Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica (I Modulo)

12 Luglio 2022 (M.Mughetti)

Soluzioni prive di calcoli e delle necessarie spiegazioni NON SARANNO VALUTATE.

Esercizio 1(pt. 9)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = e^{\frac{2x-x^2-1}{x^2-4}}.$$

I Disegnare il suo grafico (dominio naturale $\mathcal{D}(f)$ di f, limiti ai bordi del dominio di f, zeri e segno della derivata prima).

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $K \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = K$ ha un'unica soluzione.

Esercizio 2(pt. 6)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^5)$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(x) - x}{x^3}$$

Risposta:
CALCOLARE preliminarmente gli sviluppi totalmente semplificati di:

$$e^{x-x^2}, \quad \cos(x)$$

e infine il limite assegnato.

ANALISI MATEMATICA. INFORMATICA SECONDO MODULO
12 LUGLIO 2022

1. Individuare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = (x^2 - y^2)(y+2).$$
2. Sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \quad \text{e} \quad x^3 - x \leq y \leq 0\}$ e calcolare l'integrale
$$\int_A e^{x^2}\, dxdy.$$

1.

$$D_x f = e^{\frac{2x-x^2-1}{x^2-4}} \; \frac{(2-2x)(x^2-4) - 2x(2x-x^2-1)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= e^{\frac{2x-x^2-1}{x^2-4}} \; \frac{2x^2-8-\cancel{2x^3}+8x-4x^2+\cancel{2x^3}+2x}{(x-2)^2(x+2)^2} =$$

$$= \underbrace{e^{\frac{2x-x^2-1}{x^2-4}}}_{\text{Sempre} \geq 0} \; \frac{-2x^2+10x-8}{\underbrace{(x-2)^2(x+2)^2}_{\text{Sempre} \geq 0}} =$$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100-64}}{-4} \qquad \frac{-10 \pm 6}{-4} \begin{cases} +1 \\ 4 \end{cases}$$

$$(-2x+8)(x-1)$$

	-2	1	2	4	
f'	↘	↘	↗	↗	↘

$$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{\cancel{x^2}\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to -2^-} e^{\underbrace{\frac{-4-4-1}{0^+}}_{-\infty}} = 0^+$$

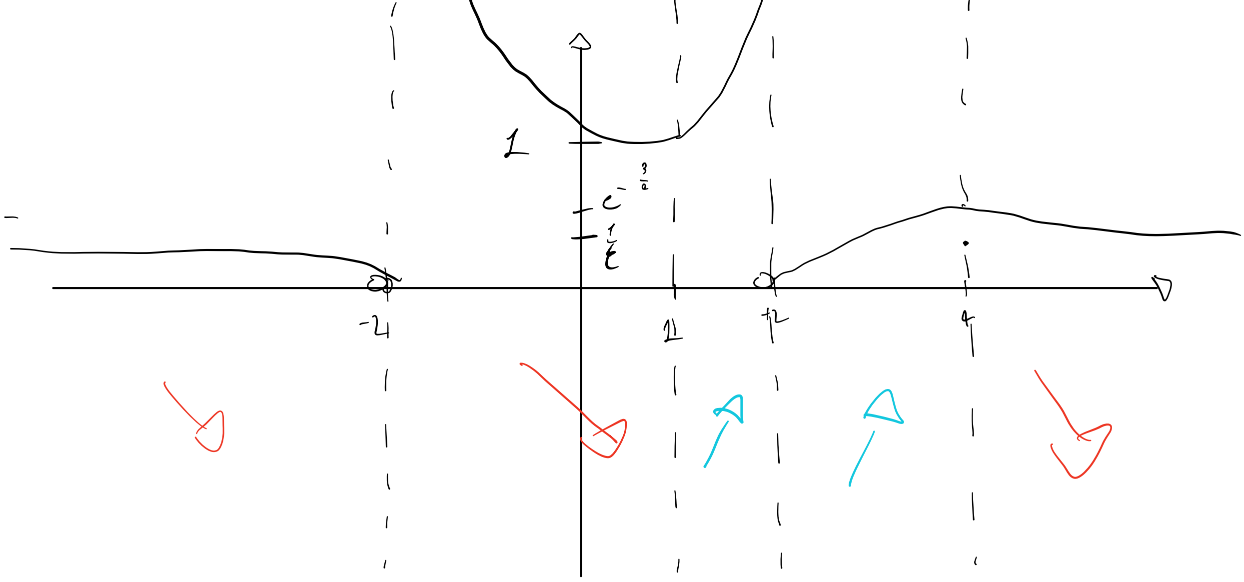
$$\lim_{x \to -2^+} e^{\frac{-4-4-1}{0^-}} = +\infty$$

$$f(1) = e^{\frac{2-1-1}{1-4}} = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} e^{\underbrace{\frac{4-4-1}{0^-}}_{+\infty}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} e^{\underbrace{\frac{4-4-1}{0^+}}_{-\infty}} = 0$$

$$f(4) = e^{\frac{8-16-1}{16-4}} = \frac{-9}{12} = e^{-\frac{3}{4}} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}$$



Dominio $x \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Immagine $y \in \left]0 \,; e^{-\frac{3}{4}}\right] \cup \left[1 \,; +\infty\right[$

L'equazione $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ ha un'unica soluzione

con $k = 1 \,,\, e^{-\frac{3}{4}} \,,\, \frac{1}{e}$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(x) - x}{x^3}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + o(t^3) \qquad t = x - x^2$$

$$e^{x-x^2} = 1 + x - x^2 + \frac{1}{2}(x-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(x-x^2)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - x^2 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3) + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{5}{6}x^3 \cancel{-1} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} \cancel{-x} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{5}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{5}{6}$$

3.

$$D_x f = 2x(y+2)$$

$$D_y f = -2y(y+2) + x^2 - y^2$$

$$\nabla f \left(2x(y+2),\ -2y(y+2)+x^2-y^2\right)$$

$$\begin{cases} 2x(y+2) = 0 & (1) \\ -2y(y+2) + x^2 - y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) Si annulla con $x=0$ o $y=-2$

$x=0$

$$\begin{cases} 0=0 \\ -2y^2-4y-y^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ y(3y+4)=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (0,0) \\ (0,-\frac{4}{3}) \end{matrix}$$

$y=-2$

$$\begin{cases} 0=0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ x=\pm 2 \end{cases} \quad (\pm 2, -2)$$

$$D_{xx} f = D_x[2x(y+2)] = 2y+4$$

$$D_{xy} f = D_y[2x(y+2)] = 2x$$

$$D_{yx} f = D_x[-2y(y+2)+x^2-y^2] = 2x$$

$$D_{yy} f = D_y[-2y(y+2)+x^2-y^2] = -2(y+2) - 2y - 2y = -2(3y+2)$$

$$H_f \begin{pmatrix} 2y+4 & 2x \\ 2x & -2(3y+2) \end{pmatrix}$$

$(0,0)$

$$H_{f(0,0)} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \det(H_{f(0,0)}) < 0$$

$(0,0)$ punto di sella

$(0, -\frac{4}{3})$

$$H_{f(0,-\frac{4}{3})} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(H_{f(0,-\frac{4}{3})}) > 0$$

$(0, -\frac{4}{3})$ punto di min. rel.

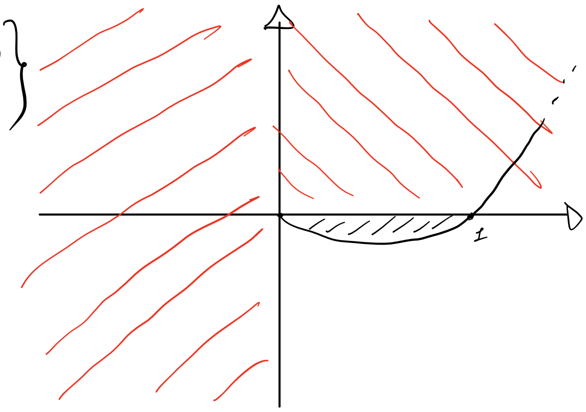
$(2, \pm 2)$

$$H_{f(2,-2)} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 4 \\ \pm 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \det(H_{f(2,-2)}) < 0$$

$(\pm 2, -2)$ punti di sella

4.

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0 \text{ e } x^3-x\le y\le 0\}$$



$x\in[0,1]$

$$\int_A e^{x^2}dx\,dy = \int_0^1\int_{x^3-x}^0 e^{x^2}dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 e^{x^2}(-x^3+x)\,dx =$$ pongo $x^2=t$ $\quad dt = 2x\,dx$

$$\int_0^1 e^{x^2}(1-x^2)\,x\,dx = \int_0^1 e^t(1-t)\frac{dt}{2} = \int_0^1 e^t\frac{dt}{2} - \underbrace{\int_0^1 te^t\frac{dt}{2}}_{\text{per parti}} =$$

$$= \frac12 \left|e^t\right|_0^1 - \frac12\left[\left|te^t\right|_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt\right] = \frac12 \left|e^t - te^t + e^t\right|_0^1 =$$

$$\frac12\left|(2-t)e^t\right|_0^1 = \frac12 e$$