Corso di Laurea in Informatica

II parziale di Analisi Matematica

28 Maggio 2019

Marco Mughetti

Cognome: ....

Nome: ....

Numero di matricola: ....

Email: ....

Indicare la votazione riportata nel I parziale e, in caso di esito positivo, la modalità della prova orale che si intende sostenere:
....

Risultati

1.(pt.1)	
2.(pt.1)	
3.(pt.5)	
4.(pt.4)	
5.(pt.4)	

Risolvere gli esercizi seguenti, scrivendo e motivando dettagliatamente il procedimento seguito. Soluzioni prive di calcoli e spiegazioni non saranno valutate.

Esercizio 1 (pt. 1)
Data $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, scrivere cosa significa che $f = f(x_1, x_2)$ è derivabile nel punto $\overline{x} = (1, 2)$ rispetto alla direzione $v = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.
Risposta:

Esiste in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x}+tv) - f(\overline{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}, 2+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,2)}{t}$$

Esercizio 2 (pt. 1)
Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale per la funzione $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$.
Risposta:

Hp: $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Sia $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

Th: G è derivabile

$$G'(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 - 7x^2 & + 9x & + 18 & & x^2 - 8x + 16 \\
-x^3 + 8x^2 & - 16x & & & x + 1 \\
\hline
+x^2 & - 7x & + 18 & & \\
x^2 & + 8x & - 16 & & \\
\hline
// & x & + 2 & &
\end{array}
$$

Esercizio 3 (pt. 5)
Calcolare:
(A) una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 9x - 7x^2 + 18}{x^2 - 8x + 16}; = x + 1 + \frac{x+2}{(x-4)^2}$$

(B) il seguente integrale definito

$$\int_0^3 \frac{x^3 + 9x - 7x^2 + 18}{x^2 - 8x + 16}\, dx.$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - 4A = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 6 \end{cases}$$

Risposta:

$$\frac{x+2}{(x-4)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} = \frac{A(x-4)+B}{(x-4)^2} = \frac{Ax - 4A + B}{(x-4)^2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-4} + \frac{6}{(x-4)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-4| - \frac{6}{x-4} + C$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{9}{2} + 3 + \ln 1 + 6 - \left(\ln 4 + \frac{3}{2} \right) = \frac{27}{2} - \ln 4 - \frac{3}{2}$$

$$= 12 - \ln 4$$

$$④\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x-3 \\ x-4x+6-3=0 \end{cases} \begin{cases} y=-1 \\ x=+1 \end{cases}$$

$$① \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$② \begin{cases} y=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \begin{cases} y=0 \\ x=3 \end{cases}$$

Esercizio 4 (pt. 4)
Sia data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = x^2y - y^2x - 3xy - 1.$$

I) Calcolare i suoi eventuali punti di massimo, di minimo locali e di sella.
II) Calcolare il piano tangente al grafico di f nel punto $(-1, 1)$.
Risposta:

I

$$\begin{cases} f_x = 2xy - y^2 - 3y = 0 \\ f_y = x^2 - 2yx - 3x = 0 \end{cases} \begin{cases} y(2x-y-3)=0 \\ x(x-2y-3)=0 \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=-3 \\ x=0 \end{cases}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y-3 \\ 2x-2y-3 & -2x \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & \end{pmatrix} \quad \det = -9 < 0$$
P. DI SELLA

$$H_f(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \det = -9 < 0$$
P. DI SELLA

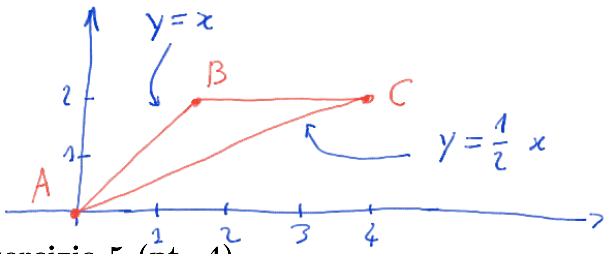
$$H_f(0,-3) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \det = -9 < 0$$
P. DI SELLA

$$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} \overset{<0}{-2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \det = 3 > 0$$
P. DI MASSIMO RELATIVO

II

$$z = f(-1,1) + \left\langle \nabla f(-1,1), \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle = 4 + \left\langle \begin{pmatrix} -6 \\ +6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 4 - 6x - 6 + 6y - 6 = -6x + 6y - 8$$



$$\Omega = \{ (x,y) \mid 0 \le y \le 2,\ y \le x \le 2y \}$$

Esercizio 5 (pt. 4)

Disegnare in $\mathbf{R}^2$ il triangolo Ω di vertici $A(0,0), B(2,2), C(\cancel{5}\,4,2)$, e calcolare

$$I = \iint_\Omega \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy.$$

Risposta:

$$I = \int_0^2 \left(\int_y^{2y} \underbrace{\sqrt{xy-y^2}}_{=\,(xy-y^2)^{\frac{1}{2}}}\, dx \right) dy = \int_0^2 \frac{1}{y} \left(\int_y^{2y} y\,(xy-y^2)^{\frac{1}{2}}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{y} \left[\frac{2}{3} (xy - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=y}^{x=2y} dy$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{y} \left(\frac{2}{3} \left(2y^2 - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{2}{3} \int_0^2 \frac{1}{y}\, y^3\, dy = \frac{2}{3} \int_0^2 y^2\, dy$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2}{9} \cdot 8 = \frac{16}{9}$$