

Ex 13

2) Sia P predicato binario. Dimostrare:
1) $\forall x \forall y. P(x, y) \vdash \forall y \forall x. P(x, y)$.

Ok perché

$$\rightarrow (\forall y. P(x_0, y)) [x_0/x] = \forall y. P(x_0, y)$$

$\forall x \forall y. P(x, y)$	Velim
$\forall y. P(x_0, y)$	Velim
$P(x_0, y_0)$	Vintro
$\forall x. P(x, y_0)$	Vintro
$\forall y \forall x. P(x, y)$	Vintro

Ok perché

$$\bullet (P(x_0, y)) [y_0/y] = \bullet P(x_0, y_0)$$

Ok perché l'albero sopra dimostra:

$$\forall x \forall y. P(x, y) \vdash P(x_0, y_0)$$

e dunque x_0 non occorre libera nella ipotesi

Ok perché l'albero sopra dimostra:

$$\forall x \forall y. P(x, y) \vdash \forall x. P(x, y_0)$$

e dunque y_0 non occorre libera nelle ipotesi

Quel sottoalbero dimostra dunque:

$$\exists y. P(x_0, y) \vdash \exists y \forall x. P(x, y)$$

2) Sia P predicato binario. Dimostrare:
 $\exists x \exists y. P(x, y) \vdash \exists y \exists x. P(x, y)$

$$(P(x_0, y)) [y_0/y]$$

$$(\exists y. P(x_0, y)) [x_0/x]$$

"

$$[P(x_0, y_0)]$$

$$\exists x. P(x, y_0)$$

$$\exists y \exists x. P(x, y)$$

$$\exists x \exists y. P(x, y)$$

$$\exists y \exists x. P(x, y)$$

$$\exists y \exists x. P(x, y)$$

Ok perché y_0 non occorre libera

né nella conclusione $(\exists y \forall x. P(x, y))$
né in nessuna pagina del sottoalbero destro sopra la regola \exists
né in nessuna pagina di quell'albero
quello albero dimostra $(\exists y \forall x. P(x, y)) \vdash \exists y \exists x. P(x, y)$

Ok perché x_0 non occorre libera né nella conclusione $\exists y \exists x. P(x, y)$, né in nessuna pagina del sottoalbero destro, eccetto in $(\exists y. P(x_0, y)) [x_0/x]$

osserva che la foglia $P(x_0, y_0)$ è morta in quest'albero, perché scaricata prima della regola in questione (è scaricata dalla regola \exists lim più in alto).

Ex 2:

$$1) \neg \exists x. P(x) \vdash \forall x. \neg P(x)$$

(Intensionista)

$$\frac{\frac{\frac{[P(x_0)]}{\exists x. P(x)} \exists \text{intro}}{\vdash} \neg P(x_0)}{\forall x. \neg P(x)} \forall \text{intro}}{\exists x. P(x)} \exists \text{elim}$$

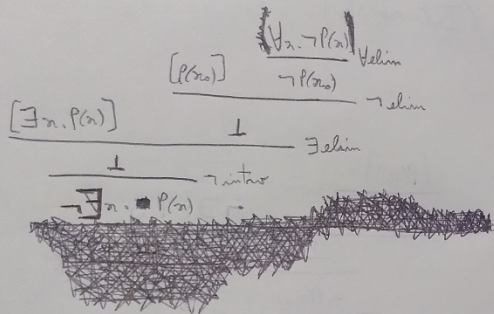
Ok perché l'albero
sopra dimostra:

$$\neg \exists x. P(x) \vdash \neg P(x_0)$$

e dunque x_0 è generica.

Osserva che la foglia $P(x_0)$ è morta in quell'albero, perché scaricata prima dell'applicazione della regola $\forall \text{intro}$, delle regole $\neg \text{intro}$.

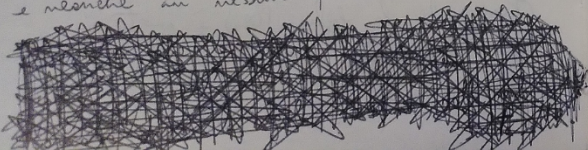
2) $\forall x. \neg P(x) \vdash \neg \exists x. P(x)$
 (Intuitionista)



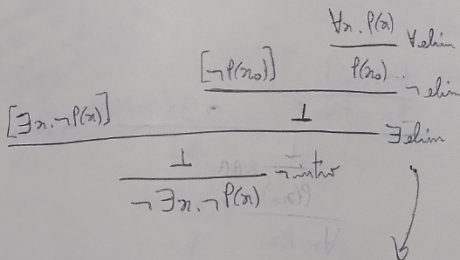
La regola \exists elim è ok perché l'altro destro
 spine di essa è una dimostrazione di:

$$P(x_0), \forall x. \neg P(x) \vdash \perp \quad (\text{perché } \forall x. \neg P(x) \vdash \neg P(x_0) \rightarrow \perp)$$

e non occorre alcuna libra nella conclusione \perp
 e neanche in nessuna ipotesi eccetto $P(x_0)$.



3) $\forall x. P(x) \vdash \neg \exists x. \neg P(x)$
 (Intuitionista)



ok, per gli
 stessi motivi di
 prima

[Faint handwritten notes at the bottom of the page, partially obscured by a scribble.]

2)

$$\neg \exists x. \neg P(x) \vdash \forall x. P(x)$$

(Classica)

$$\frac{\frac{\frac{[\neg P(x_0)]}{\exists x. \neg P(x)} \exists\text{-intro}}{\perp} \text{RAA}}{P(x_0)} \forall\text{-intro}}{\forall x. P(x)} \forall\text{-intro}$$

Ok perché l'albero sopra dimostra

$$\neg \exists x. \neg P(x) \vdash P(x_0)$$

dunque x_0 è generica.

Osservo che la foglia $\neg P(x_0)$ è sciolta da RAA prima dell'applicazione di $\forall\text{-intro}$, dunque è morta nell'albero sopra $\forall\text{-intro}$.

EX3: Sia A una formula della quale x non occorre libera.

$$1) \exists x. (P(x) \rightarrow A) \vdash \forall x. P(x) \rightarrow A$$

(Intuitionista)

Se abbiamo una formula A che non occorre libera in A possiamo sempre trovare (intuitionista anche se è intuitionista x)

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x. P(x)]}{P(x_0)} \forall\text{-elim}}{P(x_0) \rightarrow A} \rightarrow\text{-elim}}{A} \exists\text{-elim}}{\forall x. P(x) \rightarrow A} \rightarrow\text{-intro}$$

Ok perché l'albero destro sopra viene dimostrato:

$$\forall x. P(x), P(x_0) \rightarrow A \vdash A \quad (\text{modus ponens})$$

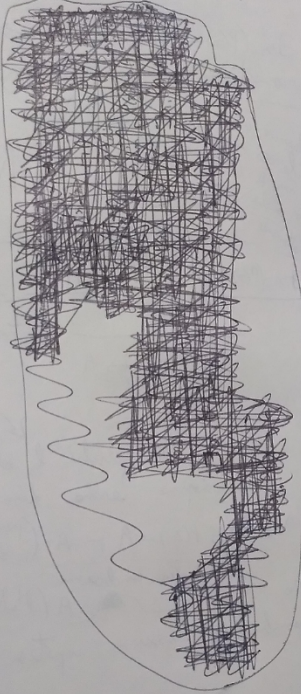
e x_0 non occorre nella conclusione A (l'abbiamo scelta a parte) e neanche in nessuna ipotesi eccetto $P(x_0) \rightarrow A$

2)

(In A la non si non occorre libere)

$$\forall x.P(x) \rightarrow A \vdash \exists x.(P(x) \rightarrow A)$$

(Classica)



de regole \exists elim \exists ore
perché l'abbiamo detto sopra
e non occorre libere nella conclusione $\exists x.(P(x) \rightarrow A)$

ed ora non occorre libere nelle ipotesi scelti $\neg P(x)$.

$$\frac{\frac{\frac{[A] \quad [P(x)]}{\perp} \quad \exists\text{-elim}}{A} \quad \exists\text{-intro}}{P(x) \rightarrow A} \rightarrow\text{-intro}}{\exists x.(P(x) \rightarrow A)} \exists\text{-elim}$$

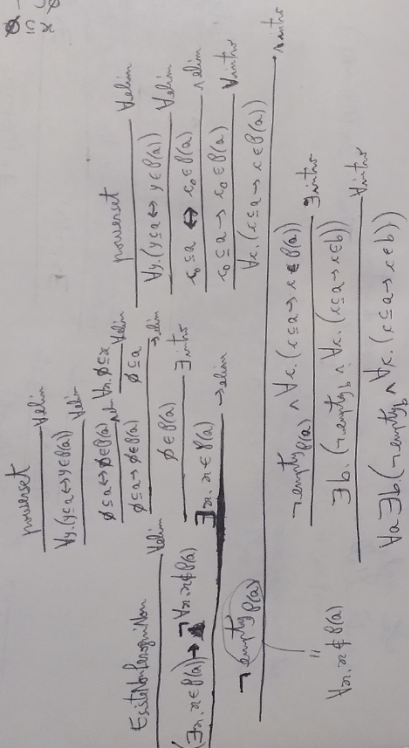
$$\frac{\frac{\frac{\frac{[A] \quad \neg P(x)}{\perp} \quad \exists\text{-elim}}{\neg P(x)} \rightarrow\text{-intro}}{\exists x.\neg P(x)} \exists\text{-intro}}{\exists x.(P(x) \rightarrow A)} \exists\text{-elim}}{\exists x.(P(x) \rightarrow A)} \exists\text{-elim}$$

$$\frac{A \vee \neg A \quad \text{E.H.}}{A \vee \neg A}$$

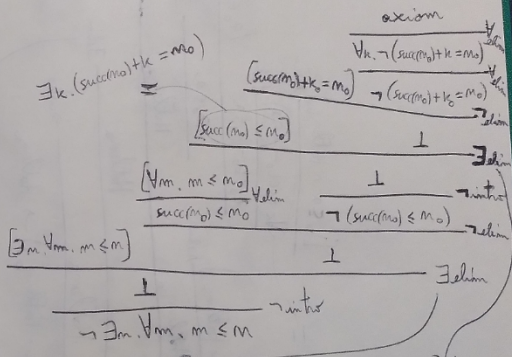
$$\frac{\exists x.(P(x) \rightarrow A)}{\exists x.(P(x) \rightarrow A)}$$

Ex 2:

1) powerset empty \emptyset
 $\forall x. \emptyset \subseteq x$
 $\vdash \forall a \exists b. (\neg \text{empty}_b \wedge \forall k. (c \subseteq a \rightarrow c \subseteq b))$



2) axiom $\vdash \neg \exists m. \forall n. m \leq n$

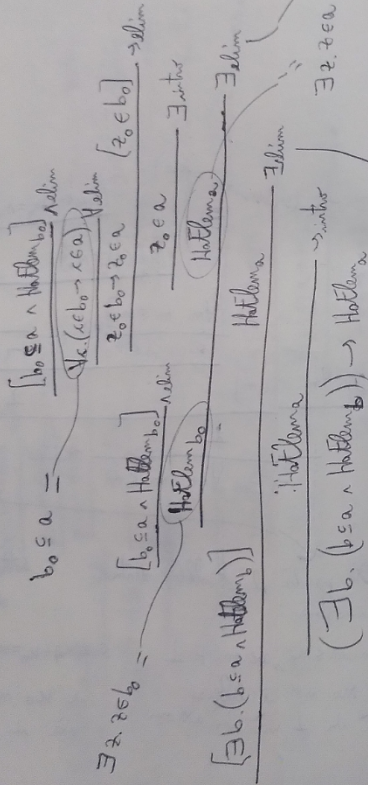


Per perché il sottobalzo destro dimostra:
 $\forall m. m \leq m_0$, axiom $\vdash \perp$
 ed m_0 non è libera
 né in \perp né in axiom

Per perché il sottobalzo destro dimostra:
 $\text{succ}(m_0) + k_0 = m_0$, axiom $\vdash \perp$
 e k_0 non è libera
 né in \perp né in axiom

Ex 5: Fissiamo a un termine del linguaggio.

$$1) \vdash (\exists b. (b \leq a \wedge \text{HoElem}_b)) \rightarrow \text{HoElem}_a$$



Ok perchè il
sottobbero stesso dimostra:

$b_0 \leq a \wedge \text{HoElem}_{b_0} \vdash \text{HoElem}_a$
(pensar $\vdash (b_0 \leq a \wedge \text{HoElem}_{b_0}) \rightarrow \text{HoElem}_a$)
e b_0 non è libera né
in HoElem_a né in nessuna
ipotesi, eccetto $b_0 \leq a \wedge \text{HoElem}_{b_0}$.

Osservo che la foglia $z_0 \leq a$ da tale
sottobbero è morta, perchè scivola
prima dell'applicazione della
regola $\exists \text{elim}$ in questione,
dalla regola $\exists \text{elim}$ subito sopra.

Ok perchè il sottobbero
destro dimostra:

$z_0 \leq b_0, b_0 \leq a \wedge \text{HoElem}_{b_0} \vdash \text{HoElem}_a$
(pensar: $b_0 \leq a \wedge \text{HoElem}_{b_0} \vdash z_0 \leq b_0 \rightarrow \text{HoElem}_a$)
e z_0 non è libera
né in HoElem_a né nelle ipotesi,
eccetto $z_0 \leq b_0$.

uguaglianza

$$\forall y (\exists z_0 \rightarrow \exists y \rightarrow \exists c_0 \in y)$$

$$\forall y (\exists z_0 \rightarrow \exists c_0 \in y \rightarrow \exists c_0 \in y)$$

$$c_0 \in z_0 \rightarrow z_0 \in c_0$$

$$z_0 \in c_0 \rightarrow c_0 \in z_0$$

$$c_0 \in c_0$$

$$\{c_0\} \rightarrow c_0$$

$$\{z_0\} \in c_0$$

ax singl

$$\forall y (\exists c_0 \in y \leftrightarrow \exists z_0) \forall \text{Elem}$$

$$\{c_0\} \in c_0 \wedge z_0 = z_0$$

$$c_0 \in \{c_0\} \rightarrow c_0 = z_0$$

$$z_0 = z_0$$

$$\{z_0\} \in c_0$$

$$\{z_0\} \in c_0 \wedge \{c_0\} \in z_0$$

$$\exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$$

2)

Possiamo a un termine del linguaggio.

ax singl
identitativa
uguaglianza

$$\forall y (\exists z_0 \leftrightarrow \exists y \in \{z_0\})$$

$$z_0 = z_0 \leftrightarrow z_0 \in \{z_0\}$$

$$z_0 = z_0 \rightarrow z_0 \in \{z_0\}$$

$$z_0 \in \{z_0\}$$

$$\exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$$

$$\exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$$

ax singl

$$\forall y (\exists z_0 \leftrightarrow \exists y \in \{z_0\})$$

$$z_0 = z_0 \leftrightarrow z_0 \in \{z_0\}$$

$$z_0 = z_0 \rightarrow z_0 \in \{z_0\}$$

$$z_0 \in \{z_0\}$$

$$\exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$$

$$\exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$$

Ok perchè il sottoinsieme destro dimostra:

$z_0 \in c_0$, uguaglianza, ax singl, identità $\vdash \exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$
(per sotto: uguaglianza, ax singl, identità $\vdash z_0 \in c_0 \rightarrow \exists b. (b \in c_0 \wedge \{c_0\} \in b)$)
e z_0 non \in il sottoinsieme nella conclusione

né nella ipotesi esatte in $z_0 \in c_0$.

Osserva che la formula $\exists c \in \{c_0\}$ dell'altro in questione, è morta in tale altro perchè scritta prima della applicazione della regola \exists Elim in questione, della regola \rightarrow intro più sotto.