Appunti Intelligenza Artificiale

Matteo Berti

A.A. 18/19

Contenuti

1 Introduzione all'IA **2**
1.1 Definizioni . . . 2
1.2 IA e logica . . . 3

2 Agenti intelligenti **3**
2.1 Agenti razionali . . . 4
2.2 Struttura degli agenti . . . 5

3 Problem solving e ricerca **6**
3.1 Strategie di ricerca disinformata . . . 7
3.2 Strategie di ricerca informata (euristica) . . . 9

4 Oltre la ricerca classica **10**
4.1 Algoritmi di ricerca locale e problemi di ottimizzazione . . . 10
4.2 Ricerca locale in spazi continui . . . 14
4.3 Ottimizzazione numerica . . . 15
4.4 Ricerca con azioni non-deterministiche . . . 15
4.5 Ricerca avversaria . . . 16
4.6 Giochi . . . 16
4.7 Algoritmo MINIMAX . . . 17
4.8 Alpha-Beta pruning . . . 17

5 Probelmi di soddisfacimento dei vincoli **18**
5.1 Definire CSP . . . 18
5.2 Consistenza locale e propagazione dei vicnoli . . . 19
5.3 MiniZinc . . . 19

6 Agenti logici **20**
6.1 Agenti basati sulla conoscenza . . . 20
6.2 Logica proposizionale . . . 20

7 Logica del primo ordine **23**
7.1 Numeri, insiemi e liste . . . 24
7.2 Prolog . . . 24

8 Aspetti economici, filosofici ed etici dell'IA **28**

1 Introduzione all'IA

La definizione di **intelligenza** comprende altri concetti come il processo di pensiero, il ragionamento, il comportamento e la razionalità. L'IA può essere vista sotto quattro aspetti:

- **Agire umanamente** - il *Test di Turing*.
  Per passare il test di Turing un calcolatore deve possedere le seguenti capacità:
  1. *Elaborazione del linguaggio naturale*: il calcolatore deve essere in grado di comunicare in un linguaggio umano.
  2. *Rappresentazione della conoscenza*: la capacità di memorizzazione ciò che conosce e ciò che sente.
  3. *Ragionamento automatizzato*: l'abilità di trarre conclusioni dalle informazioni memorizzate e le nuove ricevute.
  4. *Apprendimento macchina*: adattarsi a nuove circostanze ed esplorare pattern.
  5. *Computer vision*: percepire oggetti.
  6. *Robotica*: manipolare oggetti e muoversi.
- **Pensare umanamente** - l'approccio della *Modellazione Cognitiva*.
  Se si vuol dire che un dato programma pensa come un umano è necessario determinare come pensano gli umani. Ci sono tre modi per comprende come funziona la mente umana:
  1. *Introspezione*: cercare di catturare i nostri pensieri mentre passano.
  2. *Esperimenti psicologici*: osservare un umano in azione.
  3. *Imaging celebrale*: osservare il cervello in azione (EEG).

  Quando si hanno sufficienti informazioni su come funziona la mente si può esprimere in un programma.
- **Pensare razionalmente**: le *"Leggi del Pensiero"* o *approccio logistico*.
  Utilizzo della logica per creare un programma che risolva ogni problema. Diciamo che un sistema è *razionale* se fa la "cosa giusta" (la scelta ideale), date le informazioni in suo possesso. Vi sono tuttavia due problemi in questo approccio:
  1. Non è semplice convertire conoscenza informale (linguaggio) nella conoscenza formale utilizzata dalla logica.
  2. Vi è una forte differenza tra risolvere un problema in teoria e nella pratica.
- **Agire razionalmente**: l'approccio dell'*agente razionale*.
  Un *agente* è un qualcosa che agisce. Un *agente razionale* è un agente che agisce per raggiungere il miglior risultato, o quando c'è incertezza il **miglior risultato atteso**. Il modello dell'agente razionale è il più adatto per il nostro scopo.

1.1 Definizioni

Ufficialmente l'IA è definita come: "*l'abilità di un computer di eseguire attività comunemente associate agli esseri umani*".
L'informatica consiste nel risolvere problemi che sappiamo come risolvere, mentre l'IA nel risolvere problemi in cui non siamo sicuri delle nostre azioni o non siamo in grado di conoscere l'ambiente.
Un'altra definizione di intelligenza è la seguente: "*l'intelligenza è l'abilità di imparare dall'esperienza, applicare conoscenza per risolvere problemi, ed adattarsi e sopravvivere in ambienti (sociali e geografici) differenti*".
Spearman quando parla di *G-Factor* (General Intelligence Factor) intende abilità cognitive matematiche e linguistiche.
Thurstone definisce sei fattori che descrivono l'intelligenza: fluidità verbale, abilità numerica, inferenza, abilità spaziale, velocità di percezione e memoria.

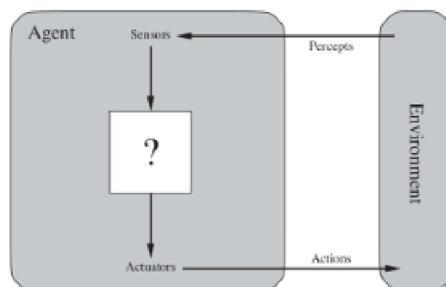
1.2 IA e logica

Esistono vari tipi di logica (proposizionale, del primo ordine, modale, ...) e varie tecniche di rappresentazione della conoscenza e del ragionamento (deduzione, induzione, abduzione, ...).

- **Deduzione**: è un processo di ragionamento che permette di *derivare* conseguenze da ciò che si è assunto vero. B può essere derivato da A se B è una conseguenza logica di A (A ⊨ B). Data la verità dell'assunzione A segue la verità della conclusione B.
- **Induzione**: il ragionamento induttivo permette di *inferire* B da A dove B non segue necessariamente da A. Le premesse sono viste come forti prove della verità della conclusione.
- **Abduzione**: è una forma di inferenza logica che inizia con un'osservazione o un insieme di osservazioni per trovare la più semplice e più probabile spiegazione per le osservazioni. Se abbiamo una teoria T e un insieme di osservazioni O, l'abduzione è il processo di derivazione di un insieme di spiegazioni per O secondo T, e prendendo una sola spiegazione E. Formalmente:
  - O segue da E e da T :: $T \cup E \vDash O$
  - E è consistente con T :: $T \cup E$ è *consistente*
- **Sistemi esperti**: sono sistemi basati sulla conoscenza, utilizzati per risolvere problemi in un dominio limitato e specifico. Hanno performance molto buone simili ad esperti del dominio umani. Sono in grado di esplorare grandi database di informazioni ed inferire conclusioni. Le soluzioni sono costruite dinamicamente. La ricerca e il processo di costruzione della soluzione sono basati su regole.

2 Agenti intelligenti

Un **agente** è tutto ciò che può percepire il proprio *ambiente* attraverso *sensori* ed agire su questo ambiente attraverso *attuatori*.



La **percezione** è l'input percettivo dell'agente in ogni dato istante. Mentre una **sequenza percettiva** è lo storico completo di ciò che l'agente ha percepito.
La *scelta di azione* di un agente in ogni dato momento può dipendere dall'intera sequenza percettiva osservata fino a quell'istante, ma non da qualcosa che non è stato percepito.

Il *comportamento* dell'agente è descritto dalla **Funzione Agente** che mappa ogni *sequenza percettiva* in un azione. È possibile caratterizzare questa funzione in due modi:

- *Esternamente*: in una forma tabellare, qualcosa che in realtà non sarebbe possibile in quanto le tabelle sarebbero molto grandi.
- *Internamente*: sottoforma di **Programma Agente** ovvero la concreta implementazione della *Funzione Agente*.

2.1 Agenti razionali

Un **agente razionale** è un agente che fa la cosa giusta, in altre parole la tabella della *Funzione Agente* è riempita correttamente. Rimane il problema di definire quale sia la "cosa giusta". È necessario considerare le *conseguenze* del comportamento dell'agente. Quando un agente è posto all'interno di un ambiente una sequenza di azioni (sequenza di stati nell'ambiente) basati sulla sequenza percettiva ricevuta. A questo punto se le azioni sono auspicabili si può dire che l'agente si comporti correttamente.
La nozione di **auspicabilità** viene catturata dalla **misura di performance**, in cui si valutano gli stati dell'ambiente, e non lo stato dell'agente.
La *misura di performance* valuta ogni sequenza data di stati dell'ambiente. La regola generale per progettare questa misura è basarsi su come si vuole che risulti l'*ambiente* alla fine, piuttosto che su come si pensa l'agente dovrebbe comportarsi.

Cosa è **razionale** in un dato momento dipende da:

- La *misura di performance* che definisce il criterio di successo.
- La *conoscenza precedente* dell'ambiente da parte dell'agente.
- Le *azioni* che l'agente può eseguire.
- La *sequenza percettiva* dell'agente fino al momento.

Definizione 1 (**Agente Razionale**): per ogni possibile sequenza percettiva un *agente razionale* dovrebbe selezionare un azione che ci si aspetta **massimizzi** le proprie misure di performance, date le prove fornite dalla sequenza percettiva e tutta la conoscenza che l'agente possiede.

L'**omniscenza** consiste nel conoscere il *reale* risultato di un azione e comportarsi di conseguenza.
Gli *agenti razionali* massimizzano la performance attesa mentre gli **agenti perfetti** massimizzano la performance reale. La **raccolta di informazioni** consiste nell'eseguire azioni in modo da modificare le percezioni future. L'**esplorazione** è un tipo di raccolta di informazioni eseguita da un agente che non conosce inizialmente l'ambiente. L'agente non solo deve essere in grado di raccogliere informazioni, ma anche di **imparare** il più possibile dalle percezioni.

È possibile raggruppare tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno in modo da specificare un agente razionale sotto al concetto di *task environment.* In sostanza il **task environment** consiste nei problemi per i quali gli agenti razionali rappresentano la soluzione.

Definizione 2 (**P.E.A.S. - Performance, Environment, Attuators, Sensors**): Task Environment.
Alcune proprietà del *task environment* sono:

- **Osservabilità**: quanto è osservabile l'ambiente (totalmente, parzialmente, non osservabile).
- **Singolo o multi-agente**: nel caso di più agenti si ha a che fare con concetti come: competizione, cooperazione, comunicazione e comportamento casuale.
- **Deterministico o stocastico**: un ambiente è *deterministico* quando il suo stato è completamente determinato dallo stato corrente e le azioni eseguite dall'agente, altrimenti è *stocastico.*
- **Incerto**: se l'ambiente non è completamente osservabile o non deterministico.
- **Nondeterministico**: ambiente in cui le azioni sono caratterizzate dal suo possibile risultato ma non vi sono probabilità annesse.
- **Episodico**: l'esperienza dell'agente è suddivisa in episodi atomici e gli episodi successivi non dipendono dalle azioni intraprese nei precedenti episodi.
- **Sequenziale**: in questo caso le decisioni correnti possono influenzare quelle future (es. scacchi).

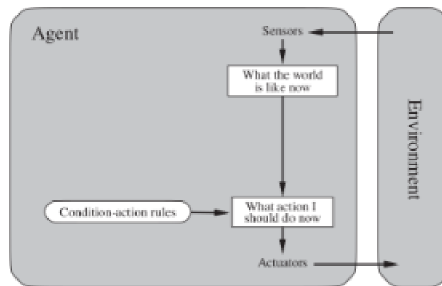
- **Statico o dinamico**, **discreto o continuo**, ...

Un esempio di un ambiente difficile è il taxi driver, in quanto è: parzialmente osservabile, multi-agente, stocastico, sequenziale, dinamico e continuo. Tipo di agente: Taxi Driver; misura di performance: sicuro, veloce, legale, confortevole, ecc.; ambiente: strade, pedoni, traffico, ecc.; attuatori: volante, acceleratore, freni, ecc.; sensori: camere, sonar, GPS, ecc.

2.2 Struttura degli agenti

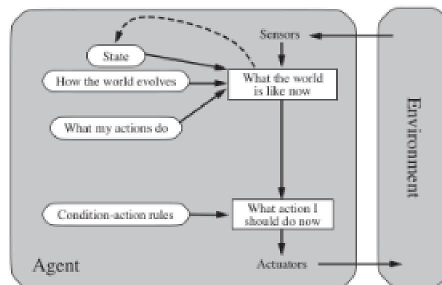
Il lavoro dell'IA è progettare un *programma agente* che implementi la *funzione agente*, ovvero il mapping tra percezione ed azioni. Questo programma verrà eseguito in una parte fisica (sensori, attuatori, ecc) chiamata **architettura**. Agente = Architettura + Programma.
Ci sono 4 tipi base di *programmi agente*:

1. **Simple Reflex Agents**: l'agente seleziona le azioni sulla base delle percezioni correnti, ignorando il resto dello storico percepito. Solitamente questo tipo di agenti sono implementati utilizzando un'insieme di *regole condizione-azione*, che sono viste come condizioni *if-then*. I *Simple Reflex Agents* sono molto semplici e con intelligenza limitata. Questo tipo di agenti richiede che l'ambiente sia *completamente osservabile*.

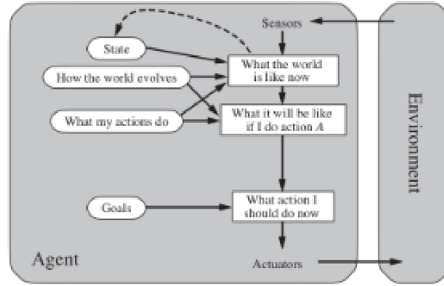


2. **Model-based Reflex Agent**: l'agente tiene traccia della parte di *mondo* che non riesce a vedere al momento (mantiene uno stato interno che dipende dallo storico percepito in modo da riflettere alcuni degli aspetti non osservabili dello stato corrente). L'agente deve avere un modello del *mondo*, il quale contiene due tipi di conoscenza:

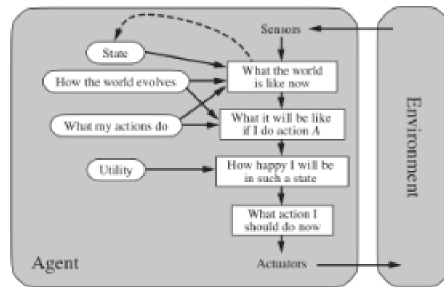
   - Come si evolve il mondo indipendentemente dall'agente.
   - Come le azioni dell'agente influenzano il mondo.



3. **Goal-based Agents**: questo tipo di agenti hanno un obiettivo da raggiungere e possono cambiare le proprie regole in base ad esso.



4. **Utility-based Agents**: si utilizza una "*utility function*" come misura della performance. Se l'agente ha vari obiettivi deve massimizzare l'utilità e scegliere il migliore tra essi.



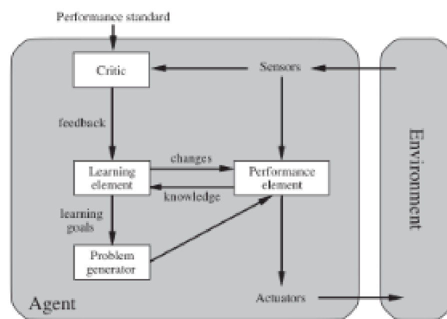
Ogni **learning agent** deve avere questi quattro componenti concettuali:

1. *Learning element*: che è responsabile di apportare miglioramenti.

2. *Performance element*: che è responsabile di selezionare azioni esterne.

3. *Critic*: che valuta le performance dell'azione.

4. *Problem generator*: che suggerisce le azioni che possono portare a nuove esperienze.



3 Problem solving e ricerca

Come citato in precedenza gli *agenti intelligenti* tendono a massimizzare la propria misura di performance, questo risulta più semplice se l'agente adotta un **obiettivo** (goal) e prova a soddisfarlo.
La prima cosa che l'agente dovrebbe fare è definire l'obiettivo, questo processo è chiamato **goal formulation**, che consiste nel primo passo del problem solving. L'obiettivo è costituito da un insieme di *stati del mondo* che lo soddisfano.
La seconda cosa da fare dato un obiettivo è la **formulazione del problema**, ovvero il processo di decisione di quali azioni e stati considerare, dato un goal.
Terzo, assumendo che l'ambiente sia deterministico la soluzione ad ogni problema è una sequenza fissa di

azioni. Il processo di ricerca di una sequenza di azioni che raggiunge l'obiettivo è chiamata **search**.

Un **algoritmo di ricerca** prende ininput un problema e ritorna una soluzione sotto forma di sequenza di azioni.
Formulare un **obiettivo**, formulare un **problema** da risolvere, risolvere il problema utilizzando la **ricerca**, **eseguire** la soluzione, ritornare al **passo 1**.

Un problema può essere definito formalmente tramite cinque componenti:

- **Stato iniziale**: dove l'agente inizia, $In(s)$.
- **Azioni**: una descrizione di tutte le possibili azioni disponibili per l'agente. Dato uno stato s, $ACTIONS(s)$ ritorna l'insieme di azioni che possono essere eseguite.
- **Modello di transizione**: è una descrizione di cosa fa ogni azione, $RESULT(s, a)$. Questi tre componenti (stato iniziale, azioni e modello di transizione) definiscono lo **spazio degli stati** del problema ed ha la forma di un grafo. Un percorso nel grafo indica una sequenza di stati connessi da una sequenza di azioni.
- **Goal test**: determina se un certo stato è uno **stato goal** o meno.
- **Costo del percorso**: è una funzione che assegna un costo numerico ad ogni percorso, $C(s, a, s')$ è chiamata "*step cost*" ed è il costo dell'azione a per portare l'agente dallo stato s allo stato s'.

Una **soluzione** è una *sequenza di azioni* che porta dallo *stato iniziale* allo *stato goal*. Una **soluzione ottima** è la soluzione con il *costo del percorso* più basso tra tutte le possibili soluzioni. L'**astrazione** è il processo di rimozione dei dettagli da una rappresentazione.

Una soluzione abbiamo detto che è una sequenza di azioni che parte dallo stato iniziale e forma un **search-tree**. La ricerca parte dallo stato **radice** ed a ogni stato, chiamato **nodo**, decide quale azione eseguire. Questa operazione viene chiamata **espansione**. Il modo in cui un algoritmo sceglie quale nodo espandere è deciso da *strategie di ricerca*. Viene chiamata **frontiera** l'insieme di tutti i nodi espandibili in ogni momento.
Ci sono quattro elementi utilizzati per valutare le performance di un algoritmo:

1. *Completezza*: se l'algoritmo garantisce di trovare una soluzione, quando la trova?
2. *Ottimalità*: la strategia trova la soluzione ottima?
3. *Complessità temporale*: quanto tempo ci mette per trovare una soluzione?
4. *Complessità spaziale*: quanta memoria è necessaria per eseguire la ricerca?

Per valutare l'efficacia di un algoritmo di ricerca solitamente si considera solo il *costo di ricerca* che tipicamente dipende dalla complessità temporale. È possibile raggruppare le strategie di ricerca in strategie **informate** e **disinformate**.

3.1 Strategie di ricerca disinformata

Questo tipo di stategie non hanno informazioni aggiuntive sugli stati oltre a quelle fornite dalla definizione del problema. L'unica cosa che queste strategie possono fare è *generare stati* (ovvero espandere nodi) e distinguere uno stato *goal* da uno *non-goal*.

Breadth-First Search
Questo algoritmo espande tutti i nodi in un dato livello prima di espandere ogni nodo sul livello successivo. Viene utilizzata una **coda FIFO** per implementare l'algoritmo.

- *Completezza*: si, trova sempre il nodo goal data una profondità finità (d) e un fattore di branching finito (b).

- *Ottimalità*: non sempre, dipende dai costi dei percorsi, se il costo del percorso è uguale per tutti allora è ottimo.
- *Complessità temporale*: $b + b^2 + b^3 + ... + b^d = O(b^d)$, in cui b è il fattore di branching e d la profondità dell'albero. Questo valore tuttavia è esponenziale, ciò non è consigliabile.
- *Complessità spaziale*: anch'essa esponenziale, $O(b^d)$ che la rende eccessiva, si pensi a valori bassi come $d = 16$ e $b = 10$ necessitano di uno spazio di $10^{16} = 10$ exabyte e 365 anni di tempo.

In linea generale BFS funziona nel seguente modo: si prende il nodo di partenza e si espande, trovando i nodi del livello 1; per ognuno di questi, da sinistra verso destra, si controlla se corrispondono al goal, in caso affermativo si termina la ricerca, altrimenti vengono espansi a loro volta determinandone i figli. Non si procede a valutare i nodi espansi nel livello $n + 1$ fino a quando non sono stati valutati tutti quelli del livello n. Da notare che questo algoritmo non tiene conto di eventuali pesi degli archi, ma solo nel numero di "step" necessari da un nodo partenza ad un nodo goal.

Ricerca a costo uniforme

Questo algoritmo è un'evoluzione del BFS in cui si tiene conto anche del costo del percorso da un nodo di partenza ad uno di arrivo. Invece che espandere il nodo più in "superficie" come in BFS, viene espanso il nodo n con il costo di percorso $g(n)$ più basso. Questo è fatto ordinando la frontiera con una **coda di priorità** ordinata per g (con g funzione di percorso meno costoso). In sostanza la ricerca a costo uniforme espande i nodi in base al loro costo di percorso ottimale, per questo l'algoritmo è caratterizzato dal costo del percorso invece che dalla profondità dei rami.
In linea generale ogni nodo espanso viene inserito in una lista di nodi *visited* che servirà per evitare di visitare più volte gli stessi nodi. Ogni volta che si deve espandere un nodo si sceglie quello che ha il percorso complessivo di costo inferiore (memorizzando per ognuno il costo dall'origine ad esso). Si procede espandendo sempre i nodi di costo inferiore presenti al momento ed anche se si raggiunge un nodo goal si attende fino a quando tutti i percorsi verso tutti i nodi goal sono stati identificati, scegliendo poi quello con costo inferiore.

- *Completezza*: è possibile se il costo dei nodi è sempre positivo, quindi non avvengono loop.
- *Ottimalità*: è ottimale perchè espande i nodi basandosi sul loro costo di percorso ottimale.
- *Complessità temporale*: $O(b^{1+\frac{c}{\epsilon}})$ in cui c è il costo della soluzione ottimale, ed ϵ una piccola costante positiva.
- *Complessità spaziale*: uguale alla complessità temporale.

Depth-first search

DFS espande sempre il nodo più profondo nella frontiera corrente dell'albero di ricerca. Questo algoritmo è implementato utilizzando una coda LIFO.

- *Completezza*: no nel caso di spazio degli stati infito.
- *Complessità temporale*: $O(b^m)$ in cui m è la massima profondità di ogni nodo.
- *Complessità spaziale*: $O(b \cdot m)$ in cui b è il coefficiente di branching ed m la profondità massima di ogni nodo.

Esiste una variante di DFS chiamata **backtracking search** che ha complessità spaziale $O(m)$.

Ricerca a profondità limitata

Il problmea di DFS con lo spazio degli stati infinito può essere risolto mettendo un limite l alla profondità dell'albero. In questo caso i nodi al livello l sono considerati senza figli. Questo approccio viene chiamato appunto **depth-limited search**.

- *Completezza*: se $l > d$ si, altrimenti se $l > d$ no.
- *Ottimalità*: dipende dalla relazione tra l e d.

- *Complessità temporale*: $O(b^l)$.
- *Complessità spaziale*: $O(b \cdot l)$.

Depth-first search a profondità iterativa
Questo algoritmo incrementa il limite di profondità finchè non trova lo stato goal.

- *Complessità temporale*: $O(b^d)$.
- *Complessità spaziale*: $O(b \cdot d)$.

La *profondità iterativa* è il metodo di ricerca disinformata preferito quando lo spazio di ricerca è grande e la profondità della soluzione non è conosciuta. Esiste una variante di questo algoritmo che invece di accrescere la profondità incrementa il limite di costo del percorso. Questo algoritmo è chiamato **iterative lengthening search**.

Ricerca bidirezionale
È un algoritmo di ricerca che consiste in due ricerche parallele, una che parte dal nodo iniziale e la seconda che parte dal nodo goal. L'algoritmo si ferma quando le due ricerche si incontrano.

3.2 Strategie di ricerca informata (euristica)

Questo tipo di strategie utilizzano la conoscenza specifica del problema oltre alla definizione del problema per trovare una soluzione in un modo efficiente. L'approccio generale è chiamato **best-first search**, in cui si sceglie un nodo da espandere basandosi su una *funzione di valutazione* $f(n)$. È chiaro quindi che la scelta di f determini la strategia di ricerca. Molti degli algoritmi best-first includono come componente di f una *funzione euristica* $h(n)$.
$h(n)$ stima il costo del percorso meno costoso dal nodo n allo stato goal. La performance degli algoritmi di ricerca euristica dipende dalla qualità della *funzione euristica*. È possibile a volte costruire buone euristiche rilassando la definizione del problema (applicando un processo chiamato rilassamento), memorizzando costi di soluzioni pre-calcolate per sotto-problemi in un database di modelli, o imparando dall'esperienza.

Best-first search greedy
Questo tipo di ricerca tenta di espandere il nodo più vicino al goal, nella speranza che questo porti più probabilmente ad una soluzione velocemente. Valuta i nodi utilizzando solo la seguente funzione euristica:
$\mathbf{f(n) = h(n)}$, in cui $h(n)$ è un'approssimazione dallo stato n allo stato goal.
Ad esempio se si vuole andare da una città a un'altra passando per diverse altre città, si potrebbe scegliere come funzione euristica $g(n)$ la distanza in linea retta tra ogni città e il goal, ed a ogni step si sceglie il nodo con distanza minore dall'obiettivo (sperando sia ottimale).

- *Completezza*: l'algoritmo è incompleto anche con spazio degli stati finito in quanto c'è la possibilità che rimanga bloccato senza uscita.
- *Ottimalità*: il costo di ricerca è minimo ma non ottimale.
- *Complessità temporale*: $O(b^m)$ in cui m è la massima profondità e b il fattore di branching.
- *Complessità spaziale*: $O(b^m)$.

In questo modello la funzione euristica è molto importante, una funzione poco precisa o erronea porterebbe a risultati insoddisfacenti.

A* search
Valuta i nodi combinando $g(n)$ = costo per arrivare al nodo n e $h(n)$ = costo per arrivare dal nodo n al nodo goal.
$\mathbf{f(n) = g(n) + h(n)}$ stima il costo della soluzione meno costosa passante per n.
Per avere soluzioni ottimali è necessario utilizzare euristiche che non sovrastimino mai il costo, al limite sottostimino o utilizzino il valore esatto. In generale l'algoritmo A* è una versione modificata (ed informata)

della ricerca a costo uniforme. Ad ogni stato è associato un numero che rappresenta una stima del costo da quello stato ad uno dei goal. Se durante la ricerca si trova nuovamente uno stato visitato con valore A* più basso si eslora lo stato, altrimenti lo si ignora e si pota quella parte della ricerca. Al termine dell'esecuzione viene ritornato lo stato goal con costo inferiore.

Condizioni di ottimalità per A*:

- *Ammissibilità*: un'euristica è definita **ammissibile** se non sovrastima mai il costo per raggiungere il goal. Queste euristiche sono chiamate *ottimistiche* in quanto ritengono il costo di risoluzione del problmea inferiore di quello che è realmente. Ad esempio una distanza in linea retta tra due punti è un'euristica ammissibile in quanto rappresenta la distanza minima tra due punti.
- **Consistenza** (monotonicità): è una condizione forte richiesta solo per ricerca sui grafi con A*. Un'euristica $h(n)$ è **consistente** se per ogni nodo n ed ogni successore n' di n generato da ogni azione a, il costo stimato per raggiungere il goal da n non è maggiore del costo dello step per arrivare ad n' più il costo stimato per raggiungere il goal da n'. La condizione è anche chiamata disuguaglianza del triangolo e afferma che ogni lato del triangolo non può essere più lunga della somma degli altri due lati.
  $\mathbf{h(n) \leq c(n, a, n') + h(n')}$, in cui c è il costo per andare da n a n'.

La versione dell'albero di ricerca per A* è ottimale se $h(n)$ è *ammissibile*, mentre nella versione della ricerca su grafo è ottimale se $h(n)$ è *consistente*.

- *Completezza*: A* è completo.
- *Ottimalità*: A* è ottimale e ottimamente efficiente.
- *Complessità temporale*: $O(b^d)$.
- *Complessità spaziale*: $O(b^d)$.

Ricerca euristica con memoria delimitata
Alcuni degli algoritmi di questo gruppo includono **iterative-deepening A* (IDA)**, **recursive best-first search (RBFS)** e **memory-bounded A* (MA*)**. La caratteristica comune di questi algoritmi è che utilizzano davvero poca memoria (lineare in base alla profondità della soluzione ottimale più profonda) e dato abbastanza tempo possono risolvere problemi che algoritmi come A* non possono risolvere in quanto finirebbero la memoria.
In linea generale nell'iterative-deepening A* si fa partire l'algoritmo a profondità $d = 0$ che corrisponde allo stato di inizio, e si controlla se questo è anche il goal. In caso affermativo si termina la ricerca e si ritorna lo stato, altrimenti lo si espande incrementando il livello di profondità d di uno e così via fino a quando non si trova lo stato goal.

4 Oltre la ricerca classica

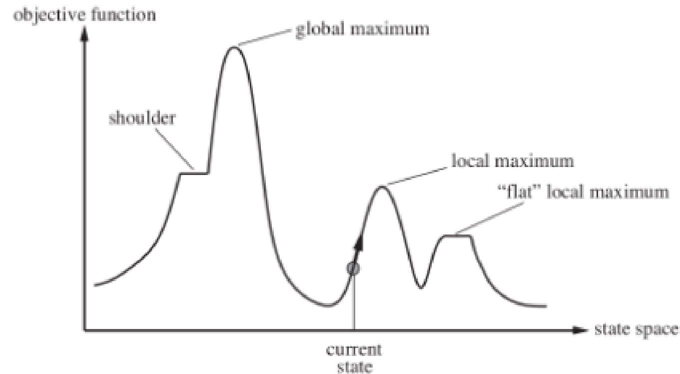
4.1 Algoritmi di ricerca locale e problemi di ottimizzazione

Gli algoritmi di ricerca visti nella sezione precedente vengono chiamati *algoritmi di ricerca sistematica* in quanto avanzano esplorando tutti i percorsi finchè non trovano il goal, mantenendoli in memoria. Quando la ricerca ha successo (si trova un goal) l'intero percorso è la soluzione.
In molti problemi non è necessario conoscere il percorso per arrivare alla soluzione, ma solo la soluzione. In questi casi gli **algoritmi locali di ricerca** sono la scelta migliore in quanto considerano solo il *nodo corrente* e il suo *vicinato* ogni volta. Questi algoritmi presentano tre vantaggi principali:

1. Basso utilizzo di memoria, solitamente una quantità costante.
2. Si possono trovare buone soluzioni in domini molto grandi, anche infiniti.

3. Sono molto adatti per risolvere problemi di *ottimizzazione* in cui il goal non è solo la ricerca di una soluzione ma la ricerca della migliore soluzione basata su una *funzione obiettivo*.

Esempi di *funzioni obiettivo* possono essere: minimizzare il costo di un operazione ad esempio, in questo caso vogliamo trovare il **minimo globale** nell'orizzonte. O viceversa se si vuole massimizzare una funzione si cerca il **massimo globale**.



Hill-climbing search
La ricerca *hill-climbing* è uno dei più famosi algoritmi di ricerca locale. È semplicemente un loop in cui ad ogni passo prende il nodo con il valore più alto fino a quando non viene trovato il "picco". Ad ogni passo l'algoritmo registra il nodo corrente e la funzione obiettivo, questo significa che il consumo di memoria rimane molto basso.

function Hill-Climbing (problem) **returns** uno stato che il massimo locale
  current ← Make-Node(problem.Initial-State)
  loop do
    neighbor ← il successore di *current* con valore più alto
    if *neighbor*.Value ¡ *current*.Value **then**
      return *current*.State
    current ← *neighbor*

A volte questo algoritmo viene anche chiamato **greedy local search** in quanto ad ogni passo prende il miglior vicino ma senza sapere cosa avviene dopo. Questa cosa però può portare alcuni problemi:

- *Massimo locale*: l'algoritmo si ferma su un massimo locale invece che su uno globale.
- *Plateaux*: è il caso in cui il vicinato è "piatto" e non ci sono soluzioni migliori per un po'.

Vi sono tre implementazioni di hill-climbing: **stochastic hill climbing**: si sceglie casualmente tra tutte le possibili salite. **First-choice hill climbing**: si itera il processo di selezione casuale di un vicino come candidato per una soluzione e lo si accetta solo se il risultato consiste in un miglioramento. **Random restart hill climbing**: se si raggiunge un ottimo locale si riparte da una posizione casuale x. Si cerca quindi l'ottimo locale riguardo ad x, se è migliore del precedente si aggiorna la variabile *current* e si ricomincia. I criteri di arresto sono o dopo un certo tempo di esecuzione, o dopo un certo numero di iterazioni.

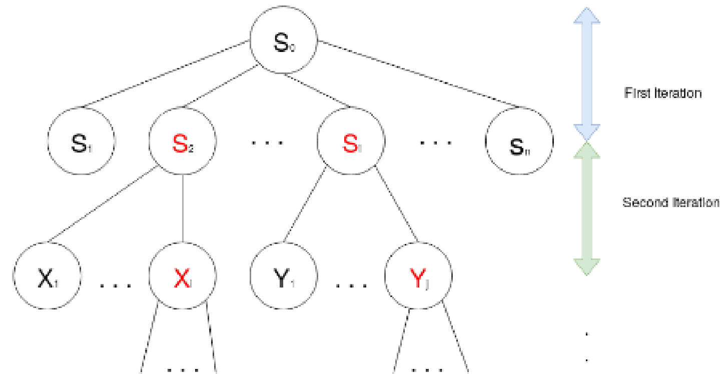
Temperamento simulato
In questo algoritmo di ricerca locale per trovare il massimo globale sono ammesse mosse "sbagliate" verso qualche soluzione non buona (discesa) con la speranza di evitare massimi locali e trovare soluzioni migliore in seguito. Si procede come segue per un numero finito di iterazioni:

- Si campiona un nuovo punto x_I nel vicinato di $x, N(x)$.
- Si salta nel nuovo punto con la probabilità data dalla funzione di probabilità scelta $P(x, x_I, T)$ dove T è positivo.

- Si decrementa T

Se $T \to 0$ l'algoritmo assomiglia all'*hill-climbing*, se $T \to \infty$ assomiglia ad una passeggiata aleatoria.

Local beam search
In contrasto con *hill-climbing*, che mantiene solo il nodo corrente e la funzione obiettivo in memoria, questo algoritmo mantiene k possibili nodi, dove k è un numero generato casualmente. Ad ogni passo vengono venerati tutti i successori di tutti i k nodi e se uno di essi è il goal la computazione si arresta, altrimenti procede in parallelo con tutti i thread che si scambiano informazioni utili sulla migliore soluzione fino al suo raggiungimento. Le soluzioni sub-ottimali sono rimosse e vengono seguite ed espanse solo le soluzioni più promettenti.

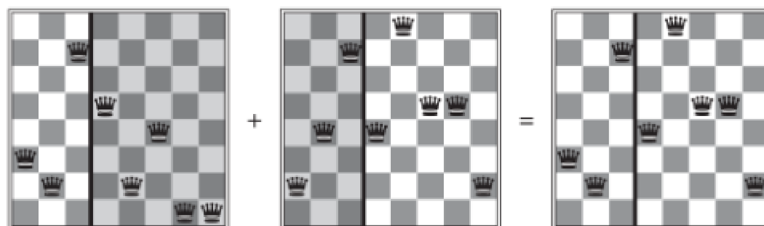


Questo modo di procedere restringe enormemente lo spazio di ricerca e l'algoritmo converge velocemente.

Algoritmi generici (GA)
Sono algoritmi che cercano di imitare l'idea biologica dell'evoluzione naturale. In generale i passaggi seguiti dagli algoritmi sono i seguenti

- Si in inizia con k stati (nodi) scelti in modo casuale chiamati **popolazione**.
- Ogni stato, chiamato anche *individuale* è rappresentato da una stringa finita in un qualche alfabeto (cromosomi).
- Una funzione obiettivo chiamata *fitness function* è definita per rappresentare gli individui più adatti. Solitamente è meglio indivuardne il numero maggiore possibile.
- Il **crossover** è il processo di riproduzione in cui gli individui più adatti vengono replicati.
- La **mutazione** è il processo di evoluzione, si permette che alcune stringhe vengano modificate per poter evolvere.

Un esempio è il caso delle *8 regine*. Questo è un problema molto famoso e consiste nel posizionare 8 regine in una scacchiera 8x8 in modo tale che non si possano attaccare a vicenda.



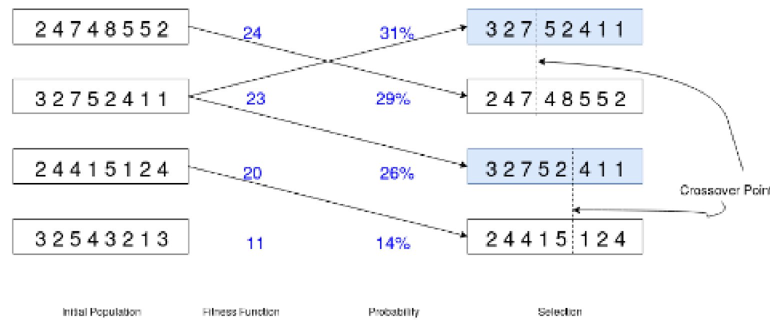
1. Si generano k stati random, nel nostro caso ne prendiamo in considerazione 2 (popolazione).

2. Si devono rappresentare gli individui come una stringa di numeri in un alfabeto. Nel nostro caso la soluzione migliore è numerare righe e colonne da 1 a 8. La prima scacchiera (il primo individuo) sarà rappresentata dalla stringa $s_1 = 3, 2, 7, 5, 2, 4, 1, 1$ e la seconda (secondo individuo) dalla stringa $s_2 = 2, 4, 7, 4, 8, 5, 5, 2$.

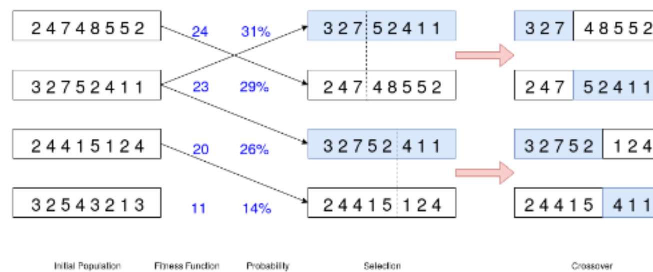
3. Si definisce la *fitness function*, una buona funzione è una con il valore più alto. Definiamo la *fitness function* come *il numero di coppie che non si attaccano a vicenda*. Nel primo individuo il risultato della funzione è 23, nel secondo 24 coppie.
È possibile espandere questo esempio con altri due stati (scacchiere) uno con *fitness* 20 e l'altro 11. Un altro passo intermedio da fare è calcolare le probabilità che questi individui vengano scelti nei passaggi successivi. Un modo per farlo è dividere ogni valore per la somma di tutti i punteggi *fitness*. Quindi: $S = 24 + 23 + 20 + 11 = 77$ la prrobabilità del primo individuo sarà $24/77 = 31\%$, e così via.

Initial Population	Fitness Function	Probability
2 4 7 4 8 5 5 2	24	31%
3 2 7 5 2 4 1 1	23	29%
2 4 4 1 5 1 2 4	20	26%
3 2 5 4 3 2 1 3	11	14%

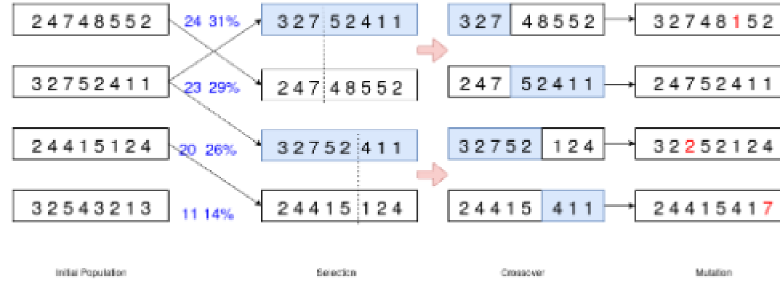
4. A questo punto si prendono gli individui con la maggior probabilità di riprodursi e per ognuni coppia di individui si devide randomicamente un *crossover point*.



5. In questa fase si combinano insieme le coppie di individui scelti, più precisamente la parte sinistra del *crossover point* del primo individuo, con il lato destro del *crossover point* del secondo individuo.



6. Nell'ultima fase si sceglie casualmente una mutazione per gli individui finali (mutazioni in rosso).



A questo punto l'algoritmo ricominica da capo, e ripete tutto fino a quando la condizione di terminazione non viene raggiunta. Nell'esempio sopra la condizione di terminazione è 28, ovvero non vi sono coppie che si attaccano a vicenda.

Le caratteristiche degli algoritmi genetici sono che: lavorano bene con problemi discreti e continui; la probabilità di rimanere bloccati in minimi locali è molto bassa; sono costosi in termini di computazione ma si può risolvere tramite parallelismo; trovare una buona *fitness function* è molto importante e il processo potrebbe essere costoso.

4.2 Ricerca locale in spazi continui

Gli algoritmi descritti in precedenza non possono gestire problemi nel continuo in quanto hanno branching finito (gli alberi di ricerca hanno un numero finito di rami).

Gradiente
Il *gradiente* è una generalizzazione multi-variabile del concetto di **derivata** ed è una funzione con valori vettoriali, quindi ha sia direzione che magnitudine. Il punto di gradiente verso la direzione del maggiore aumento della funzione e la magnitudine è la pendenza del grafico in quella direzione.
Ad esempio, se si vogliono costruire tre nuovi aereoporti in modo tale che la somma delle distanze quadrate che intercorrono tra ogni ogni città e gli aereoporti sia minima. Ogni aereoporto A_i ha coordinate $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$ e $A_3 = (x_3, y_3)$. Si può calcolare la funzione obiettivo $f = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ facilmente per ogni stato ma questo significa che si otterrebbe come risultato un *minimo locale*. Per trovare il minimo (o il massimo) *globale* è necessario prendere il considerazione i **gradiente**. Il gradiente della funzione obiettivo è il vettore $\triangledown f$ e fornisce direzione e magnitudine della *pendenza più ripida*.

Definizione: data una funzione $f(x, y, z)$ in tre variabili, il **gradiente** è dato dalla formula:

$$\triangledown f = \frac{\delta f}{\delta x} i + \frac{\delta f}{\delta y} j + \frac{\delta f}{\delta z} k$$

In cui i, j, k sono i vettori unità standard in tre dimensioni.

Nel nostro caso il gradiente è $\triangledown f = (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta y_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \frac{\delta f}{\delta y_2}, \frac{\delta f}{\delta x_3}, \frac{\delta f}{\delta y_3})$. Trovare il massimo locale è facile, basta risolvere l'equazione $\triangledown f = 0$, per trovare il massimo globale invece è necessario fare una *steepest-ascent hill-climbing* e possiamo farlo iterando la seguente formula:

Definizione: trovare il massimo globale

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha \triangledown f(\mathbf{x}), dove \alpha e' la dimensione del \mathbf{passo}$$

La costante α è molto importante in quanto misura quanto grande o piccoli siano i nostri passi verso il massimo globale e se si decide di procedere con passi grandi si rischia di superare il picco (goal).

Ci sono molti modi per avvicinarsi al goal ad ogni iterazione, uno dei metodi più conosciuti è il metodo **Newton-Raphson**. Per trovare le radici di una funzione è necessario risolvere l'equazione *g(x) = 0*. Si

procede calcolando una nuova stima della funzione ad ogni iterazione utilizzando la formula:

$$x \leftarrow x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

In cui $g'(x)$ è la derivata prima di $g(x)$. Nel nostro caso abbiamo a che fare con il calcolo multivariabile, quindi al posto della derivata è necessario usare il gradiente. La formula da risolvere è la seguente:

Definizioni: discesa gradiente

$$\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} - H_f^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$$

In cui $H_f^{-1}(\mathbf{x})$ è la matrice Hessiana delle derivate seconde, i cui elementi H_{ij} sono dati da $\frac{\delta^2 f}{\delta_{x_i}\delta_{x_j}}$.

Risolvendo il problema precedente ad ogni iterazione ci si avvicina al minimo globale. Tuttavia, nello spazio continuo con molte variabili, la soluzione diventa difficile dal punto di vista computazionale a causa delle grandi dimensioni della **matrice hessiana**.
Ottimizzazione dei vincoli e *programmazione lineare* sono alcune delle tecniche più utilizzate nell'ottimizzazione combinatoria. Qui le soluzioni sono in una certa forma data dai vincoli che devono soddisfare.
Un altro esempio di come calcolare i gradienti: data la funzione $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ si calcola $\nabla g(x, y, z)$.
$\nabla g(x, y, z) = \langle \frac{\delta g(x,y,z)}{\delta x}, \frac{\delta g(x,y,z)}{\delta y}, \frac{\delta g(x,y,z)}{\delta z} \rangle = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
Consideriamo il gradiente in un punto particolare $P = (2, 6, -3)$. $\nabla g(2, 6, -3) =?$. Prima si calcola il denominatore che è comune a tutti: $\sqrt{2^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7$. Quindi i punti saranno: $\langle \frac{2}{7}, \frac{6}{7}, \frac{-3}{7} \rangle$

4.3 Ottimizzazione numerica

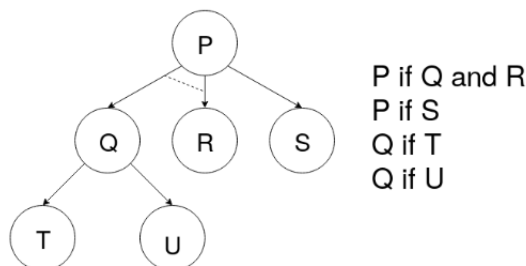
Le **tecniche di ottimizzazione** ci permettono di trovare gli estremi (minimo e massimo) di una *funzione obiettivo* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
Sappiamo che $max(f(x)) = -min(-f(x))$ quindi abbiamo solo bisogno di trovare uno degli estremi della funzione, diciamo $min(f(x))$ e possiamo calcolare facilmente $max(f(x))$.

Il **golden section search** è un semplice algoritmo che ha lo scopo di trovare il massimo in una funzione con valori definiti all'inteno di un segmento $[a, b]$. Di seguito come funziona l'algoritmo:

1. Si inizia considerando l'intervallo $[a_0, b_0] := [a, b]$ e si aggiusta il valore di *tolleranza* ϵ.
2. Si restringe progressivamente l'intervallo $[a_{k+1}, b_{k+a}] \subset [a_k, b_k]$ in modo che il valore minimo $x*$ continui ad essere dentro al nuovo intervallo.
3. Si ferma l'iterazione quando $|b_k - a_k| < \epsilon$ e si accetta il valore $\frac{b_k - a_k}{2}$ come buona approssimazione del minimo $x*$.

4.4 Ricerca con azioni non-deterministiche

Nel caso in cui l'ambiente sia parzialmente osservabile o non-deterministico o entrambi è necessario escogitare un **piano di contingenza** anche chiamato **strategia**. Il metodo più usato in questo caso è l'**And-Or Search Trees**. Gli alberi And-Or sono definiti come una rappresentazione grafica della riduzione del problema in *congiunzioni* o *disgiunzioni* di sotto-problemi.



4.5 Ricerca avversaria

4.6 Giochi

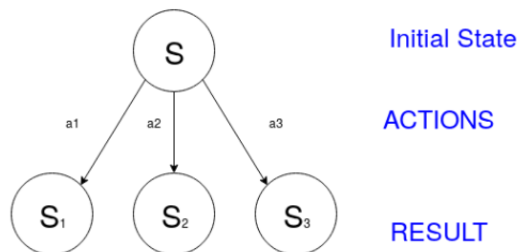
I *giochi* sono l'esempio tipico di ambienti multi-agente in cui ogni agente deve considerare l'azione degli altri nell'ambiente e come questa azione influenzi il suo benessere. In questa situazione, la **competizione** è la situazione in cui i goal degli agenti sono in conflitto. Questo fenomeno è chiamato **problemi di ricerca avversaria** o **giochi**. Di seguito alcuni concetti da sapere sui giochi:

- Giochi competitivi o a somma-zero: un giocatore vince, l'altro perde.
- Informazione perfetta: i giocatori conoscono il risultato di tutte le mosse precedenti
- Informazione imperfetta: i giocatori non conoscono le mosse precedenti, ad esempio il caso in cui giocano simultaneamente.
- Stati semplici: facile descrivere lo stato del gioco in ogni momento (giochi complicati sono il calcio o il basket).

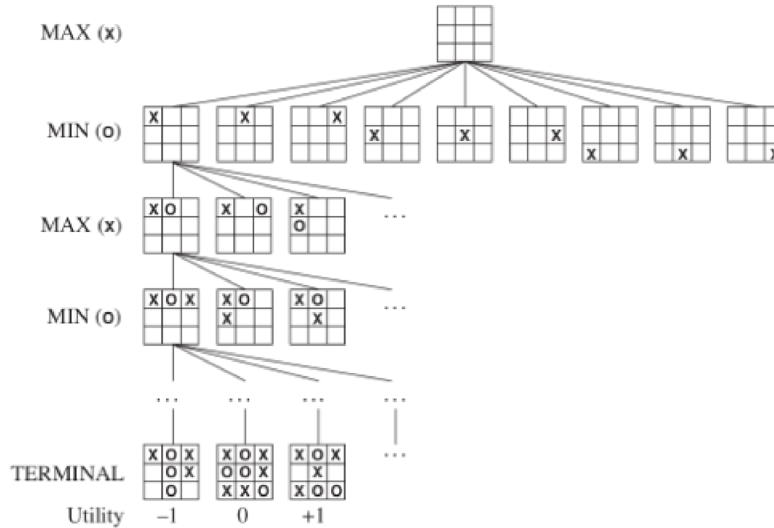
È necessario definire un po' di terminologia:

- S_0: stato iniziale del gioco.
- *PLAYER(s)*: chi è il giocatore nello stato *s*.
- *ACTIONS(s)*: ritorna l'insieme di mosse legali dallo stato *s*.
- *RESULT(s, a)*: lo stato risultante dopo che è stata effettuata l'azione *a* sullo stato *s*.
- *TERMINAL-TEST(s)*: ritorna **true** se *s* è uno stato terminale.
- *UTILITY(s, p)*: la funzione obiettivo nello stato *s* per il giocatore *p*.

Si immagini di avere due giocatori: **MIN**, **MAX** e due operazioni: *ACTIONS(s)*, *RESULT(s, a)*. Con questi dati possiamo creare un **game tree**, di seguito un esempio.



Nel caso degli scacchi il numero di nodi è 1040 e come si può immaginare non può essere esplorato o memorizzato tutto a causa della complessità computazionale estremamente elevata. In tic-tac-toe questo numero è inferiore a 9! ma comunque molto alto per un gioco così semplice. L'immagnie seguente mostra un albero parziale per il gioco. **MAX** è il giocatore che inizia per primo il gioco. **Utility** mostra il risultato del gioco nello stato terminale.

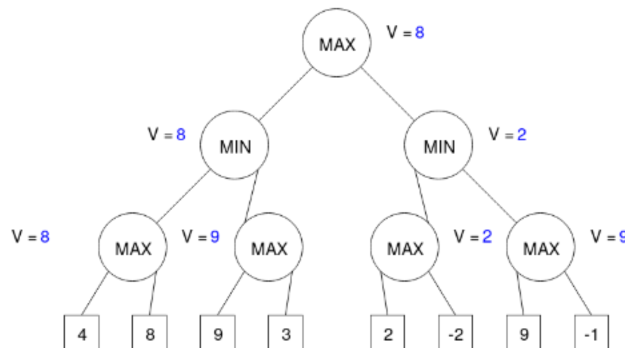


4.7 Algoritmo MINIMAX

La soluzione ottimale in un gioco è una sequenza di azioni che porta a uno stato goal, in altre parole che porta a uno stato vincente. Per vincere un giocatore, deve mettere in atto una strategia. Dato un albero di gioco, la strategia ottimale può essere determinata dal **valore minimax** di ciascun nodo. La seguente immagine mostra formalmente l'algoritmo.

$$\text{MINIMAX}(s) = \begin{cases} \text{UTILITY}(s) & \text{if TERMINAL-TEST}(s) \\ \max_{a \in Actions(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s,a)) & \text{if PLAYER}(s) = \text{MAX} \\ \min_{a \in Actions(s)} \text{MINIMAX}(\text{RESULT}(s,a)) & \text{if PLAYER}(s) = \text{MIN} \end{cases}$$

L'algoritmo **MINIMAX** esegue una **depth-first search** dell'albero di gioco. Se la profondità massima dell'albero è m e ci sono b mosse legali (fattore di branching) in ogni punto, allora abbiamo una *complessità temporale* $O(b^m)$ e una *complessità spaziale* $O(bm)$. Questa complessità molto elevata rende MINIMAX un algoritmo impraticabile anche per giochi semplici.



Se si considera MINIMAX per più di due giocatori, avremmo un vettore di possibili valori nella funzione UTILITY e l'algoritmo potrebbe cambiare leggermente. Questa nuova versione è chiamata $\alpha\beta - pruning$.

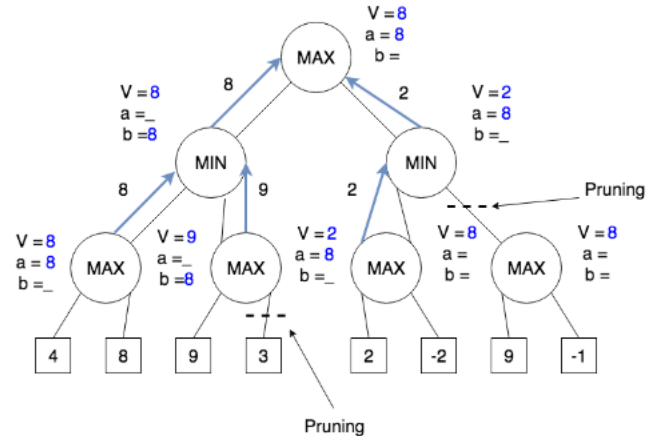
4.8 Alpha-Beta pruning

Il problema con la ricerca **MINIMAX** è che il numero di stati del gioco che deve esaminare è esponenziale nella profondità dell'albero. Esistono tecniche che possono alleviare questo problema tagliando la metà del numero di stati che vanno visitati. Queste tecniche sono basate sul concetto di **potatura** (pruning). In $\alpha\beta - pruning$ l'idea è quella di voler potare alcuni nodi per motivi di efficienza. L'algoritmo si basa su 2

valori α e β.

α: è la scelta migliore di MAX fino ad ora (il valore più alto).
β: è la scelta migliore fino ad ora per MIN (il valore più basso).
$[\alpha, \beta]$: ogni nodo tiene traccia dei propri valori α e β.

MIN aggiorna sempre β e MAX aggiorna sempre α. L'algoritmo parte assegnando $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$.



La complessità di questo algoritmo può essere ridotta ad $O(b^{\frac{m}{2}})$. Ci sono anche giochi non-deterministici, in cui dobbiamo includere un livello di nodi **chance** tra i nodi MAX e MIN. In questa classe sono inclusi giochi come backgammon o i giochi di carte.

5 Probelmi di soddisfacimento dei vincoli

I problemi di soddisfazione dei vincoli (CSP) rappresentano una classe molto importante di problemi di ottimizzazione combinatoria. Questi problemi sono molto difficili da risolvere perché hanno una complessità esponenziale. Per risolverli, si utilizzano tecniche diverse, una delle quali è il **constraint programming** (CP). Ovvero un paradigma di programmazione dichiarativa che consente di modellare e risolvere problemi di ottimizzazione combinata (COP) fornendo un costrutto di alto livello come vincoli globali, operatori logici ecc. La tecnica che CP utilizza per risolvere i COP è una sistematica ricerca in backtracking dell'albero.

5.1 Definire CSP

Un problema di soddisfazione dei vincoli è modellato come una tripla di insiemi: (X, D, C) dove:

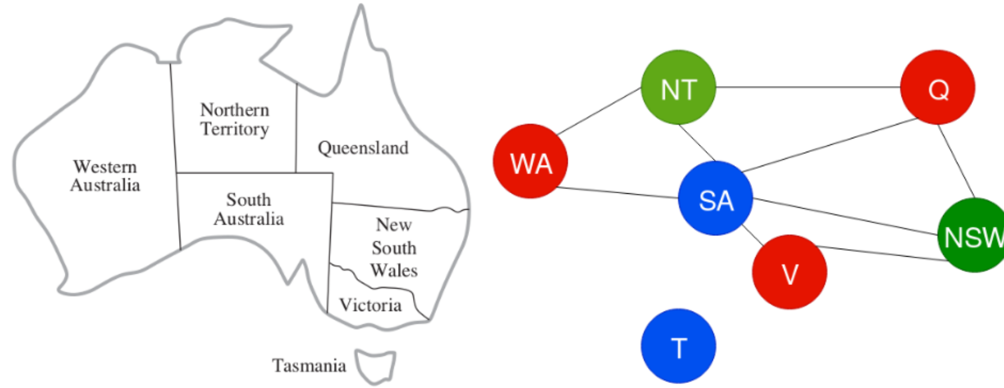
- X: è un'insieme di variabili chiamate *variabili di decisione*, $X = X_1, X_2, ..., X_n$
- D: è un'insieme di domini, uno per ogni variabile X, $D = D_1, D_2, ..., D_n$
- C: è un'insieme di vincoli che specificano i possibili valori che le variabili possono assumere. Un vincolo è una relazione tra variabili $C_i(X_j ... X_k)$.

Una soluzione per un CSP è un'assegnazione di un valore alle variabili che soddisfano contemporaneamente tutti i vincoli. Un esempio di CSP è la colorazione di una mappa: data una mappa di stati, colorare gli stati con colori diversi in modo tale che quelli non adiacenti abbiano lo stesso colore. Consideriamo questo particolare problema con la mappa australiana. Può essere espresso con il seguente CSP:

- $P = (X, D, C)$
- $X = \{WA, NT, Q, NSW, V, SA, T\}$
- $D = \{red, green, blue\}$

- $C = \{SA \neq WA, SA \neq NT, SA \neq Q, SA \neq NSW, SA \neq V, WA \neq NT, NT \neq Q, Q \neq NSW, NSW \neq V\}$

Le **variabili** possono avere domini discreti, finiti o infiniti. Anche i valori nel **dominio** possono essere di qualsiasi tipo (numeri interi, reali, booleani, ...). Si hanno molti tipi di vincoli, unari, binari, globali, ... Uno dei vincoli globali più importanti è $Alldifferent(X_1, X_2, ...X_n)$ che forza tutte le variabili ad essere differenti l'una dall'altra.



5.2 Consistenza locale e propagazione dei vicnoli

Come abbiamo detto in precedenza, CP utilizza la ricerca sistematica per estendere un'assegnazione parziale di valori alle variabili in una sola, completa e coerente. Naturalmente non tutti gli assegnamenti sono coerenti, quindi è necessario trovare un modo per rilevare questo tipo di incarichi incoerenti. La **consistenza locale** è una forma di **inferenza** che ci consente di rilevare assegnazioni parziali incoerenti. In questo modo possiamo fare meno lavoro nella ricerca. Si chiama consistenza locale perché si esaminano i vincoli uno alla volta in quanto la consistenza globale è NP-hard. Ricapitolando la *consistenza locale* è una proprietà che vogliamo garantire e lo facciamo usando **Propagation**. La propagazione sono tutte le tecniche utilizzate per applicare la consistenza locale. Il modo in cui queste tecniche e questi metodi sono implementati sono liberi in modo che chiunque possa implementarli, importante è l'obiettivo, far rispettare la coerenza locale.
Esistono molti tipi di consistenza, ma le più utilizzate sono le consistenze basate sul dominio, come la **arc consistency**, la **generalized arc consistency** e la **bounds consistency**. Questo tipo di consistenze sono in grado di rilevare incoerenze del tipo: $X_i = j$ e se questo assegnamento è inconsistente si elimina il valore j dal dominio della variabile X_i tramite *propagazione*.

5.3 MiniZinc

MiniZinc è un linguaggio di modellazione di alto livello utilizzato per indicare i problemi di soddisfacimento dei vincoli. Si usa MiniZinc per scrivere codice di alto livello che modella un CSP, successivamente usa uno dei 20 risolutori per risolvere il CSP. Il processo di compilazione passa attraverso una rappresentazione di basso livello chiamata *FlatZinc* e quindi al risolutore: **MiniZinc** → **FlatZinc** → **Solver X**.

Esempio: supponiamo di avere il seguente problema: si vuole massimare $25B+30T$ tali che $\frac{1}{200}B+\frac{1}{40}T \leq 40$; con $0 \leq B \leq 60$ e $0 \leq T \leq 40$. Questo problema è modellabile tramite MiniZinc nel seguente modo:

```
var 0..60: B;
var 0..40: T;
constraint (1/200)*B + (1/140)*T <= 40;
solve maximize 25*B + 30*T; output ["B = ", show(B), "T = ", show(T)];
```

Alcune peculiarità di MiniZinc sono: la dichiarazione di variabili, l'assegnamento, la struttura *constraint* *<booleanexpression>*, la keyword *solve*, predicati e test, annotazioni e output. Di seguito il problema dello

zaino in MiniZinc:

```
int: n;          % number of objects
int: weight_max; % maximum weight allowed (capacity of the
knapsack)
array[1..n] of int: values;
array[1..n] of int: weights;
array[1..n] of var int: take; % 1 if we take item i; 0
otherwise

var int: profit = sum(i in 1..n) (take[i] * values[i]);
solve maximize profit;

constraint        % all elements in take must be >= 0
forall(i in 1..n) ( take[i] >= 0 )   /\
sum(i in index_set(weights))( weights[i] * take[i] ) <=
weight_max;

output [show(take), "\n"];
```

6 Agenti logici

In questo capitolo studieremo gli **agenti basati sulla conoscenza**, ovvero agenti che hanno una rappresentazione interna della conoscenza e utilizzano un processo chiamato **ragionamento** per accedere e manipolare questa conoscenza. Per poter ragionare dobbiamo creare un formalismo per esprimere la conoscenza. Verrà di seguito introdotta la logica formale (sarà sufficiente la logica proposizionale e del primo ordine).

6.1 Agenti basati sulla conoscenza

Chiamiamo **Knowledge-Based**, (KB) un insieme di **frasi** o **proposizioni** espresse in un linguaggio speciale chiamato *linguaggio di rappresentazione della conoscenza.* Le frasi che non derivano da altre frasi sono chiamate **assiomi**. Possiamo aggiungere frasi in un KB con un processo chiamato **TELL** e interrogare il KB con **ASK**. Usiamo l'**inferenza** per derivare nuove frasi da quelle esistenti. Ogni linguaggio formale ha una **sintassi** ben definita che viene utilizzata per rappresentare tutte le frasi ben formate e una semantica che definisce il significato delle frasi. La semantica esprime il valore di verità della frase in un modello (mondo). Se una frase α è vera in un modello M, diciamo che α soddisfa M. Una frase β che segue da una frase α è scritta nella forma $\alpha \vDash \beta$ e rappresenta la nozione di derivazione logica. Questa formulazione significa che in ogni modello in cui α è vero anche β è vero.

Definizione: $\alpha \vDash \beta \iff M(\alpha) \subseteq M(\beta)$

Un **algoritmo di inferenza** è un algoritmo che può trarre conclusioni sulla base di alcune premesse. Vogliamo che questi algoritmi siano sia **sound** che **completi**. La **soundness** significa che ogni formula che può essere dimostrata in un sistema è logicamente valida rispetto alla semantica del sistema. La **completezza** è la proprietà di un algoritmo di inferenza per derivare qualsiasi frase derivata. Queste due proprietà sono molto desiderabili nella logica.
Se KB è vero nel mondo reale, allora qualsiasi frase α derivata da una procedura di inferenza sound è garantita essere vera nel mondo reale. Importante è anche il concetto di **grounding** che effettua la domanda: come facciamo a sapere che il nostro KB è vero nel mondo reale?

6.2 Logica proposizionale

La **logica proposizionale** è il tipo più semplice di logica che si usa per esprimere la conoscenza e formalizzare il linguaggio naturale. Quando definiamo una logica dobbiamo prima definire la **sintassi**, poi la **semantica**. Nel caso della logica proposizionale abbiamo i seguenti elementi:

- **Aiuti simbolici**: usati per aiutarci ad esprimere le frasi in maniera chiara, questi aiuti sono: "(", ")".
- **Connettivi**: permettono di creare frasi complesse combinando insieme frasi atomiche, alcuni esempi sono: "$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\implies$", "$\iff$".

- **Costanti proposizionali**: top ("$\top$") e bottom ("$\bot$").
- **Variabili proposizionali**: un numero infinito di proposizioni atomiche, $p_0, p_1, ...$

Inoltre è presente un insieme di regole che permette di creare frasi complesse:

Regole: $\omega ::= \top|\bot|p_i|\neg\omega|(\omega \wedge \omega)|(\omega \vee \omega)|(\omega \implies \omega)|(\omega \iff \omega)$

$$
\begin{aligned}
Sentence &\rightarrow AtomicSentence \mid ComplexSentence \\
AtomicSentence &\rightarrow True \mid False \mid P \mid Q \mid R \mid \ldots \\
ComplexSentence &\rightarrow (\ Sentence\ ) \mid [\ Sentence\ ] \\
&\mid \neg\ Sentence \\
&\mid Sentence \wedge Sentence \\
&\mid Sentence \vee Sentence \\
&\mid Sentence \Rightarrow Sentence \\
&\mid Sentence \Leftrightarrow Sentence
\end{aligned}
$$

OPERATOR PRECEDENCE : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

A questo punto, dopo la **sintassi**, è necessario definire la **semantica** della logica proposizionale. La semantica definisce le regole che assegnano il valore di verità a ciascuna frase rispetto a un modello particolare. Usiamo la *tabella di verità* per definire la semantica.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
false	*false*	*true*	*false*	*false*	*true*	*true*
false	*true*	*true*	*false*	*true*	*true*	*false*
true	*false*	*false*	*false*	*true*	*false*	*false*
true	*true*	*false*	*true*	*true*	*true*	*true*

L'**enunciazione proposizionale** è co-NP completo che significa che nel peggiore dei casi la complessità computazionale dell'algoritmo è esponenziale nella dimensione dell'input. Fino ad ora abbiamo verificato la **derivazione** mediante il **controllo del modello**, quindi elencando tutti i modelli in cui la derivazione è vera. C'è un altro metodo chiamato **dimostrazione del teorema**, ovvero fornire derivazione applicando alcune *regole di inferenza* ben definite. Applicheremo direttamente l'inferenza sulle frasi del KB in modo da arrivare a una dimostrazione senza controllare i modelli.

Equivalenza logica ($\equiv$): diciamo che 2 frasi α, β sono logicamente equivalenti se sono vere nello stesso insieme di modelli. Per $\alpha \equiv \beta$ ad esempio $A \wedge B \equiv B \wedge A$.

Equivalenza logica

$$\alpha \equiv \beta \iff \alpha \vDash \beta \wedge \beta \vDash \alpha$$

Validità: una frase è valida se è vera in *tutti* i possibili modelli. Le frasi valide sono chiamate **tautologie** e sono necessariamente vere. Un esempio di tautologia è il seguente: $A \wedge \neg A$. Dato che $\top$ è vero in tutti i modelli ogni frase valida equivale a $\top$.

Teorema di deduzione

Per ogni frase α e β, $\alpha \vDash \beta$ se e solo se la frase $(\alpha \implies \beta)$ è valida.

In conclusione possiamo decidere $\alpha \vDash \beta$ controllando che $\alpha \implies \beta$ sia vera.

Soddisfacibilità: una frase è **soddisfacibile** se è vera o soddisfatta da *alcuni* modelli. Il problema della *soddisfacibilità* (SAT) può essere verificato elencando tutti i modelli fino a quando non se ne trova uno che soddisfi la frase. SAT nella logica proposizionale è NP-completo. La **validità** e la **soddisfacibilità** sono strettamente legati: α è *valido* se e solo se $\neg\alpha$ è *insoddisfacibile* ed α è *soddisfacibile* se e solo se $\neg\alpha$ non è *valido*.

Reductio ad Absurdum

$\alpha \vDash \beta$ se e solo se la frase $(\alpha \wedge \neg\beta)$ è insoddisfacibile.

Dimostrare β partendo da α verificando l'insoddisfacibilità di $\alpha \wedge \neg\beta$ è anche chiamato **confutazione** o **prova per contraddizione**. In generale, utilizziamo le **regole di inferenza** per derivare/inferire una **prova**. Qui ne vedremo alcune:

Modulus Ponens

$$\frac{(\alpha \implies \beta)\alpha}{\beta}$$

Se $\alpha \implies \beta$ ed α è data, si può inferire β.

Eliminazione-AND

$$\frac{(\alpha \wedge \beta)}{\beta} \text{ or } \frac{(\alpha \wedge \beta)}{\alpha}$$

Se è data una congiunzione di due termini si può inferire ognuno di essi separatamente.

Monotonicità: indica che l'insieme di frasi derivate può solo aumentare si aggiungono più informazioni al KB.
Un altro modo per dimostrare le frasi è applicare la regola di **risoluzione**. La quale prende in input una clausola (**disgiunzione dei letterali**) e un nuovo letterale e produce una nuova clausola. Di seguito un esempio di come funziona questa regola:
$\frac{(A \vee B)(\neg A \vee \neg C)}{B \vee \neg C}$
Un dimostratore di teoremi basato su *risoluzione* può, per ogni frase α e β in *Logica Proposizionale*, decidere se $\alpha \models \beta$. La risoluzione funziona solo per clausole disgiunzione dei letterali $(\alpha \vee \beta)$. Ogni frase in Logica Proposizionale è logicamente equivalente ad una congiunzione di clausole. Una frase espressa come congiunzione di clausole è chiamata *Conjuctive Normal Form (CNF).*

Esempio: applicazione di regole logiche per trasformare $B \iff (A \vee C)$ in CNF:

1. $B \iff (A \vee C)$
2. $(B \implies (A \vee C)) \wedge ((A \vee C) \implies B)$
3. $(\neg B \vee A \vee C) \wedge (\neg(A \vee C) \vee B)$
4. $(\neg B \vee A \vee C) \wedge ((\neg A \vee \neg C) \vee B)$
5. $(\neg B \vee A \vee C) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B)$

L'algoritmo di risoluzione per verificare che $KB \models \alpha$ mostri che $(KB \wedge \neg\alpha)$ è *insoddisfacibile.* Come funziona l'algoritmo:

- *Primo*: si trasforma $(KB \wedge \neg\alpha)$ in un CNF e poi lo si usa come input per l'algoritmo.
- *Secondo*: ogni coppia che contiene letterali complementari viene risolta per produrre una nuova clausola la quale è aggiunta all'insieme se non è già presente.
- *Terzo*: questo processo continua fino a quando una delle seguenti cose non avviene:
  - Non ci sono più nuove clausole che possono essere aggiunte, ciò significa che il KB non deriva α.
  - Le ultime due clausole vengono risolte in una *clausola vuota*, ciò significa che KB deriva α.

La **Clausola Definita** è una disgiunzione dei letterali in cui *esattamente uno è positivo*: $\neg A \vee B \vee \neg C$.
La **Clausola di Horn** viene utilizzata per una forma semplificata di risoluzione. Le clausole horn sono una disgiunzione di letterali dove al *massimo uno è positivo.*
La **Clausola Goal** è chiamata clausola *senza valori letterali positivi.*
Vogliamo lavorare con KB che hanno solo *clausole definite* per 3 motivi:

- Ogni clausola definita può essere scritta come un'implicazione la cui *premessa* è una congiunzione di letterali positivi e la cui *conclusione* è un singolo letterale positivo: $(\neg A \vee \neg B \vee C) :: (A \vee B) \implies C$. Nella forma di Horn la *premessa* si chiama corpo e la conclusione si chiama *testa.* Un singolo letterale positivo è chiamato *fatto.*

- Gli algoritmi di concatenamento avanti/indietro vengono utilizzati per effettuare *inferenza* di clausole di Horn. Questi algoritmi sono la base della programmazione logica.
- La complessità della dimostrazione della *derivazione* in Horn è *lineare* sulla dimensione di KB.

L'**algoritmo di concatenamento avanti/indietro** prende come input un KB e una proposizione che chiamata *query* e definisce se la query è derivata dal KB. Questo algoritmo è **sound** e **completo** e alla fine raggiunge il cosiddetto **punto fisso** in cui non è più possibile effettuare calcoli.

7 Logica del primo ordine

Possiamo usare i migliori elementi della *Logica Proposizionale* come il fatto che sia dichiarativa, compositiva, indipendente dal contesto e non ambigua e alcuni aspetti dei *linguaggi naturali.* Possiamo associare nomi a **oggetti**, verbi a **relazioni** e **funzioni**. Una *funzione* è una relazione da un input a un output.

Sentence	→	*AtomicSentence* | *ComplexSentence*
AtomicSentence	→	*Predicate* | *Predicate*(*Term*, ...) | *Term* = *Tern*
ComplexSentence	→	(*Sentence*) | [*Sentence*]
	|	¬ *Sentence*
	|	*Sentence* ∧ *Sentence*
	|	*Sentence* ∨ *Sentence*
	|	*Sentence* ⇒ *Sentence*
	|	*Sentence* ⇔ *Sentence*
	|	*Quantifier Variable*, ... *Sentence*
Term	→	*Function*(*Term*, ...)
	|	*Constant*
	|	*Variable*
Quantifier	→	∀ | ∃
Constant	→	A | X_1 | *John* | ···
Variable	→	a | x | s | ···
Predicate	→	*True* | *False* | *After* | *Loves* | *Raining* | ···
Function	→	*Mother* | *LeftLeg* | ···

OPERATOR PRECEDENCE : ¬, =, ∧, ∨, ⇒, ⇔

I modelli nella FOL sono interessanti in quanto contengono oggetti. Chiamiamo **dominio** di un modello l'insieme di oggetti che esso contiene. Gli elementi sintattici di base nella FOL sono i simboli utilizzati per rappresentare oggetti (**simboli costanti**), relazioni (**simboli predicati**) e funzioni (**simboli funzione**). Ogni predicato o funzione ha un numero definito di parametri chiamato **arity**. Oltre a *oggetti*, *predicati* e *funzioni* ogni modello include anche un'**interpretazione**.
Un **termine** è un'espressione lessicale che si riferisce a un oggetto. Possiamo combinare insieme *termini* che si riferiscono a oggetti e *predicati* che si riferiscono a relazioni per formare **frasi atomiche** chiamate anche **atomi** che vengono utilizzate per dichiarare *fatti.* Un *atomo* è formato da un *predicato* seguito da un elenco di termini, ad esempio *Brother(John, Jim)...* Si possono creare frasi atomiche complesse, ad esempio *Married(Father(John), Mother(John)).*
Le **frasi complesse** sono frasi create combinando insieme frasi atomiche usando i *connettivi.* $\neg Brother(LeftLeg(Richard), Jo$ oppure $Brother(Richard, John) \land Brother(John, Richard)$. I **quantificatori** consentono di esprimere le proprietà di intere raccolte di oggetti. La FOL ha 2 quantificatori:

- Quantificatore *universale* (∀): permette di creare frasi su tutti gli elementi di un dominio. Ad esempio: $\forall x King(x) \implies Person(x)$, questa frase significa: per tutte le variabili x, se x è un Re allora è anche una Persona.
- Quantificatore *esistenziale* (∃): permette di creare frasi su *alcuni* elementi del dominio. Ad esempio: $\exists x Person(x) \land King(x)$, questa frase significa: esiste un x tale che sia una Persona e un Re.

Il connettivo naturale per $\forall$ è $\implies$ e per $\exists$ è $\wedge$. Si può scrivere ($\forall, \implies$) e ($\exists, \wedge$).

Possiamo avere più di un quantificatore all'interno di una frase, in questo caso si parla di **quantificatori annidati**. I quali possono essere dello stesso tipo: $\forall x \forall y Brothers(x, y) \implies Siblings(x, y)$ o di tipi diversi: $\forall x \exists y Loves(x, y)$.
Una variabile appartiene sempre al quantificatore più interno che la menziona: $\forall x(Crown(x) \vee (\exists x Brother(Richard, x)))$.
Vi è un'altra maniera di creare *frasi atomiche* in FOL, ovvero il **simbolo di uguaglianza**. Questo simbolo è utilizzato per indicare che due oggetti si riferiscono allo stesso oggetto: $Father(John) = Henry$. Di seguito le regole di De Morgan per la logica del primo ordine:

$\forall x \ \neg P \equiv \neg \exists x \ P$ $\qquad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
$\neg \forall x \ P \equiv \exists x \ \neg P$ $\qquad \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
$\forall x \ P \equiv \neg \exists x \ \neg P$ $\qquad P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
$\exists x \ P \equiv \neg \forall x \ \neg P$ $\qquad P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

A questo punto è necessario utilizzare la logica per i nostri scopi, si immagini di avere un KB e di usare TELL per aggiungere frasi nel KB, mentre ASK per ottenere informazioni dal KB.
Asserzione: le frasi aggiunte nel KB tramite l'utilizzo di TELL (es. $TELL(KB, King(John)))$.
Query: utilizzate per fare domande al KB (es. $ASK(KB, King(John))$ :: "*true*"). Una variante è ASKVARS che ritorna un insieme di valori, ad esempio "quali valori di x rendono la domanda vera".
Ogni KB può essere visto come un insieme di **assiomi** dai quali si possono derivare teoremi.

7.1 Numeri, insiemi e liste

La **teoria dei numeri** può essere definita a partire da una serie molto piccola di assiomi. Infatti è necessario un **predicato** che chiamiamo *NatNum*, un **simbolo costante** che chiamiamo *0* e un **simbolo di funzione** che chiamiamo *successore*, *S*. Usiamo gli **assiomi di Peano** per definire i numeri naturali in modo ricorsivo: $NatNum(0); \forall n NatNum(n) \implies NatNum(S(n))$.
Il significato delle asserzioni precedenti è: "0 è un numero naturale", per ogni oggetto n, se n è un numero naturale, anche il successore di $n(S(n))$ è un numero naturale.
Quindi possiamo vedere i numeri naturali come: "0, $S(0)$, $S(S(0))$ ...). Possiamo aggiungere più assiomi per poter implementare operazioni come (+). Gli **insiemi** sono un oggetto matematico molto importante. Possiamo esprimerli usando i costrutti di FOL.

- *Costante*: insieme vuoto.
- *Predicati*: un predicato unario *Set*, due predicati binari: $x \in s$ (x è incluso nell'insieme s) e $s1 \subseteq s2$ ($s1$ è un sottoinsieme di $s2$).
- *Funzioni*: tre funzioni binarie: $s1 \cap s2$ (intersezione), $s1 \cup s2$ (unione) e $x|s$ (un nuovo set che risulta dalla x contigua al set s).

Esistono 8 assiomi usati per implementare gli insiemi, ad esempio uno di questi è: $\forall s Set(s) \iff (s =) \vee (\exists x, s2 Set(s2) \vee s = x|s2)$, per gli altri assiomi fare riferimento al libro.
Le liste hanno alcune altre caratteristiche che devono essere prese in considerazione, ad esempio una lista è ordinata e uno stesso elemento può apparire più volte in una lista. Per definire le liste è necessario:

- *Costante*: *Nil* è un elenco costante senza elementi.
- *Funzioni*: Cons, Append, First, Rest.
- *Predicato*: Find

Usando i letterali precedenti possiamo definire le liste: $[A, B, C]$ :: $Cons(A, Cons(B, Cons(C, Nil)))$.

7.2 Prolog

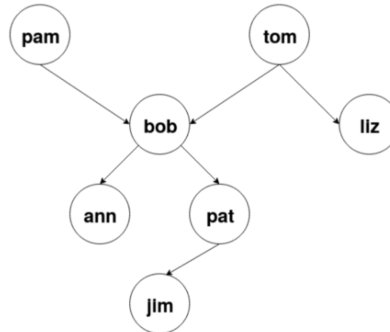
Prolog è un linguaggio di programmazione *logico* e *dichiarativo*. In un linguaggio dichiarativo il programmatore specifica un **goal** e lascia al sistema il modo di risolverlo. I programmi Prolog specificano le **relazioni**

tra oggetti e le proprietà tra gli oggetti. Ad esempio possiamo dire: John ha una bici - si sta dichiarando la relazione di proprietà tra 2 oggetti. Un programma Prolog contiene 3 elementi: **fatti**, **regole**, **interrogazioni**.
I *fatti* descrivono una relazione esplicita tra oggetti e proprietà che gli oggetti potrebbero avere ("John ha una bicicletta", "I capelli sono neri", "Apple è un'azienda" ecc.): **teaches(fabio, uux)**.
Le *regole* definiscono le relazioni implicite tra oggetti (es. relazione fratello) e proprietà dell'oggetto (A è figlio di B se B è padre di A). Le regole sono clausole *non unitarie*, mentre i fatti sono clausole unitarie: **guide(Teacher, Student): - teacher(Teacher, CourseId), studies(Student, CourseId)**.
Le *query* consentono di porre domande sulle proprietà dell'oggetto e dell'oggetto. Le query si basano su fatti e regole, supponiamo che si voglia sapere se andrea insegna il corso uux, si può scrivere: **?-teaches(andrea, uxx)**.

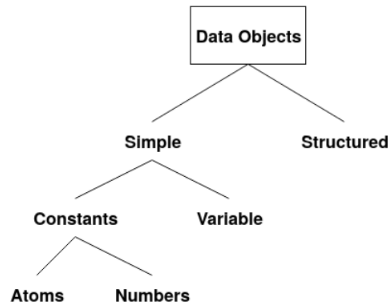
Sintassi delle clausole

- **:-** indica "se" o "è implicato da", il lato sinistro viene chiamato **head**, quello destro **body**.
- **,** indica "and" come congiunzione logica.
- **;** indica "or" come disgiunzione logica.

Relazioni familiari in Prolog: Prolog è un linguaggio di programmazione per il calcolo simbolico, non numerico. Per definire il KB per la relazione familiare, è necessario definire le relazioni aggiungendo **tuple** nel KB. Una volta aggiunte possiamo interrogare il KB sulle relazioni. Ogni clausola nel KB deve terminare con un *punto* ".". In esempi come **parent(bob, tom).**, "parent", "bob" e "tom" sono chiamati **atomi** mentre in **parent(bob, X).** X è una variabile.



parent(pam,bob).
parent(tom,bob).
parent(tom,liz).
parent(bob,ann).
parent(bob,pat).
parent(pat,jim).
mother(X,Y):-parent(X,Y), female(X).
sister(X,Y):-parent(Z,X), parent(Z,Y), female(X), X≠Y.
haschild(X,_).
grandparent(X,Z):-parent(X,Y), parent(Y,Z).
predecessor(X,Y):-parent(X,Y). %base case
predecessor(X,Z):-parent(X,Y), predecessor(Y,Z). %recurssive case



Le liste sono una semplice struttura dati che consente di rappresentare raccolte di elementi, come $L = [blu, rosso, verde, nero]$. Una lista può essere vuota, [] o non vuota. Nel secondo caso il primo elemento della lista si chiama $Head$ e la parte restante si chiama $Tail$ ed è anch'essa stessa una lista.
Membership, controlla se un elemento è presente nell'elenco, è possibile usare anche la funzione build-in *member*.

```
Membership - lmember(X,L).
lmember(X,[X | _]).
lmember(X,[_ | TAIL]):-lmember(X,TAIL).
```

Lunghezza di una lista

```
Length of a list - length(L,N).
length([],0).
length([_ | TAIL], N):-length(TAIL, N1), N is N1+1.
```

Concatenzazione di liste

```
Concatenation of 2 lists - conc(L1,L2,L3).
conc([],L,L).
conc([X1 | L1],L2,[X1 | L3]):-conc(L1,L2,L3).
```

Cancellazione di un elemento X dalla lista

```
Deletion - del(X,L).
del(Y,[Y],[]).
del(X,[X, |L1],L1).
del(X,[Y | L],[Y | L1]):-del(X,L,L1).
```

Inserire un elemento in lista

```
Insert - ins(X, L, R) - using del(X,L))
ins(X,L,R):-del(X,R,L).
```

N-esimo elemento della lista

```
Find N-th element of a list
nlist(1,[X | L], X).
nlist(N,[Y | L], X):-N1 is N - 1, nlist(N1,L,X).
```

A questo punto parliamo di **Matching** o **Unification** in Prolog. *Matching* significa che dati due termini per verificare se sono *identici* o le variabili in entrambi i termini possono avere lo stesso oggetto dopo essere stati istanziati. Ad esempio: **date(D, M, 2006) = date(D1, feb, Y1).** significa: **D = D1, M = feb, Y1 = 2006**. Prima di dare le regole generali per il *matching/unification* è necessario ricordare

che ci sono 3 tipi di termini in Prolog: **costanti** (che possono essere *atomi* o *numeri*), **variabili**, **termini complessi (Strutture)** [functor(term1, term2, ...)].
La regola generale è: il *matching tra due termini* avviene se sono uguali o se contengono variabili che possono essere istanziate in modo tale che i termini risultanti siano uguali.

Regole per Matching/Unification

1. Se il *termine1* e il *termine2* sono costanti, allora il *termine1* e il *termine2* corrispondono se e solo se sono lo stesso atomo o lo stesso numero.
2. Se il *termine1* è una variabile e il *termine2* è qualsiasi tipo di termine, allora il *termine1* e il *termine2* corrispondono e il *termine1* è istanziato al *termine2*. Analogamente, se il *termine2* è una variabile e il *termine1* è qualsiasi tipo di termine, allora il *termine1* e il *termine2* corrispondono e il *termine2* viene istanziato al *termine1*. (Quindi se sono entrambe variabili, sono entrambe istanziate l'una con l'altra e diciamo che condividono valori).
3. Se il *termine1* e il *termine2* sono termini complessi, corrispondono se e solo se:
   (a) Hanno stessa funzione e arità.
   (b) Tutti gli argomenti corrispondenti corrispondono.
   (c) Le istanziazioni di variabili sono compatibili. (Ad esempio, non è possibile istanziare la variabile X su *mia*, quando si abbina una coppia di argomenti, e quindi istanziare X su *vincent*, quando si abbina un'altra coppia di argomenti.)
4. Due termini corrispondono se e solo se segue dalle tre clausole precedenti che corrispondono.

Un altro argomento importante in Prolog è il **Backtracking**. A volte si vuole impedire il backtracking per motivi di efficienza.
Prevenire il backtracking: Prolog farà automaticamente un passo indietro se ciò è necessario a raggiungere un obiettivo. Il backtracking non controllato può causare inefficienza in un programma. Dei "Cut", (!) posssono essere utilizzati per impedire il backtracking.

Esempio 1
Date le seguenti 3 regole:

- R1: **f(X, 0):- X < 3.** - "se X < 3 allora Y = 0".
- R2: **f(X, 2):- 3 =< X, X < 6.** - "se 3 =< X e X < 6 allora Y = 2".
- R3: **f(X, 4):- 6 =< X.** - "se 6 <= X allora Y = 4".

A questo punto ci si chiede: **?-f(1, Y), 2 < Y.** Il primo goal [f(1, Y)] utilizza R1 ed istanzia Y = 0, mentre il secondo goal fallisce in quanto (2 ¡ 0). Prolog effettua backtracking per utilizzare l'altra regola, in modo da risolvere i goal. È possibile notare che tutti i predicati sono mutuamente esclusivi, ovvero quando uno è vero gli altri sono falsi. Quindi in questo caso il backtracking è solo un processo che consuma tempo, e che vorremmo evitare. Possiamo evitarlo utilizzando Cut(!), modificando il codice come segue:

- R1: **f(X, 0):- X < 3, !.**
- R2: **f(X, 2):- 3 =< X, X < 6, !.**
- R3: **f(X, 4):- 6 =< X.**

Esempio 2
max(X, Y, Max), ovvero in Max sarà presente il valore maggiore tra X e Y, in Prolog:
max(X, Y, X):- X >= Y.
max(X, Y, Y):- X < Y.

Ora è possibile cambiare l'algoritmo aggiungengo Max.
max(X, Y, X):- X >= Y, !.
max(X, Y, Y).
Un altro modo per scriverlo utilizzando i cut è:
max1(X, Y, Max):- X >= Y, Max = X, !; Max = Y.

Negazione come fallimento: si vuole rappresentare in Prolog la frase "A Mary piacciono tutti gli animali tranne che i serpenti":
like(mary, X):- snake(X), !, fail.
like(mary, X):- animal(X).

Non-relazione: not(Goal) è vero se il goal è falso.
not(P):- P, !, fail; true.

8 Aspetti economici, filosofici ed etici dell'IA

Esistono molte definizioni sull'IA:
AI debole: è possibile costruire macchine in grado di agire come se fossero intelligenti?
AI Forte: è possibile costruire macchine realmente intelligenti?
Per porre questa domanda è necessario prima definire cos'è l'*intelligenza*. In una certa misura possiamo affermare che un'intelligenza artificiale debole è possibile ed esistente ai nostri giorni.

Obiezione di coscienza all'IA: le macchine possono *pensare*? Le macchine che superano il test di Turing possono essere viste come macchine che pensano, tuttavia questa è solo una simulazione del pensiero.

Ci sono due visioni opposte:

1. **Naturalismo biologico**: gli stati mentali sono caratteristiche emergenti di alto livello che risultano da processi fisici di basso livello nei neuroni ed è la proprietà non specificata dei neuroni che conta.
2. **Funzionalismo**: uno stato mentale è una condizione casuale intermedia tra input e output. Qualsiasi due sistemi con processi casuali isomorfi avrebbero gli stessi stati mentali. Pertanto, un programma per computer potrebbe avere gli stessi stati mentali di una persona. Il presupposto è che esiste un certo livello di astrazione al di sotto del quale l'implementazione specifica non ha importanza. Questo fatto è mostrato nell'*esperimento di sostituzione del cervello*.

8.1 Aspetti etici dell'IA

Etica delle macchine: ipotesi computazionali e filosofiche per le macchine che possono prendere decisioni morali *autonome*. Domande come: i veicoli autonomi chi dovrebbero uccidere in caso di incidente? I robot medici dovrebbero dire la verità ai pazienti? Come garantire che le macchine non prendano decisioni immorali?

Un altro problema è che il comportamento umano e il comportamento della macchina sono regolati da leggi diverse: un esempio è il problema del trolley. Il *Trolley Problem* è una versione del dilemma etico che esorta a fare una scelta: sacrificare una vita per salvarne cinque o viceversa? Questo dilemma è legato all'utilitarismo che afferma che la decisione moralmente corretta è quella che massimizza il benessere per il maggior numero di persone.