche nella  
 conclusione  $\perp$ .

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg P(x_0)}}{P(x_0)} \exists\text{elim}}{\perp} \exists\text{elim}}{\perp} \exists\text{elim}}{\perp} \exists\text{elim}$$

$$\frac{\perp}{\neg \forall x. P(x)} \rightarrow\text{intro}$$

$$\neg \forall x. P(x) \vdash \exists x. \neg P(x)$$

(Classica)

$$\frac{\frac{\frac{\perp}{P(x_0)} \rightarrow\text{intro}}{\forall x. P(x)} \forall\text{intro}}{\perp} \rightarrow\text{elim}$$

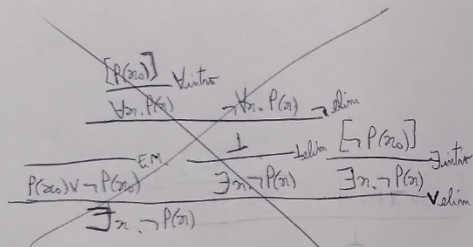
$$\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg P(x_0)}}{\exists x. \neg P(x)} \exists\text{intro}}{\perp} \rightarrow\text{elim}$$

$$\frac{\perp}{\exists x. \neg P(x)} \text{RAA}$$

Osserva che l'applicazione della regola  $\forall$ intro è corretta  
 perché l'albero sopra di lei è una dimostrazione dell'annunciato  
 $\neg \exists x. \neg P(x) \vdash P(x_0)$ , quindi  $\exists$  non occorre libera  
 nelle ipotesi.

(questa ipotesi diventa morta solo in seguito  
 nell'applicazione dell'ultima regola RAA, in basso.)

Osservo che invece l'albero seguente è una "dimostrazione" SBAGLIATA!!



È sbagliata perché l'applicazione della regola Vintro non è corretta: infatti, la dimostrazione sopra di lei è l'albero:

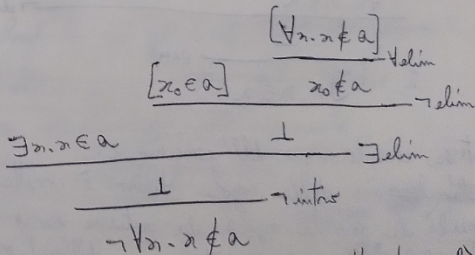
$P(x_0)$

che è una dimostrazione dell'enunciato  $P(x_0) \vdash P(x_0)$ , dunque  $x_0$  occorre libera in una ipotesi, e quindi non possiamo applicare Vintro. Osservo che  $P(x_0)$  sembra scaricata, ma in realtà è scaricata solo dopo, con la regola Valim.

Ex 3:

Fissiamo un termine  $a$  del linguaggio.

$\exists x. x \in a \vdash \neg \forall x. x \notin a$   
(Intuitionista)



Osservo che la regola Elim è applicata correttamente perché l'albero diatas sopra essa dimostra l'enunciato:  $x_0 \in a, \forall x. x \notin a \vdash \perp$  e dunque  $x_0$  non occorre libera in nessuno  $\perp$  né anche in  $\perp$ .



$\neg \forall x. x \notin a \vdash \exists x. x \in a$

(classica)

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg \forall x. x \notin a} \neg \text{intro}}{\forall x. x \notin a} \forall \text{intro}}{\exists x. x \in a} \exists \text{intro}}{\neg \exists x. x \in a} \neg \text{elim}}{\perp} \neg \text{intro}$$
$$\frac{\frac{\perp}{\forall x. x \notin a} \forall \text{intro}}{\exists x. x \in a} \exists \text{intro} \quad \neg \forall x. x \notin a \quad \neg \text{elim}}{\perp} \neg \text{intro}$$
$$\frac{\perp}{\exists x. x \in a} \text{RAA}$$

Stessa considerazione dell'esercizio 2:  
l'applicazione della regola  $\forall \text{intro}$  è corretta perché la formula  $x \in a$ , che contiene  $x$  come variabile libera, è scartata prima dell'applicazione della regola (è scartata dalla regola  $\neg \text{intro}$ ), e dunque l'albero sopra la regola  $\forall \text{intro}$  dimostra l'annullamento.  
 $\neg \exists x. x \in a \vdash x \notin a$ , ed  $x$  è dunque generica.

Come prima, la seguente "dimostrazione" è SBAGLIATA!!

~~$$\frac{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg \exists x. x \in a} \neg \text{intro}}{\exists x. x \in a} \exists \text{intro}}{\forall x. x \notin a} \forall \text{intro}}{\exists x. x \in a} \exists \text{intro}}{\neg \forall x. x \notin a} \neg \text{elim}}{\perp} \neg \text{intro}$$~~

È sbagliata per lo stesso motivo di prima:  
l'albero sopra alla regola  $\forall \text{intro}$  è una dimostrazione dell'annullamento:

$x \notin a \vdash x \notin a$

nel quale  $x$  occorre libera nella ~~ipotesi~~ ipotesi.  
Tale ipotesi viene scartata solo dopo, con l'applicazione di  $\forall \text{elim}$ .

Siano identity :=  $\forall a. a = a$

~~ax\_succ :=  $\forall x. (x \in \text{succ}(a) \leftrightarrow \exists y. a = \text{succ}(y))$~~

Axioma:  $\forall a \forall b. (b = a \vee b \in a) \leftrightarrow b \in \text{succ}(a)$ .

identity  
ax\_succ  $\vdash \forall m. \exists n. \exists k. (m \in m \wedge m = \text{succ}(k))$

(Intuitionista)

ax_succ	Valim	
<hr/>		
$\forall x. (x = m_0 \vee x \in m_0) \leftrightarrow x \in \text{succ}(m_0)$	Valim	
<hr/>		
$(m_0 = m_0 \vee m_0 \in m_0) \leftrightarrow m_0 \in \text{succ}(m_0)$	Valim	
<hr/>		
$(m_0 = m_0 \vee m_0 \in m_0) \rightarrow m_0 \in \text{succ}(m_0)$	Valim	
$m_0 = m_0$	Vintro	
$m_0 \in m_0 \vee m_0 \in m_0$	Valim	
$\rightarrow$ elim	identity	
$\text{succ}(m_0) = \text{succ}(m_0)$	Vintro	
<hr/>		
$m_0 \in \text{succ}(m_0)$	Valim	
<hr/>		
$m_0 \in \text{succ}(m_0) \wedge \text{succ}(m_0) = \text{succ}(m_0)$	Vintro	
<hr/>		
$\exists k. (m_0 \in \text{succ}(m_0) \wedge \text{succ}(m_0) = \text{succ}(k))$	Vintro	
<hr/>		
$\exists m \exists k. (m_0 \in m \wedge m = \text{succ}(k))$	Vintro	
<hr/>		
$\forall m \exists n \exists k. (m \in m \wedge m = \text{succ}(k))$	Vintro	

← Osserva che la regola Vintro è applicata correttamente

Ex 4:

fissiamo un termine  $v$  del linguaggio.

Siano  $\alpha_{x\_empty} := \forall a. a \neq \emptyset$

extensionality :=  $\forall a \forall b. (\forall c. (c \in a \leftrightarrow c \in b)) \leftrightarrow a = b$

Dimostriamo:  $\frac{\text{"l'insieme vuoto è unico"}}{\alpha_{x\_empty} \vdash (\forall c. c \notin V) \rightarrow v = \emptyset}$

$\alpha_{x\_empty}$  extensionality  $\vdash (\forall c. c \notin V) \rightarrow v = \emptyset$

(Introduzione)  $\frac{v \text{ è un insieme vuoto}}{v = \emptyset}$

	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{\alpha_{x\_empty}}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
extensionality	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
$\forall x. ((\forall y. (y \in v \leftrightarrow y \in x)) \rightarrow v = x)$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
$(\forall y. (y \in v \leftrightarrow y \in \emptyset)) \leftrightarrow v = \emptyset$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
$(\forall y. (y \in v \leftrightarrow y \in \emptyset)) \rightarrow v = \emptyset$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
$v = \emptyset$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$
$(\forall c. c \notin V) \rightarrow v = \emptyset$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$	$\frac{(\forall c. c \notin V)}{v \neq \emptyset} \text{vdlin}$

Osserva che la regola  $\forall$ intro è applicata bene perché l'albero sopra essa è una dimostrazione dell' enunciato:

$\forall c. c \notin V, \alpha_{x\_empty} \vdash v \neq \emptyset \leftrightarrow v = \emptyset$

e dunque  $v \neq \emptyset$  è generica, in quanto non occorre alcuna ipotesi.

← Come sempre, osserva che le due foglie  $v \neq \emptyset$  e  $v = \emptyset$  sono morte in quell'albero, in quanto scacciate prima dell'applicazione di  $\forall$ intro. La foglia  $\forall c. c \notin V$  invece è viva in quell'albero, in quanto viene scacciate dopo la regola  $\forall$ intro.



Ex 5:

$$\vdash \exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$$

(classica)

Per dimostrare *reductio ad absurdum* che all'esercizio 2 abbiamo dimostrato:  $\neg \forall x.P(x) \vdash \exists x.\neg P(x)$  per un qualsiasi predicato unario P.

Dunque, applicando una regola  $\rightarrow$  intro, abbiamo:

$$\vdash \forall x.B(x) \rightarrow \exists x.\neg B(x)$$

ovvero la formula:

$$\exists x. := \neg \forall x.B(x) \rightarrow \exists x.\neg B(x)$$

è dimostrabile (classicamente).

Che facciamo l'esercizio: ~~.....~~

	$\neg B(z_0)$	$[B(z_0)] \rightarrow$ de
	$\forall y.B(y)$	$\perp$ Elim
	$B(z_0) \rightarrow \forall y.B(y)$	$\forall y.B(y) \rightarrow$ intro
	$\exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$	$B(z_0) \rightarrow \forall y.B(y)$
	$\forall x.B(x) \rightarrow \forall y.B(y)$	$\exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$
F.M.	$\exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$	$\exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$
	$\exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$	Elim

Osservo che l'applicazione della regola Elim è corretta, perché l'albero sotto sopra di essa è una dimostrazione dell'enunciato:

$$\neg B(z_0) \vdash \exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$$

(pensate come una dimostrazione di:  
 $\vdash \neg B(z_0) \rightarrow \exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y))$ ,  
 può semplificare le idee...)

Dunque  $z_0$  non occorre libera nella conclusione e non occorre libera in  $(\exists x.(B(x) \rightarrow \forall y.B(y)))$  nessuna altra ipotesi (e non  $\neg B(z_0)$ ).

Osservo che la foglia  $B(z_0)$  è in realtà morta in tale albero, perché scarta dalla regola  $\rightarrow$  intro prima di applicare la regola Elim. Dunque la regola Elim è applicata correttamente.