Corso di Laurea in Informatica

Prova scritta di Analisi Matematica (I Modulo)

22 Giugno 2022 (M.Mughetti)

Soluzioni prive di calcoli e delle necessarie spiegazioni NON SARANNO VALUTATE.

Esercizio 1(pt. 9)
Sia data la funzione $\mathcal{D}(f) \to \mathbf{R}$

$$f(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-\frac{1}{2}x^2+x}.$$

I Disegnare il suo grafico (dominio naturale $\mathcal{D}(f)$ di f, limiti ai bordi del dominio di f, zeri e segno della derivata prima).

II Calcolare l'immagine di f sul suo dominio naturale $\mathcal{D}(f)$.

III Stabilire per quali $K \in \mathbf{R}$ l'equazione $f(x) = K$ ha un'unica soluzione.

Esercizio 2(pt. 6)
Sapendo che, per $t \to 0$,

- $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{6}t^6 + o(t^6)$,

- $\cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \frac{1}{6!}t^6 + o(t^6)$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x\cos(x)) - \ln(1 + x) + x^3/2}{x^4}$$

Risposta:
CALCOLARE preliminarmente gli sviluppi totalmente semplificati di:

$$\ln(1 + x\cos(x)), \quad \ln(1 + x)$$

e infine il limite assegnato.

ANALISI MATEMATICA. INFORMATICA SECONDO MODULO
22 GIUGNO 2022

1. Individuare e classificare i punti critici della funzione
$$f(x,y) = x^2 + xy - (y+1)e^{-y}.$$

2. Sul triangolo A di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ calcolare
$$\int_A \frac{1}{1+x^2}\, dxdy.$$

1.

$$Df = (-2x-1)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+x} + (-x^2-x+1)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+x}\cdot(-x+1)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2+x}\left(-2x \cancel{-1} + x^3 \cancel{+x^2} - x \cancel{-x^2} - x \cancel{+1}\right)$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+x}}_{\text{sempre } >0}\left[\underbrace{x}_{I}\,(\underbrace{x^2-4}_{II})\right] \qquad x=0 \qquad x=\pm 2$$

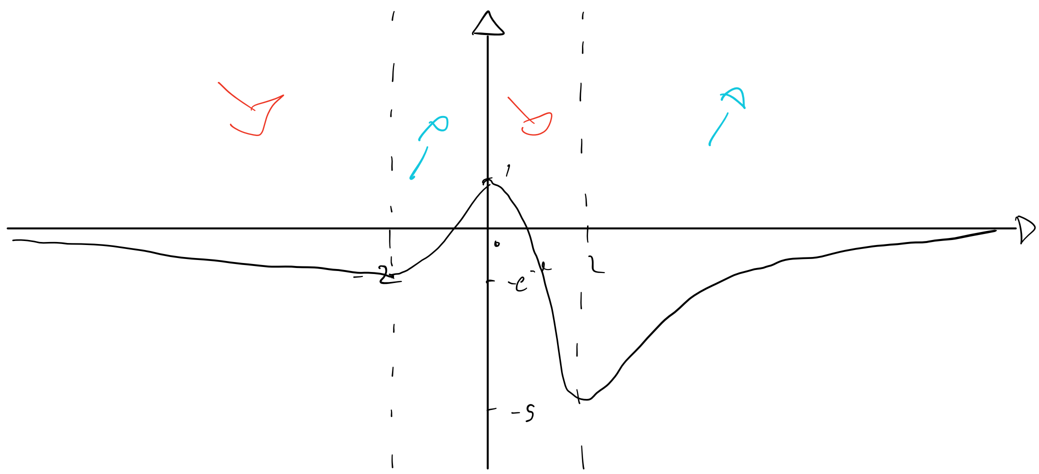
		-2		0		$+2$	
I	$-$		$-$	0	$+$		$+$
II	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
	↘		↗		↘		↗

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{x^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2-x}{e^{\frac{1}{2}x^2-x}} =$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{(x-1)\,e^{\frac{1}{2}x^2-x}} = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{\cancel{x}\left(-2-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}}_{\to -2}\cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2+x}}_{\to 0} = 0^-$$

$$f(-2) = -e^{-4} \qquad f(0) = 1 \qquad f(2) = -5$$

$$\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+x} = 0^-$$



Dominio $x \in \mathbb{R}$

Immagine $y \in [-5, 1]$

L'equazione $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$ ha un'unica soluzione

per $k = 1, -5$

2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x\cos x) - \ln(1+x) + \frac{x^3}{2}}{x^4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

$$x\cos x = x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + o(t^4) \qquad t = x\cos x$$

$$\ln(1+x\cos x) = x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}\left(x^2 - x^4\right) + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$-\ln(1+x) = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x\cos x) - \ln(1+x) + \frac{x^3}{2}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{4}x^4 - \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{\frac{1}{3}x^3} + \frac{1}{4}x^4 + \cancel{\frac{x^3}{2}}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} + \frac{1}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{2}$$

3.

$D_x f = 2x + y$

$\nabla f(2x+y, x+ye^{-y})$

$D_y f = x - e^{-y} + (y+1)e^{-y}$

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+ye^{-y}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=-y \\ \frac{y}{2}+ye^{-y}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=-y & (1) \\ y\left(\frac{1}{2}+e^{-y}\right)=0 & (2) \end{cases}$$

$0 = (1) - 2(2)$

$2x - 2x + y - 2ye^{-y} = 0 \qquad y(1-2e^{-y}) = 0$

$y = 0 \quad o$

$1 - 2e^{-y} = 0 \qquad e^{-y} = \frac{1}{2} \qquad y = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

$-\ln 2^{-1}$

$(0,0) \quad o \quad \left(-\frac{1}{2}\ln 2, \ln 2\right)$

$\frac{df}{dxx} = 2 \qquad \frac{df}{dxy} = 1 \qquad \frac{df}{dyx} = 1 \qquad \frac{df}{dyy} = e^{-y} - ye^{-y}$

$$H_f \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & e^{-y}-ye^{-y} \end{pmatrix}$$

$(0,0)$

$$H_{f(0,0)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(H_{f(0,0)}) > 0$$

$(0,0)$ punto di min rel.

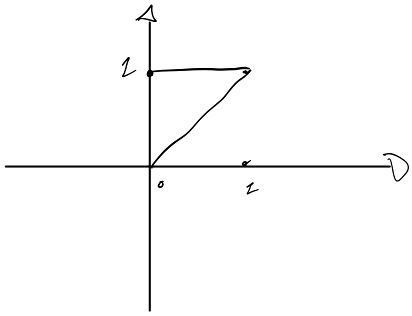
$\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \ln 2\right)$

$$H_{f\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \ln 2\right)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2 \end{pmatrix} \quad \det\left(H_{f\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \ln 2\right)}\right) < 0$$

$\left(-\frac{1}{2}\ln 2, \ln 2\right)$ punto di sella

4.

$0 \leq x \leq 1 \quad x \leq y \leq 1$



$$\int_A \frac{1}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1+x^2}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \left| \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \right|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(0) - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$