Ex 1:

1) Sia P predicato binario. Dimostriamo:

$\forall x \forall y. P(x,y) \vdash \forall y \forall x. P(x,y)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \forall y. P(x,y)}{\forall y. P(x_0,y)}\ \forall\text{elim}}{P(x_0,y_0)}\ \forall\text{elim}}{\forall x. P(x,y_0)}\ \forall\text{intro}}{\forall y \forall x. P(x,y)}\ \forall\text{intro}$$

Ok perché $(\forall y. P(x,y))[x_0/x] = \forall y. P(x_0,y)$

Ok perché $(P(x_0,y))[y_0/y] = P(x_0,y_0)$

Ok perché l'albero sopra dimostra:
$\forall x \forall y. P(x,y) \vdash P(x_0,y_0)$
e dunque x_0 non occorre libera nelle ipotesi

Ok perché l'albero sopra dimostra:
$\forall x \forall y. P(x,y) \vdash \forall x. P(x,y_0)$
e dunque y_0 non occorre libera nelle ipotesi

2) Sia P predicato binario. Dimostriamo:

$\exists x. \exists y. P(x,y) \vdash \exists y \exists x. P(x,y)$.

$(P(x_0,y))[y_0/y]$

$(\exists y. P(x,y))[x_0/x]$

$$\dfrac{\exists x \exists y. P(x,y) \qquad \dfrac{[\exists y. P(x_0,y)] \qquad \dfrac{\dfrac{[P(x_0,y_0)]}{\exists x. P(x,y_0)}\ \exists\text{intro}}{\exists y \exists x. P(x,y)}\ \exists\text{intro}}{\exists y \exists x. P(x,y)}\ \exists\text{elim}}{\exists y \exists x. P(x,y)}\ \exists\text{elim}$$

Ok perché x_0 non occorre libera né nella conclusione $\exists y \exists x. P(x,y)$, né in nessuna foglia del sottoalbero destro, eccetto in $(\exists y. P(x,y))[x_0/x]$ (ovvero, $\exists y. P(x_0,y)$).

Osserva che la foglia $P(x_0,y_0)$ è morta in quest'albero, perché scaricata prima della regola in questione (è scaricata dalla regola $\exists$elim più in alto).

Quel sottoalbero dimostra dunque:
$\exists y. P(x_0,y) \vdash \exists y \exists x. P(x,y)$

Ok perché y_0 non occorre libera né nella conclusione $(\exists y \exists x. P(x,y))$ del sottoalbero destro sopra la regola, né in nessuna foglia di quell'albero tranne in $(P(x_0,y))[y_0/y]$ (ovvero quell'albero dimostra: $P(x_0,y_0) \vdash \exists y \exists x. P(x,y)$)

Ex2:

1) $\neg \exists x. P(x) \vdash \forall x. \neg P(x)$

(Intuizionista)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(x_0)]}{\exists x. P(x)}\,\exists\text{intro} \qquad \neg \exists x. P(x)}{\bot}\,\neg\text{elim}}{\neg P(x_0)}\,\neg\text{intro}}{\forall x. \neg P(x)}\,\forall\text{intro}$$

Ok perchè l'albero sopra dimostra:

$$\neg \exists x. P(x) \vdash \neg P(x_0)$$

e dunque x_0 è generico.

Osserva che la foglia $P(x_0)$ è morta in quell'albero, perchè scaricata prima dell'applicazione della regola $\forall$intro, dalla regola $\neg$intro.

2) $\forall x.\neg P(x) \vdash \neg\exists x.P(x)$

(Intuizionista)

$$
\dfrac{\dfrac{[\exists x.P(x)] \qquad \dfrac{[P(x_0)] \qquad \dfrac{[\forall x.\neg P(x)]}{\neg P(x_0)}\,\forall elim}{\bot}\,\neg elim}{\bot}\,\exists elim}{\neg\exists x.P(x)}\,\neg intro
$$

La regola $\exists$elim è ok perché l'albero destro sopra di essa è una dimostrazione di:

$P(x_0), \forall x.\neg P(x) \vdash \bot$ (pensatelo $\forall x.\neg P(x) \vdash P(x_0) \to \bot$)

e x_0 non occorre libera ~~nella~~ conclusione $\bot$ e neanche in nessuna ipotesi eccetto $P(x_0)$.

3) $\forall x.P(x) \vdash \neg\exists x.\neg P(x)$

(Intuizionista)

$$
\dfrac{\dfrac{[\exists x.\neg P(x)] \qquad \dfrac{[\neg P(x_0)] \qquad \dfrac{\forall x.P(x)}{P(x_0)}\,\forall elim}{\bot}\,\neg elim}{\bot}\,\exists elim}{\neg\exists x.\neg P(x)}\,\neg intro
$$

Ok, per gli stessi motivi di prima

2)

$\neg \exists x. \neg P(x) \vdash \forall x. P(x)$

(Classica)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg P(x_0)]}{\exists x.\neg P(x)}\exists\text{intro} \qquad \neg\exists x.\neg P(x)}{\bot}\neg\text{elim}}{P(x_0)}\text{RAA}}{\forall x.P(x)}\forall\text{intro}$$

Ok perchè l'albero sopra dimostra

$\neg \exists x. \neg P(x) \vdash P(x_0)$

dunque x_0 è generica.

Osserva che la foglia $\neg P(x_0)$ è scaricata da RAA prima dell'applicazione di $\forall$intro, dunque è morta nell'albero sopra $\forall$intro.

Ex3: Sia A una formula della quale x non occorre libera.

1) $\exists x. (P(x) \to A) \vdash \forall z. P(z) \to A$

(Intuizionista)

Scegliamo una variabile x_0 che non occorre libera in A (possiamo sempre trovarne)

(potremmo anche scegliere direttamente x)

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.(P(x)\to A) \qquad \dfrac{[P(x_0)\to A] \qquad \dfrac{[\forall z.P(z)]}{P(x_0)}\forall\text{elim}}{A}\to\text{elim}}{A}\exists\text{elim}}{\forall z.P(z) \to A}\to\text{intro}$$

Ok perchè l'albero destro sopra essa dimostra:

$\forall z. P(z), P(x_0) \to A \vdash A$ (pensatelo: $\forall z. P(z) \vdash (P(x_0) \to A) \to A$)

e x_0 non occorre nella conclusione A (l'abbiamo scelta a posta) e neanche in nessuna ipotesi eccetto $P(x_0) \to A$

2) (In A la var x non occorre libera)

$$\forall z.P(z) \to A \vdash \exists x.(P(x) \to A)$$

(Classica)

La regola $\exists$elim è ok
perchè l'albero destro sopra essa dimostra:
$\neg P(x_0) \vdash \exists x.(P(x) \to A)$ (pensatelo: $\vdash \neg P(x_0) \to \exists x.(P(x) \to A)$)
ed x_0 non occorre libera nella conclusione $\exists x.(P(x) \to A)$
e neanche nelle ipotesi eccetto $\neg P(x_0)$.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee \neg A}\,E.M. \qquad \dfrac{\dfrac{[A]}{P(x_0) \to A}\,\to\text{intro}}{\exists x.(P(x) \to A)}\,\exists\text{intro} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\forall x.P(x)) \to A}{\neg A \to \neg \forall x.P(x)}\,\text{Contronominale} \quad [\neg A]}{\neg \forall x.P(x)}\,\to\text{elim}}{\exists x.\neg P(x)}\,\text{Non ogni / Esistenza} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg P(x_0)] \quad [P(x_0)]}{\bot}\,\neg\text{elim}}{A}\,\bot\text{elim}}{P(x_0) \to A}\,\to\text{intro}}{\exists x.(P(x) \to A)}\,\exists\text{intro}}{\exists x.(P(x) \to A)}\,\exists\text{elim}}{\exists x.(P(x) \to A)}\,\vee\text{elim}$$

Ex 4:

1) powerset, $\text{empty}_\emptyset$, $\forall x.\ \emptyset \subseteq x$ $\vdash \forall a \exists b.(\neg \text{empty}_b \wedge \forall c.(c \subseteq a \to c \in b))$

$$\dfrac{\text{powerset}}{\forall y.(y \subseteq a \leftrightarrow y \in P(a))}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{\forall y.(y \subseteq a \leftrightarrow y \in P(a))}{\emptyset \subseteq a \leftrightarrow \emptyset \in P(a)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{\emptyset \subseteq a \leftrightarrow \emptyset \in P(a)}{\emptyset \subseteq a \to \emptyset \in P(a)}\ \wedge\text{elim} \qquad \dfrac{\forall x.\ \emptyset \subseteq x}{\emptyset \subseteq a}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{\emptyset \subseteq a \to \emptyset \in P(a) \qquad \emptyset \subseteq a}{\emptyset \in P(a)}\ \to\text{elim}$$

$$\dfrac{\emptyset \in P(a)}{\exists x.\ x \in P(a)}\ \exists\text{intro}$$

$$\dfrac{\text{EsisteNonPerogniNon}}{(\exists x.\ x \in P(a)) \to \neg \forall x.\ x \notin P(a)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{(\exists x.\ x \in P(a)) \to \neg \forall x.\ x \notin P(a) \qquad \exists x.\ x \in P(a)}{\neg\, \text{empty}_{P(a)}}\ \to\text{elim}$$

$\text{empty}_{P(a)} = \forall x.\ x \notin P(a)$

$$\dfrac{\text{powerset}}{\forall y.(y \subseteq a \leftrightarrow y \in P(a))}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{\forall y.(y \subseteq a \leftrightarrow y \in P(a))}{c_0 \subseteq a \leftrightarrow c_0 \in P(a)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{c_0 \subseteq a \leftrightarrow c_0 \in P(a)}{c_0 \subseteq a \to c_0 \in P(a)}\ \wedge\text{elim}$$

$$\dfrac{c_0 \subseteq a \to c_0 \in P(a)}{\forall c.(c \subseteq a \to c \in P(a))}\ \forall\text{intro}$$

$$\dfrac{\neg\, \text{empty}_{P(a)} \qquad \forall c.(c \subseteq a \to c \in P(a))}{\neg\, \text{empty}_{P(a)} \wedge \forall c.(c \subseteq a \to c \in P(a))}\ \wedge\text{intro}$$

$$\dfrac{\neg\, \text{empty}_{P(a)} \wedge \forall c.(c \subseteq a \to c \in P(a))}{\exists b.(\neg \text{empty}_b \wedge \forall c.(c \subseteq a \to c \in b))}\ \exists\text{intro}$$

$$\dfrac{\exists b.(\neg \text{empty}_b \wedge \forall c.(c \subseteq a \to c \in b))}{\forall a \exists b.(\neg \text{empty}_b \wedge \forall c.(c \subseteq a \to c \in b))}\ \forall\text{intro}$$

2) axiom $\vdash \neg \exists n. \forall m.\ m \leq n$

$$\dfrac{\text{axiom}}{\forall k. \neg(succ(n_0) + k = n_0)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{\forall k. \neg(succ(n_0) + k = n_0)}{\neg(succ(n_0) + k_0 = n_0)}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{[succ(n_0) + k_0 = n_0] \qquad \neg(succ(n_0) + k_0 = n_0)}{\bot}\ \neg\text{elim}$$

$succ(n_0) \leq n_0 \equiv \exists k.(succ(n_0) + k = n_0)$

$$\dfrac{[succ(n_0) \leq n_0] \qquad \bot}{\bot}\ \exists\text{elim}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg(succ(n_0) \leq n_0)}\ \neg\text{intro}$$

$$\dfrac{[\forall m.\ m \leq n_0]}{succ(n_0) \leq n_0}\ \forall\text{elim}$$

$$\dfrac{succ(n_0) \leq n_0 \qquad \neg(succ(n_0) \leq n_0)}{\bot}\ \neg\text{elim}$$

$$\dfrac{[\exists n. \forall m.\ m \leq n] \qquad \bot}{\bot}\ \exists\text{elim}$$

$$\dfrac{\bot}{\neg \exists n. \forall m.\ m \leq n}\ \neg\text{intro}$$

Ok perchè il sottoalbero destro dimostra:

$\forall m.\ m \leq n_0$, axiom $\vdash \bot$

ed n_0 non è libera né in $\bot$ né in axiom

Ok perchè il sottoalbero destro dimostra:

$succ(n_0) + k_0 = n_0$, axiom $\vdash \bot$

e k_0 non è libera nè in $\bot$ nè in axiom

Ex 5: Fissiamo a un termine del linguaggio.

1) $\vdash (\exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)) \rightarrow HatElem_a$

$b_0 \subseteq a = \forall x.(x \in b_0 \rightarrow x \in a)$

$\exists z. z \in b_0 = HatElem_{b_0}$

$HatElem_a = \exists z. z \in a$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)] \qquad \dfrac{\dfrac{[b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0}]}{HatElem_{b_0}}\wedge elim \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0}]}{\forall x.(x \in b_0 \rightarrow x \in a)}\wedge elim}{z_0 \in b_0 \rightarrow z_0 \in a}\forall elim \qquad [z_0 \in b_0]}{z_0 \in a}\rightarrow elim}{HatElem_a}\exists intro}{HatElem_a}\exists elim}{HatElem_a}\exists elim}{(\exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)) \rightarrow HatElem_a}\rightarrow intro$$

Ok perchè il sottoalbero destro dimostra:

$b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0} \vdash HatElem_a$.

(penso: $\vdash (b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0}) \rightarrow HatElem_a$)

e b_0 non è libera nè in $HatElem_a$ nè in nessuna ipotesi, eccetto $b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0}$.

Ok perchè il sottoalbero destro dimostra:

$z_0 \in b_0,\ b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0} \vdash HatElem_a$

(penso: $b_0 \subseteq a \wedge HatElem_{b_0} \vdash z_0 \in b_0 \rightarrow HatElem_a$)

e z_0 non ~~[illegible]~~ è libera nè in $HatElem_a$ nè nelle ipotesi, eccetto $z_0 \in b$.

Osservo che la foglia $z_0 \in b_0$ di tale sottoalbero è morta, perchè scaricata **prima** dell'applicazione ~~della~~ regola $\exists elim$ in questione, dalla regola $\exists elim$ subito sopra.

2) Fissiamo a un termine del linguaggio.

$$\text{ax\_singl}, \text{identità}, \text{uguaglianza} \vdash HatElem_a \to \exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b).$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$HatElem_a$}
\AxiomC{uguaglianza}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y.(c_0 = x \to x \in y \to c_0 \in y)$}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$\forall y.(c_0 = z_0 \to z_0 \in y \to c_0 \in y)$}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$c_0 = z_0 \to z_0 \in a \to c_0 \in a$}
\AxiomC{ax\_singl}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$\forall y.(y \in \{z_0\} \leftrightarrow y = z_0)$}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$c_0 \in \{z_0\} \leftrightarrow c_0 = z_0$}
\RightLabel{$\wedge$elim}
\UnaryInfC{$c_0 \in \{z_0\} \to c_0 = z_0$}
\AxiomC{$[c_0 \in \{z_0\}]$}
\RightLabel{$\to$elim}
\BinaryInfC{$c_0 = z_0$}
\RightLabel{$\to$elim}
\BinaryInfC{$z_0 \in a \to c_0 \in a$}
\AxiomC{$[z_0 \in a]$}
\RightLabel{$\to$elim}
\BinaryInfC{$c_0 \in a$}
\RightLabel{$\to$intro}
\UnaryInfC{$c_0 \in \{z_0\} \to c_0 \in a$}
\RightLabel{$\forall$intro}
\UnaryInfC{$\{z_0\} \subseteq a$}
\AxiomC{identità}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$z_0 = z_0$}
\AxiomC{ax\_singl}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$\forall y.(y = z_0 \leftrightarrow y \in \{z_0\})$}
\RightLabel{$\forall$elim}
\UnaryInfC{$z_0 = z_0 \leftrightarrow z_0 \in \{z_0\}$}
\RightLabel{$\wedge$elim}
\UnaryInfC{$z_0 = z_0 \to z_0 \in \{z_0\}$}
\RightLabel{$\to$elim}
\BinaryInfC{$z_0 \in \{z_0\}$}
\RightLabel{$\exists$intro}
\UnaryInfC{$HatElem_{\{z_0\}}$}
\RightLabel{$\wedge$intro}
\BinaryInfC{$\{z_0\} \subseteq a \wedge HatElem_{\{z_0\}}$}
\RightLabel{$\exists$intro}
\UnaryInfC{$\exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)$}
\RightLabel{$\exists$elim}
\BinaryInfC{$\exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)$}
\RightLabel{$\to$intro}
\UnaryInfC{$HatElem_a \to \exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)$}
\end{prooftree}
$$

$\forall c.(c \in \{z_0\} \to c \in a) =$ $\{z_0\} \subseteq a$

$\exists z.z \in a = HatElem_a$

$HatElem_{\{z_0\}} = \exists z.\, z \in \{z_0\}$

Ok perchè il sottoalbero destro dimostra:

$z_0 \in a$, uguaglianza, ax_singl, identità $\vdash \exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)$

(pensatelo: uguaglianza, ax_singl, identità $\vdash z_0 \in a \to \exists b.(b \subseteq a \wedge HatElem_b)$)

e z_0 non è libero né nella conclusione

né nelle ipotesi eccetto in $z_0 \in a$.

Osserva che la foglia $c_0 \in \{z_0\}$ dell'albero in questione, è morta in tale albero perchè scaricata prima della applicazione della regola $\exists$elim in questione, dalla regola $\to$intro più sotto.