SALSA, SQUELLATI
ESERCIZI DI MATEMATICA
calcolo infinitesimale e algebra lineare

Gli autori

Sandro Salsa è professore ordinario di Analisi Matematica presso la Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano.
Annamaria Squellati è docente di Matematica Generale presso l'Università Commerciale L. Bocconi di Milano.

L'opera

Questa raccolta di esercizi (divisa in due volumi) intende proporsi allo studente come verifica del grado di preparazione raggiunto nei fondamenti del calcolo infinitesimale e dell'algebra lineare. Si presenta come naturale completamento del testo *Matematica* di M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa (Zanichelli, 2000).
Gli argomenti del volume sono le funzioni reali di variabile reale e l'algebra lineare, in particolare:

- numeri reali e complessi
- successioni e serie
- calcolo differenziale e integrale
- equazioni alle differenze
- rette e piani nello spazio, matrici, sistemi e funzioni lineari.

SALSA·ESERCIZI DI MATEMATICA VOL.1
ISBN 88-08-08887-1
9 788808 088871
2 3 4 5 6 7 8 9 0 (50B)

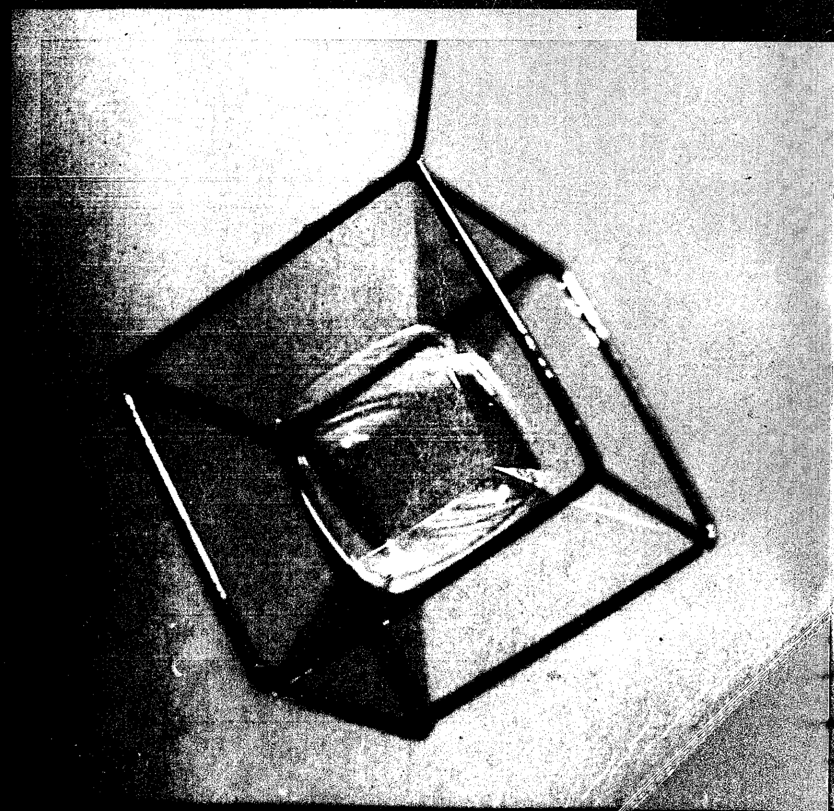
Al pubblico L. 32 500
Dal 1° gennaio 2002 €

SANDRO SALSA
ANNAMARIA SQUELLATI

ESERCIZI DI MATEMATICA

CALCOLO INFINITESIMALE E ALGEBRA LINEARE

volume **1**



ZANICHELLI

Nelle edizioni Zanichelli

Opere di consultazione

Clapham **Dizionario di matematica**
Baruk **Dizionario di matematica elementare**
Wells **Numeri memorabili**

Le Ellissi

Buffa **Fra numeri e dita. Dai conteggi sulle dita alla nascita del numero**
Enriques **Per la storia della logica. I principi e l'ordine della scienza nel concetto dei pensatori matematici** (Ristampa anastatica)

CM/Collana di matematica

5. Enriques, Chisini **Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche** (2 volumi)
6. Enriques **Lezioni di geometria proiettiva** (Ristampa anastatica)
3. **Questioni riguardanti le matematiche elementari** 2 voll. a cura di Enriques

La cultura matematica

1 Jänich **Topologia**
2 Steinhaus **Matematica per istantanee**
3 Davenport **Aritmetica superiore. Una introduzionealla teoria dei numeri**

Testi e manuali universitari

Abeasis **Complementi di algebra lineare e geometria**
Abeasis **Elementi di algebra lineare e geometria**
Antognini, Barozzi **Matematica e Mathematica**
Anton **Calculus**
Barozzi **Introduzione agli algoritmi dell'algebra lineare**
Barozzi **Primo corso di analisi matematica**
Barozzi, Matarasso **Analisi matematica** (volume 1°) N.R.
Barozzi **Matematica per l'ingegneria dell'informazione**
Betti **Lezioni di geometria**
Bevilacqua, Bini, Capovani, Menchi **Introduzione alla matematica computazionale**
Bevilacqua, Bini, Capovani, Menchi **Metodi numerici**
Bini, Capovani, Menchi **Metodi numerici per l'algebra lineare**
Boieri, Chiti **Precorso di matematica**
Bordoni **Lezioni di meccanica razionale** (Masson)
Bramanti, Pagani, Salsa **Matematica**
Broglia, Fortuna, Luminati **Problemi risolti di algebra lineare** (Decibel)
Bruni **La figura e il numero** (Masson - 2 volumi)
Bruno **Lezioni di algebra lineare uno** (Decibel)
Buzzetti, Grassini Raffaglio, Vasconi Ajroldi **Esercizi di analisi matematica I** (Masson - 2ª edizione)
Campostrini, Parpinel **Introduzione all'inferenza statistica** (Decibel)
Casolaro **Integrali** (Masson)
Cerasoli, Eugeni, Protasi **Elementi di matematica discreta**
Cercignani **Spazio, tempo, movimento. Introduzione alla meccanica razionale**
Codegone **Metodi matematici per l'ingegneria**
Coraluppi, Mondellini Ciceri **Appunti di istituzioni di matematica** (Masson - 2 volumi)
Coraluppi, Mondellini Ciceri **Eserciziario per istituzioni di matematiche II** (Masson)
Coraluppi, Mondellini Ciceri **Istituzioni di matematiche II** (Masson)
Dall'Aglio **Calcolo delle probabilità** (2ª edizione)
Dedò **Trasformazioni geometriche**
Dedò **Forme**
De Marco **Analisi zero** (3ª edizione)
De Marco **Analisi Uno** (2ª edizione - Decibel)
De Marco **Analisi Due** (2ª edizione - Decibel)
De Marco, Mariconda **Esercizi di analisi uno** (2ª edizione - Decibel)
De Marco, Mariconda **Esercizi di analisi due** (Decibel)
Dicuonzo, De Paris, Volzone **Esercizi di algebra lineare** (Masson)
Dicuonzo, De Paris, Volzone **Esercizi di geometria analitica** (Masson)
Dicuonzo **Lezioni di algebra lineare e geometria analitica** (Masson - 2 volumi)
Fabrizio **Introduzione alla meccanica razionale e ai suoi metodi matematici** (2ª edizione)
Facchini **Algebra** (Decibel)
Finzi **Meccanica razionale** (2 volumi)
Gasapina **Algebra delle matrici** (Masson)
Ghelardoni, Gheri, Marzulli **Elementi di calcolo numerico** (Masson - 2ª edizione)
Ghizzetti, Rosati **Analisi matematica** (Masson - 2ª edizione)
Ghizzetti, Rosati **Esercizi e complementi di analisi matematica** (Masson - 2 volumi)
Invernizzi, Rinaldi, Sgarro **Moduli di matematica e statistica**
Kosniowski **Introduzione alla topologia algebrica**
Letta **Probabilità... elementare**
Levi-Civita **Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa**
Levi-Civita, Amaldi **Compendio di meccanica razionale** (volume 1)
Levi-Civita, Amaldi **Lezioni di meccanica razionale** (volume 2 parte 2)
Maffei Migliori **Esercizi, appunti e note di istituzioni matematiche**
Manarini Merri **Lezioni di meccanica razionale** (Masson - 3ª edizione)
Maroscia **Geometria e algebra lineare**
Maroscia **Introduzione alla geometria e all'algebra lineare**
Maroscia **Problemi di geometria**
Minnaja **Matematica Due** (Decibel)
Monti Pierobon **Teoria della probabilità** (Decibel)
Ottaviani, Di Lazarro **Complementi ed esercizi di matematica attuariale** (Masson)
Ottaviani **Lezioni di matematica finanziaria** (Masson)
Ottaviani **Riassunto delle lezioni di matematica attuariale**
Pagani, Salsa **Analisi matematica** (Masson - 2 volumi)
Pagani, Salsa **Matematica** (Masson)
Piacentini Cattaneo **Algebra** (Decibel)
Pintacuda **Probabilità** (Decibel)
Procesi Ciampi, Rota **Algebra lineare esercizi** (Masson)
Procesi Ciampi, Rota **Esercizi di geometria e algebra**
Quattrocchi, Rinaldi **Algebra**
Ragusa, Sparacino **Esercizi di algebra. Teoria degli insiemi, teoria dei gruppi, teoria degli anelli**
Salce **Lezioni sulle matrici** (Decibel)
Salsa, Squellati **Esercizi di matematica volume 1**
Salsa, Squellati **Esercizi di analisi matematica II** (Masson - 3 volumi)
Scozzafava **Incertezza e probabilità**
Scozzafava **Matematica di base** (Masson - 2ª edizione)
Scozzafava **Probabilità e statistica** (Decibel - 2ª edizione)
Serafini **Ottimizzazione**
Thomas Jr., Finney **Analisi matematica**
Thomas Jr., Finney **Elementi di analisi matematica e geometria**
Toscano **Training autogeno in probabilità**
Vaccaro, Carfagna, Piccolella **Complementi ed esercizi di geometria e algebra lineare** (Masson)
Vaccaro, Carfagna, Piccolella **Lezioni di geometria e algebra lineare** (Masson)
Ventre **Introduzione ai grafi planari**
Vivarelli **Appunti di meccanica razionale** (Masson - 2ª edizione)

Problemi di Matematica

Le Olimpiadi della Matematica. Problemi dalle gare italiane a cura di Conti, Barsanti e Franzoni
Torrigiani, Franzoni, Francaviglia **Problemi matematici della Scuola Superiore di S. Anna** (PD)

Saggi

Gardner **L'incredibile dottor Matrix**
Gardner **Ah! Ci sono! Paradossi stimolanti e divertenti**
Smullyan **Donna o tigre?**
Smullyan **Qual è il titolo di questo libro?**
Smullyan **5000 Avanti Cristo... e altre fantasie filosofiche**

Golden Gate

Torrigiani **Ripensare matematica. In preparazione alle facoltà universitarie scientifiche**

Informatica e linguaggi di programmazione

Aho, Ullman **Fondamenti di informatica**
Albano, Ghelli, Orsini **Basi di dati relazionali e a oggetti**
Bovet **Introduzione all'architettura dei calcolatori**
Casella, Cimadomo, De Luca, Fasano **Grande Concetti in rete**
Cordeschi **La scoperta dell'artificiale** (Masson)
Ellis **Programmazione strutturata in Fortran 77** (2ª edizione)
Faletti, Marcandalli, Pacchiardo **La Banca virtuale**
Hennessy, Patterson **Architetture dei calcolatori**
Marcandalli, Pacchiardo **Il commercio elettronico** (Masson)
Pacchiardo **Intranetworking** (Masson)
Patterson, Hennessy **Struttura e progetto dei calcolatori**
Peterson, Davie **Reti di calcolatori**
Sethi **Linguaggi di programmazione**
Vecchione **Sistemi a coda**

SANDRO SALSA
ANNAMARIA SQUELLATI

ESERCIZI DI MATEMATICA

CALCOLO INFINITESIMALE E ALGEBRA LINEARE

volume **1**

Redazione: Sergio Rossi
Copertina: Anna Maria Zamboni
Immagine di copertina: E. Bisignani, M. Emmer, *Soapy Hypercube*, fotografia (1986).
© Bisignani & Emmer

Prima edizione: settembre 2001

Ristampa
5 4 3 2 2005 2004 2003 2002 2001

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.
L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro l'indirizzo a cui rivolgersi è:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: linea_universitaria@bo.zanichelli.it
sito web: www.zanichelli.it

Composizione e disegni: Compomat, località Braccone, Configni (RI)

Stampa: Grafica Ragno
Via Piemonte 26-28, 40064 Tolara di Sotto, Ozzano Emilia (Bologna)
per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

SANDRO SALSA
ANNAMARIA SQUELLATI

ESERCIZI DI MATEMATICA

CALCOLO INFINITESIMALE E ALGEBRA LINEARE

***volume* 1**

ZANICHELLI

INDICE GENERALE

PREFAZIONE

Questa raccolta di esercizi, rivolta agli studenti agli studenti dei primi corsi di Matematica della laurea triennale in una facoltà scientifica (ingegneria, fisica, matematica, economia, informatica) intende proporsi allo studente come verifica del grado di preparazione raggiunto nei fondamenti del calcolo infinitesimale e dell'algebra lineare.

In tal senso, si presenta come naturale completamento del testo:

BRAMANTI-PAGANI-SALSA,
Matematica (*calcolo infinitesimale e algebra lineare*), *Zanichelli*, 2000.

La raccolta di esercizi è divisa in due volumi. Questo primo libro tratta funzioni reali di variabile reale e algebra lineare, in particolare:

- *numeri reali e complessi*
- *successioni e serie*
- *calcolo differenziale e integrale*
- *equazioni alle differenze*
- *rette e piani nello spazio, matrici, sistemi e funzioni lineari.*

Del testo Matematica *si sono mantenute notazioni e simbologia e ad esso si fa spesso riferimento (⇛ BPS) per i richiami di teoria. Si è mantenuta anche la suddivisione in capitoli. Ogni capitolo è suddiviso in sezioni. La singola sezione prevede preliminarmente lo svolgimento di alcuni*

esempi

con lo scopo di fornire una guida per la soluzione dei successivi esercizi. Questi ultimi sono suddivisi in vari gruppi, che riflettono le più comuni tipologie:

test a risposta multipla;

esercizi *che lo studente è invitato ad affrontare autonomamente;*

domande del tipo

vero-falso;

trovare l'errore,

nelle quali lo studente è invitato a fornire risposte motivate sulla base della teoria svolta;

gli **ulteriori esercizi** *che richiedono una maggior padronanza della teoria.*

La soluzione degli esercizi è presentata alla fine di ogni sezione.

Settembre 2001 *Gli autori*

1. NUMERI

1. SOMMATORIE

Esempi

1 La somma

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 29 + 31$$

dei primi sedici interi dispari può essere scritta

$$\sum_{n=1}^{16}(2n-1) \quad \text{oppure} \quad \sum_{m=0}^{15}(2m+1)$$

2 L'espressione $(-1)^k$ è utile per gestire le alternanze di segno. Infatti si ha

$$(-1)^k = \begin{cases} +1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Di conseguenza, la somma

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{16}$$

si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{16} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

3 Un simbolo analogo a quello di somma può essere utilizzato per indicare il prodotto: $\prod$ (pi greca maiuscola). Il prodotto

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$$

può essere scritto

$$\prod_{s=1}^{5}(2s+1)$$

4 Calcoliamo la somma

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$$

Proviamo prima con un caso particolare, per esempio $n = 100$:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

Osserviamo che la somma del primo addendo (1) e dell'ultimo (100), del secondo (2) e del penultimo (99), del terzo (3) e del terzultimo (98) e così via, è sempre 101. Poiché gli accoppiamenti sono 50, la somma deve valere $101 \times 50 = 5050$. Il ragionamento si generalizza immediatamente per n pari: gli accoppiamenti sono $n/2$ con somma $n + 1$. La somma è dunque

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Se n è dispari, basta scorporare l'ultimo termine, ottenendo così la somma d'un numero pari ($= n - 1$) di termini. Applicate poi a quest'ultima la formula appena trovata e infine riaggiungete n. Si ottiene ancora

$$\frac{(n-1)\,n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

In conclusione,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

5 Calcoliamo la somma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

È una somma di termini di una progressione geometrica di ragione $1/2$. Applicando la formula (⇛ BPS, pag. 5)

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1) \tag{2}$$

si ottiene

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Test a risposta multipla

1 $\sum_{m=0}^{100} 1 =$

a) 100 b) m c) 1 d) 101

2 Quale uguaglianza non è corretta? $\sum_{k=1}^{100} k^3 =$

a) $\sum_{s=0}^{99} (s+1)^3$ b) $\sum_{h=2}^{101} (h+1)^3$ c) $\sum_{i=1}^{9} i^3 + \sum_{i=10}^{100} i^3$ d) $\sum_{s=2}^{101} (s-1)^3$

3 $\sum_{k=2}^{100} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{99} \sqrt{k} =$

a) 99 b) 0 c) 9 d) non si può fare

4 Trovare tra le seguenti sommatorie quella ben definita

a) $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k-3}$ b) $\sum_{k=0}^{-4} \frac{1}{k+1}$ c) $\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k-1}$ d) $\sum_{k=0}^{4/3} \frac{1}{k-9}$

Esercizi

1 Scrivere per esteso

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{3^h}{h} \qquad \frac{3}{1} + \frac{9}{2} + \frac{3^3}{3} + \frac{3^4}{4} + \cdots \frac{3^n}{n}$$

2 Scrivere in forma di sommatoria le seguenti somme

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{900} \qquad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots - \frac{1}{900} = \sum_{k=1}^{30} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$$

3 Mostrare che

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

4 Dimostrare la formula

$$\sum_{h=0}^{n-1} (a + hr) = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,r\right] \tag{3}$$

5. Calcolare la somma

$$3+7+11+\cdots+91=\sum_{k=0}^{22}(3+4k) = \frac{94\cdot 23}{2} = 47\cdot 23 = 1081$$

$\frac{(91+3)\,23}{2}$

6. La (3) vale anche se $r<0$? Calcolare la somma dei primi 10 termini della sequenza

$$40,\ 37,\ 34,\ 31,\ldots \qquad \sum_{k=0}^{9}(40-3k)$$

7. Calcolare le somme

$$\sum_{k=2}^{8}(-3)^k \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$$

8. Dimostrare che, se $m<n$, si ha, per $q\neq 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a\cdot q^k = a\cdot\frac{q^{n+1}-q^m}{q-1}$$

Vero o falso?

1. V F $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta\sum_{i=1}^{n}y_i$

2. V F $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(ax_i)=a^n\prod_{i=1}^{n}x_i$

3. V F $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\prod_{i=1}^{n}x_i+\prod_{i=1}^{n}y_i$

Ulteriori esercizi

Nello svolgimento dei seguenti esercizi è proposto l'uso del principio riportato sotto.

Principio di induzione – *Sia $p(n)$ una formula o una proprietà dipendente dal numero $n\in\mathbb{N}$. Se valgono le seguenti due condizioni:*
(i) *$p(n_0)$ è vera,*
(ii) *per ogni $n\geq n_0$, se $p(n)$ è vera allora $p(n+1)$ è vera, allora $p(n)$ è vera per ogni $n\geq n_0$.*

Nel secondo passo, in pratica, si assume vera $p(n)$ (ipotesi di ricorrenza) e si cerca di dedurre $p(n+1)$.

1. Utilizzando il principio di induzione, controllare la formula (2)

$$\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\frac{q^n-1}{q-1}\qquad (q\neq 1)$$

2. Utilizzando il principio di induzione, controllare le formule

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

La risposte esatte sono

1. $\boxed{d}$
Si tratta di una somma di 101 termini (l'indice varia da 0 a 100) tutti uguali a 1.

2. $\boxed{b}$
Se si pone $k=h+1$, l'indice h varia da 0 a 99, non da 2 a 101.

3. $\boxed{c}$
Nella differenza gli addendi da 2 a 99 si elidono; rimane $\sqrt{100}-\sqrt{1}=9$.

4. $\boxed{c}$
L'indice della sommatoria deve essere un numero naturale. Nella somma in $\boxed{a}$ sostituendo a k il valore 3 si ottiene $\frac{1}{0}$!

Esercizi

1. Per $h=1$ si ha 3, per $h=2$ si ha $\frac{9}{2},\ldots$ In conclusione:

$$3+\frac{9}{2}+\frac{27}{3}+\frac{81}{4}+\cdots+\frac{3^n}{n}$$

2. La prima somma ha come termini gli inversi dei quadrati dei naturali dispari da 1 a 30; nella seconda essi compaiono a segni alternati. Le somme possono essere scritte:

$$\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{i^2}\qquad \sum_{i=1}^{30}(-1)^{i-1}\frac{1}{i^2}$$

3 Si ha

$$a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_{n-2} + a_n - a_{n-1} = a_n - a_0$$

perché tranne il secondo e il penultimo termine tutti gli altri si semplificano due a due.

4 Basta scrivere

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr) = \sum_{k=0}^{n-1} a + r\sum_{k=1}^{n-1} k$$

ed usare la (1) con $n-1$ al posto di n

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kr) = na + r\frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,r\right]$$

5 Applicando la formula ricavata nell'esercizio precedente si trova

$$\sum_{k=0}^{22}(3+4k) = \frac{23}{2}\,(2\cdot 3 + 22\cdot 4) = 1081$$

6 Sì, poiché il procedimento dell'esercizio 4 funziona anche con $r<0$. Si ha

$$\sum_{i=0}^{9}(40-3i) = 265$$

7 Per la prima somma si ha, raccogliendo $(-3)^2$ e applicando la formula (2),

$$\sum_{k=2}^{8}(-3)^k = (-3)^2\sum_{k=0}^{6}(-3)^k = 9\frac{(-3)^7-1}{-3-1} = 4923$$

Per la seconda somma si ha

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases}$$

8 Si ha

$$\sum_{k=m}^{n} a\cdot q^k = a\cdot q^m\sum_{k=0}^{n-m} q^k = a\cdot q^m\frac{q^{n-m+1}-1}{q-1} = a\cdot\frac{q^{n+1}-q^m}{q-1}$$

Vero o falso?

1 Vero, per le proprietà del simbolo di somma (⇒ BPS, pag. 4)

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta y_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha x_i + \sum_{i=1}^{n}\beta y_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} y_i$$

2 Vero. Si ha

$$\prod_{i=1}^{n}(ax_i) = (ax_1)\cdot(ax_2)\cdots(ax_n) = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n \text{ volte}}\cdot x_1\cdot x_2\cdots x_n = a^n\prod_{i=1}^{n} x_i$$

3 Falso. Se fosse vera, già per $n=2$ si avrebbe

$$(x_1+y_1)\,(x_2+y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

manifestamente errata.

Ulteriori esercizi

1 Utilizziamo il principio di induzione. Qui $p\,(n)$ è la formula

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{q^n-1}{q-1} \qquad (q\neq 1) \tag{4}$$

e $n_0 = 1$. Il principio prevede due passi:

(i) Controllare che la formula sia vera per $n=1$. Vero: infatti, sostituendo 1 a n, entrambi i membri risultano uguali a 1.
(ii) Verificare l'implicazione $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, per ogni $n\geq 1$.

In questo caso ciò equivale ad assumere vera la (4) (ipotesi di ricorrenza) e dedurre la formula per $n+1$, cioè che

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Per sfruttare l'ipotesi di ricorrenza, conviene mettere in evidenza la somma dei termini fino a $n-1$, scrivendo

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=1}^{n-1} q^k + q^n$$

Così, usando l'ipotesi di ricorrenza, si ha

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^k + q^n = \frac{q^n-1}{q-1} + q^n = \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

In base al principio di induzione, la (4) è vera per ogni $n\geq 1$.

2 Dimostriamo la prima formula. Qui si ha

$$p(n):\quad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \tag{5}$$

e $n_0 = 1$.

(i) La formula è vera per $n=1$; infatti, sostituendo 1 a n, entrambi i membri risultano uguali a 1.
(ii) Verifichiamo l'implicazione $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, per ogni $n\geq 1$.

Assumiamo vera la (5) (ipotesi di ricorrenza) e deduciamo la formula per $n+1$, cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=(n+1)^2$$

Per sfruttare l'ipotesi di ricorrenza, conviene mettere in evidenza la somma dei termini fino a n, scrivendo

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2n+1$$

Così, usando l'ipotesi di ricorrenza, si ha

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=n^2}+2n+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

In base al principio di induzione, la (4) è vera per ogni $n \geq 1$.
Per la seconda si ha

$$p(n): \quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{6}$$

e ancora $n_0=1$.

(i) La formula è vera per $n=1$; infatti, sostituendo 1 a n, entrambi i membri risultano uguali a 1.
(ii) Verifichiamo l'implicazione $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, per ogni $n \geq 1$.

Assumiamo vera la (6) (ipotesi di ricorrenza) e deduciamo la formula per $n+1$, cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Per sfruttare l'ipotesi di ricorrenza, mettamo in evidenza la somma dei termini fino a n, scrivendo

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2$$

Così, usando l'ipotesi di ricorrenza, si ha

$$\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=$$
$$=(n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

In base al principio di induzione, la (6) è vera per ogni $n \geq 1$.

2. CALCOLO COMBINATORIO

Scopo del calcolo combinatorio è fornire alcuni metodi di conteggio per particolari raggruppamenti di oggetti. Indichiamo i raggruppamenti più comuni con realtive formule. Il loro uso è illustrato negli esempi che seguono.

- *Permutazioni semplici* — Allineamenti di n (>0) oggetti distinti. Ogni permutazione si distingue per l'ordine con il quale sono disposti gli oggetti. Il loro numero è[(1)]

$$P_n=n!$$

- *Disposizioni semplici* — Allineamenti di k (>0) oggetti distinti scelti tra n ($\geq k$) oggetti distinti. Ogni disposizione si distingue per gli oggetti e per l'ordine con il quale sono disposti gli oggetti. Il loro numero è

$$D_{n,k}=n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)$$

- *Combinazioni semplici* — Scelte di k (>0) oggetti distinti da un gruppo di n ($\geq k$) oggetti distinti. Ogni combinazione si distingue per gli oggetti, non importa l'ordine. Il loro numero è

$$C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ricordiamo che il numero $\binom{n}{k}$ prende il nome di *coefficiente binomiale*, dalla formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \tag{7}$$

Esempi

1 *Quanti sono i possibili "ordini di arrivo" in una corsa di* 17 *cavalli? Quante sono le possibili scommesse TRIO?*
Ragioniamo così: il primo posto può essere occupato in 17 modi, il secondo in 16, il terzo in 15. Il numero è quindi

$$17\cdot 16\cdot 15=4080$$

Generalizzando possiamo calcolare il modo in cui *disporre* n oggetti distinti in k ($\leq n$) posti. Consideriamo k scatole come in figura

$$\underbrace{\square\ \ \square\ \ \square\ \cdots\square}_{k\ \text{scatole}}$$

---

(1) Ricordiamo che per convenzione si pone $0!=1$

La prima può essere riempita in n modi, la seconda in $n-1,\dots$ Per l'ultima, avendo già sistemato $k-1$ oggetti rimangono $n-k+1$ possibilità di scelta. Si ottiene il numero delle *disposizioni semplici*

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

Se $n = k$ si ottiene il numero delle *permutazioni semplici*

$$P_n = n!$$

2 *Otto giocatori di biliardo devono affrontarne altri otto in singolar tenzone (uno contro uno). Quanti sono gli accoppiamenti possibili?*
Fissando gli otto giocatori di una squadra, si ottengono tutti gli accoppiamenti facendo ruotare o, meglio, facendo *permutare* in tutti i modi possibili gli altri otto giocatori. Il numero dei possibili accoppiamenti, dunque, è

$$P_8 = 8! = 40320$$

3 *In quanti modi si possono scegliere 5 carte da gioco da un mazzo di 40?*
Ragioniamo come nell'esempio 1: la prima carta può essere scelta in 40 modi diversi, la seconda in 39, la terza in 38, la quarta in 37 e l'ultima in 36 modi. Ma non ci interessa l'ordine in cui prendiamo le carte: nulla cambia se la prima si scambia con la seconda o con la terza. Possiamo prendere le stesse 5 carte in ordine diverso in 5! modi diversi. I modi in cui si possono scegliere 5 carte da gioco da un mazzo di 40 risultano quindi

$$\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5!} = 658008$$

Generalizzando possiamo contare le possibili scelte (*combinazioni semplici*) di k (>0) oggetti da un gruppo di n ($\geq k$):

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

4 *Quanti sono i possibili anagrammi della parola ANAGRAMMA?*
Per rispondere a questa domanda dobbiamo introdurre le *permutazioni con ripetizione* ossia permutazioni di n oggetti non tutti distinti tra loro. La parola ANAGRAMMA è composta di 9 lettere (gli oggetti) di cui 4 uguali tra loro (le A), 2 uguali tra loro (le M), le altre 3 distinte tra loro e dalle precedenti. Non distinguendo le A tra loro e le M tra loro, è evidente che il numero di permutazioni distinte è minore di 9!. Per calcolarlo, etichettiamo provvisoriamente con un indice le lettere uguali e consideriamo la parola

$$\mathrm{A_1NA_2GRA_3M_1M_2A_4}$$

con lettere ora tutte distinte. Osserviamo ora che ad ognuna delle 4!=24 permutazioni delle lettere $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{A_4}$, con le altre lettere bloccate, corrisponde una sola permutazione della parola originale. Si deduce che le permutazioni con le lettere A non distinte tra loro sono in numero di $9!/4!$ Così pure alle due permutazioni delle lettere $\mathrm{M_1}$, $\mathrm{M_2}$ corrisponde una sola permutazione della parola originale. Ne segue che il numero di anagrammi richiesto è

$$\frac{9!}{4!2!} = 7560$$

Generalizzando: sia X un insieme di n oggetti, di cui k_1 uguali tra loro, k_2 uguali tra loro e distinti dai precedenti, ... , k_h uguali tra loro e distinti dai precedenti, con $k_1 + k_2 + \cdots + k_h = n$. Il numero di permutazioni distinte di questi oggetti che indichiamo con $P^*_{k_1,k_2,\dots,k_h}$ è

$$P^*_{k_1,k_2,\dots,k_h} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_h!}$$

5 *Quante sono le schedine del totocalcio? Ossia, in quanti modi possono trovare posto nelle 13 caselline della schedina i 3 simboli 1 X 2?*
È chiaro che per ogni casellina abbiamo 3 possibili scelte e quindi il numero è $D^*_{3,13} = 3^{13} = 1.594.323$. Generalizzando possiamo parlare di *disposizione con ripetizione di n oggetti di classe k*. In questo caso non vi sono restrizioni su k, che può essere anche maggiore di n. Il numero di queste disposizioni è indicato con $D^*_{n,k}$. Si ha:

$$D^*_{n,k} = n^k$$

Test a risposta multipla

1. $\binom{x}{3} = \binom{x}{4}$ per

[a] $x = 7$ [b] $x = 12$ [c] $x = 1$ [d] nessun x

2. Il coefficiente del termine a^2b^3 nello sviluppo di $(a-b)^5$ è

[a] 5 [b] 10 [c] -10 [d] -5

3. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$

[a] è sempre un numero naturale [b] può anche non essere intero [c] non è mai intero [d] è irrazionale

4. Quante sono le schedine del totocalcio che contengono esattamente tre "2" e cinque "X"?

[a] 3^5 [b] $3^5\binom{8}{5}\binom{13}{8}$ [c] $\frac{13!}{5!3!5!}$ [d] $3^5\binom{13}{8}$

5. Quante sono le diagonali di un poligono di n lati?

[a] n [b] $\binom{n}{2}$ [c] $\binom{n}{2} - n$ [d] $n - \binom{n}{2}$

Esercizi

1. Quanti sono gli anagrammi della parola *MILANO*?

2. Sviluppare con la formula del binomio $(1+x)^n$ e $(1-x)^n$.

3. Calcolare quanto valgono le somme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

4. Dimostrare le proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

5. Nello sviluppo di

$$\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x}\right)^7$$

esistono i termini x^3 e $\sqrt{x}$? Se sì, calcolarne i coefficienti.

6. Se un insieme X ha n elementi, quanti sono i suoi sottoinsiemi (contando anche l'insieme vuoto e X stesso)?

7. Si vogliono contraddistinguere articoli diversi in un catalogo con un codice alfanumerico del tipo A723C, che inizia e finisce con una lettera (dell'alfabeto italiano) e in mezzo ha tre cifre (da 0 a 9). Quanti codici si possono costruire?

8. In questo e nel prossimo esercizio si chiede di valutare la *probabilità* di un evento secondo la formula

$$\frac{\text{numero di casi favorevoli all'evento}}{\text{numero di casi possibili}}$$

In un gruppo di 25 persone, nate lo stesso anno (non bisestile), è più probabile che ve ne siano almeno due nate lo stesso giorno (dello stesso mese) o che siano nate tutte in giorni diversi?

9. Qual è la probabilità di avere un "full" (tris + coppia) pescando 5 carte da un mazzo di 32 carte?

Ulteriori esercizi

1. Verificare le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali

$$C_{n,k}=\frac{n}{k}C_{n-1,k-1} \qquad 1\le k\le n;$$
$$C_{n,k}=\frac{n(n-1)}{k(k-1)}C_{n-2,k-2} \qquad 2\le k\le n$$

2. Calcolare le seguenti somme

$$\text{(a)}\ \sum_{k=0}^{n}kC_{n,k} \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n,k}}{k+1}$$

3. Quante sono le quaterne di interi non negativi (x_1,x_2,x_3,x_4) soluzioni dell'equazione

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7$$

1.2. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{a}$

Si ha

$$\binom{x}{3}=\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \qquad \binom{x}{4}=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

Uguagliando e semplificando, si ottiene $x-3=4 \Rightarrow x=7$.

2. $\boxed{c}$

Per la formula del binomio (7),

$$(a-b)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}(-b)^k$$

e il coefficiente di a^2b^3 è $-\binom{5}{3}$.

3. $\boxed{a}$

Si ha

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

e sicuramente tra i k fattori del numeratore si trova un multiplo di 2, uno di 3, ..., e uno di k. Si può semplificare il denominatore con il numeratore e ottenere così un numero naturale.

4 c

Tali schedine conterranno cinque "1", tre "2" e cinque "X": quindi sono tante quanti gli allineamenti di 13 oggetti di cui 5 uguali tra loro, 3 uguali tra loro e distinti dai precedenti, altri 5 uguali tra loro e distinti dai precedenti. Il loro numero è

$$\frac{13!}{5!3!5!} = 72072$$

5 c

I segmenti che uniscono i punti due a due sono $\frac{n(n-1)}{2}$ di cui n sono i lati del poligono.

Esercizi

1 Essendo tutte le lettere distinte, si tratta di permutazioni semplici di 6 oggetti; il loro numero è $6! = 720$.

2 Per la formula del binomio (7), si ha

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$

3 Sostituendo $x = 1$ nelle due formule dell'esercizio 2 si trova

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

4 Per la prima: il numero di allineamenti di k oggetti di tipo a e $n-k$ di tipo b è, ovviamente, uguale al numero di allineamenti di $n-k$ oggetti di tipo a e k di tipo b.
Per la seconda, si possono contare gli allineamenti che iniziano con una a: sono $\binom{n-1}{k-1}$ e quelli che iniziano con una b: sono $\binom{n-1}{n-k-1} = \binom{n-1}{k}$. La somma

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

fornisce il numero totale degli allineamenti che è $\binom{n}{k}$.

5 Risulta, per la formula del binomio (⇛ BPS, pag. 6),

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \left(2\sqrt{x}\right)^{7-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{7} (-1)^k \binom{7}{k} 2^{7-k} 3^k x^{7/2-3/2k}$$

Il termine x^3 compare se, per qualche k naturale, si ha

$$\frac{7}{2} - \frac{3}{2}k = 3$$

Essendo la soluzione di questa equazione $k = 1/3$ il termine x^3 non compare nello sviluppo del binomio.
Il termine $\sqrt{x}$ si ottiene ponendo

$$\frac{7}{2} - \frac{3}{2}k = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

Pertanto nello sviluppo del binomio il termine compare e ha coefficiente

$$(-1)^2 \binom{7}{2} 2^{7-2} 3^2 = 6048$$

6 Si contano i sottoinsiemi che hanno un solo elemento, quelli con due, con tre, ... Selezionare un sottoinsieme di k elementi di X equivale a scegliere una combinazione semplice di k elementi tra n. I sottinsiemi di X che hanno k elementi sono $\binom{n}{k}$.
Ricordando che tra i sottoinsiemi di X ci sono anche X stesso ($k = n$) e l'insieme vuoto ($k = 0$), si ottiene (vedi l'esercizio 3)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

7 Sono $21^2 \cdot 10^3 = 441000$.

8 Calcoliamo la probabilità che le persone siano nate tutte in giorni diversi. Occorre contare il numero di casi favorevoli (persone nate in giorni diversi) e il numero di casi possibili (persone nate in giorni anche non distinti). Pensiamo all'elenco dei 365 giorni di un anno. Il numero dei casi favorevoli è uguale al numero di diversi elenchi di 25 giorni dell'anno tutti diversi, ossia al numero delle disposizioni semplici di 25 oggetti scelti tra 365 dati, che è

$$D_{365,25} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 341$$

Il numero dei casi possibili è uguale al numero di diversi elenchi di 25 giorni dell'anno non necessariamente distinti, cioè alle disposizioni con ripetizione di 25 oggetti su 365, che è

$$D^*_{365,25} = 365^{25}$$

La probabilità che le persone siano nate in giorni diversi è il loro rapporto

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 341}{365^{25}} = 0,4313\ldots \simeq 43\%$$

Risulta quindi più probabile che almeno due persone siano nate lo stesso giorno.
Invitiamo il lettore a provare a calcolare qual è il massimo numero di persone tale che la probabilità che siano nate in giorni diversi sia maggiore della probabilità che ne esistano almeno due nate lo stesso giorno.

9 Il numero di casi possibili è

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5!} = 201376$$

Il numero dei casi favorevoli è

$$\underbrace{8\cdot\binom{4}{3}}_{\text{possibili tris}}\cdot\underbrace{7\cdot\binom{4}{2}}_{\text{possibili coppie}}=1344$$

La probabilità è

$$\frac{1344}{201376}\simeq 0.006674$$

Ulteriori esercizi

1 Si ha, per la prima uguaglianza,

$$C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!}=$$
$$=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=\frac{n}{k}C_{n-1,k-1}$$

per la seconda

$$C_{n,k}=\frac{n\,(n-1)}{k\,(k-1)}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\,(n-2-(k-2))!}=$$
$$=\frac{n\,(n-1)}{k\,(k-1)}\binom{n-2}{k-2}=\frac{n\,(n-1)}{k\,(k-1)}C_{n-2,k-2}$$

2 (a) Per l'esercizio precedente, si ha

$$\sum_{k=0}^{n}kC_{n,k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}=$$

(ponendo $h=k-1$)

$$=n\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n-1}{h}=n2^{n-1}$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n,k}}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}=$$

(ponendo $h=k+1$)

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n+1}{h}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

3 Cerchiamo il numero di quaterne di interi non negativi (x_1,x_2,x_3,x_4) soluzioni dell'equazione

$$x_1+x_2+x_3+x_4=7$$

Sia (x_1,x_2,x_3,x_4) una soluzione. A questa associamo un allineamento di 3 cerchi e 7 asterischi nel modo seguente.
x_1 asterischi [cerchio] x_2 asterischi [cerchio] x_3 asterischi [cerchio] x_4 asterischi.

Per esempio, alla soluzione $(1,3,2,1)$ è associato l'allineamento

$$\underbrace{*}_{x_1}\circ\underbrace{***}_{x_2}\circ\underbrace{**}_{x_3}\circ\underbrace{*}_{x_4}$$

Viceversa, ogni allineamento di 3 cerchi e 7 asterischi individua una quaterna soluzione. Per esempio, all'allineamento

$$\circ****\circ*\circ**$$

corrisponde la soluzione $(0,4,1,2)$. Dunque l'insieme delle quaterne cercato è uguale alle permutazioni di 10 oggetti di cui 3 uguali tra loro e 7 uguali tra loro e distinti dai precedenti. Ne segue che il numero cercato è

$$\frac{10!}{3!7!}=120$$

Il lettore provi a generalizzare: calcolate quante sono le n-uple $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ di interi non negativi soluzioni di

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k\quad(k\geq 0)$$

3. NUMERI REALI

Test a risposta multipla

1 Il polinomio x^3-2 diviso per x^2-2 dà come resto

[a] $2x-2$ [b] $-2x+2$ [c] $-2x-2$ [d] $2x+2$

2 $\sqrt{8}+\sqrt{18}=$

[a] $\sqrt{26}$ [b] 7 [c] $5\sqrt{2}$ [d] $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

3 $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}:a=$

[a] $a^{-1/3}$ [b] a [c] $a^{1/3}$ [d] a^{-3}

$a^{-\frac{1}{3}}$

4 $\log a-\log b=$

[a] $\log t(a-b)$ [b] $\dfrac{\log a}{\log b}$ [c] $\log\dfrac{a}{b}$ [d] non ha senso se $b<a$

5 Se $\log_7(\log_3(\log_2 x))=0$ allora $x=$

[a] 8 [b] 7 [c] 9 [d] nessuna delle altre risposte

6 Il numero di soluzioni dell'equazione $x-|2x+1|=3$ è

[a] 0 [b] 1 [c] 2 [d] 3

7 L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^3 - 2x^2 - x + 2 < 0$ è formato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che:

[a] $-1 < x < 1$ o $x > 2$ [b] $x < -1$ o $1 < x < 2$ [c] $x < -1$ [d] $x > 2$

8 L'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x+2} > x$ è formato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che:

[a] $-1 < x < 2$ [b] $-2 \leq x < 2$ [c] $-2 \leq x < 1$ [d] $x \geq -2$

9 Per quale tra le seguenti disequazioni le soluzioni sono i numeri reali $x > 1$?

[a] $\sqrt{x+3} > -2$ sempre [b] $\sqrt{5-x} < 2$ [c] $\sqrt{5-x} < -2$ mai [d] $\sqrt{x+3} > 2$

10 L'insieme delle soluzioni della disequazione $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$ è formato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che:

[a] $x < 0$ [b] $x > 0$ [c] $x \neq 0$ [d] $x < \frac{2}{3}$

11 L'intersezione dei due intervalli $[2, 7)$e $(7, 9]$ è

[a] $(2, 9)$ [b] l'insieme vuoto [c] $\{7\}$ [d] $\{0\}$

12 L'unione dei due intervalli $[2, 7)$ e $(7, 9]$ è

[a] $[2, 9]$ [b] $\mathbb{R}$ [c] $[2, 9] \setminus \{7\}$ [d] $[2, 9]$

13 Quale insieme ha sia massimo che minimo?

[a] $[2, 9]$ [b] $[0, 5]$ [c] $[0, 1] \cup \{7\}$ [d] $[0, 2] \cup \{5\}$

14 Sia $A = \left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = (-1)^n \frac{5}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Quale affermazione non è corretta?

[a] A è limitato [b] $\sup A = 5$ [c] A non ha massimo [d] $\min A = -\frac{5}{2}$

15 Quali tra i seguenti insiemi non ha come minimo 2? L'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tali che(2)

[a] $x^3 \geq 8$ [b] $[x] = 2$ [c] $x = 2 + \frac{3}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ [d] $x^2 + 8 = 6x$

(2) Il simbolo $[x]$ indica la parte intera di x, che è il massimo intero minore o uguale a x. Per esempio

$$[3.14] = 3 \qquad [-2.58] = -3$$

Esercizi

1 Scrivere in forma esponenziale i numeri

$$2350000000 \qquad 0.0000168$$

$2{,}35 \cdot 10^9$ $1{,}68 \cdot 10^{-5}$

2 Dati due numeri positivi a e b, la loro *media aritmetica* è $\frac{a+b}{2}$ mentre la loro *media geometrica* è $\sqrt{ab}$. Qual è la più grande?

3 Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$$

4 Risolvere le disequazioni

(a) $\frac{2x-1}{x-3} \leq \frac{x+1}{x-1}$ (b) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2-x}$

(c) $\frac{3x^2+4x+1}{x(3-x)(4-x)} \leq 0$ (d) $\frac{2}{4x^2+3} + \frac{5}{(x-1)^2} > 0$

5 Risolvere geometricamente (in termini di distanza) le disequazioni

(a) $|2x - 4| < 1$ (b) $|x - 2| > |x - 3|$

e disegnare sulla retta reale il risultato.

6 Se $\ln x = 2\ln a + 3\ln b - \ln c$, allora $x = \ldots$

7 Calcolare

$$\sum_{n=1}^{100} \ln \frac{n+1}{n}$$

8 Risolvere le disequazioni

✓ (a) $\frac{x}{|x|}(1-x) < 1 + x$ ✓ (b) $|3x - 1| > x$

(c) $\sqrt[3]{x^3 - 8} - x + 2 \geq 0$ ✓ (d) $\sqrt{x^2 - 16} > |x + 1|$

(e) $\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-3} > 1$ (f) $\frac{\sqrt{x+2}}{x-4} \leq 1$

9 Risolvere le disequazioni

(a) $2^x + 3^x > 0$ (b) $\log_3(x^2 - 3) < 0$

(c) $\frac{9^x}{3^{x+1}} < 81$ (d) $\log_{1/2} \frac{x}{2x+1} \geq 0$

10. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x = 2^{-n}, \ n \in \mathbb{N}\} \qquad B = [0,1] \cup \{2\}$$

Dire se sono anche massimo e minimo.

Vero o falso?

1. Siano x_i, $i = 1, \ldots, n$, α numeri reali positivi.

(a) V F $\quad \ln \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

(b) V F $\quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$

(c) V F $\quad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$

2. Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

(a) V F Se L è il massimo di E allora è anche estremo superiore di E.

(b) V F L'estremo superiore di E non appartiene mai a E.

(c) V F E può avere molti massimi e molti minimi.

(d) V F Un insieme composto da un solo numero reale non ha massimo né minimo.

Trova l'errore

1. Sia $a \neq 0$. La soluzione della disequazione

$$ax + b < 0$$

è l'insieme degli x tali che

$$x < -\frac{b}{a}$$

2. La disequazione

$$x^2 (x-2) \geq 0$$

è equivalente a

$$x \geq 2$$

3. La disequazione razionale fratta

$$\frac{2x}{x^2 - 1} > 1$$

è equivalente a

$$2x > x^2 - 1$$

da cui

$$x^2 - 2x - 1 < 0$$

che ha le soluzioni

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$

4. La disequazione

$$\sqrt{x+3} \leq x - 3$$

è equivalente a

$$x + 3 \leq (x-3)^2$$

ossia

$$x^2 - 7x + 6 \geq 0$$

che ha soluzioni

$$x \leq 1 \quad \text{o} \quad x \geq 6$$

5. L'equazione

$$2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 1$$

dato che $1 = 2^0$ è equivalente a

$$x + 1 + x + x - 1 = 0$$

la cui soluzione è

$$x = 0$$

Ulteriori esercizi

1. Dimostrare che, per ogni a, b, c, d reali positivi vale la doppia disuguaglianza

$$\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\} \leq \frac{a+b}{c+d} \leq \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{b}{d}\right\}$$

2. (a) Dimostrare che, se $x \geq 0$, per ogni intero $n \geq 0$ si ha

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{8}$$

(b) Dedurre, per $a \geq 1$, la disuguaglianza

$$\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

3. $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo. $\mathbb{Q}$ è un campo ordinato ma non è completo. Perché?

Trovare una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{N}$ (ossia: dimostrare che $\mathbb{Q}$ è numerabile).

Dimostrare che $\mathbb{R}$ è equipotente ad ogni intervallo.

1.3. Soluzioni

Test a risposta multipla

La risposte esatte sono

1 $\boxed{a}$

$$x^3 - 2 = x\underbrace{\left(x^2 - 2\right)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{(2x-2)}_{\text{resto}}$$

2 $\boxed{c}$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

3 $\boxed{a}$

$\left(a \cdot a^{1/3}\right)^{1/2} : a = a^{2/3-1} = a^{-1/3}$

4 $\boxed{c}$

Proprietà dei logaritmi.

5 $\boxed{a}$

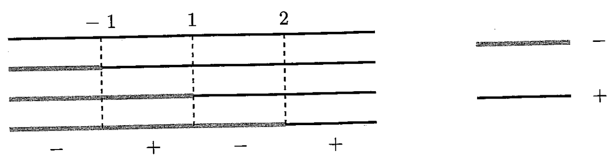
Deve essere $\log_3(\log_2 x) = 1 \Rightarrow (\log_2 x) = 3 \Rightarrow x = 8$

6 $\boxed{a}$

Entrambe le equazioni $x - (2x-1) = 3$ e $x + (2x-1) = 3$ danno soluzioni non accettabili.

7 $\boxed{b}$

Il polinomio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ si scompone nei fattori $(x+1)(x-1)(x-2)$. Il segno del prodotto è riportato nello schema



8 $\boxed{b}$

Occorre ricordare che una radice di indice pari è definita solo se il radicando è positivo e che prima di elevare a quadrato entrambi i termini di una disequazione si deve controllare che siano positivi.

9 $\boxed{d}$

Prima si pone $x \geq -3$ (realtà della radice) e poi si elevano al quadrato i membri della disequazione. Le soluzioni delle altre disequazioni sono $\boxed{a}$ $x \geq -3$; $\boxed{b}$ $1 < x \leq 5$; $\boxed{c}$ impossibile.

10 $\boxed{a}$

Ricordare che se la base è compresa tra 0 e 1 si inverte il verso di disuguaglianza!

11 $\boxed{b}$

Il numero 7 non appartiene ad alcuno dei due intervalli.

12 $\boxed{c}$

Il numero 7 non appartiene ad alcuno dei due intervalli.

13 $\boxed{c}$

Il massimo è 7 e il minimo è 0.

14 $\boxed{c}$

L'insieme è

$$A = \left\{5, -\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{4}, 1, \dots\right\}$$

ed è contenuto nell'intervallo $\left[-\frac{5}{2}, 5\right]$. Il massimo di A è 5 e il minimo è $-\frac{5}{2}$.

15 $\boxed{c}$

2 è estremo inferiore ma non è minimo.

Esercizi

1 $2.35 \cdot 10^9$; $1.68 \cdot 10^{-5}$.

2 Se $a \neq b$ è maggiore la media aritmetica, altrimenti sono uguali. Infatti la disuguaglianza

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

è equivalente a $a + b - 2\sqrt{ab} > 0$ ossia

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$

3 Dall'identità

$$\left(\sqrt{\varepsilon}a - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}b\right)^2 \geq 0$$

si ricava

$$\varepsilon a^2 - 2ab + \frac{1}{\varepsilon}b^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}b^2$$

4 Le soluzioni sono

(a) $1 < x < 3$

(b) $x < 0$ o $0 < x < 1$

(c) $x \leq -1$ o $-1/3 \leq x < 0$ o $3 < x < 4$

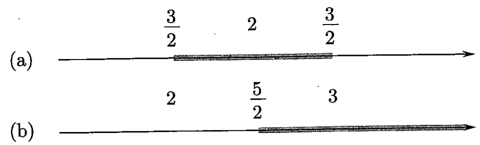
(d) $x \neq 1$ (senza fare conti!).

5 Nei due casi le soluzioni sono gli x reali tali che

(a) $|x-2| < \frac{1}{2}$ ossia tali che distano da 2 meno di $\frac{1}{2}$, cioè

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

(b) distano più da 2 che da 3, ossia $x > \frac{5}{2}$



6 $x = \dfrac{a^2b^3}{c}$

7 Dato che $\ln\dfrac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$, si ha(2)

$$\sum_{n=1}^{100} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln 101$$

8 Le soluzioni sono gli x reali tali che

(a) $x \neq 0$; si ricavano unendo le soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x < 1 + x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x - 1 < 1 + x \end{cases}$$

(b) $x < \frac{1}{4}$ o $x > \frac{1}{2}$; si ricavano unendo le soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3x - 1 > x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ 1 - 3x > x \end{cases}$$

(c) $x \leq 0$ o $x \geq 2$; $\sqrt[3]{x^3 - 8} \geq x - 2$ è equivalente a $x^3 - 8 \geq (x-2)^3 \ldots$

---

(2) Vedi l'esercizio 3, pag. 3.

(d) $x \leq -\frac{17}{2}$; si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \quad \text{(condizione di realtà della radice)} \\ x^2 - 16 > (x+1)^2 \end{cases}$$

(e) $x > 3$; si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ x^2 + x - 2 > (x-3)^2 \end{cases}$$

(f) $-2 \leq x < 4$ o $x \geq 7$; si ricavano unendo le soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x - 4 > 0 \\ x + 2 \leq (x-4)^2 \end{cases}$$

9 Le soluzioni sono gli x reali tali che

(a) $x \in \mathbb{R}$;

(b) $-2 < x < -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} < x < 2$; si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ x^2 - 3 < 1 \end{cases}$$

(l'argomento del logaritmo deve essere positivo e minore di 1).

(c) $x < 5$; basta applicare le proprietà delle potenze: si ricava

$$3^{x-1} < 3^4 \quad \Rightarrow \quad x < 5$$

(d) $x \leq 1$ o $x > 0$; si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2x+1} > 0 \\ \dfrac{x}{2x+1} \leq 1 \end{cases}$$

Ricordare che, essendo la base compresa tra 0 e 1, passando dalla disuguaglianza tra i logaritmi a quella tra gli argomenti, il verso di disuguaglianza cambia!

10 $\sup A = \max A = 1$, $\inf A = 0$, A non ha minimo. $\sup B = \max B = 2$, $\inf B = \min B = 0$

Vero o falso?

1 (a) Vero (per le proprietà dei logaritmi).

(b) Falso. Per esempio con $n = 2$ e $\alpha = 2$, si avrebbe: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2$

(c) Vero.

2 (a) Vero.

(b) Falso. Se coincide col massimo appartiene all'insieme.

(c) Falso.

(d) Falso. Il massimo e il minimo coincidono col numero stesso.

Trovare l'errore

1. Il passaggio è corretto solo se $a > 0$. Per $a < 0$ occorre cambiare il verso di disuguaglianza.

2. Semplificando x^2, si "perde" la soluzione $x = 0$.

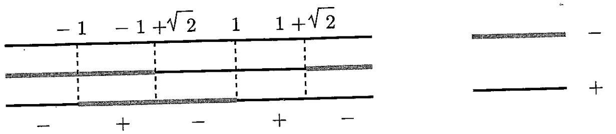
3. Non si può eliminare il denominatore quando non se ne conosce il segno! Il passaggio è corretto solo se $x^2 - 1 > 0$. Poiché $x^2 - 1 > 0$ per $x < -1$ o $x > 1$, le soluzioni della disequazione si ricavano nel modo seguente:

$$\frac{2x}{x^2-1} > 1$$

è equivalente a

$$\frac{2x - x^2 + 1}{x^2 - 1} > 0$$

Le soluzioni sono evidenziate dallo schema



e sono gli x tali che

$$-1 < x < 1 - \sqrt{2} \text{ o } 1 < x < 1 + \sqrt{2}$$

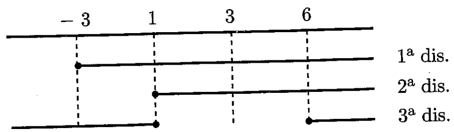
4. In questo esempio sono stati fatti ben due errori! Primo: non si è tenuto conto del fatto che il radicando $x+3$ deve essere ≥ 0. Secondo: non sempre elevando a quadrato entrambi i membri di una disequazione si ottiene una disequazione equivalente, dato che questo è vero solo se entrambi i membri sono non negativi. La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x+3 \leq (x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni gli x reali tali che

$$x \geq 6$$

come mostra lo schema



5. Ripassare le proprietà delle potenze (⇛ BPS, pag. 16)! La soluzione corretta è

$$2 \cdot 2^x + 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = 1 \qquad \frac{7}{2} \cdot 2^x = 1$$
$$2^x = \frac{2}{7} \qquad x = \log_2 \frac{2}{7}$$

Ulteriori esercizi

1. Si abbia, per esempio,

$$\frac{a}{c} \leq \frac{b}{d}$$

Tale disuguaglianza è equivalente a

$$ad \leq bc \tag{9}$$

Allora

$$\frac{a}{c} \leq \frac{a+b}{c+d}$$

infatti si ha

$$ac + ad \leq ac + bc$$

equivalente a (9)
Analogamente, si ha

$$\frac{a+b}{c+d} \leq \frac{b}{d}.$$

2. (a) Per la formula del binomio, si ha, essendo $x \geq 0$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx$$

Oppure, si può usare il principio di induzione, con

$$p(n): \quad (1+x)^n \geq 1 + nx$$

e $n_0 = 1$.

(i) La disuguaglianza è vera per $n = 1$; infatti, sostituendo 1 a n, entrambi i membri risultano uguali a $1 + x$.
(ii) Verifichiamo l'implicazione $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, per ogni $n \geq 1$.

Assumiamo vera la (8)) e deduciamo la formula per $n+1$, cioè che

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

Dalla (8), moltiplicando entrambi i membri per $1+x$, si ottiene

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

In base al principio di induzione, la (8) è vera per ogni $n \geq 1$.
Si noti che la seconda dimostrazione "funziona" anche per $x > -1$.

(b) La seconda disuguaglianza si dimostra ponendo $a = (1+x)^n$. Si ha $x = \sqrt[n]{a} - 1$, da cui

$$a \geq 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

3. Per dimostrare che $\mathbb{Q}$ non è completo, ossia non verifica la proprietà R_4 (⇛ BPS, pag. 14), basta produrre un esempio di insieme superiormente limitato che non possiede estremo superiore (in $\mathbb{Q}$). L'esempio può essere l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

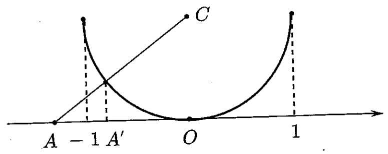
Si osservi che A come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ha come estremo superiore $\sqrt{2}$.

4. Basta produrre un elenco che contenga tutti i numeri razionali. Ci si può limitare ai non negativi, pensando di accostare a ciascun numero il suo opposto. Definiamo altezza di un numero razionale $\frac{h}{k}$ il numero naturale $h+k$. Ordiniamo poi i numeri per altezza crescente, e a parità di $h+k$ per valori di h crescenti. Naturalmente, se uno stesso numero compare già nell'elenco non lo si ripete. Si ha

$h=1$	$\frac{0}{1}=0$			
$h=2$	$\frac{1}{1}=1$			
$h=3$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}=2$		
$h=4$	$\frac{1}{3}$	3		
$h=5$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4

e così via.

5. Dimostriamo, per esempio, che $\mathbb{R}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $(-1,1)$. Un modo per realizzare tale corrispondenza è illustrato nella figura seguente. Al punto A della retta corrisponde il punto A' dell'intervallo $(-1,1)$ e viceversa.



4. NUMERI COMPLESSI

Esempi

1. Calcoliamo in forma algebrica e trigonometrica

$$\text{(a)}\quad \frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} \qquad \text{(b)}\quad (1-i)^4$$

(a) In forma algebrica, si ha

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\cdot\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}i^2}{3-i^2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Poiché $\left|1+\sqrt{3}i\right|=2$, $\arg\left(1+\sqrt{3}i\right)=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, $\left|\sqrt{3}+i\right|=2$, $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=$

$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, in forma trigonometrica si ha

$$1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Ricordando che il modulo di un quoziente è il quoziente dei moduli e che l'argomento è la differenza degli argomenti, si ottiene

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

(b) In forma algebrica, applicando la formula del binomio, si ha

$$(1-i)^4=1-4i+6i^2-4i^3+i^4=-4$$

In forma trigonometrica, poiché $|1-i|=\sqrt{2}$ e $\arg(1-i)=\frac{\pi}{4}$, si ha

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

e perciò

$$(1-i)^4=4\left(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\right)=4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-4$$

2. Cerchiamo le soluzioni dell'equazione

$$z^8+1=0$$

ossia le radici ottave di -1. Occorre scrivere il numero -1 (reale negativo) in forma trigonometrica

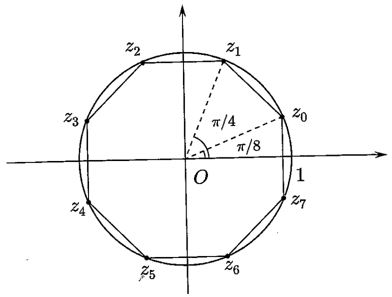
$$-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

Applicando la formula per le radici n-esime (⇛ BPS, pag. 27) si ottengono le otto radici

$$z_k=\cos\frac{(2k+1)\pi}{8}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{8} \qquad k=0,1,2,3,4,5,6,7$$

Sul piano complesso sono rappresentate dai vertici di un poligono regolare di 8 lati. Le radici possono essere anche scritte in forma algebrica: per esempio, applicando le formule di bisezione (che il lettore ricorderà con gioia), si ha

$$z_0=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$



3 Disegniamo sul piano complesso gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} = z\overline{z}\}$$
$$B = \{w \in \mathbb{C} : w = (1+i)\,z \quad z \in A\}$$

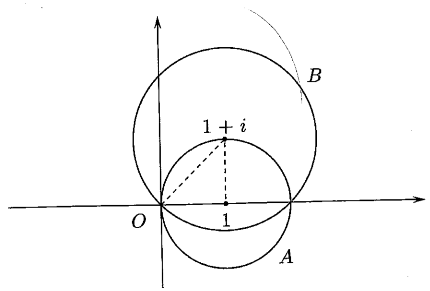
Posto $z = x + iy$, si ha[3] $z + \overline{z} = 2x$, $z\overline{z} = x^2 + y^2$, per cui all'insieme A corrisponde nel piano xy l'equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$, circonferenza con centro in $(1, 0)$ e raggio 1. L'insieme A può essere anche scritto nella forma

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$$

(circonferenza con centro in $z_0 = 1$ e raggio 1). L'insieme B, si ottiene dall'insieme A mediante una trasformazione lineare nel campo complesso, cioè mediante una dilatazione ed una rotazione, individuate rispettivamente dal modulo e dall'argomento del numero $1+i$. Poiché $|1+i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1+i) = \pi/4$, si ha

$$|w| = \sqrt{2}\,|z| \qquad \arg w = \arg z + \frac{\pi}{4}$$

Il coefficiente di dilatazione è $\sqrt{2}$ e l'angolo di rotazione $\pi/4$. L'insieme B, nel piano complesso è rappresentato da una circonferenza con centro in $1+i$ e raggio $\sqrt{2}$.



[3] Osserviamo che la somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono numeri reali.

Test a risposta multipla

1 Il modulo e l'argomento del numero complesso $(i-1)^4$ sono rispettivamente

a) 4 e 2π b) 2 e π c) 1 e π d) 4 e π

2 L'argomento principale del numero complesso $z = \dfrac{3i}{1-i}$ è

a) $\frac{3}{4}\pi$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4}$ d) π

3 Una soluzione dell'equazione $z^4 + 4 = 0$ è

a) $-1-i$ b) $\sqrt{2}i$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}(-1-i)$

4 Una soluzione dell'equazione $z^6 + 1 = 0$ è

a) $1 - i\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3} - i$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

5 L'insieme delle soluzioni dell'equazione $|z + 2i| = |z - 2|$, sul piano complesso è

a) formato dai punti di una circonferenza b) costituito da due punti c) vuoto d) formato dai punti di una retta

6 Quattro numeri complessi stanno sui vertici di un quadrato nel piano complesso. Tre di questi sono $1 + 2i$, $-2 + i$ e $-1 - 2i$. Il quarto numero è

a) $2+i$ b) $2-i$ c) $-1+2i$ d) $-2-i$

Esercizi

1 Calcolare

$$\frac{3i-2}{i-2} + \frac{i-3}{1-2i} + \frac{(1-i)(i-2)}{(2i+1)^2}$$

2 Risolvere le equazioni

$$(a)\ (z-1)^3 + i = 0 \qquad (b)\ z^6 - 64 = 0$$

3 Risolvere l'equazione

$$(z+i)^3 = \frac{1-i}{1+i}$$

e segnare le soluzioni sul piano complesso.

4 Disegnare sul piano complesso le soluzioni delle equazioni

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0 \qquad z^6 + 8 = 0$$

Le due equazioni hanno qualche soluzione in comune?

5 Disegnare sul piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ 1 \le |z| \le 2 \quad 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{3} \right\}$$
$$B = \{ w \in \mathbb{C} : \ w = z^3 \quad z \in A \}$$
$$C = \{ v \in \mathbb{C} : \ v = \sqrt[4]{z} \quad z \in A \}$$

6 Disegnare sul piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \left| \overline{z} + \frac{6}{z} \right| \le 5 \right\}$$
$$B = \{ w \in \mathbb{C} : \ w = z + i, \ \ z \in A \}$$
$$C = \{ v \in \mathbb{C} : \ v = iw, \ w \in B \}$$

7 Scrivere l'equazione di grado minimo a coefficienti reali che ha tra le sue radici in $\mathbb{C}$ i numeri complessi $2 - i$ e $1 + 2i$.

8 Scrivere in forma complessa l'equazione della circonferenza

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

e delle semirette

$$y = \pm x \qquad x > 0$$

Vero o falso?

1 [V] [F] In $\mathbb{C}$ ogni polinomio di grado ≥ 2 è riducibile.

2 [V] [F] In $\mathbb{R}$ esistono polinomi di grado > 2 non riducibili.

Ulteriori esercizi

1 Scomporre in fattori di secondo grado a coefficienti reali il polinomio $x^4 + 1$.

2 Calcolare le soluzioni dell'equazione

$$z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$$

3 Le soluzioni dell'equazione di terzo grado $x^3 + px - q = 0$ (alla quale tutte le altre si possono per altro ricondurre) si possono scrivere nella forma

$$x = u + v$$

dove

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} \qquad v = -\frac{p}{3u}$$

Calcolare cosa succede applicandola per cercare le radici dell'equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

4 Utilizzando il principio di induzione, dimostrare la formula di De Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$.

1.4. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1 $\boxed{d}$

$|i-1| = \sqrt{2}$, $\arg(i-1) = \frac{\pi}{4}$ per cui $\left|(i-1)^4\right| = 4$, $\arg(i-1)^4 = 4\frac{\pi}{4} = \pi$.

2 $\boxed{a}$

$\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$, $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ per cui $\arg\frac{3i}{1-i} = \frac{3\pi}{4}$.

3 $\boxed{a}$

Le radici quarte di -4 sono i numeri

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

La $\boxed{a}$ corrisponde a $k = 2$.

4 $\boxed{d}$

Le radici seste di -1 sono i numeri

$$z_k = \left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

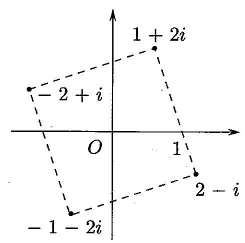
La $\boxed{d}$ corrisponde a $k = 5$.

5 $\boxed{d}$

Si trova l'asse del segmento che unisce i punti $2i$ e -2. Posto $z = x + iy$, è la retta di equazione $y = -x$.

6 $\boxed{b}$

Come mostra il disegno.



Esercizi

1 $1-2i$.

2 (a) Scriviamo $(z-1)^3=-i$; le soluzioni hanno la forma

$$z = 1 + \text{radice cubica di } -i$$

e sono $z_0 = 1+i$, $z_1 = 1+\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}-i\right)$, $z_3 = 1+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

(b) Le soluzioni sono le radici seste di 64

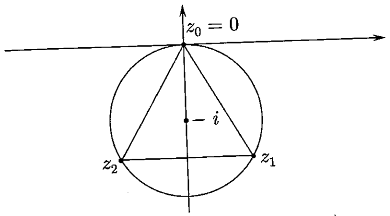
$$z_k = 2\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right) \qquad k=0,1,\ldots 5$$

3 L'equazione è equivalente a

$$z\left(z^2+3iz-3\right)=0$$

le cui soluzioni sono

$$z_0=0 \qquad z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i \qquad z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$



Oppure si può scrivere $\frac{1-i}{1+i}=-i$ e le soluzioni si scrivono nella forma

$$z = -i + \text{radice cubica di } -i$$

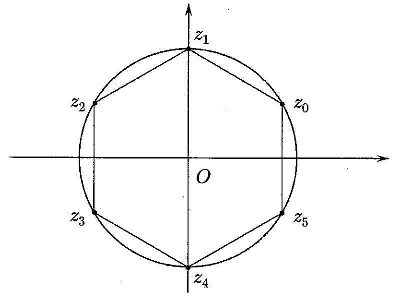
4 Poiché

$$z^6+8=\left(z^2+2\right)\left(z^4-2z^2+4\right)$$

le soluzioni della prima equazione sono anche soluzioni della seconda. Le soluzioni della seconda equazione sono le radici seste di -8, ricavabili con la formula (⇛ BPS, pag. 27)

$$z_k=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \qquad k=0,1,2,3,4,5$$

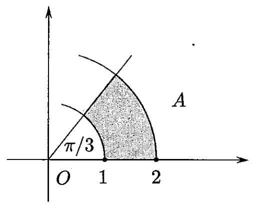
z_0, z_2, z_3 e z_5 sono le soluzioni della prima equazione.

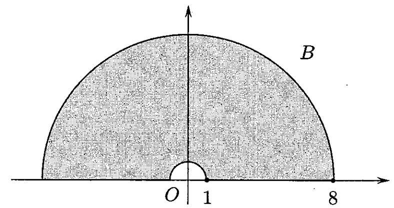


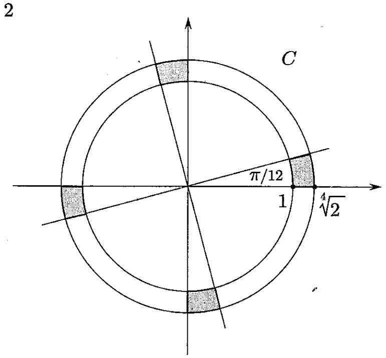
5 L'insieme A è uno "spicchio" di corona circolare. Gli insiemi B e C possono essere riscritti nella forma:

$$B=\{z\in\mathbb{C}:\ 1\le|z|\le 8, 0\le\arg z\le\pi\}$$

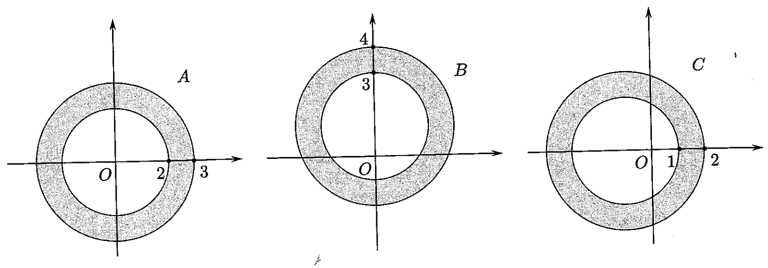
$$C=\left\{z\in\mathbb{C}:\ 1\le|z|\le\sqrt[4]{2}, \frac{k\pi}{2}\le\arg z\le\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k=0,1,2,3\right\}$$







Per $z\neq 0$, la disuguaglianza $\left|\overline{z}+\frac{6}{z}\right|\le 5$ è equivalente a $|z\overline{z}+6|\le 5|z|$; ricordando che $|z\overline{z}|=|z|^2$, si ha $|z|^2+6\le 5|z|$, ossia $2\le|z|\le 3$. L'insieme A è una corona circolare (compresa tra le circonferenze con centro in 0 e raggi 2 e 3). L'insieme B si ottiene da A traslando di un'unità verso l'alto; l'insieme C si ottiene da B ruotando di $\pi/2$ in verso orario.



7\. L'equazione deve essere di quarto grado, perché (essendo i coefficienti reali) oltre le radici indicate deve avere anche le rispettive coniugate $2+i$ e $1-2i$. L'equazione è

$$\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2-2x+5\right)=0$$

8\. Le equazioni sono

$$|z-2-3i|=2$$
$$\arg z=\pm\frac{\pi}{4}$$

Vero o falso?

1\. Vero, per il teorema fondamentale dell'algebra ($\Rightarrow$ BPS, pag. 29).

2\. Falso. Ogni polinomio a coefficienti reali se ha radici complesse le ha a coppie di complesse coniugate. A ogni coppia di radici complesse coniugate corrisponde un trinomio a coefficienti reali. Quindi un polinomio a coefficienti reali può essere sempre scritto come prodotto di polinomi di primo e secondo grado a coefficienti reali.

Ulteriori esercizi

1\. Il polinomio x^4+1 ha in $\mathbb{C}$ quattro radici, le radici quarte di -1:

$$x_k=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\qquad k=0,1,2,3$$

Informa algebrica

$$x_{0,1,2,3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nel campo complesso x^4+1 si scompone nel prodotto

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Moltiplicando i fattori che corrispondono alle coppie di radici coniugate (x_0 e x_3, x_1 e x_2) si ottiene

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$$

La scomposizione si può anche ottenere con un "vecchio trucco", senza utilizzare i numeri complessi.

$$x^4+1=x^4+1+2x^2-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\cdots$$

Le soluzioni dell'equazione sono le radici n-esime dell'unità, escluso 1, perché moltiplicando per $z-1$ si ottiene $z^n-1=0$.

Si trovano per u e v i valori

$$u=\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2},\qquad v=\frac{5}{\sqrt[3]{\sqrt{-121}+2}}$$

e, incredibile ma vero, le radici dell'equazione sono reali, come si mostra più facilmente scomponendo il polinomio $x^3-15x-4$ in fattori. Si ha

$$x^3-15x-4=(x-4)\left(x^2+4x+1\right)$$

da cui le radici

$$x=4\qquad x=2\pm\sqrt{3}$$

Sia

$$p(n):\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

la formula da dimostrare. Verifichiamo che la formula è vera per $n=1$: infatti essa si riduce all'identità

$$\cos\theta+i\sin\theta=\cos\theta+i\sin\theta$$

Dimostriamo poi che è vera l'implicazione $p(n)\Rightarrow p(n+1)$, cioè che supposta vera $p(n)$ (ipotesi di induzione) è vero che

$$p(n+1):\ (\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$$

Ora si ha

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n(\cos\theta+i\sin\theta)=$$

per l'ipotesi di induzione

$$=(\cos n\theta+i\sin n\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)=$$
$$=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta+i(\cos n\theta\sin\theta+\sin n\theta\cos\theta)=$$

per le formule di addizione di seno e coseno

$$=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$$

Dunque l'implicazione è vera e, per il principio di induzione, $p(n)$ è vera per ogni $n\geq 1$. Ponendo, per definizione,

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$$

l'implicazione è vera anche per $n=0$.

SUCCESSIONI E SERIE

2.

1. SUCCESSIONI

Esempi

1 *Il limite di una somma è la somma dei limiti.* A meno che ... non si presenti la *forma d'indecisione* $\boxed{+\infty - \infty}$. Ciò non significa che in questi casi il limite rimanga "indeciso", ma che tutto può accadere, come mostrano i seguenti semplici esempi, nei quali il primo addendo tende a $+\infty$ mentre il secondo tende a $-\infty$.

(a) $a_n = n+1$, $b_n = -n$. Si ha $a_n + b_n = 1 \to 1$ (successione costante, con termine generale sempre uguale ad 1).

(b) $a_n = n^2 + n$, $b_n = -n^2$. Si ha $a_n + b_n = n \to +\infty$.

(c) $a_n = n^3 + (-1)^n$, $b_n = -n^3$. Si ha $a_n + b_n = (-1)^n$ che non ha limite.

2 *Il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti.* A meno che ... non si presenti la *forma d'indecisione* $\boxed{0 \cdot (\pm\infty)}$. Anche qui non significa che in questi casi il limite rimanga "indeciso", ma che tutto può accadere, come mostrano gli esempi, nei quali il primo fattore è infinito mentre il secondo è infinitesimo.

(a) $a_n = n$, $b_n = 1/n$. Si ha $p_n = 1 \to 1$.

(b) $a_n = n^2$, $b_n = 1/n$. Si ha $p_n = n \to +\infty$.

(c) $a_n = n$, $b_n = (-1)^n/n$. Si ha $p_n = (-1)^n$ che non ha limite.

(d) $a_n = n$, $b_n = 1/n^2$. Si ha $p_n = 1/n \to 0$.

3 *Il limite di un quoziente è il quoziente dei limiti.* Anche qui, purché non si presentino le "solite" forme di indecisione etichettate come $\boxed{0/0}$ e $\boxed{\infty/\infty}$. Invitiamo il lettore a costruire degli esempi (basta "adattare" gli esempi precedenti, sostituendo in un caso a_n con $1/a_n$, nell'altro b_n con $1/b_n$).

4 Verifichiamo che

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \qquad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} \log_2 n = +\infty$$

(a) Comunque preso un numero $\varepsilon > 0$ si ha

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right| < \varepsilon \quad \text{per} \quad n > \log_{1/3}\varepsilon$$

ossia la distanza di $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ da 0 è *definitivamente* minore di un qualsiasi numero $\varepsilon > 0$.

(b) Comunque preso un numero M si ha

$$\log_2 n > M \quad \text{per} \quad n > 2^M$$

ossia $\log_2 n$ è *definitivamente* maggiore di un qualsiasi numero M. Generalizzando, si può dimostrare che

$$\log_b n \to \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

5 Calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \log_3\left(n^2 + 4n + 1\right)$$

questo limite si può ottenere in virtù del *principio di sostituzione*. Noto che $\log_3 n \to +\infty$, possiamo affermare che anche $\log_3 a_n \to +\infty$, dove a_n è una qualsiasi successione divergente a $+\infty$. Dunque, dato che $n^2+4n+1 \to +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \log_3\left(n^2 + 4n + 1\right) = +\infty$$

Lo stesso ragionamento vale, per esempio, per

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2^n + 3n}} = 0$$

La successione $1/\sqrt[3]{n} \to 0$, quindi anche $1/\sqrt[3]{a_n} \to 0$ con $a_n = 2^n + 3n \to +\infty$.

6 La relazione di asintotico (⇛ BPS, pag. 104) è molto importante perché permette di semplificare il calcolo dei limiti, sostituendo nel calcolo di un espressione "complicata" espressioni più semplici.
Per esempio, ogni polinomio nella variabile n è asintotico al termine di grado massimo: se $a_n = -n^3 + 2n^2 - 5n + 2001$ si ha $a_n \sim -n^3$; infatti

$$\frac{-n^3 + 2n^2 - 5n + 2001}{-n^3} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{2001}{n^3} \to 1$$

in quanto tutte le frazioni tendono a zero.
Così, un rapporto tra due polinomi nella variabile n è asintotico al rapporto dei termini di grado massimo: per esempio, si può scrivere

$$\frac{-n^3 + 8n^2 - 34n + 19}{3n^3 + n^2 + 17} \sim \frac{-n^3}{3n^3} = -\frac{1}{3}$$

Ciò equivale a dire che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-n^3 + 8n^2 - 34n + 19}{3n^3 + n^2 + 17} = -\frac{1}{3}$$

Attenzione! Quanto detto vale solo per prodotti e quozienti, ossia se $a_n \sim b_n$ e c_n è definitivamente $\neq 0$, anche

$$a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot c_n \qquad \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{c_n} \qquad \text{e} \qquad \frac{c_n}{a_n} \sim \frac{c_n}{b_n}$$

(Invitiamo il lettore a dimostrare questa affermazione).

7 Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{3^n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\ln n - 2\sqrt{n}\right) = -\infty$$

Basta ricordare che *ogni infinito esponenziale è di ordine superiore a ogni infinito potenza e che ogni infinito potenza è di ordine superiore rispetto a ogni infinito logaritmico.*

8 Calcoliamo il limite della successione

$$a_n = \frac{e^n + 5\ln n + 7}{2^n - n^3 + \sqrt{n}}$$

Come "aggredire" una successione (apparentemente) complicata? Cercando di semplificarla utilizzando la relazione di asintotico! Si ha

$$e^n + 5\ln n + 7 \sim e^n \quad \text{e} \quad 2^n - n^3 + \sqrt{n} \sim 2^n$$

quindi

$$a_n \sim \frac{e^n}{2^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \to +\infty$$

poiché $e = 2,71828\ldots > 2$.

Test a risposta multipla

1 La successione $a_n = -2n^2 + 3n + 5$ è

[a] superiormente limitata [b] convergente [c] inferiormente limitata [d] irregolare

2 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1/n^4)}{n^2} =$

[a] $-\infty$ [b] 0 [c] $+\infty$ [d] non esiste

3 $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n =$

[a] 1 [b] -5 [c] $+\infty$ [d] e^{-5}

4 Siano $a_n = 2n^4 + e^{-n}$, $b_n = 5\ln n + n^3$; allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

[a] 1 [b] 0 [c] $+\infty$ [d] 2

5 La successione $a_n = \begin{cases} 1 & n \leq 100 \\ n & n \geq 101 \end{cases}$

[a] diverge a $+\infty$ [b] converge a 1 [c] converge a 0 [d] è irregolare

6 La successione $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ n & n \text{ dispari} \end{cases}$

[a] diverge a $+\infty$ [b] converge a 1 [c] converge a 0 [d] è irregolare

7 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{2+5n}{7+3n}\right) =$

[a] 0 [b] $\frac{5}{3}$ [c] non esiste [d] $\frac{2}{7}$

8 Siano $a_n = 5n^3 + (-1)^n$, $b_n = n^3 + 3\sqrt{n}$; allora

[a] $a_n \sim b_n$ [b] a_n è infinita di ordine superiore a b_n [c] a_n e b_n non sono confrontabili [d] nessuna delle altre risposte

Esercizi

1 Quali tra le seguenti successioni sono monotone? Quali sono limitate?

$$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad b_n = (-1)^n\, 2^n \qquad c_n = \frac{1}{n!} \qquad d_n = \sin n$$

2 Individuare infiniti e infinitesimi tra le successioni seguenti

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad b_n = \sqrt[3]{-n} \qquad c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2} \qquad d_n = \cos\frac{1}{n}$$

3 Disporre in ordine crescente di infinito

$$2^n \qquad n^4 \qquad (\ln n)^{2001} \qquad \sqrt[5]{n} \qquad n^3 \ln n$$

4 Calcolare i limiti

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} 2^{\sqrt{n+1}} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-2}}{\log_3 n} \qquad \text{(c)} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

5 Determinare il carattere delle successioni

$$a_n = n - \sin n \qquad b_n = \frac{3^{-n}}{n^2+4} \qquad c_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

6 Calcolare i limiti delle successioni

$$a_n = \frac{4\ln n - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}+7} \qquad b_n = \frac{n^2+3}{2^n+3n} \qquad c_n = \ln(1+e^n) - n$$

7 Dire per quali valori di a la successione

$$a_n = \frac{(n+\ln n)^a}{n^4+3\sqrt{n}} \qquad a \in \mathbb{R}$$

è infinitesima. $a \leq 3$

8 Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni definitivamente non nulle.

Dimostrare che se $\dfrac{b_n}{a_n} \to 0$, allora $a_n + b_n \sim a_n$.

Dedurre che: *in una somma di infiniti si possono trascurare gli infiniti di ordine inferiore; in una somma di infinitesimi si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.*

9 Se a_n è una successione infinita e $a_n \sim kn^\alpha$ con $k \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, si dice che la *parte principale* di a_n è kn^α.

Se b_n è una successione infinitesima e $b_n \sim \dfrac{k}{n^\alpha}$ con $k \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, si dice che la *parte principale* di b_n è $\dfrac{k}{n^\alpha}$.

Trovare le parti principali delle successioni

$$a_n = \sqrt[3]{n^4+5n+7} \qquad b_n = \frac{2^{-n}-2n}{n\sqrt{n}}$$

Vero o falso?

1. [V] [F] $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n - b_n \to 0$
2. [V] [F] $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n + c_n \sim b_n + c_n$
3. [V] [F] $a_n - b_n \to 0 \Rightarrow a_n \sim b_n$
4. [V] [F] $a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$
5. [V] [F] $a_n \sim b_n \Rightarrow (a_n)^a \sim (b_n)^a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

Trovare l'errore

1 Calcoliamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$$

Poiché $n^2+n \sim n^2$ e $\sqrt{n^2+n} \sim n$,

$$\sqrt{n^2+n}-n \sim n-n=0$$

Il limite è 0.

2 Il limite della successione

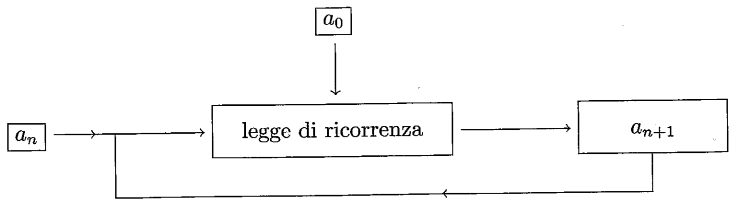
$$a_n=\frac{1}{(3+\sin 2n)^n}$$

non esiste perché la successione $\{\sin 2n\}$ non ha limite.

Ulteriori esercizi

1 Controllare che la "relazione di asintotico" è una *relazione di equivalenza*, cioè verifica le proprietà *riflessiva, simmetrica e transitiva.*

Successioni per ricorrenza – Una successione può essere definita con un procedimento *ricorsivo*: si assegna il valore a_0 di partenza (*valore iniziale*); si dà una legge (di *ricorrenza*) che permette di ricavare a_{n+1} una volta noto a_n. Il procedimento di calcolo per una successione di questo tipo è illustrato in figura.



2 Controllare che le successioni per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_n=q\cdot a_{n-1}\end{cases} \qquad \begin{cases} b_0=1 \\ b_n=n\cdot b_{n-1}\end{cases}$$

coincidono con le successioni $a_n=q^n$ e $b_n=n!$.

3 Data la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_0=1 \\ s_n=\sqrt{2+s_{n-1}}\end{cases}$$

dimostrare che

(a) s_n è monotona crescente;

(b) s_n è superiormente limitata: $s_n<2$ per ogni n.

Dedurre che s_n converge e che il suo limite è 2.

4 Sia $\{a_n\}$ una successione con termine generale sempre positivo e supponiamo che, almeno definitivamente, sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1 \tag{1}$$

Dimostrare che $a_n\to 0$.

5 Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente dimostrare il seguente:

Criterio del rapporto – *Sia $\{a_n\}$ una successione con termine generale sempre positivo, tale che*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L<1 \tag{2}$$

allora $a_n\to 0$.

6 Confrontare le successioni a^n e n^α (con $a>1$ e $\alpha>0$) e le successioni a^n ($a>1$) e $n!$, utilizzando il criterio del rapporto dell'esercizio precedente.

7 Utilizzando il principio di sostituzione[1] confrontare le successioni $\log_a n$ e n^β (con $a>1$ e $\beta>0$).

8 Verificare che la successione $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ è infinitesima.

9 Dimostrare il seguente:

Teorema di de l'Hospital per successioni infinitesime[2] – *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni infinitesime tali che*

i) $\{b_n\}$ *è (definitivamente) strettamente decrescente,*

ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n-1}-a_n}{b_{n-1}-b_n}=L$, *allora*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

10 Dopo aver mostrato che la successione

$$a_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k^2}$$

---

[1] Vedi esempio 5, pag. 40.

[2] Un teorema analogo può essere dimostrato anche per successioni infinite, con l'ipotesi che entrambe le successioni siano strettamente crescenti.

è infinitesima, utilizzando l'esercizio precedente calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} na_n$$

2.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1 $\boxed{a}$

$a_n \sim -2n^2 \to -\infty$

2 $\boxed{b}$

Si può scrivere $-\dfrac{4\ln n}{n^2} \to 0$ (essendo $\ln n$ infinito di ordine inferiore a n^2).

3 $\boxed{d}$

Per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ si ha $\left(1+\dfrac{\delta}{n}\right)^n \to e^\delta$.

4 $\boxed{c}$

$\dfrac{a_n}{b_n} \sim 2n \to +\infty$

5 $\boxed{a}$

a_n è definitivamente uguale a n.

6 $\boxed{d}$

a_n è illimitata ma non è divergente.

7 $\boxed{b}$

Il primo termine è infinitesimo, il secondo tende a $\dfrac{5}{3}$.

8 $\boxed{d}$

$\dfrac{a_n}{b_n} \to 5$, quindi $a_n \sim 5b_n$. a_n e b_n sono infinite dello stesso ordine.

Esercizi

1 $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ è crescente e limitata; b_n non è né monotona né limitata; c_n è decrescente e limitata; d_n non è monotona ed è limitata.

2 a_n e c_n sono infinitesime, b_n è infinita; $d_n \to 1$, quindi non è né infinita né infinitesima.

3 $(\ln n)^{2001} \quad \sqrt[5]{n} \quad n^3 \ln n \quad n^4 \; 2^n$

4 (a) $+\infty$ (b) 0 (c) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = \left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n} \to e^0 = 1$

5 a_n è divergente, b_n converge a 0.
Poiché $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, si ha $c_n = \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$ che converge a $\dfrac{1}{2}$.

6 $a_n \sim \dfrac{-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}} = -n^{1/6} \to -\infty, \quad b_n \sim \dfrac{n^2}{2^n} \to 0$

$c_n = \ln(1+e^n) - \ln e^n = \ln\dfrac{1+e^n}{e^n} = \ln\left(e^{-n}+1\right) \to 0$

7 Si ha

$$a_n \sim \frac{n^a}{n^4} = \frac{1}{n^{4-a}}$$

a_n è infinitesima per $a < 4$.

8 Si ha

$$a_n + b_n = a_n\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right) \sim a_n$$

dato che il fattore tra parentesi tende a 1.

9 a_n è infinita, b_n è infinitesima. Si ha

$$a_n = \sqrt[3]{n^4\left(1+\frac{5}{n^3}+\frac{7}{n^4}\right)} = n^{4/3}\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^3}+\frac{7}{n^4}} \sim n^{4/3}$$

$$b_n = -\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}2^n} \sim -\frac{2}{n^{1/2}}$$

La parte principale di a_n è $n^{3/4}$, la parte principale di b_n è $-\dfrac{2}{n^{1/2}}$.

Vero o falso?

- Falso. Prendere, per esempio, $a_n = n+1$, $b_n = n$.
- Falso. Prendere a_n e b_n come nell'esempio precedente e $c_n = -n$.
- Falso. Prendere, per esempio, $a_n = 1/n^2$ e $b_n = 1/n$.
- Falso. Prendere, per esempio, $a_n = n+1$, $b_n = n$.
- Vero. Se $\dfrac{a_n}{b_n} \to 1$, allora anche $\dfrac{(a_n)^a}{(b_n)^a} = \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)^a \to 1$.

Trovare l'errore

1 Non si possono sostituire termini asintotici in una somma in cui le parti principali si elidono!
Il limite si calcola usando un "vecchio trucco": si moltiplica e divide per $\sqrt{n^2+n}+n$. Si ricava

$$\sqrt{n^2+n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Raccogliendo n a denominatore e semplificando come indicato sotto

$$\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+n}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$$

si vede che il limite è $1/2$.

2 È vero che la successione $\{\sin 2n\}$ non ha limite, ma basta osservare che $\sin 2n$ è compreso tra -1 e 1, quindi

$$3+\sin 2n \geqslant 2$$

da cui $(3+\sin 2n)^n \geqslant 2^n$ e infine

$$0 \leqslant \frac{1}{(3+\sin 2n)^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Il termine generale di a_n è compreso tra 0 e $1/2^n$, quindi $a_n \to 0$.

Ulteriori esercizi

1 *Proprietà riflessiva:* $a_n \sim a_n$, infatti $\dfrac{a_n}{a_n}=1$

proprietà simmetrica: se $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$, infatti se $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$ anche $\dfrac{b_n}{a_n}\to 1$

proprietà transitiva: se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$, infatti se $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$ e $\dfrac{b_n}{c_n}\to 1$ allora

$$\frac{a_n}{c_n}=\frac{a_n}{b_n}\cdot\frac{b_n}{c_n}\to 1$$

2 Per a_n si ha

$$a_1=q\cdot a_0=q \qquad a_2=q\cdot a_1=q^2 \qquad a_3=q\cdot a_2=q^3,\dots$$
$$a_n=q\cdot a_{n-1}=q^n$$

Per b_n si ha

$$b_1=1\cdot b_0=1 \qquad b_2=2\cdot b_1=2 \qquad b_3=3\cdot b_2=6,\dots$$
$$b_n=n\cdot b_{n-1}=n!$$

3 Entrambe le affermazioni si dimostrano applicando il principio di induzione.
(a) Qui $p(n)$ è l'enunciato "s_n è monotona crescente", che scriviamo nella forma sintetica

$$s_n > s_{n-1}$$

da dimostrare per $n \geq n_0 = 0$. Ora, poiché $s_1=\sqrt{3}$ e $s_0=1$ si ha $s_1>s_0$, perciò $p(0)$ è vera. Supponendo poi $s_n > s_{n-1}$ (ipotesi di ricorrenza) si ha

$$2+s_n > 2+s_{n-1} \;\Rightarrow\; \sqrt{2+s_n} > \sqrt{2+s_{n-1}}$$

ossia

$$s_{n+1} > s_n$$

È quindi vero che $s_n > s_{n-1}$ per ogni n, e cioè che s_n è monotona crescente.
(b) Ora $p(n)$ è l'enunciato "$s_n > 2$", da dimostrare sempre per $n \geq n_0 = 0$. $p(0)$ è vera, infatti: $s_0 = 1 < 2$. Supponendo poi $s_n < 2$ (ipotesi di ricorrenza), si ha

$$2+s_n<4 \;\Rightarrow\; \sqrt{2+s_n}<2$$

ossia

$$s_{n+1}<2$$

È quindi vero che $s_n < 2$ per ogni n.
Da (a) e (b) segue che il limite di s_n esiste finito: sia $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = l$. Dall'uguaglianza $s_n=\sqrt{2+s_{n-1}}$ facendo tendere n a $+\infty$, si ottiene

$$l=\sqrt{2+l} \;\Rightarrow\; l=2$$

4 Per semplicità, supponiamo che la (1) sia valida per ogni n. Si hanno le disuguaglianze

$$\frac{a_1}{a_0}\leq q \qquad \frac{a_2}{a_1}\leq q \qquad \frac{a_3}{a_2}\leq q,\dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}}\leq q,\dots$$

che possono essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned}
a_1 &\leq qa_0,\\
a_2 &\leq qa_1 \leq q^2a_0,\\
a_3 &\leq qa_2 \leq q^3a_0,\\
&\vdots\\
a_n &\leq qa_{n-1} \leq q^na_0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza $a_n \leq q^n a_0$, per il criterio del confronto, si ha che $a_n \to 0$, infatti essa è una successione a termini positivi, maggiorata da una successione infinitesima ($q^n \to 0$ dato che $0<q<1$).
La dimostrazione rivela anche che la convergenza a 0 di $\{a_n\}$ è molto rapida, in quanto $\{a_n\}$ è maggiorata da una successione geometrica.

5 Se vale la (2), $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ è definitivamente più piccolo di $L+\varepsilon$, con $\varepsilon>0$ "piccolo". Scegliamo ε in modo che risulti $L+\varepsilon<1$. Esiste $\overline{n}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<L+\varepsilon<1$$

per ogni $n \geq \overline{n}$. Poniamo $L+\varepsilon=q$ e ci riportiamo all'esercizio precedente.

6 Posto $r_n=\dfrac{n^\alpha}{a^n}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^\alpha}\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha=\frac{1}{a}\;(<1)$$

quindi per il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

Posto $r_n = \dfrac{a^n}{n!}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 \ (<1)$$

quindi per il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

Si ricava quindi che n^α è infinito di ordine inferiore a a^n che è infinito di ordine inferiore a $n!$.

7. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\beta} \tag{3}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

per il principio di sostituzione si ha anche

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^\alpha}{a^{x_n}} = 0$$

dove x_n è una qualsiasi successione divergente a $+\infty$.
Prendiamo $x_n = \log_a n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log_a n)^\alpha}{n} = 0$$

da cui ponendo $\beta = 1/\alpha$ si ricava immediatamente la (3).

8. Si applica il criterio del rapporto dell'esercizio 5. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4}$$

quindi a_n è infinitesima.

9. Dimostriamolo per L numero reale (con $L = \pm\infty$, la dimostrazione è analoga). Per n grande si ha

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n-1} - a_n}{b_{n-1} - b_n} < L + \varepsilon$$

da cui, poiché b_n decresce e quindi $b_{n-1} - b_n > 0$

$$(L-\varepsilon)(b_{n-1} - b_n) < a_{n-1} - a_n < (L+\varepsilon)(b_{n-1} - b_n)$$

e anche

$$(L-\varepsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (L+\varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$
$$(L-\varepsilon)(b_{n+1} - b_{n+2}) < a_{n+1} - a_{n+2} < (L+\varepsilon)(b_{n+1} - b_{n+2})$$
$$\vdots$$
$$(L-\varepsilon)(b_{n+k-1} - b_{n+k}) < a_{n+k-1} - a_{n+k} < (L+\varepsilon)(b_{n+k-1} - b_{n+k})$$

Sommando membro a membro, si ricava

$$(L-\varepsilon)(b_n - b_{n+k}) < a_n - a_{n+k} < (L+\varepsilon)(b_n - b_{n+k})$$

ossia

$$L - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n+k}}{b_n - b_{n+k}} < L + \varepsilon$$

Fissato n e facendo tendere k a $+\infty$, ricordando che a_n e b_n sono infinitesime, si ricava che

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon$$

ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Si ha

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{4n^2} < n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

quindi $\{a_n\}$ è infinitesima.
Si ha poi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1} - a_n}{\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{(n-1)^2} - \dfrac{1}{(2n)^2} - \dfrac{1}{(2n-1)^2}}{\dfrac{1}{n(n-1)}} = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} n a_n = \frac{1}{2}$$

2. SERIE

Esempi

1 Studiamo il carattere delle serie

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n^3+n^2+4} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{\sqrt{n}}\right]$$

(a) È una serie a termini positivi: si può applicare il criterio di confronto asintotico (⇛ BPS, pag. 111). Poiché

$$\frac{n+3}{n^3-n^2+4} \sim \frac{1}{n^2}$$

la serie ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (⇛ BPS, pag. 111, esempio 3.5), quindi converge.

(b) Si può applicare il criterio del confronto (⇛ BPS, pag. 111): dato che

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (⇛ BPS, pag. 110, esempio 3.2), possiamo affermare che anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge.

(c) Studiamo separatamente il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$$

La prima, geometrica di ragione $-1/3$ converge (⇛ BPS, pag. 109), la seconda, armonica generalizzata con $\alpha = 1/2$ diverge (⇛ BPS, pag. 112), quindi la serie diverge (vedi (6)).

2 La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^3}$$

è a termini di segno non definitivamente costante. Per studiarne il carattere ricorriamo al criterio di convergenza assoluta (⇛ BPS, pag. 113). Possiamo affermare che la serie converge assolutamente, in quanto converge la serie (a termini positivi) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^3}$ perché maggiorata dalla serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ ($|\cos n| \le 1$).

3 La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

converge per ogni x. Per $x = 0$ è banalmente convergente (la somma è 1). Se $x > 0$ è a termini positivi e la sua convergenza può essere dimostrata applicando il criterio del rapporto (⇛ BPS, pag. 113), infatti

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \to 0 \qquad \text{per ogni } x > 0$$

Per $x < 0$ i termini presi in valore assoluto coincidono con i termini corrispondenti con $x > 0$, perciò la serie è assolutamente convergente. La (4), quindi, converge per ogni x.
La (4) è detta *serie esponenziale* perché la sua somma è la funzione esponenziale (⇛ BPS, pag. 233), vale cioè

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

In particolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

4 La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

è a termini di segno alternato. Pensiamo al criterio di Leibniz(⇛BPS, pag.114). La serie converge perché le ipotesi del criterio sono verificate, in quanto la successione dei moduli dei termini $a_n = \frac{1}{\ln n}$ è decrescente e infinitesima. La serie non converge assolutamente, perché la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge $\left(\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}\right)$.

Test a risposta multipla

$\frac{q^m}{1-q}$

1 La somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è

[a] $\frac{5}{3}$ [b] $\frac{2}{5}$ [c] $\frac{2}{3}$ [d] $+\infty$

2 La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

[a] converge [b] è irregolare [c] è armonica [d] diverge a $+\infty$

3 Sia $a_n = \begin{cases} n^{-1} & n \le 100 \\ n^{-2} & n \ge 101 \,. \end{cases}$ La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

[a] converge [b] è irregolare [c] dipende da n [d] diverge

4 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n + 4^n}{\ln n + 5^n}$

[a] converge [b] è irregolare [c] diverge [d] è geometrica

5 La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è

[a] a termini di segno alternato [b] irregolare [c] divergente [d] convergente

6. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{5}{\sqrt{n+1}}$

$\boxed{a}$ converge assolutamente $\boxed{b}$ è irregolare $\boxed{c}$ diverge $\boxed{d}$ converge

Esercizi

1. Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

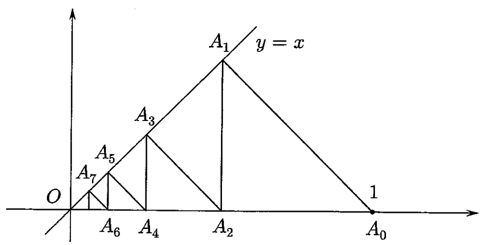
diverge.

2. Studiare il carattere delle serie

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+e^{-n}}{2n^2+3}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n-\sqrt{n}}{5n^4-1}$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{100}e^{-n}$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$ (e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+9\sin n}$

3. Una particella partita dal punto $A_0 = (1,0)$ si muove lungo la traiettoria A_0, A_1, $A_2, \ldots$ $A_n, \ldots$ indicata in figura (i segmenti A_0A_1, $A_2A_3 \ldots$ sono perpendicolari alla bisettrice).



Quanto è lunga la spezzata A_0, A_1, A_2, A_3? Quanto è lunga la spezzata completa?

4. Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2+a}{1-a}\right)^n$$

converge e in caso affermativo calcolarne la somma.

5. Determinare per quali valori di x la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$$

converge.

6. Sia

$$a_n = (-1)^n \frac{an+1}{n+1} \qquad a \in \mathbb{R}$$

(a) Determinare per quali valori di a la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

(b) Per $a = 1$, determinare il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e di $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n$, dove $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

7. Sia $a_n = \dfrac{(n+2)^a}{n^2+2n}$ $\quad a \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare al variare di a il carattere di a_n e di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(b) Per $a = 0$ calcolare la somma di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

8. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \leq 2$.

9. Considerare le serie

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

che hanno somma rispettivamente $\pi^2/6$, e e $\ln 2$. Servendosi d'un *computer*, calcolarne le ridotte 20-esime. Valutare la differenza tra esse e la somma esatta e calcolare l'errore relativo.

Vero o falso?

1. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente ed ha somma S se $a_n \to S$.

2. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se e solo se $a_n \to 0$.

3. V F $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=100}^{+\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere.

4. V F Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Trovare l'errore

1. La serie

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

che si può scrivere

$$(1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots$$

è una serie geometrica con ragione $q=-1$, quindi ha come somma $\frac{1}{1-q}$, cioè vale l'uguaglianza

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$$

2. La somma dell'esempio precedente si calcola così

$$\underbrace{(1-1)}_{\text{vale } 0}+\underbrace{(1-1)}_{\text{vale } 0}+\underbrace{(1-1)}_{\text{vale } 0}+\cdots=0$$

3. La serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right)$$

diverge, in quanto il suo termine generale è somma dei termini generali di due serie divergenti.

Ulteriori esercizi

1. Provare la divergenza della serie armonica utilizzando il risultato dell'esercizio 1 (pag. 54).

2. Dimostrare che se $\sum_{s=0}^{+\infty} a_s$ e $\sum_{s=0}^{+\infty} b_s$ convergono, allora converge anche la serie $\sum_{s=0}^{+\infty}(a_s+b_s)$ e vale

$$\sum_{s=0}^{+\infty}(a_s+b_s)=\sum_{s=0}^{+\infty}a_s+\sum_{s=0}^{+\infty}b_s \quad (\textit{proprietà additiva}) \tag{6}$$

La (6) può essere estesa alle serie divergenti, escluso il caso in cui i due addendi a secondo membro divergono ad infiniti diversi e cioè una situazione del tipo $(+\infty)+(-\infty)$. Negli altri casi la (6) si può leggere in questi termini: se una delle due serie a secondo membro diverge e l'altra converge o se entrambe divergono allo stesso infinito, allora anche la serie a primo membro diverge.

3. Dimostrare che, per le serie convergenti, vale che

$$\sum_{s=0}^{+\infty} ca_s = c\sum_{s=0}^{+\infty} a_s \quad (\textit{proprietà di omogeneità}) \tag{7}$$

dove c è un numero reale.

La (7) può essere estesa alle serie divergenti. In tal caso la proprietà può essere enunciata in questi termini: *se $c \neq 0$, le serie di termini generali a_n e $c \cdot a_n$ hanno lo stesso carattere.*

4. Dimostrare il criterio del confronto e dedurre il criterio di confronto asintotico (⇛ BPS, pag. 111), per le serie a termini positivi.

5. Determinare al variare del parametro $a>0$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an+2}{3n+1}\right)^n$$

6. Siano C_n e T_n rispettivamente una successione di cerchi ed una successione di triangoli equilateri tali che T_1 ha lato a e C_1 è inscritto in T_1, T_n è inscritto in C_{n-1} e C_n e inscritto in T_n. Calcolare $\sum_{n=1}^{+\infty} \textit{area}\,(C_n)$.

7. Quale condizione deve soddisfare la successione $\{a_n\}$ affinché la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

converga? Qual è la somma in questo caso?

2.2. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. c

Attenzione all'indice iniziale! La somma è $\frac{1}{1-2/5}-1=\frac{2}{3}$.

2 $\boxed{d}$

Si applica il criterio di confronto asintotico:

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

quindi la serie ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ che diverge.

3 $\boxed{a}$

a_n è definitivamente uguale a $\frac{1}{n^2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

4 $\boxed{a}$

Si ha $\frac{5n+4^n}{\ln n+5^n} \sim \frac{4^n}{5^n}$. La serie ha lo stesso carattere della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ (ma *non* è una serie geometrica).

5 $\boxed{d}$

Si ha $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. La serie converge per il criterio di convergenza assoluta.

6 $\boxed{d}$

La successione $a_n = \frac{5}{\sqrt{n+1}}$ è infinitesima e decrescente. La serie converge per il criterio di Leibniz.

Esercizi

1 Si tratta di una serie telescopica (⇛ BPS, pag. 110), infatti per le proprietà dei logaritmi si può scrivere

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

La ridotta n-esima della (5) è

$$S_n = \log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 + \cdots + \log(n+1) - \log n = \log(n+1)$$

Dato che $S_n = \log(n+1) \to +\infty$, la serie (5) diverge.

2 (a) Diverge: ha lo stesso carattere della serie armonica, infatti

$$\frac{n+e^{-n}}{2n^2+3} \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

(b) Converge: ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3\sqrt{n}}$, che converge; infatti

$$\frac{\ln n - \sqrt{n}}{5n^4-1} \sim \frac{-\sqrt{n}}{5n^4} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^3\sqrt{n}}$$

(c) Converge. Si può applicare il criterio del rapporto che dà

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{100}}{e^{n+1}}\frac{e^n}{n^{100}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} \to \frac{1}{e} < 1$$

Oppure il criterio di confronto, tenendo presente che definitivamente $e^{-n} < n^{-\alpha}$ anche con α molto grande, per esempio $\alpha = 102$. Si trova allora

$$n^{100}e^n < n^{100}n^{-102} = \frac{1}{n^2}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

(d) Converge. Per il criterio di confronto, tenendo presente che $\arctan n < \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\frac{\arctan n}{n^2+1} < \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2}$$

(e) Converge assolutamente, perché la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+9\sin n}$ converge (il termine generale è asintotico a $1/n^2$). La serie è a termini di segno alternato: si potrebbe pensare al criterio di Leibniz, ma provare la monotonia della successione $\frac{1}{n^2+9\sin n}$ non è così immediato.

3 Si ha $A_0A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A_1A_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $A_2A_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$. La spezzata A_0, A_1, A_2, A_3 è lunga

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

La spezzata completa è lunga

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$$

4 È una serie geometrica di ragione $\frac{2+a}{1-a}$, perché converga occorre che

$$\left|\frac{2+a}{1-a}\right| < 1$$

Ciò accade se $a < -\frac{1}{2}$. In questo caso, la somma della serie è $\frac{a-1}{2a+1}$.

5 Il termine generale è infinitesimo se e solo se $|x| \leq 1$, quindi per $|x| > 1$ la serie non può convergere. Se $x = 0$ tutti i termini sono nulli, la serie banalmente converge. Se $x > 0$ la sua convergenza può essere studiata applicando il criterio del rapporto; si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n} = x\cdot\frac{n+1}{n+2} \to x$$

Sicuramente la serie converge per $0 < x < 1$. Per $x < 0$ i termini presi in valore assoluto coincidono con i termini corrispondenti con $x > 0$, perciò la serie è assolutamente convergente. Si ha dunque convergenza assoluta per $|x| < 1$.

Rimane da studiare il comportamento per $x = -1$ e $x = 1$. Per tali valori si ottengono, rispettivamente, le serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

la prima delle quali converge (per il criterio di Leibniz), la seconda diverge.
Riassumendo, la serie data converge per $-1 \le x < 1$.

6 (a) La serie converge solo per $a = 0$, negli altri casi il termine generale non è infinitesimo.
(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è irregolare. $\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n$ diverge a $+\infty$.

7 (a) Si ha

$$a_n \sim n^{a-2} = \frac{1}{n^{2-a}} \to \begin{cases} +\infty & \text{per} \quad a > 2 \\ 1 & \text{per} \quad a = 2 \\ 0^+ & \text{per} \quad a < 2 \end{cases}$$

Per il criterio di confronto asintotico (con una serie armonica generalizzata), $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $2 - a > 1$ e cioè se $a < 1$. (Diverge per $a \ge 1$).
(b) Poiché

$$\frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

si ha

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{3}{4} \end{aligned}$$

8 Si ha

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \le 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

per cui, passando al limite per $n \to +\infty$ e ricordando che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (serie di Mengoli), si ricava che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \le 2$.

9 (a) Si ottiene $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n^2} \simeq 1.5962$, $\pi^2/6 \simeq 1.6449$

$$\text{Errore relativo} = \frac{\pi^2/6 - \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n^2}}{\pi^2/6} \simeq 2.9649 \times 10^{-2}$$

(b) $\sum_{n=0}^{20} \frac{1}{n!} \simeq 2.7183$, $e \simeq 2.7183$.
Approssimando alla quarta cifra decimale i due valori coincidono.
(c) $\sum_{n=1}^{20} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \simeq 0.66877$, $\ln 2 \simeq 0.69315$

$$\text{Errore relativo} = \frac{\ln 2 - \sum_{n=1}^{20} \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{\ln 2} \simeq 3.5167 \times 10^{-2}$$

Vero o falso?

1 Falso. A S tende la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali.

2 Falso. Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, allora $a_n \to 0$. Non vale l'inverso. Per esempio, la serie armonica diverge anche se il suo termine generale è infinitesimo.

3 Vero. Il carattere di una serie non cambia se si sopprime o si altera un numero finito di termini.

4 Falso. Per esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mentre la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Trovare l'errore

1 La serie geometrica converge se e solo se $|q| < 1$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ è irregolare.

2 *La proprietà associativa vale solo per le serie regolari.*
Se una serie converge, comunque se ne associno i termini allora si ottiene una serie con la medesima somma.
L'esempio mostra che se una serie è irregolare si può, associando opportunamente i termini, ottenere una serie convergente.
Il lettore provi, associando i termini in modo differente, a ottenere come somma 1.

3 Le due serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{1+n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{1-n}$$

sono divergenti rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$: non si può applicare la (6). Poiché

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1-n}=\frac{2}{1-n^2}$$

la serie data si può scrivere

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{1-n^2}$$

che converge per il criterio di confronto asintotico e la proprietà (7), in quanto

$$\frac{2}{1-n^2}\sim -2\cdot\frac{1}{n^2}$$

Ulteriori esercizi

1 Occorre ricordare che[3]

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

e, quindi, "passando" ai logaritmi (con base $e>1$)

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln e=1$$

Da questa disuguaglianza, si ricava, dividendo per n,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

La serie armonica risulta maggiorante della serie (5), che, come visto nell'esercizio 1, diverge.

2 La proprietà si prova scrivendo le ridotte n-esime e constatando che sono uguali. Esse sono, rispettivamente,

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)$$

e

$$(a_0+a_1+\cdots+a_n)+(b_0+b_1+\cdots+b_n)$$

uguali per le proprietà associativa e commutativa della somma. Si calcola poi il limite per $n\to+\infty$, tenendo presente il teorema sul limite della somma.

3 Le ridotte n-esime dei due termini sono

$$ca_0+ca_1+\cdots+ca_n$$

e

$$c\,(a_0+a_1+\cdots+a_n)$$

uguali per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma. Come prima, si passa poi al limite.

---

[3] La successione $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ è crescente e converge a e.

4 Supponiamo, per semplicità, che la disuguaglianza $0\le a_n\le b_n$ valga per ogni n e sommiamo un po' di termini consecutivi (corrispondenti) delle due serie: tali somme ereditano la disuguaglianza. Risulta, dunque,

$$0\le a_0\le b_0\qquad 0\le a_0+a_1\le b_0+b_1\qquad 0\le a_0+a_1+a_2\le b_0+b_1+b_2$$
$$0\le a_0+a_1+a_2+\cdots a_n\le b_0+b_1+b_2+\cdots b_n$$

Dette A_n e B_n le ridotte n-esime delle due serie, si ha

$$0\le A_n\le B_n\quad\text{per ogni}\quad n$$

Ora, se la serie maggiorante converge, anche la serie minorante converge; infatti, se B_n converge, per il teorema di confronto delle successioni, anche A_n converge. Se la minorante diverge, per analoghi motivi, anche la maggiorante diverge.
Dal criterio di confronto si deduce immediatamente il criterio di confronto asintotico. Infatti la relazione $a_n\sim b_n$ significa che $\dfrac{a_n}{b_n}\to 1$, quindi, per esempio, risulta definitivamente

$$\frac{1}{2}<\frac{a_n}{b_n}<2$$

da cui

$$\frac{1}{2}b_n<a_n<2b_n$$

$\displaystyle\sum_{s=1}^{+\infty}a_s$ è contemporaneamente minorante e maggiorante delle serie di termini generali $1/2b_n$ e $2b_n$, che hanno lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{s=1}^{+\infty}b_s$ (proprietà di omogeneità).

5 Posto $a_n=\left(\dfrac{an+2}{3n+1}\right)^n$, si ha $a_n>0$ per ogni n. Si può applicare il criterio della radice ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 112). Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}a_n^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{an+2}{3n+1}=\frac{a}{3}$$

quindi se

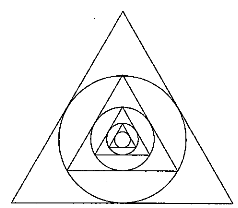
$$0<a<3\quad\text{la serie converge}$$
$$a>3\quad\text{la serie diverge}$$

Per $a=3$ si ha

$$a_n=\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^n\to e^{1/3}$$

il termine generale non è infinitesimo, quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge a $+\infty$.

6 Il raggio di C_1 è un terzo dell'altezza di T_1 ed il raggio di C_n è la metà del raggio di C_{n-1}.



La successione r_n dei raggi dei cerchi è definita da

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a \\ r_n = \dfrac{1}{2}r_{n-1} \end{cases}$$

Si ha quindi $r_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ e

$$\text{area}\,(C_n) = \pi r_n^2 = \frac{\pi}{3}a^2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{area}\ (C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{3}a^2\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\pi}{3}a^2\frac{1}{4}\frac{1}{1-1/4} = \frac{\pi}{9}a^2$$

7 Si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

quindi $\{s_n\}$ converge se e solo se $\{a_n\}$ converge. La somma della serie in questo caso è $A - a_0$, dove $A = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

FUNZIONI. LIMITI E CONTINUITÀ 3.

1. FUNZIONI

Esempi

1 Calcoliamo il dominio naturale delle funzioni

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x+1} \qquad g(x) = \frac{1}{\ln(2x - x^2)}$$

Per f deve essere

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

Il dominio naturale di f è $[-3,-1) \cup (-1,+\infty)$.
Per g deve essere

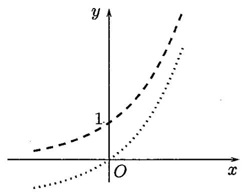
$$\begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ \ln(2x - x^2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

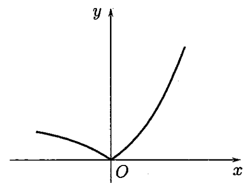
Il dominio naturale di g è $(0,1) \cup (1,2)$.

2 Tracciamo il grafico delle funzioni

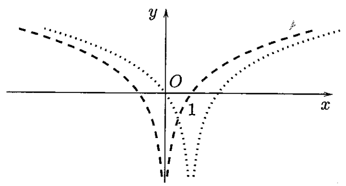
$$\text{(a)}\ f(x) = |2^x - 1| \qquad \text{(b)}\ g(x) = 3\log_2|x+1|$$

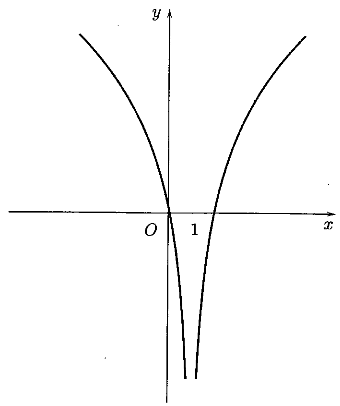
(a) Si parte dal grafico di $y = 2^x$ (linea tratteggiata), si trasla di un'unità verso il basso, ottenendo il grafico di $y = 2^x - 1$ (linea punteggiata), quindi si ribalta al di sopra dell'asse x la parte di grafico che si trova al di sotto.





(b) Si parte dal grafico di $y = \log_2 |x|$ (linea tratteggiata), ottenuto "completando" il grafico di $y = \log_2 x$ con l'aggiunta del ramo simmetrico rispetto all'asse y, si trasla di un'unità verso destra ottenendo il grafico di $y = \log_2 |x+1|$ (linea punteggiata), quindi si "dilata" moltiplicando tutte le ordinate per 3.





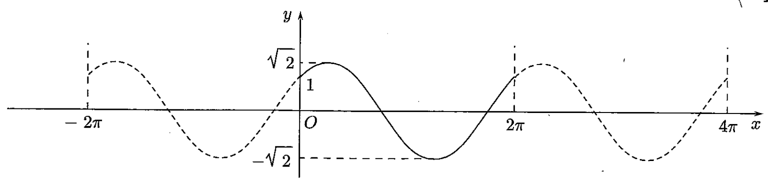
3 Tracciamo il grafico della funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

Si può scrivere (⇛ BPS, pag. 139)

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}} + \frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Si tratta di una vibrazione elementare di ampiezza $\sqrt{2}$, periodo 2π, e fase $\frac{\pi}{4}$.



4 Risolviamo le disequazioni

$$\text{(a) } \cosh x > 2 \qquad \text{(b) } 3(\tan x)^2 - 1 \le 0$$

(a) Si ha

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 2$$

che è equivalente a

$$e^{2x} - 4e^x + 1 > 0$$

che ha come soluzioni gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x < \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) \quad \text{o} \quad x > \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

(b) La disequazione è equivalente a

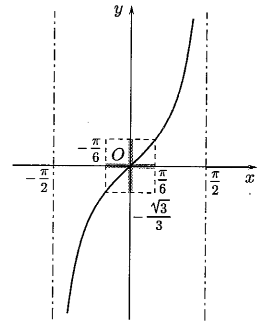
$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \le \tan x \le \frac{\sqrt{3}}{3}$$

che come mostra il grafico in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ha come soluzioni gli x tali che

$$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$$

Le soluzioni su tutto l'asse reale sono

$$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



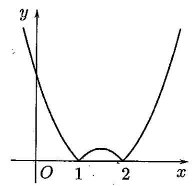
Test a risposta multipla

1 Il dominio naturale della funzione $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 5x}{4 - x}$ è

[a] $(-\infty, 0)$ [b] $(4, 5)$ [c] $(-\infty, 4)$ [d] $(-\infty, 0) \cup (4, 5)$

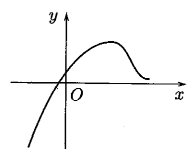
2 Il dominio naturale della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log_3(x+3)}$ è

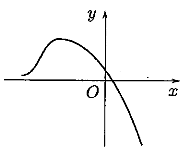
[a] $(0, +\infty)$ [b] $(-3, 0]$ [c] $(-3, 3]$ [d] $(-3, +\infty)$

3 

è il grafico di $f(x) =$

[a] $|x^2 - 3x + 2|$ [b] $|x^2 + 3x| + 2$ [c] $x^2 + 3|x| + 2$ [d] $|x^2 + 3x + 2|$

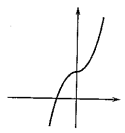
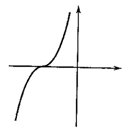
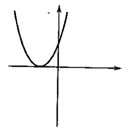
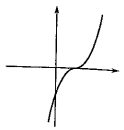
4 Se il grafico di $y = f(x)$ è 

, allora 

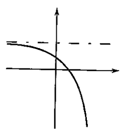
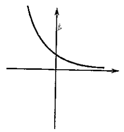
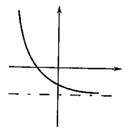
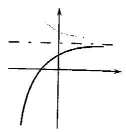
è il grafico di

[a] $y = -f(x)$ [b] $y = f(-x)$ [c] $y = f(|x|)$ [d] $y = |f(x)|$

5. Il grafico della funzione $f(x) = (x+1)^5$ è

[a]  [b]  [c]  [d] 

6. Il grafico della funzione $f(x) = 2 - e^{-x}$ è

[a]  [b]  [c]  [d] 

7. Il numero di soluzioni reali dell'equazione $\sqrt[4]{x} = \frac{1}{3}x - 3$ è

[a] 2 [b] 4 [c] 0 [d] 1

8. Le soluzioni della disequazione $e^{-3x} + x^2 \leq 3$ formano un insieme del tipo

[a] $(-\infty, a]$ [b] $[b, +\infty)$ [c] $[a, b]$ [d] $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

9. L'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ per cui $\ln x \leq 2x - x^2$ è del tipo

[a] $(0, a]$ [b] $[b, +\infty)$ [c] $(-\infty, a]$ [d] $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

10. Siano $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$; la funzione composta $h(x) = f(g(x))$ è definita da

[a] $h(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$ [b] $h(x) = x^3\sqrt[3]{x+1}$ [c] non esiste [d] $h(x) = x + 1$

11. Sia $f(g(x)) = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x} - 5}$; allora f e g sono assegnate dalle formule

[a] $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-5}$ [b] $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$, $g(x) = e^{3x}$ [c] $f(x) = \dfrac{3x}{3x-5}$, $g(x) = e^{x}$ [d] $f(x) = e^{3x}$, $g(x) = \dfrac{1}{e^{3x} - 5}$

12. Sia $f(x) = 1 + \ln(x-4)$, allora $f^{-1}(x) =$

[a] $\dfrac{1}{1+\ln(x-4)}$ [b] $e^{x-1} + 4$ [c] $e^{x-4} + 1$ [d] f non è invertibile

13. Il massimo valore assunto dalla funzione $f(x) = 13 - x^4$ nell'intervallo $[-13, 20]$ è

[a] 13 [b] 20 [c] 0 [d] 2001

14. Se la funzione $y = f(x)$ ha un punto di massimo in $x = 7$, quale tra le seguenti funzioni ha un punto di minimo in $x = 7$?

[a] $-f(x)$ [b] $f(x-7)$ [c] $7f(x)$ [d] $7 + f(x)$

Esercizi

1. Calcolare il dominio naturale delle seguenti funzioni

$$f(x) = e^x \sqrt[3]{x+1} \qquad g(x) = \sqrt{1 - \sqrt[3]{x^2 - 1}} \qquad h(x) = \ln \frac{x^2}{1-x}$$

2. Tracciare il grafico delle funzioni

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \qquad g(x) = \frac{2x}{|x-1|}$$

3. Sia $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0$. Scrivere la funzione inversa di f e la funzione composta $f^2 = f \circ f$.

4. Scrivere le iterate n-esime della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x} & x > 0 \end{cases}$$

5. Risolvere, per via algebrica e grafica, le seguenti disequazioni

$$\text{(a) } \sqrt{x+3} > 1 + x \qquad \text{(b) } \sqrt{x+5} < x - 1$$

6. Risolvere le disequazioni

$$\text{(a) } \tanh x > \frac{1}{2} \qquad \text{(b) } \sin(2x) - \sin x < 0$$

7. Controllare che la funzione $f(x) = \sin 2\pi x$ è periodica di periodo $p = 1$. Come la si deve modificare per farle fare 3 oscillazioni complete nell'intervallo $[0, 1]$, anziché una?

8. Dimostrare che se f e g sono crescenti anche $f + g$ e $f \circ g$ sono crescenti. Che cosa si può dire nel caso di funzioni decrescenti o di una crescente e l'altra decrescente?

9. Dimostrare che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni pari è una funzione pari. Che cosa si può dire nel caso di funzioni dispari o di una pari e una dispari?

10 Quali tra le seguenti funzioni sono monotone? Quali sono pari o dispari?

$$f(x) = \ln(1-x) \qquad g(x) = x^3 + x \qquad h(x) = e^{-x} - x$$
$$k(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad j(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad l(x) = e^{1-x^2}$$

11 Verificare che l'equazione

$$x^3 + x - a = 0$$

ha un'unica soluzione per ogni $a \in \mathbb{R}$.

12 Tracciare (a mano) il grafico delle seguenti funzioni.

$$f(x) = ||x-1|-1| \qquad g(x) = -(x+2)^3 \qquad h(x) = e^{-|x-1|}$$
$$k(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - 1 \qquad j(x) = \sqrt[3]{3x} - 1 \qquad l(x) = |\ln(1-2x)|$$

Controllare il risultato utilizzando un *computer*.

13 Tracciare nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ il grafico delle funzioni

$$f(x) = 3\cos x \qquad g(x) = \cos 3x$$
$$h(x) = \max\{\sin x, \cos x\} \qquad k(x) = \max_{-\pi \le t \le x} \sin t$$

14 Tracciare il grafico delle funzioni

(a) $f(x)$, dispari, periodica di periodo 2, tale che

$$f(x) = 1 \qquad x \in (0,1)$$

(b) $g(x)$, pari, periodica di periodo 4, tale che $g(x) = x, \quad x \in [0,2]$.

15 *Effetto "zoom"* — Il grafico della funzione $y = kf\left(\frac{x}{k}\right)$ è un ingrandimento del grafico di f di scala k (> 1).
Utilizzando il *computer* tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sin x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

Ottenere quindi degli ingrandimenti del grafico con scala 2, 3, 5.

Vero o falso?

1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora

(a) V F se f è pari non è invertibile

(b) V F se f è dispari è invertibile

(c) V F se f è strettamente crescente è invertibile

(d) V F se f è invertibile allora è strettamente monotona

(e) V F se f è decrescente allora $f \circ f$ è crescente.

2 Sia $A \subset \mathbb{R}$; la funzione *indicatrice* (o *caratteristica*) di A è definita da

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

allora

(a) V F $\chi_A^2(x) = \chi_A(x)$

(b) V F $\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A\cup B}(x)$

(c) V F $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x)$

(d) V F $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) = \chi_{A\cup B}(x)$

Trovare l'errore

1 Le funzioni

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

sono uguali, infatti per le proprietà dei logaritmi

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

2 Le funzioni

$$f(x) = \sqrt[6]{\frac{x^2-3x+2}{3-x}} \qquad g(x) = \sqrt[7]{\frac{x^2-3x+2}{3-x}}$$

hanno lo stesso dominio, che si ricava risolvendo la disequazione

$$\frac{x^2-3x+2}{3-x} \ge 0$$

Si ottiene l'insieme $(-\infty, 1] \cup [2, 3)$

3 La disequazione

$$\sin x > \cos x$$

è equivalente a

$$\tan x > 1$$

(si dividono entrambi i membri per $\cos x$), che ha come soluzioni gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ulteriori esercizi

1 Tracciare (col *computer*) i grafici di alcune funzioni potenza

$$y = Ax^{\alpha} \qquad x > 0 \quad A > 0$$

in scala normale e in *scala logaritmica*. Verificare che in scala logaritmica il grafico della potenza diventa il grafico di una retta.

2 Tracciare (col *computer*) i grafici di alcune funzioni esponenziali

$$y = Ae^{\alpha x} \qquad A > 0$$

in scala normale e in *scala semilogaritmica*. Verificare che in scala semilogaritmica il grafico dell'esponenziale diventa il grafico di una retta.

3 Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è invertibile, ma non esiste alcun intervallo in cui è monotona.

4 *Punti fissi* — Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; un punto x^* si chiama punto fisso di f se è soluzione dell'equazione

$$f(x) = x$$

Verificare che se x^* è punto fisso per f è anche punto fisso per f^2 (iterata seconda di f). È vera anche l'affermazione inversa?

3.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1 $\boxed{d}$

Si ricava risolvendo la disequazione $\dfrac{x^2 - 5x}{4 - x} > 0$

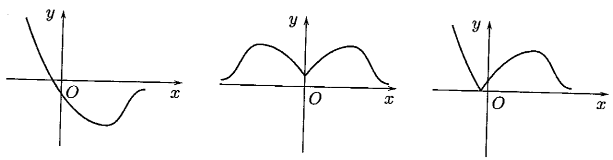
2 $\boxed{b}$

Si ricava risolvendo il sistema $\begin{cases} x + 3 > 0 \\ \log_3(x+3) \le 1 \end{cases}$

3 $\boxed{a}$

4 $\boxed{b}$

I grafici delle funzioni $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ e $\boxed{c}$ sono rispettivamente

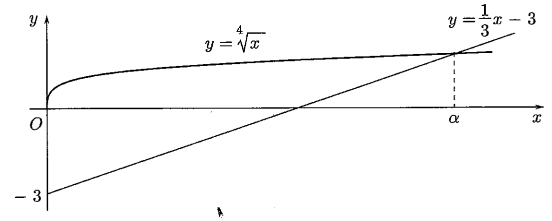


5 $\boxed{c}$

6 $\boxed{d}$

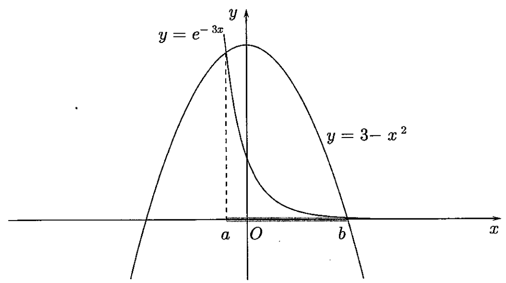
7 $\boxed{d}$

Come risulta dal grafico.



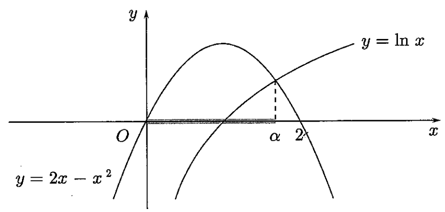
8 $\boxed{c}$

Come risulta dal grafico, l'insieme delle soluzioni è dato dalla parte di asse reale in corrispondenza del quale la parabola $y = 3 - x^2$ si trova sopra l'esponenziale $y = e^{-3x}$.



9 $\boxed{a}$

Come risulta dal grafico, l'insieme delle soluzioni è dato dalla parte di asse reale in corrispondenza del quale la parabola $y = 2x - x^2$ si trova sopra il logaritmo $y = \ln x$.



10 $\boxed{d}$

La funzione in $\boxed{a}$ è $g(f(x))$.

11 $\boxed{b}$

12 $\boxed{b}$

La funzione è strettamente monotona quindi invertibile. L'inversa si trova risolvendo l'equazione

$$1 + \ln(x-4) = y$$

e scambiando x con y. La funzione in $\boxed{a}$ è $\dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1} \neq f^{-1}(x)$.

13 $\boxed{a}$

20 è il massimo del dominio, 0 è il punto di massimo della funzione.

14 $\boxed{a}$

Le altre hanno come punto di massimo rispettivamente 14, 7 e 7.

Esercizi

1 Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$.
Il dominio di g è $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$: lo si trova ponendo

$$1 - \sqrt[3]{x^2-1} \geq 0$$

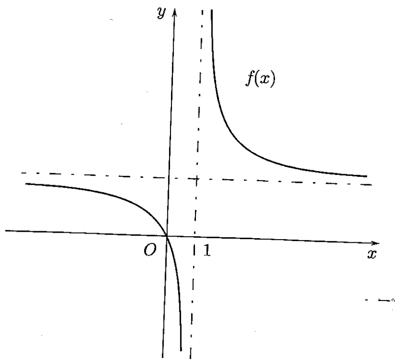
da cui $\sqrt[3]{x^2-1} \geq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 1 \dots$
Il dominio di h è $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$: lo si trova risovendo la disequazione

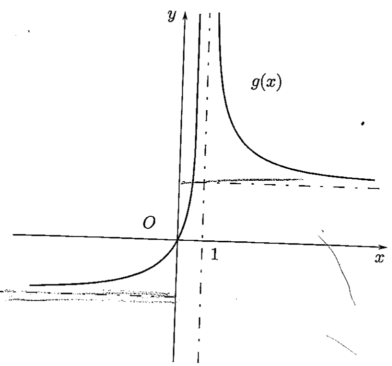
$$\frac{x^2}{1-x} > 0$$

2 Il grafico di f è un'iperbole con asintoti paralleli agli assi, infatti si può scrivere

$$f(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Il grafico di f si ottiene traslando il grafico della funzione $y = 2/x$ di due unità verso l'alto e di un'unità verso destra.





Il grafico di g si ottiene ribaltando simmetricamente rispetto all'asse x la parte del grafico di f che si trova a sinistra della retta $x = 1$.

● Risolvendo $1 + \dfrac{1}{x} = y$ e scambiando x con y si trova

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$$

Sostituendo $1 + \dfrac{1}{x}$ a x si trova

$$f^2(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

● Si ha, se $x \leq 0$

$$f^2(x) = -1 \qquad f^3(x) = -1 \dots$$

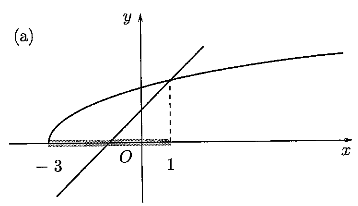
se $x > 0$

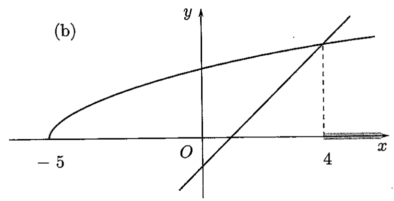
$$f^2(x) = x \qquad f^3(x) = \frac{2}{x} \dots$$

e quindi

$$f^n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad \text{per } n \text{ pari} \quad \text{e } f^n(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x} & x > 0 \end{cases} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

5 Le soluzioni sono: (a) $-3 \leq x < 1$, (b) $x > 4$.





6 (a) La disequazione equivale a

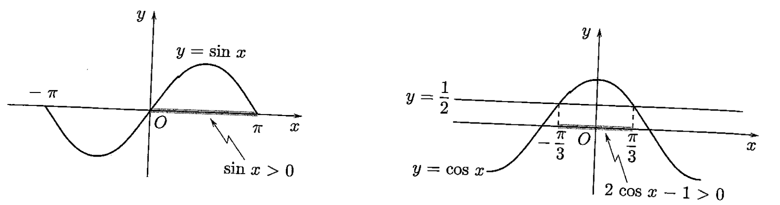
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} > \frac{1}{2}$$

a sua volta equivalente a

$$2\left(e^{2x} - 1\right) > e^{2x} + 1$$
$$e^{2x} > 3$$
$$x > \frac{1}{2} \ln 3$$

(b) Essendo $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, la disequazione può essere riscritta

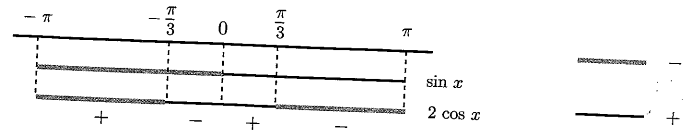
$$\sin x\,(2\cos x - 1) < 0$$



Data la periodicità di 2π delle funzioni ci si può limitare all'intervallo $(-\pi, \pi]$. In tale intervallo, come mostrano i grafici, si ha

$$\sin x > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi$$
$$\cos x > \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

Le soluzioni della disequazione, in $(-\pi, \pi]$, si leggono dallo schema



In $\mathbb{R}$, sono gli x tali che

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

7 $f(x+1) = \sin 2\pi(x+1) = \sin(2\pi x + 2\pi) = \sin 2\pi x = f(x)$
La funzione richiesta è $f(3x) = \sin 6\pi x$.

8 Se per ogni coppia x_1, x_2 si ha che

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{e} \quad g(x_1) \leq g(x_2)$$

si ha anche

$$f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2) \quad \text{e} \quad f(g(x_1)) \leq f(g(x_2))$$

Se f è crescente e g decrescente (o viceversa) non si può dire nulla delle somma mentre

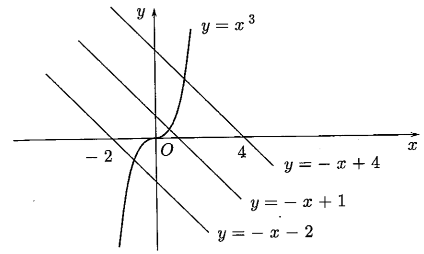
$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \geq f(g(x_2))$$

e quindi la funzione composta è decrescente. Inoltre, si dimostra che una funzione somma di funzioni decrescenti è decrescente e una funzione composta di funzioni decrescenti è crescente.

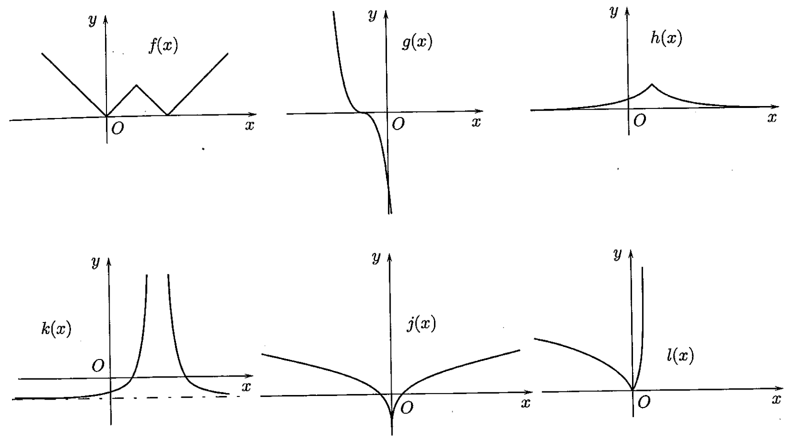
9 Se $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$ anche $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, ecc. La somma di funzioni dispari è dispari, mentre il prodotto o il quoziente di due funzioni dispari è pari. Il prodotto o il quoziente di una funzione pari e una dispari è una funzione dispari; nulla si può dire riguardo la somma.

10 f è decrescente, g è crescente e dispari, h è decrescente, k e l sono pari e non monotone, j è dispari e non monotona.

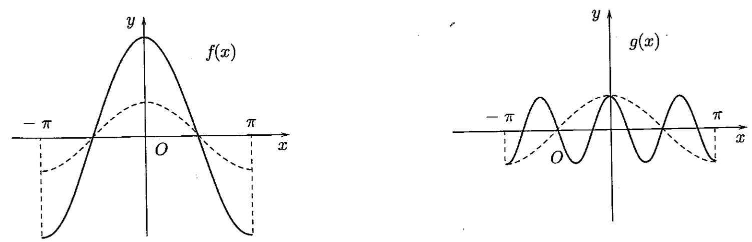
Lo si può mostrare mediante confronto grafico tra le funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x+a$. Per ogni a le due curve hanno un unico punto di intersezione.

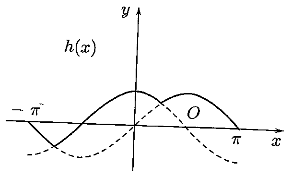


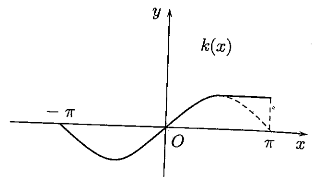
I grafici sono riportati in figura.



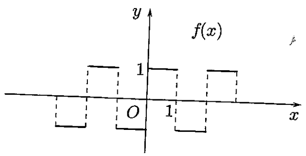
13 I grafici sono riportati in figura.

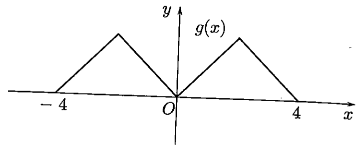




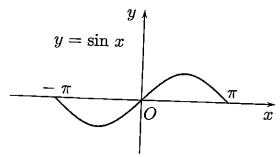


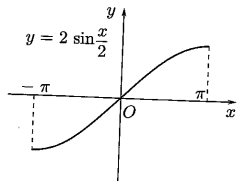
14 I grafici sono riportati in figura.

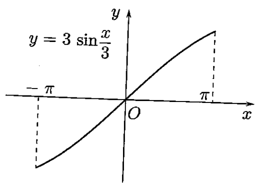


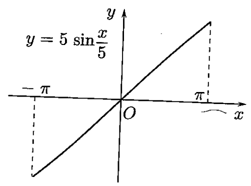


15 I grafici sono









Si nota che "ingrandendo" il grafico, questo assomiglia sempre più a quello di una retta.

Vero o falso?

1 (a) Vero. Una funzione pari non è mai biunivoca.

(b) Falso. Per esempio $f(x) = \sin x$ definita in $\mathbb{R}$ è dispari ma non è invertibile.

(c) Vero. Sia f è strettamente crescente. Per ogni coppia x_1, x_2 del dominio di f se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$, quindi se $x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$; f è iniettiva e perci ò invertibile.

(d) Falso. Per esempio

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x} & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

è invertibile ma non è monotona.

(e) Vero (si veda l'esercizio 8).

(a) Falso. Se, per esempio, $1 \notin A$ e $2 \in A$, $\chi_A(2) = 1$, mentre $\chi_A^2(2) = 0$.

(b) Falso. Se $x \in A \cap B$, $\chi_A(x) + \chi_B(x) = 2$, mentre $\chi_{A \cup B}(x) = 1$.

(c) Vero. Se $x \in A \cap B$, allora $\chi_A(x) = 1$, $\chi_B(x) = 1$ e $\chi_{A \cap B}(x) = 1$. Se $x \notin A \cap B$, allora $\chi_{A \cap B}(x) = 0$, e $\chi_A(x) = 0$ o $\chi_B(x) = 0$; perciò $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$.

(d) Vero. Per controllare, distinguere i casi $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in A \cap B$.

Trovare l'errore

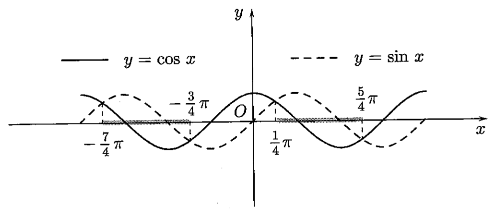
- Le funzioni non sono uguali perché non hanno lo stesso dominio. Il dominio di f è $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, quello di g è $(1, +\infty)$. Dove entrambe sono definite coincidono, ma il dominio di g è strettamente contenuto in quello di f. Si dice che f è un *prolungamento* di g e che g è una *restrizione* di f.

- f è effettivamente definita in $(-\infty, 1] \cup [2, 3)$; ma il dominio di g è $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. La radice di indice dispari è definita anche se il radicando è negativo. Per determinare il dominio di g basta porre la condizione $x \neq 3$ (denominatore diverso da 0).

- Il passaggio è lecito solo se $\cos x > 0$. Le soluzioni della disequazione si potrebbero ottenere dai due sistemi

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \tan x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos x < 0 \\ \tan x < 1 \end{cases}$$

a cui vanno anche aggiunte le soluzioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, che si "perdono" dividendo per $\cos x$.



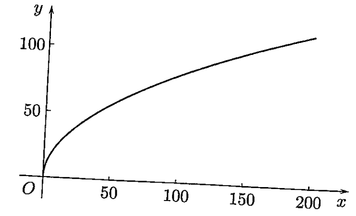
Le soluzioni della disequazione però si ottengono più facilmente mediante confronto grafico e sono gli x reali tali che

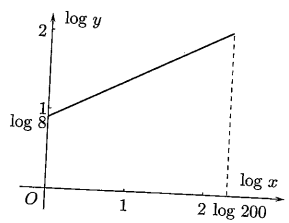
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ulteriori esercizi

1 I grafici rappresentano la funzione $y = 8\sqrt{x}$ in scala normale e in scala logaritmica(1).

(1) La base dei logaritmi è 10.





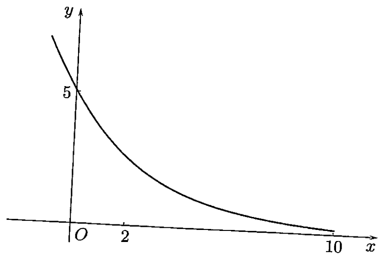
In scala logaritmica, sull'asse delle ascisse si collocano i valori di $X = \log x$ mentre sulle ordinate trovano posto i valori di $Y = \log y$. In questa scala, il grafico della funzione potenza diventa una retta. Ciò si vede passando ai logaritmi nella relazione (con le variabili originali) $y = Ax^{\alpha}$, ottenendo così

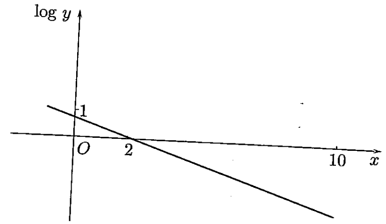
$$\log y = \log A + \alpha \log x$$

e poi sostituendo $Y = \log y$, $X = \log x$. L'equazione risultante è

$$Y = \alpha X + \log A$$

2 I grafici rappresentano la funzione $y = 5e^{-x/3}$ in scala normale e in scala semilogaritmica.





In scala semilogaritmica, sull'asse delle ascisse si collocano i valori di x mentre sulle ordinate trovano posto i valori di $Y = \log y$. Usando gli stessi calcoli dell'esercizio precedente, si vede che il grafico dell'esponenziale $y = Ae^{\alpha x}$ si trasforma in quello della retta di equazione $Y = \alpha x + \log A$.

3 f è invertibile poiché è iniettiva. Infatti presi x_1 e x_2 (diversi tra loro), se sono entrambi razionali, si ha

$$x_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = x_2$$

se sono entrambi irrazionali, si ha

$$-x_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = -x_2$$

se sono uno razionale e l'altro irrazionale ancora le loro immagini sono diverse, perché i razionali hanno immagine razionale e gli irrazionali hanno immagine irrazionale.
f non è monotona su alcun intervallo, infatti in ogni intervallo esistono infiniti punti corrispondenti a numeri razionali ed infiniti punti corrispondenti a numeri irrazionali, per cui sicuramente esiste una coppia (di razionali) x_1, x_2 tali che

$$x_1 < x_2 \quad \text{e} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

e una coppia (di irrazionali) y_1, y_2 tali che

$$y_1 < y_2 \quad \text{e} \quad f(y_1) > f(y_2)$$

Se x^* è punto fisso di f, allora

$$f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*$$

quindi x^* è punto fisso anche per f^2. Analogamente, si può dimostrare che x^* è punto fisso per tutte le iterate f^k $(k > 2)$ di f.
Se x^* è punto fisso per f^2 non è detto che lo sia anche per f; per esempio $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ha come punti fissi $x = \pm 1$, mentre la sua iterata seconda $f^2(x) = x$ ha come punti fissi tutti i numeri reali.

2. LIMITI

Esempi

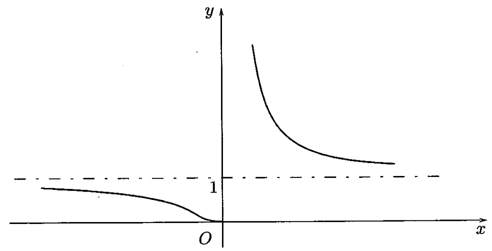
1 Calcoliamo il dominio naturale e i limiti agli estremi del dominio della funzione

$$f(x) = e^{1/x}$$

Il dominio è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1^- \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^+$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$$

Le rette $y = 1$ e $x = 0$ sono rispettivamente asintoto orizzontale e asintoto verticale per f. Il grafico di f è



2 Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - e^x}{x^2 + 3\ln x}$$

Analogamente a quanto visto per le successioni (che sono un caso particolare di funzioni) si ha, per $x \to +\infty$,

$$\frac{x^3 - e^x}{x^2 + 3\ln x} \sim -\frac{e^x}{x^2} \to -\infty$$

Ogni infinito esponenziale è di ordine superiore a ogni infinito potenza e ogni infinito potenza è di ordine superiore rispetto a ogni infinito logaritmico. In una somma di infiniti si possono trascurare gli infiniti di ordine inferiore.

3 Verifichiamo che per $x \to 0$

$$x^2 + x \sim x$$

Anche per le funzioni vale l'osservazione fatta per le successioni ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 104): un tipico modo per mostrare che, per $x \to c$, $f(x) \sim g(x)$ consiste nello scrivere $f(x) = g(x)\,h(x)$ con $h(x) \to 1$. Nel nostro caso si ha $x^2 + x = x(x+1)$ e $x + 1 \to 1$. Dunque, per $x \to 0$, x^2 è "trascurabile" rispetto a x.

In una somma di infinitesimi si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore.

4 Calcoliamo

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\tan x}{x-\pi}$$

Col cambio di variabile ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 158) $y = x - \pi$ da $x \to \pi$, si trae $y \to 0$ e si ha

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\tan x}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\tan(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\tan y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y\cos y} = 1$$

5 Calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^2}{3x + x^3\cos x}$$

Sappiamo che ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 160), per $x \to 0$, $\sin x \sim x$, quindi x^2 è "trascurabile" rispetto a $\sin x$, così come $x^3 \cos x$ è "trascurabile" rispetto a $3x$. Dunque, per $x \to 0$,

$$\frac{\sin x + x^2}{3x + x^3\cos x} \sim \frac{\sin x}{3x} \to \frac{1}{3}$$

6 Determiniamo gli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{x-1}$.

Il dominio di f è $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

La retta $x = 1$ è asintoto verticale per f e potrebbe esserci anche un asintoto obliquo. Dato che

$$f(x) = \frac{2x^2+3}{x-1} = 2x + 2 + \frac{5}{x-1}$$

e

$$\frac{5}{x-1} \to 0 \quad \text{per } x \to \pm\infty$$

l'asintoto obliquo esiste ed ha equazione $y = 2x + 2$.

Test a risposta multipla

1. Sia $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 4 \\ 3 & x = 4, \end{cases}$ allora $\lim_{x\to 4} f(x) =$

   [a] $+\infty$ [b] non esiste [c] 4 [d] 3

2. Sia $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, con $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$; allora $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

   [a] è 0 [b] può non esistere [c] è 3 [d] è $+\infty$

3. $\lim_{x\to 0} (1+3x)^{1/x} =$

   [a] e [b] 1 [c] e^3 [d] 3

4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + e^x} =$

   [a] $+\infty$ [b] 1 [c] $-\infty$ [d] 0

5. $\lim_{x\to+\infty} x^{3/x} =$

   [a] $+\infty$ [b] 1 [c] 3 [d] 0

6. Tra le seguenti funzioni qual è l'infinito di ordine inferiore, per $x \to -\infty$? $f(x) =$

   [a] $\sqrt[7]{x}$ [b] $(\ln|x|)^5$ [c] $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ [d] $(x+1)^{13}$

7. Tra le seguenti funzioni qual è l'infinitesimo di ordine superiore, per $x \to 0^+$? $f(x) =$

   [a] $\sqrt[5]{x}$ [b] $\dfrac{1}{\ln x}$ [c] $\sin x$ [d] x^3

8. Siano $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = x$ infinitesimi per $x \to 0$; quale affermazione è vera?

   [a] f e g sono dello stesso ordine [b] $f(x) \sim g(x)$ [c] f è di ordine superiore a g [d] f e g non sono confrontabili

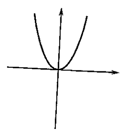
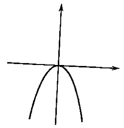
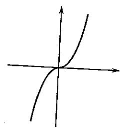
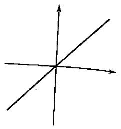
9. Quale tra le seguenti funzioni presenta come asintoto obliquo la retta $y = x$ per $x \to +\infty$? $f(x) =$

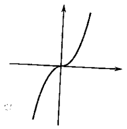
   [a] $x + \ln x$ [b] $x + \sqrt[3]{x}$ [c] $x + \sin x$ [d] $x + \dfrac{\sin x}{x}$

10. Per quale tra le seguenti funzioni vale la relazione $f(x) \sim x^3$ per $x \to 0$?

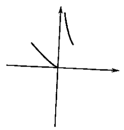
    [a] $3x^3 + x^4$ [b] $x^3 - 3x^2$ [c] $x^3 + 3x^4$ [d] $x^4 - x^3$

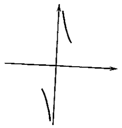
11 Il grafico della funzione $f(x) = 2x^2 + x^3 - 3x^4$ in un intorno di $x = 0$ è

a 
b 
c 
d 

12  è, in un intorno di 0, il grafico di $f(x) =$

a $x \ln(1+x)$ b $x \ln(1+x^2)$ c $\ln(1+\sqrt[3]{x})$ d $\ln(1-x^2)$

13 Se il grafico di $y = f(x)$ in un intorno di $x = 0$ è , allora

 è il grafico di

a $y = \ln f(x)$ b $y = \dfrac{1}{f(x)}$ c $y = (f(x))^2$ d $y = e^{f(x)}$

Esercizi

1 Calcolare i limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2+5}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \ln(\tan x)^2$

2 Per le funzioni

(a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ (c) $h(x) = \ln \dfrac{x}{x-1}$

determinare il dominio e i limiti agli estremi del dominio. Sulla base dei calcoli fatti, tracciare (a mano) un probabile grafico e controllare il risultato con il *computer*.

3 Calcolare i limiti

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (x+x^2)\ln x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+3e^x}{x+\sqrt{-x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x+1}\,e^x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x + x^2}{(\sin x)^3 + 2x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{x(e^{2x}-1)}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \cos\frac{1}{x}$

4 Siano

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \qquad g(x) = e^{-x}$$

Tracciare i grafici delle funzioni f e g e delle funzioni composte

$$h(x) = f(g(x)) \quad \text{e} \quad k(x) = g(f(x))$$

5 Dimostrare che, per $x \to +\infty$, la funzione

$$f(x) = \ln\left(3e^{2x} + 4x - 5\right)$$

ha come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x + \ln 3$.

6 Determinare il carattere delle serie

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)$$

7 La velocità $v(t)$ di un corpo di massa m che cade nell'aria, se si assume la forza di attrito proporzionale alla velocità, è regolata dalla legge

$$v(t) = \frac{mg}{h}\left(1 - e^{-\frac{h}{m}t}\right)$$

dove g è l'accelerazione di gravità e h un coefficiente d'attrito. Se, invece, si assume la forza di attrito proporzionale al quadrato della velocità, la velocità del corpo risulta

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{h}} \tanh \sqrt{\frac{gh}{m}}\, t$$

In entrambi i casi, trovare come varia la velocità nei primi istanti di caduta (ossia determinare il comportamento asintotico di $v(t)$ per $t \to 0$) e su quale valore si "stabilizza" (ossia calcolare il limite per $t \to +\infty$).

Trovare l'errore

1. Per $x \to 0$ si ha

$$x + 2x^2 - 4x^3 \sim -4x^3$$
$$3x - 5x^2 + x^3 \sim x^3$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + 2x^2 - 4x^3}{3x - 5x^2 + x^3} = -4$$

2. Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 2$$

infatti $\dfrac{x+\sin x}{x} = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$ e $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$.

Ulteriori esercizi

1. Per la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

(a) studiare il comportamento in un intorno dei punti di intersezione con l'asse x;
(b) controllare che esiste un asintoto obliquo e scriverne l'equazione;
(c) tracciare un probabile grafico.

2. Verificare che $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin \dfrac{\pi}{x}$ non esiste.

3. Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ positive. Dimostrare che se

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 1$$

allora, per x abbastanza grande, $f(x) > g(x)$.
È vera l'implicazione inversa?

3.2. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{c}$
$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4 \neq f(4) = 3$

◆ $\boxed{b}$
Se il limite esiste necessariamente è 3, ma può anche non esistere.

◆ $\boxed{c}$
Si pone $y = 1/x$ e ci si riconduce al limite notevole

$$\lim_{y\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^y = e^a$$

(⇛ BPS, pag. 162, formula (6.3)).

◆ $\boxed{c}$
Per $x \to -\infty$, $\dfrac{x^3 + \sqrt[3]{x}}{x^2 + e^x} \sim \dfrac{x^3}{x^2} = x \to -\infty$.

◆ $\boxed{b}$
$x^{3/x} = e^{3\ln x/x}$ e $\dfrac{3\ln x}{x} \to 0$

6. $\boxed{b}$
L'infinito di ordine superiore è $\boxed{c}$.

7. $\boxed{d}$
L'infinitesimo di ordine inferiore è $\boxed{b}$.

8. $\boxed{a}$
Per $x \to 0 \implies \dfrac{\sin 2x}{x} \to 2$.

9. $\boxed{d}$
Per tutte le funzioni si può scrivere $f(x) = x + o(x)$, per $x \to +\infty$, ma solo per l'ultima si può scrivere $f(x) = x + o(1)$

10. $\boxed{c}$
In una somma di infinitesimi si possono trascurare quelli di ordine superiore.

11. $\boxed{a}$
Per $x \to 0 \implies f(x) \sim 2x^2$.

12. $\boxed{b}$
Per $x \to 0 \implies x\ln(1 + x^2) \sim x^3$.

13. $\boxed{a}$
Infatti se $f(x) \to 0 \implies \ln f(x) \to -\infty$ e se $f(x) \to +\infty \implies \ln f(x) \to +\infty$.

Esercizi

1 (a) $-\infty$; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) $(\tan x)^2 \to +\infty$ per cui $\ln(\tan x)^2 \to +\infty$

2 (a) Il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

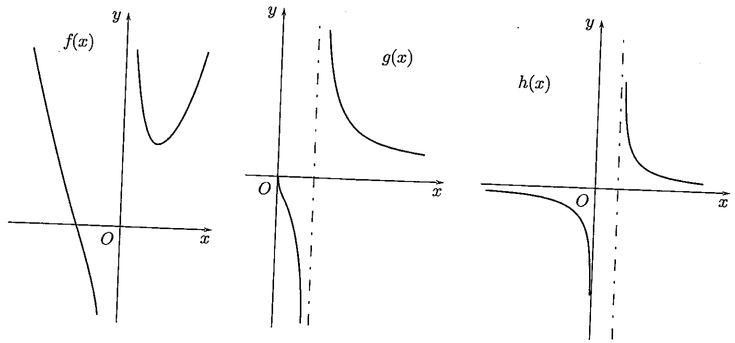
Il grafico di f è dato in figura.
(b) Il dominio di g è $(0,1) \cup (1, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$$

Il grafico di g è dato in figura.
(c) Il dominio di h è $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to 0^-} h(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0^+$$

Il grafico di h è dato in figura.



3 (a) 0. Si ha, per $x \to 0^+$

$$\left(x + x^2\right) \ln x \sim x \ln x = \frac{\ln x}{x^{-1}}$$

e il logaritmo è infinito di ordine inferiore alla potenza (⇛ BPS, pagg. 164-165).
(b) Per $x \to -\infty$,

$$\frac{2x + 3e^x}{x + \sqrt{-x}} \sim \frac{2x}{x} = 2$$

(c) 0. Infatti per $x \to -\infty$

$$\sqrt[3]{x+1}\,e^x = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{e^{-x}} \sim \frac{x^{1/3}}{e^x}$$

e l'esponenziale è infinita di ordine superiore alla potenza (⇛ BPS, pagg. 164-165).
(d) 1. Si pone $1/x = y$ e si giunge al limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

(⇛ BPS, pag. 162, formula (6.5)).
(e) 1. Si pone $x - 1 = y$ e si giunge al limite notevole

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$$

(⇛ BPS, pag. 162, formula (6.4)).
(f) Per $x \to 0$,

$$\frac{\tan x + x^2}{(\sin x)^3 + 2x} \sim \frac{\tan x}{2x} \to \frac{1}{2}$$

(g) Per $x \to 0$,

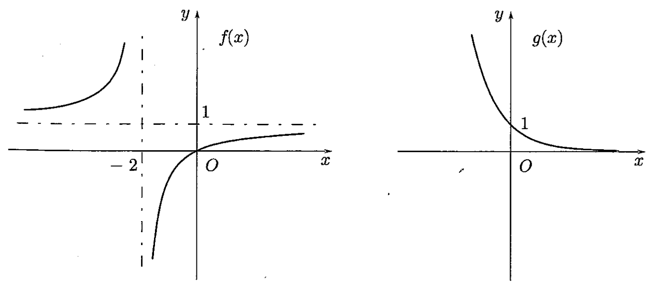
$$\frac{\ln\left(1 + 3x^2\right)}{x\left(e^{2x} - 1\right)} \sim \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

(⇛ BPS, pag. 163, tabella (6.8)).
(h) $\dfrac{1}{4}$ (si può moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{x} + 2$).
(i) 0; per il criterio di confronto (⇛ BPS, pag. 157) dato che $\left|\cos \dfrac{1}{x}\right| \le 1$, si ha

$$0 \le \sin x \le \left|\cos \frac{1}{x}\right| \le \sin x$$

e $\sin x \to 0$ per $x \to 0$.

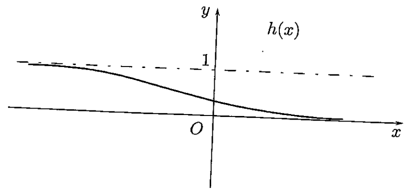
4 I grafici di f e g sono



$h(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$ è definita in $\mathbb{R}$ ed è decrescente. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

Un "probabile grafico" di h è

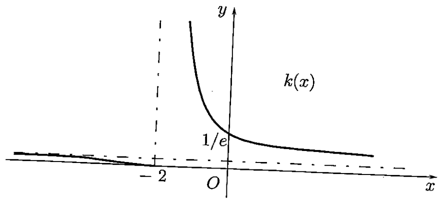


$k(x) = e^{-x/(x+2)}$ è definita in $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ e in ciascuno di tali intervalli è decrescente.(2) Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \frac{1}{e} \qquad \lim_{x\to-2^-} g(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-2^+} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{e}$$

Un "probabile grafico" di k è



5 Cerchiamo di scrivere $f(x)$ come somma di un polinomio di primo grado + un infinitesimo (per $x \to +\infty$). Il polinomio di primo grado dà l'equazione dell'asintoto. Si ha

$$f(x) = \ln\left(3e^{2x} + 4x - 5\right) = \ln\left[3e^{2x}\left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{5}{3x^2}\right)\right] =$$
$$= 2x + \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{5}{3x^2}\right)$$

e $\ln\left(1 + \frac{4}{3x} - \frac{5}{3x^2}\right) \to 0$ per $x \to +\infty$.

6 Entrambe le serie convergono per il criterio di confronto asintotico, infatti si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad \text{e} \quad \ln\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

7 Nel primo caso si ha

$$\text{per } t \to 0 \qquad v(t) \sim \frac{mg}{h} \cdot \frac{h}{m} t = gt$$
$$\text{per } t \to +\infty \quad v(t) \to \frac{mg}{h}$$

(2) Ma non è globalmente decrescente!

nel secondo caso

$$\text{per } t \to 0 \qquad v(t) \sim \sqrt{\frac{mg}{h}} \cdot \sqrt{\frac{gh}{m}} t = gt$$
$$\text{per } t \to +\infty \quad v(t) \to \sqrt{\frac{mg}{h}}$$

Trovare l'errore

- Il limite è stato calcolato come se fosse $x \to +\infty$. Per $x \to 0$ si ha

$$x + 2x^2 - 4x^3 \sim x$$
$$3x - 5x^2 + x^3 \sim 3x$$

quindi

$$\lim_{x\to0} \frac{x + 2x^2 - 4x^3}{3x - 5x^2 + x^3} = \frac{1}{3}$$

come facilmente si verifica semplificando numeratore e denominatore per x.

- $\frac{\sin x}{x} \to 1$, ma per $x \to 0$! Per $x \to +\infty$, si ha

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x}$$

quindi, per il criterio di confronto, $\frac{\sin x}{x} \to 0$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$$

Ulteriori esercizi

1 La funzione f interseca l'asse x nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Per $x \to 0$, si ha $f(x) \sim -\sqrt[3]{x^2}$, per $x \to 1$, si ha $f(x) \sim \sqrt[3]{x-1}$. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) \sim x$, quindi l'eventuale asintoto obliquo ha equazione $y = x + q$, dove (⇛ BPS, pag. 127)

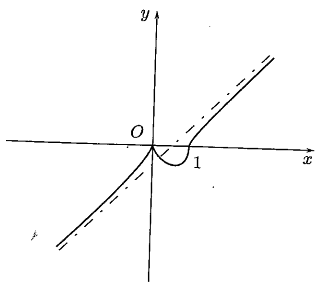
$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x\right)$$

Dato che (⇛ BPS, pag. 163, formule (6.8))

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x = x\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 1\right) \sim x\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3}$$

l'asintoto obliquo ha equazione $y = x - \frac{1}{3}$.

Il grafico di f è il seguente.



2 Basta osservare che le due successioni

$$x_n = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{2}{2n+1}$$

sono positive e infinitesime, ma

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin n\pi = 0$$

$$f\left(\frac{2}{2n+1}\right) = \sin\frac{(2n+1)\,\pi}{2} = 1$$

sono successioni costanti e diverse tra loro per cui la definizione di limite ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 124) non è soddisfatta.

3 Comunque preso $\varepsilon > 0$, si ha, per x abbastanza grande,

$$l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$$

Scelto ε tale che $l - \varepsilon > 1$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} > l - \varepsilon > 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > g(x)$$

L'affermazione inversa è falsa. Per esempio si ha $x + 1 > x$ e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

3. CONTINUITÀ

Esempi

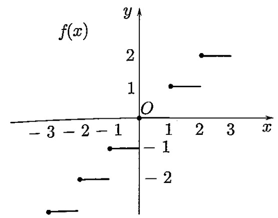
1 Le funzioni

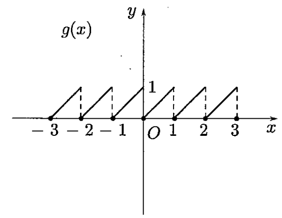
$$f(x) = [x] \quad \text{(parte intera di } x\text{)}$$

e

$$g(x) = x - [x] \quad \text{(mantissa di } x\text{)}$$

hanno infiniti punti di discontinuità a salto in corrispondenza di x intero. Il salto in tali punti è 1 per f, -1 per g. In tali punti entrambe le funzioni sono continue dalla destra.





2 Verifichiamo che la funzione

$$f(x) = x^2 \ln|x|$$

è prolungabile con continuità in $x = 0$. Infatti si ha

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln|x| = 0$$

ossia il limite per $x \to 0$ esiste finito. La funzione

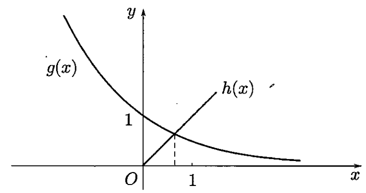
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$. Per $x \neq 0$ è continua in quanto prodotto di funzioni elementari (*tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale*).

3 Calcoliamo (armati di calcolatrice tascabile) col metodo di dicotomia(3) la soluzione dell'equazione

$$f(x) = 2^{-x} - x = 0$$

che coincide con l'ascissa del punto di intersezione dei grafici di $g(x) = 2^{-x}$ e di $h(x) = x$.



Come si vede dalla figura, la soluzione è unica e si trova tra 0 e 1. Si ha $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = 2^{-1} - 1 = 0,5 < 0$.

(3) Si veda la dimostrazione del teorema degli zeri ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 154).

Successivamente:
$f(1/2) = 2^{-1/2} - 1/2 \simeq 0,20711 > 0 \Rightarrow$ ci restringiamo a $[1/2, 1]$
$f(3/4) = 2^{-3/4} - 3/4 \simeq -0,1554 < 0 \Rightarrow$ ci restringiamo a $[1/2, 3/4]$
$f(5/8) = 2^{-5/8} - 5/8 \simeq 0,0,2342 > 0 \Rightarrow$ ci restringiamo a $[5/8, 3/4]$
$f(11/16) = 2^{-11/16} - 11/16 \simeq -6,6571 \times 10^{-2} < 0 \Rightarrow$ ci restringiamo a $[5/8, 11/16]$
$f(21/32) = 2^{-21/32} - 21/32k \simeq -2,1725 \times 10^{-2} < 0 \Rightarrow$ ci restringiamo a $[5/8, 21/32]$
$f(41/64) = 2^{-41/64} - 41/64 \simeq k8,001 \times 10^{-4} > 0.$
Arrestandoci alla sesta iterazione, possiamo affermare che lo zero z si trova tra $41/64 \simeq 0,64063$ e $21/32 \simeq 0,65625$

$$0,64063 < z < 0,65625$$

ossia $z = 0,6\ldots$ con la seconda cifra incerta tra 4 e 5.

Test a risposta multipla

1. $f(x) = \begin{cases} 5+x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ è continua in $x = 0$

[a] solo per $a = 5$ [b] solo per $a = 0$ [c] per nessun valore di a [d] per ogni valore di a

2. Sia $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 2]$. Quale tra le seguenti affermazioni è corretta?

[a] Il massimo di f è 1, il minimo non esiste [b] Il massimo di f è 2, il minimo 0 [c] Il massimo di f è $\frac{1}{2}$, il minimo 0 [d] Il massimo di f è $\frac{1}{2}$, il minimo non esiste

3. Sia $f(x) = x^2 - 4x + 2$, definita in $A = (0, 6]$; allora f in A

[a] ha minimo e massimo [b] non ha minimo [c] non ha massimo [d] non ha né minimo né massimo

4. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile allora necessariamente

[a] f è continua [b] f è monotona [c] f è limitata [d] $f(3) \neq f(5)$

5. Sia $f(x) : [0, 7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2}$; f non verifica le ipotesi del teorema

[a] degli zeri [b] dei valori intermedi [c] di Weierstrass [d] nessuna delle altre risposte

6. La funzione $f(x) = 2x - 5\sqrt{x}$ ha uno zero nell'intervallo

[a] $(4,5)$ [b] $(5,6)$ [c] $(6,7)$ [d] $(7,8)$

Esercizi

1. Verificare che le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{\ln|x|} \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-1/x^2}$$

sono prolungabili con continuità in $x = 0$.

2. Verificare che la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$$

non è prolungabile con continuità in $x = 0$.

3. Determinare per quale valore del parametro reale a la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x + a & 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[0, 3]$. Determinare, se esistono, il minimo e il massimo di f.

4. Dopo aver verificato che a funzione $f(x) = 2^x - 13x$ ha uno zero $x = c$ nell'intervallo $[6, 7]$, applicare due volte l'algoritmo di dicotomia per determinare un intervallo di ampiezza $1/4$ a cui appartiene c.

Vero o falso?

1. [V] [F] Se f è continua in (a, b), allora è limitata.

2. [V] [F] Se f è illimitata in $[a, b]$, allora ha almeno un punto di discontinuità.

3. [V] [F] Se f è continua in $[a, b]$, $f(a) = 3$ e $f(b) = 5$, allora l'equazione $f(x) = 4$ ha almeno una soluzione.

Ulteriori esercizi

1. Dimostrare che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e invertibile allora è strettamente monotona.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Mostrare che

(a) $f(rx) = rf(x)$ per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ (mostrarlo prima per $r = 0$, r intero, poi per r razionale);
(b) se f è continua in $x = 0$ allora è continua in $\mathbb{R}$;
(c) se f è continua allora $f(x) = ax$ con $a = f(1)$.

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che

$$f(s+t) = f(s) \cdot f(t) \qquad \text{per ogni } s,t \in \mathbb{R}$$

Mostrare che se f è continua (non costante) allora $f(x) = a^x$ per qualche $a > 0$ (mostrarlo prima per $r = 0$, r intero, poi per r razionale).

Sia $f : [a,b] \to [a,b]$ continua. Dimostrare che f ammette un *punto fisso* in $[a,b]$, ossia l'equazione

$$f(x) = x$$

ha almeno una soluzione $x^* \in [a,b]$.

Sia $f : [a,b] \to [a,b]$ continua e $\{s_n\}$ una successione definita per ricorrenza[4] da

$$\begin{cases} s_{n+1} = f(s_n) \\ s_0 \in [a,b] \text{ assegnato} \end{cases}$$

Dimostrare che se $s_n \to l$, allora l è punto fisso di f.

3.3. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{a}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ se e solo se $a = 5$

2. $\boxed{c}$

Minimo e massimo *devono* esistere per il teorema di Weierstrass (⇛ BPS, pag. 156), essendo f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,2]$.

3. $\boxed{a}$

Il minimo e il massimo di f sono -2 e 14. Anche se f è definita in un intervallo non chiuso il massimo e il minimo esistono.

4. $\boxed{d}$

f è invertibile se e solo se è biunivoca e quindi se $x_1 \neq x_2$, allora $f(x_1) \neq f(x_2)$

5. $\boxed{a}$

f è continua in $[0,7]$, ma $f(0) = \sqrt{2}$ e $f(7) = 3$ sono entrambi positivi.

[4] Vedi capitolo 2, pag. 44.

6. $\boxed{c}$

f è continua e $f(6) = 12 - 5\sqrt{6} < 0$, $f(7) = 14 - 5\sqrt{7} > 0$, quindi soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri.

Esercizi

- Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln|x|} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$$

I limiti esistono finiti, quindi entrambe le funzioni sono prolungabili con continuità in $x = 0$.

- Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

quindi il limite per $x \to 0$ non esiste. La funzione non è prolungabile con continuità in $x = 0$.

- f è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[0,3]$. Se è continua, verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass (⇛ BPS, pag. 156). Sicuramente f è continua in $[0,3] \setminus \{1\}$ ed è continua anche in $x = 1$ se

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

Ciò accade per

$$1 + a = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Il minimo di f è $f(3) = 1$, il massimo è $f(1) = 3$.

- Si ha $f(6) = 2^6 - 13 \cdot 6 = -14$, $f(7) = 2^7 - 13 \cdot 7 = 37$
Dato che $f(6.5) = 2^{6.5} - 13 \cdot 6.5 = 6.0097$ il punto c è compreso tra 6 e 6.5. Si ha poi $f(6.25) = 2^{6.25} - 13 \cdot 6.25 = -5.1407$ quindi $c \in (6.25, 6.5)$

Vero o falso?

- Falso. Può, per esempio, essere $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
- Vero, per il teorema di Weierstrass (⇛ BPS, pag. 156).
- Vero, per il teorema dei valori intermedi (⇛ BPS, pag. 156).

Ulteriori esercizi

1 Se f non fosse strettamente monotona esisterebbero tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che, per esempio, $f(x_1) < f(x_2)$ e $f(x_2) > f(x_3)$. Ma allora, per il teorema dei valori intermedi, tra x_1 e x_2 e tra x_2 e x_3 si possono trovare due punti in cui f assume valore uguale, contraddicendo l'invertibilità di f.

2 (a) Ponendo $y = 0$ nell'equazione, si ha, per ogni x

$$f(x) = f(x+0) = f(x) + f(0)$$

da cui $f(0) = 0$.
Per $r = n$ (naturale), si ha, usando ripetutamente l'equazione,

$$f(nx) = f(\underbrace{x + \cdots + x}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ volte}} = nf(x)$$

Per $r = -n$ (intero negativo), si ha, con $y = x$ e $-nx$ al posto di x

$$f((-n)\cdot x) + f(nx) = f(-nx + nx) = f(0) = 0$$

quindi

$$f((-n)\cdot x) = -f(nx) = -nf(x)$$

Per $r = \dfrac{1}{n}$ si ha

$$f(x) = f\left(n \cdot \left(\frac{1}{n}x\right)\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right)$$

quindi

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$$

Per $r = \dfrac{m}{n}$ (razionale), finalmente, si ha

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(m \cdot \left(\frac{1}{n}x\right)\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m\frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x)$$

(b) Si deve provare che per ogni x

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Dato che $f(x+h) = f(x) + f(h)$ e, per l'ipotesi di continuità in 0

$$\lim_{h\to 0} f(h) = f(0) = 0$$

si ha

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0}(f(x) + f(h)) = f(x) + \lim_{h\to 0} f(h) = f(x)$$

(c) Per il punto (a) per ogni r razionale si ha

$$f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = ar$$

con $a = f(1)$.
Siano $x \in \mathbb{R}$ e $\{r_n\}$ una successione di razionali che tende a x. Se f è continua, si ha

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} a \cdot r_n = ax$$

Innanzitutto si ha

$$f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$$

per cui $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$. Se fosse $f(0) = 0$, si ricaverebbe $f(s) \cdot f(0) = f(s) = 0$ per ogni s, cioè f costante uguale a zero. Escludendo questo caso si ha $f(0) = 1$.
Ponendo $t = -s$, si ricava

$$f(0) = f(s-s) = f(s) \cdot f(-s) = 1$$

per cui f è diversa da 0 per ogni s. Essendo continua, ha segno costante e dato che $f(0) = 1 > 0$, è $f(s) > 0$ per ogni s.
Posto $f(1) = a > 0$, si ha

$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = a^2, \quad f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot f(1) = a^3$$

e, per induzione,

$$f(n) = a^n \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}$$

Essendo poi $f(n) \cdot f(-n) = 1$, si ricava

$$f(-n) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Per calcolare f sui razionali si osserva che

$$a = f(1) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ volte}}\Big) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n$$

quindi, $f(1/n) = a^{1/n}$. Inoltre

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ volte}}\Big) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = \left(a^{1/n}\right)^m = a^{m/n}$$

Infine, siano $x \in \mathbb{R}$ e $\{r_n\}$ una successione di razionali che tende a x. Essendo f continua, si ha

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} r_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^x$$

4 Consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - x$$

g è continua in $[a, b]$, inoltre

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0$$

Se $f(a) = a$, allora a è punto fisso per f; se $f(b) = b$, allora b è punto fisso per f. Negli altri casi si ha

$$g(a) > 0 \quad \text{e} \quad g(b) < 0$$

quindi g verifica le ipotesi del teorema degli zeri. Per tale teorema esiste almeno un punto $x^* \in (a, b)$ in cui g si annulla, vale cioè

$$g(x^*) = f(x^*) - x^* = 0$$

x^* dunque è soluzione dell'equazione $f(x) = x$, ossia è punto fisso per f.

5 Per la continuità di f si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(s_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} s_n\right) = f(l)$$

Dalla relazione di ricorrenza, poiché $s_{n+1} \to l$, si ha

$$\begin{array}{ccc} s_{n+1} & = & f(s_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & f(l) \end{array}$$

e cioè l è punto fisso di f.

CALCOLO DIFFERENZIALE (1)

4.

1. DERIVATE

Esempi

1 Calcoliamo le derivate delle funzioni

$$f(x) = 2x + 4x^3 \quad g(x) = \sqrt{x}e^x$$
$$k(x) = \frac{\log x}{x} \quad h(x) = (\ln x)^4$$

Applicando le proprietà di linearità (⇛ BPS, pag. 179, formule (2.1) e (2.4)), si ha

$$f'(x) = D(2x) + D(4x^3) = 2D(x) + 4D(x^3) = 2 + 4(3x^2) = 2 + 12x^2$$

Applicando la regola di derivazione di un prodotto (⇛ BPS, pag. 179, formula (2.2)), si ha

$$g'(x) = D(\sqrt{x})\, e^x + \sqrt{x} D(e^x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^x + \sqrt{x}e^x$$

Applicando la regola di derivazione di un quoziente (⇛ BPS, pag. 179, formula (2.3)), si ha

$$k'(x) = \frac{D(\log x)\cdot x - \log x \cdot D(x)}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

La funzione $z = h(x)$ si ottiene come composizione delle due funzioni $z = y^4$ e $y = \ln x$. Poiché $D(y^4) = 4y^3$ e $D(\ln x) = \frac{1}{x}$, per la *regola della catena* (⇛ BPS, pag. 180, formula (2.6)), si ha

$$h'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 4y^3\frac{1}{x} = 4(\ln x)^3\frac{1}{x}$$

2 Verifichiamo che per ogni $x \neq 0$, si ha

$$D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

Il risultato, già noto per $x > 0$, si dimostra anche per $x < 0$, applicando la regola della catena

$$D[\ln(-x)] = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Calcoliamo l'elasticità (⇛ BPS, pag. 184) di una funzione esponenziale.

$$f(x) = Ae^{\alpha x} \qquad A > 0,\ \alpha \text{ reale},\ x \text{ reale}$$

Si ha

$$E_f(x) = x\frac{f'(x)}{f(x)} = A\alpha e^{\alpha x}\frac{x}{Ae^{\alpha x}} = \alpha x$$

Le funzioni esponenziali hanno elasticità lineare.

Studiamo la derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1 - x^2 & 0 < x < 1 \\ \ln x & x \ge 1 \end{cases}$$

f è sicuramente continua e derivabile in tutto il suo dominio, esclusi i punti di "raccordo": $x = 0$ e $x = 1$. Si controlla subito che f è continua in $x = 0$ e $x = 1$; infatti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Per x diverso da questi valori, è facile anche calcolare la derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -2x & 0 < x < 1 \\ 1/x & x > 1 \end{cases}$$

Poiché f è continua, per stabilire la derivabilità in 0 e 1 calcoliamo i limiti sinistro e destro di f' in questi punti. Si trova

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1$$

Possiamo dedurre che f è derivabile in 0 ma non in 1[1].

Test a risposta multipla

1. Il rapporto incrementale della funzione $f(x) = x^2 + x + 1$ relativo al punto $x_0 = 5$ e all'incremento h è

   [a] 1 [b] $\frac{(h+5)^2+h+5}{h}$ [c] $\frac{31+h}{h}$ [d] $h + 11$

---

[1] Questo risultato, estremamente intuitivo, è dimostrato nella sezione 2 (es. 7, pag. 124).

2. Il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ relativo al punto $x_0 = 1$ e all'incremento h è

   [a] $1 + \frac{1}{h}$ [b] 1 [c] $\frac{h+1}{h}$ [d] $-\frac{1}{1+h}$

3. Sia $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x}$, allora $f'(1) =$

   [a] 0 [b] $\frac{1}{3}$ [c] 3 [d] 1

4. La derivata della funzione $f(x) = (\sin x)^5$ è $f'(x) =$

   [a] $5(\sin x)^4$ [b] $5\cos x \cdot (\sin x)^4$ [c] $5(\cos x)^4$ [d] $(\cos x)^5$

5. La derivata della funzione $f(x) = \tanh x$ è $f'(x) =$

   [a] $\frac{1}{(\sinh x)^2}$ [b] $-\frac{1}{(\cosh x)^2}$ [c] $1 + (\tanh x)^2$ [d] $\frac{1}{(\cosh x)^2}$

6. La retta tangente al grafico di $f(x) = \ln(2x + 3)$ nel punto di ascissa $x = 0$ ha equazione $y =$

   [a] $\frac{2}{\ln 3}x + \ln 3$ [b] $2x + \ln 3$ [c] $\frac{2}{3}x + \ln 3$ [d] $\frac{3}{2}x + \ln 3$

7. La retta di equazione $y = mx$ è tangente al grafico di $y = \ln x$ per $m =$

   [a] 1 [b] e [c] $\frac{1}{e}$ [d] 0

8. L'elasticità della funzione $f(x) = x^3e^{2x}$ è

   [a] $2x + 3$ [b] $3x + 2$ [c] $3x^2 + 2e^{2x}$ [d] $6x$

9. L'elasticità della funzione $f(x) = 5e^{x/4}$ è uguale a 1 per $x =$

   [a] 4 [b] $\frac{1}{4}$ [c] 5 [d] 1

10. La derivata logaritmica della funzione $f(x) = x^2 + 3x$ è

    [a] $\frac{2x+3}{x^2+3x}$ [b] $\frac{1}{x^2+3x}$ [c] $\ln(x^2 + 3x)$ [d] $\ln(2x + 3)$

Esercizi

1. Calcolare le derivate delle funzioni $f(x) =$

   (a) $(x + x^2)\ln x$ (b) $\frac{x}{1+x^2}$ (c) $e^{-x}(\sin x + \cos x)$ (d) $(\tan x)^3$

   (f) $\ln\frac{1-x}{1+x}$ (g) $\arctan\frac{1}{x}$ (h) $\cosh(3x + 2)$ (i) $x^{1/x}$

2 Scegliendo opportunamente i valori dei parametri a e b raccordare le funzioni

$$f_1(x) = -x^2 + ax + b \quad x < 0$$
$$f_2(x) = e^x \quad x \geq 0$$

in modo che il raccordo risulti una funzione continua e derivabile.

3 Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile in un intorno del punto $x_0 = 1$ e sia

$$f(1) = 3 \qquad f'(1) = -2$$

Calcolare le derivate delle funzioni

$$g(x) = (f(x))^2 \qquad h(x) = e^{f(x)}$$

nel punto $x_0 = 1$.

4 Sia

$$f(x) = e^{2x} + x^3$$

verificare che f è invertibile e, detta $g(x)$ la sua funzione inversa, calcolare $g'(1)$.

5 Verificare che

$$\ln x \leq x^2 - x$$

6 Studiare la derivabilità delle funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$ in $x = 0$.

7 Verificare che *l'elasticità d'un prodotto è la somma delle elasticità.*

8 Dimostrare che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari e viceversa.

9 Dimostrare che la derivata di una funzione periodica di periodo T è una funzione periodica di periodo T.

10 Calcolare per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{ah} = f'(x)$$

11 Calcolare la derivata di

$$y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

$f(x)$ è la funzione inversa di $g(y) = \sinh y$; verificare il risultato precedente, applicando la regola di derivazione della funzione inversa.

12 Controllare che le funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ verificano l'equazione

$$y'' + y = 0$$

Vero o falso?

1 V F Se una funzione è derivabile, allora è continua.

2 V F Se una funzione è continua, allora è derivabile.

3 V F La funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x = 0$, pertanto non esiste retta tangente al grafico di f in $x = 0$.

Trovare l'errore

1 Se $h(x) = \sin f(x)$ allora $h'(x) = \cos f'(x)$.

2 Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x < 0 \\ \cos x & x \geq 0 \end{cases}$$

Dato che

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -\sin x & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

f è derivabile in $x = 0$ e $f'(x) = 0$.

3 La derivata della funzione $g(x) = \ln|f(x)|$ è

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x)/f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ -f'(x)/f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Ulteriori esercizi

1 Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni (reali) delle equazioni

(a) $e^x = (x+k)^2$ (b) $\ln x = k\sqrt{x}$

2 Studiare la derivabilità in $x = 0$, della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Verificare che, per $\alpha = 2$, f è derivabile ma la derivata di f non è continua in $x = 0$.

4.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{d}$

Si ha

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=\frac{(h+5)^2+h+6-31}{h}=h+11$$

2. $\boxed{d}$

Si ha

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h}-1\right)=-\frac{1}{1+h}$$

3. $\boxed{a}$

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{3x^2+x+3}{x}=3\dfrac{x^2-1}{x^2}$, che in $x=1$ è uguale a 0.

4. $\boxed{b}$

Si applica la regola della catena con $f(y)=y^5$ e $y=\sin x$:

$$\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=5y^4\cos x=5(\sin x)^4\cos x$$

5. $\boxed{d}$

Si ha $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ e perciò

$$\frac{d}{dx}\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{(\cosh x)^2-(\sinh x)^2}{(\cosh x)^2}=\frac{1}{(\cosh x)^2}=1-(\tanh x)^2$$

6. $\boxed{c}$

L'equazione della retta è $y=f'(0)x+f(0)$. Si ha $f(0)=\ln 3$, ed essendo $f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}$, $f'(0)=\dfrac{2}{3}$. L'equazione è dunque $y=\dfrac{2}{3}x+\ln 3$.

7. $\boxed{c}$

Deve essere $\ln x=mx$ e $\dfrac{d}{dx}\ln x=m$, da cui si ricava $m=\dfrac{1}{x}$ e $\ln x=1$. Il punto di tangenza è $x=e$ e $m=\dfrac{1}{e}$.

8. $\boxed{a}$

$$E(x)=x\frac{f'(x)}{f(x)}=x\frac{3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x}}{x^3e^{2x}}=3+2x$$

$\boxed{a}$

L'elasticità di f nel generico punto x è $E(x)=\dfrac{x}{4}$.

$\boxed{a}$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(x^2+3x\right)=\frac{2x+3}{x^2+3x}$$

Esercizi

(a) Applicando la regola di derivazione del prodotto di due funzioni, si ottiene

$$\frac{d}{dx}\left(x+x^2\right)\ln x=\ln x+2x\ln x+1+x$$

(b) Applicando la regola di derivazione del quoziente di due funzioni, si ottiene

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

(c) Applicando la regola di derivazione del prodotto di due funzioni e la regola della catena per calcolare la derivata di e^{-x}, si ottiene

$$\frac{d}{dx}e^{-x}(\sin x+\cos x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x)=-2e^{-x}\sin x$$

(d) Per la regola della catena, si ha

$$\frac{d}{dx}(\tan x)^3=3(\tan x)^2\left(1+(\tan x)^2\right)$$

(e) Applicando la regola della catena e la regola di derivazione del quoziente di due funzioni, si ha

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{(x-1)(1+x)}$$

(f) Per la regola della catena, si ha

$$\frac{d}{dx}\arctan\frac{1}{x}=\frac{1}{1+1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}$$

(g) Per la regola della catena, si ha

$$\frac{d}{dx}\cosh(3x+2)=3\sinh(3x+2)$$

(h) Occorre ricordare l'identità $a=e^{\ln a}$ $(a>0)$, quindi si applica la regola della catena e si ottiene

$$\frac{d}{dx}x^{1/x}=\frac{d}{dx}e^{(\ln x)/x}=x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Sia

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x<0 \\ f_2(x) & x\geq 0\end{cases}$$

f è continua e derivabile in $R \setminus \{0\}$. Perché f sia continua anche in $x = 0$ deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

ossia $b = 1$.
Perché f sia anche derivabile deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} f'(x)$$

Dato che

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + a & x < 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$$

deve essere $a = 1$. Si ricava quindi che f è continua e derivabile in $x = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

3 Si ha

$$g'(x) = 2f'(x)\, f(x) \Rightarrow g'(1) = -12,$$
$$h'(x) = f'(x)\, e^{f(x)} \Rightarrow h'(1) = -2e^3$$

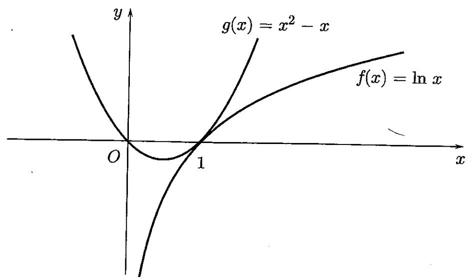
4 f è invertibile perché strettamente monotona (è somma di funzioni crescenti) e si ha

$$f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2$$

Poiché si verifica facilmente che $f(0) = 1$, risulta $g(1) = 0$ e ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 185)

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

5 La verifica può essere fatta mediante confronto grafico.



Le curve di equazione $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x^2 - x$, si intersecano nel punto di ascissa $x = 1$. Il calcolo delle derivate permette di verificare che in tale punto le due curve sono tangenti. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(x) = 2x - 1$$

e in $x = 1$

$$f'(1) = g'(1) = 1$$

Iniziamo a calcolare il limite destro del rapporto incrementale. Si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^\alpha}{h} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Dunque, per le funzioni potenza *esiste* $f'_+(0)$ *solo se* $\alpha \geq 1$.
Il calcolo del limite sinistro (se f è definita in $\mathbb{R}$) è analogo.

Si ha

$$E_{fg}(x) = x\frac{[f(x)\, g(x)]'}{f(x)\, g(x)} = x\frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{f(x)\, g(x)} =$$
$$= x\frac{f'(x)}{f(x)} + x\frac{g'(x)}{g(x)} = E_f(x) + E_g(x)$$

Si ha, se f è pari

$$f'(-x_0) = \lim_{x\to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x + x_0} = \text{(ponendo } y = -x\text{)}$$
$$= \lim_{y\to x_0} \frac{f(-y) - f(-x_0)}{-y + x_0} = \text{(essendo } f \text{ pari)}$$
$$= \lim_{y\to x_0} -\frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = -f'(x_0)$$

quindi f' è dispari. Analogamente si dimostra che se f è dispari, f' è pari.

Si ha

$$f'(x_0 + T) = \lim_{x \to x_0 + T} \frac{f(x) - f(x_0 + T)}{x - x_0 - T} = \text{(ponendo } x = y + T\text{)}$$
$$= \lim_{y\to x_0} \frac{f(y + T) - f(x_0 + T)}{y - x_0} = \lim_{y\to x_0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} = f'(x_0)$$

Essendo x_0 arbitrario, si ha $f'(x + T) = f'(x)$ che mostra la periodicità di f'.

Scriviamo

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{ah} = \frac{1}{a}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right)$$

Dato che entrambi i termini tra parentesi tendono a $f'(x)$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{a}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right) = \frac{1}{a} 2f'(x)$$

Dunque il limite è $f'(x)$ per $a = 2$.

Direttamente, si ha

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Applicando la regola di derivazione della funzione inversa, dato che

$$g'(y) = \cosh y = \sqrt{1 + (\sinh y)^2}$$

si ha

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\sinh y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

12 Se $y = \sin x$, si ha $y' = \cos x$ e $y'' = -\sin x$, quindi

$$y'' + y = 0$$

Analogamente per $y = \cos x$.

Vero o falso?

1 Vero (⇛ BPS, pag. 177).

2 Falso. Per esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua e non derivabile (in $x = 0$).

3 Falso. In $x = 0$ il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha come tangente la retta di equazione $x = 0$, anche se non è ivi derivabile.

Trovare l'errore

1 Applicando la regola della catena si trova $h'(x) = f'(x) \cos f(x)$.

2 f non è derivabile in $x = 0$ perché non è continua. Infatti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

3 La derivata di $g(x) = \ln|f(x)|$ è $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (si veda l'esempio 2 di pag. 101).

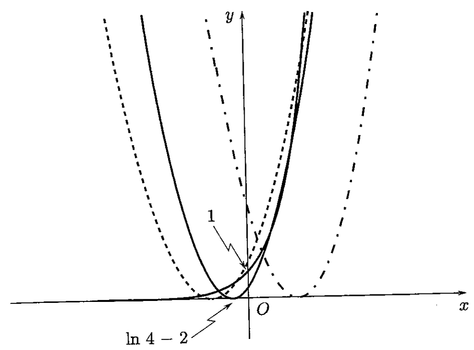
Ulteriori esercizi

1 (a) Conviene, prima di tutto, determinare la parabola della famiglia $y = (x+k)^2$ tangente alla curva di equazione $y = e^x$. Deve essere

$$\begin{cases} (x+k)^2 = e^x \\ 2(x+k) = e^x \end{cases}$$

si ottiene $x = 2 - k$, da cui

$$e^{2-k} = 4 \Rightarrow k = 2 - \ln 4$$



Come mostra il grafico, l'equazione ha

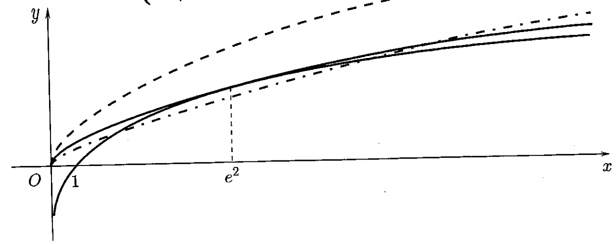
3 soluzioni se $k < 2 - \ln 4$

2 soluzioni se $k = 2 - \ln 4$

1 soluzione se $k > 2 - \ln 4$

(b) Ancora conviene determinare la curva della famiglia $y = k\sqrt{x}$ tangente alla curva di equazione $y = \ln x$. Deve essere

$$\begin{cases} k\sqrt{x} = \ln x \\ \dfrac{k}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ k = \dfrac{2}{e} \end{cases}$$



Come mostra il grafico, l'equazione ha

1 soluzione	se $k \le 0$
2 soluzioni	se $0 < k < \dfrac{2}{e}$
1 soluzione	se $k = \dfrac{2}{e}$
nessuna soluzione	se $k > \dfrac{2}{e}$

2 La derivata sinistra di f è uguale a 0. Occorre verificare l'esistenza della derivata destra, quindi calcolare il limite destro del rapporto incrementale. Si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^\alpha \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{\alpha - 1} \sin \frac{1}{h}$$

Applicando la regola di derivazione della funzione inversa, dato che

$$g'(y) = \cosh y = \sqrt{1 + (\sinh y)^2}$$

si ha

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+(\sinh y)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

12 Se $y = \sin x$, si ha $y' = \cos x$ e $y'' = -\sin x$, quindi

$$y'' + y = 0$$

Analogamente per $y = \cos x$.

Vero o falso?

1 Vero (⇛ BPS, pag. 177).

2 Falso. Per esempio, la funzione $f(x) = |x|$ è continua e non derivabile (in $x = 0$).

3 Falso. In $x = 0$ il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha come tangente la retta di equazione $x = 0$, anche se non è ivi derivabile.

Trovare l'errore

1 Applicando la regola della catena si trova $h'(x) = f'(x) \cos f(x)$.

2 f non è derivabile in $x = 0$ perché non è continua. Infatti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \qquad \text{mentre} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

3 La derivata di $g(x) = \ln|f(x)|$ è $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (si veda l'esempio 2 di pag. 101).

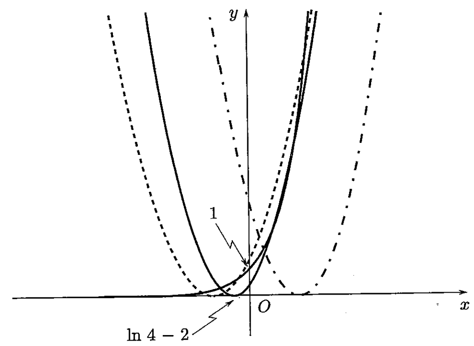
Ulteriori esercizi

1 (a) Conviene, prima di tutto, determinare la parabola della famiglia $y = (x+k)^2$ tangente alla curva di equazione $y = e^x$. Deve essere

$$\begin{cases} (x+k)^2 = e^x \\ 2(x+k) = e^x \end{cases}$$

si ottiene $x = 2 - k$, da cui

$$e^{2-k} = 4 \Rightarrow k = 2 - \ln 4$$

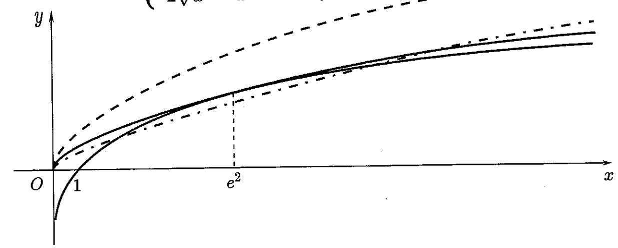


Come mostra il grafico, l'equazione ha

$$\begin{aligned} &3 \text{ soluzioni se } k < 2 - \ln 4 \\ &2 \text{ soluzioni se } k = 2 - \ln 4 \\ &1 \text{ soluzione se } k > 2 - \ln 4 \end{aligned}$$

(b) Ancora conviene determinare la curva della famiglia $y = k\sqrt{x}$ tangente alla curva di equazione $y = \ln x$. Deve essere

$$\begin{cases} k\sqrt{x} = \ln x \\ \dfrac{k}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ k = \dfrac{2}{e} \end{cases}$$



Come mostra il grafico, l'equazione ha

1 soluzione	se $k \le 0$
2 soluzioni	se $0 < k < \dfrac{2}{e}$
1 soluzione	se $k = \dfrac{2}{e}$
nessuna soluzione	se $k > \dfrac{2}{e}$

2 La derivata sinistra di f è uguale a 0. Occorre verificare l'esistenza della derivata destra, quindi calcolare il limite destro del rapporto incrementale. Si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^\alpha \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{\alpha - 1} \sin\frac{1}{h}$$

Tale limite esiste ed è uguale a 0 se e solo se $\alpha > 1$. Dunque f è derivabile se e solo se $\alpha > 1$.
Per $\alpha = 2$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ non esiste. Dunque f' non è continua in $x = 0$.

2. APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Esempi

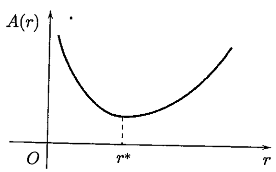
1 I dirigenti della fabbrica di birra Schiumadot si accorgono che le loro lattine costano troppo. Dovendo conservare la forma cilindrica, il materiale adottato e il volume (33 cl), decidono di agire sulle dimensioni cercando, in particolare, di minimizzare la superficie totale della lattina. Il problema è: come scegliere altezza e raggio di base in modo che la superficie totale sia minima, tenendo il volume costante? Siano V il volume della lattina, h la sua altezza ed r il raggio di base. Rammentiamo che

$$V = \pi h r^2 \qquad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

L'area della superficie totale della lattina è pertanto

$$A(r) = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{area dei cerchi di base}} + \underbrace{2\pi h r}_{\text{area laterale}} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Osserviamo che i due termini della somma sono in competizione tra loro: valori piccoli di r producono piccola area di base, ma grande area laterale. Il contrario avviene per valori grandi di r, cosicché la superficie totale risulta molto grande sia per valori di r prossimi a 0, che per valori di r molto grandi. Ci si aspetta così per la funzione $A(r)$ un andamento tipo quello riportato in figura e quindi l'esistenza di un r^* che la minimizzi.



Il metodo per determinare r^* ce lo fornisce il teorema di Fermat (⇛ BPS, pag. 189): calcoliamo la derivata della funzione A e la uguagliamo a 0. Si ha

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

Ponendo $A'(r) = 0$, si ricava

$$4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

da cui

$$4\pi r^3 - 2V = 0$$

e infine il valore cercato

$$r^* = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Invitiamo il lettore a controllare anche che la "lattina ottima" è quella che ha il diametro di base uguale all'altezza ($2r = h$).

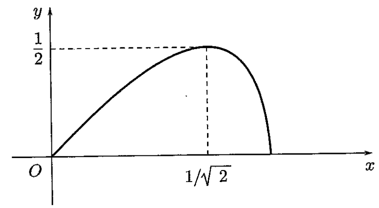
2 Calcoliamo il massimo e il minimo globali della funzione

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$$

Sicuramente essi esistono perché f è continua[(2)] nell'intervallo $[0, 1]$. Dato che $f(0) = f(1) = 0$, mentre per $x \in (0, 1)$ la funzione è positiva, il minimo di f è 0 ($x = 0$ e $x = 1$ sono punti di minimo). I punti[(3)] di massimo appartengono all'intervallo aperto $(0, 1)$. In tali punti f' deve essere uguale a 0 per il teorema di Fermat. Si ha

$$f'(x) = \sqrt{1 - x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1 - x^2}}(-2x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

e quindi $f'(x) = 0$ in $(0, 1)$ solo per $x = 1/\sqrt{2}$. Questo unico punto stazionario è sicuramente il *punto di massimo*. Il *massimo* di f è $f\left(1/\sqrt{2}\right) = 1/2$.



3 Consideriamo la funzione $f(x) = (x^2 - 8)e^x$ definita e derivabile in $\mathbb{R}$; vediamo se ha massimi e/o minimi locali. Cerchiamo anzitutto i punti stazionari annullando la derivata di f. Si ha

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 8)e^x$$

Tale derivata si annulla in $x = -4$ e in $x = 2$, unici punti stazionari di f. Per stabilirne la natura, analizziamo il segno di f'. Il fattore e^x è sempre

(2) Ricordare il teorema di Weierstrass!
(3) Sicuramente un punto esiste. A priori non si può dire se ne esiste uno solo.

positivo e quindi risulta ininfluente. D'altra parte, sappiamo che il trinomio x^2+2x-8 è positivo se $x<-4$ o se $x>2$, mentre è negativo tra -4 e 2. La seguente tabella riassume le conclusioni che si possono trarre.

	$x<-4$	$-4<x<2$	$x>2$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Il punto $x=-4$ è di massimo locale, mentre $x=2$ è di minimo locale.

4 Calcoliamo

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x \qquad \alpha>0$$

Riscriviamolo come $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}$. Le funzioni $f(x)=\ln x$ e $g(x)=x^{-\alpha}$ tendono rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$, per $x\to0^+$. Inoltre, sono differenziabili in $(0,+\infty)$, $g'(x)=-\alpha x^{-\alpha-1}$ non si annulla in $(0,+\infty)$, e si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{\alpha}x^\alpha=0 \quad (\text{essendo } \alpha>0)$$

Essendo verificate tutte le ipotesi del teorema di de l'Hospital ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 203), si conclude che se $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x=0$$

5 Calcoliamo $\lim_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$ (differenza di infiniti).

Riscriviamolo come $\lim_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$ (rapporto di infinitesimi). Osserviamo innanzitutto il comportamento del denominatore: si ha, per $x\to0$,

$$\ln(1+x)\sim x$$

e quindi

$$x\ln(1+x)\sim x^2$$

A numeratore l'approssimazione $\ln(1+x)\sim x$ non basta in quanto si troverebbe

$$\ln(1+x)-x\sim 0 \text{ (!!)}$$

che non ha senso.
Occorre sviluppare $\ln(1+x)$ in modo da avere $\ln(1+x)-x\sim$ potenza di x di grado maggiore di 1. Applicando la formula di Maclaurin ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 224), per $x\to0$, si trova

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

e quindi si ha

$$\ln(1+x)-x\sim-\frac{x^2}{2}$$

In conclusione

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2/2}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

6 Verifichiamo che l'equazione

$$x^3+x-1=0$$

ammette un'unica soluzione $x^*\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ e che tale soluzione può essere approssimata applicando il metodo di Newton ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 219).
Tra i teoremi che assicurano l'esistenza di una soluzione di un'equazione $f(x)=0$ in un certo intervallo, ricordiamo quello degli zeri. Per applicare tale teorema occorre sincerarsi che f sia continua, calcolare i valori di f agli estremi dell'intervallo e controllare che abbiano segno opposto. Se poi f è strettamente monotona la soluzione è unica.
Poniamo $f(x)=x^3+x-1$, si ha

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}<0 \qquad f(1)=1>0$$

f è continua perché somma di funzioni elementari, quindi l'esistenza di almeno una radice x^* nell'intervallo $\left(\frac{1}{2},1\right)$ è assicurata. La radice x^* è unica perché f è strettamente crescente, infatti si ha

$$f'(x)=3x^2+1>0 \text{ per ogni } x$$

Per calcolare un'approssimazione col metodo di Newton controlliamo il segno di f''

$$f''(x)=6x>0 \text{ per } x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del metodo di Newton: la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_0=1 \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\end{cases}$$

converge per difetto alla radice x^*. Si noti che abbiamo scelto $x_0=1$ poiché in tale punto f e f'' hanno segno concorde.

Possiamo calcolare esplicitamente le prime iterazioni. Si ha

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$x_2 = \frac{3}{4} - \frac{f(3/4)}{f'(3/4)} = \frac{3}{4} - \frac{11/64}{43/16} = \frac{59}{86} \simeq 0.686$$

$$x_3 = \frac{59}{86} - \frac{f(59/86)}{f'(59/86)} \simeq 0.682$$

Tracciamo il grafico delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = x^3 e^{-x} \qquad \text{(b)}\ g(x) = \frac{x}{\ln x}$$

(a) La prima cosa da fare (accuratamente!) è determinare il dominio di f. Qui non ci sono problemi: il dominio è $\mathbb{R}$.
Valutiamo ora il comportamento all'infinito: si ha

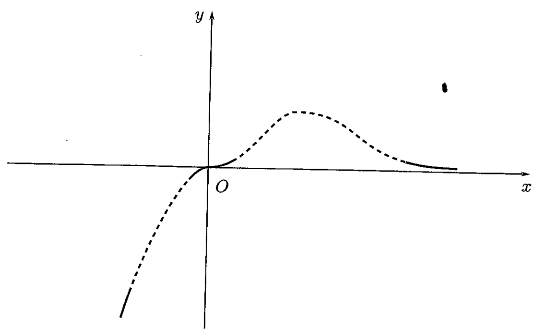
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0^+$$

La semplicità dell'espressione analitica ci permette anche di dedurre immediatamente che

$$f(x) > 0 \text{ per } x > 0$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < 0$$

f si annulla in $x = 0$ e per $x \to 0$ si ha $f(x) \sim x^3$.
A questo punto conviene fermarci per tracciare un grafico coerente con le informazioni ottenute sino a questo momento. Ciò può far risparmiare molto tempo successivamente.



Ci aspettiamo un massimo per $x > 0$ e, probabilmente, nessun estremo per $x < 0$; in più un flesso a tangente orizzontale in $x = 0$ e altri due flessi (prima

e dopo il punto di massimo). Se i calcoli non confermeranno questo, vuol dire che da qualche parte c'è qualcosa che non va.
La derivata prima di f è

$$f'(x) = x^2(3 - x)e^{-x}$$

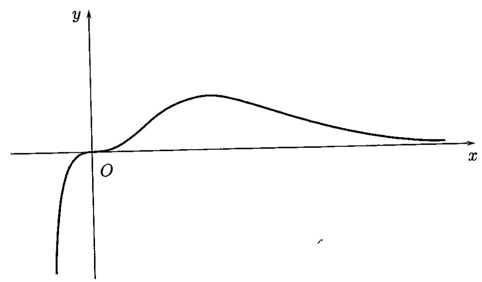
e si annulla per $x = 0$ e $x = 3$. Abbiamo trovato, come previsto un punto stazionario in $x = 0$ e ci aspettiamo che $x = 3$ sia punto di massimo. Per maggior sicurezza controlliamo anche il segno di f'. Si ha che f' è positiva per $x > 3$. Riportiamo il risultato nello schema

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
f'	+	+	+
f	↗	↗	↘

Come previsto, il punto $x = 0$ risulta punto di flesso a tangente orizzontale e il punto $x = 3$ punto di massimo locale per f. Volendo essere ancora più precisi, calcoliamo anche la derivata seconda di f, per studiarne la convessità/concavità. Si trova

$$f''(x) = x\left(6 - 6x + x^2\right)e^{-x}$$

che si annulla per $x = 0$ e $x = 3 \pm \sqrt{3}$, i previsti punti di flesso per f. Un grafico qualitativo di f è il seguente.



(b) Per determinare il dominio di g, osserviamo che $\ln x$ è definito per $x > 0$. Trovandosi poi a denominatore, occorre eliminare i valori per cui $\ln x = 0$ e cioè $x = 1$. Il dominio di g, dunque, si può scrivere

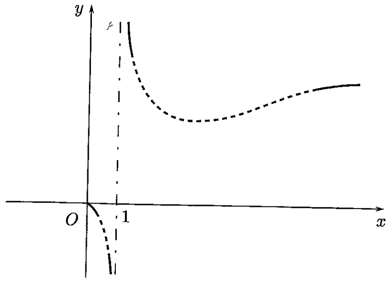
$$(0, 1) \cup (1, +\infty)$$

La scrittura mette in evidenza i limiti che occorre considerare: per $x \to 0^+$,

$x \to 1^{\pm}$, $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

I limiti per $x \to 1^{\pm}$ segnalano la presenza di un asintoto verticale di equazione $x = 1$. Non possono esistere asintoti obliqui, essendo il comportamento di g all'infinito(4) "sublineare". Vediamo quali informazioni si ricavano fino a questo punto da un grafico parziale.



Ci aspettiamo un punto di minimo per $x > 1$. Poiché per $x \to +\infty$, $g \to +\infty$ meno velocemente di x, ci aspettiamo una funzione concava e quindi un flesso per $x > 1$. Va valutato bene il comportamento di g per $x \to 0^+$. Calcoliamo la derivata prima di g:

$$g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

Essa si annulla per $x = e$ ed è positiva per $x > e$.

	$0 < x < 1$	$1 < x < e$	$x > e$
g'	$-$	$-$	$+$
g	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Il punto $x = e$ è il previsto punto di minimo locale per g. La derivata seconda di g

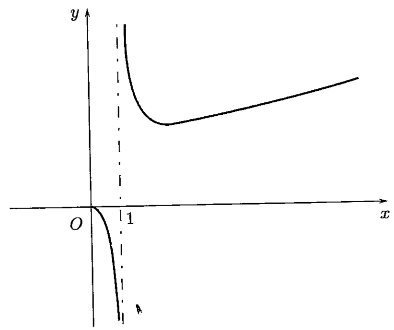
$$g''(x) = \frac{-\ln x + 2}{x(\ln x)^3}$$

si annulla per $x = e^2$, che è il previsto punto di flesso per g. Si nota anche che g'' è negativa per $x > e^2$. Infine, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0$$

(4) g tende all'infinito meno velocemente di una funzione lineare.

il grafico si avvicina a $x = 0$ con tangente sempre più orizzontale. Un grafico qualitativo di g è il seguente.



Test a risposta multipla

1 La funzione $f(x) = xe^{-2x}$ ha un punto di massimo in $x =$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{e}$ d) 1

2 Il minimo della funzione $f(x) = 3x \ln x$ è

a) 0 b) $\frac{1}{e}$ c) $-\frac{3}{e}$ d) -3

3 Se $f : (2,5) \to \mathbb{R}$ ha un punto di massimo in $x_0 = 3$, allora

a) la derivata di f in $x_0 = 3$ è uguale a 0 b) il grafico di f ha un punto a tangenza orizzontale c) f in $x_0 = 3$ può essere discontinua d) f deve essere derivabile

4 La funzione $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ è

a) crescente b) decrescente c) ha due punti stazionari d) ha un punto di massimo

5 Il polinomio di Taylor di secondo grado per la funzione $f(x) = \ln x$ con centro nel punto $x_0 = 1$ è $T_2(x) =$

a) $-\frac{x^2}{2} + x$ b) $-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ c) $-\frac{(x-1)^2}{2}$ d) $-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$

6 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right) =$

a) 0 b) $\frac{1}{6}$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

7 Sia $f(x) = \sinh x - x\cosh x$; per $x \to 0$, $f(x) \sim$

a) x^3 b) $\frac{x^3}{6}$ c) $-\frac{x^3}{3}$ d) $\frac{x^3}{3}$

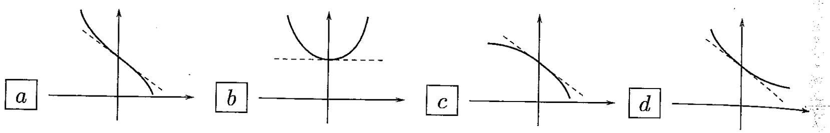
8. I punti di flesso della funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 5$ sono

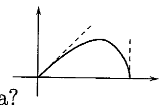
[a] $x = 0$ e $x = 1$ [b] $x = 0$ [c] $x = \pm 1$ [d] $x = 0$ e $x = 3$

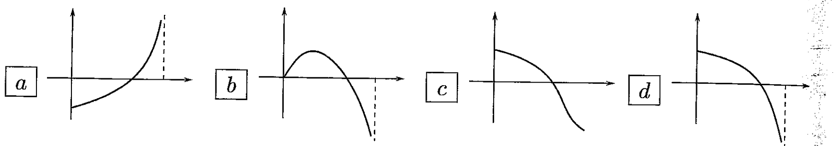
9. La funzione $f(x) = \ln x - \dfrac{2}{x+1}$ è

[a] crescente e concava [b] decrescente e concava [c] crescente e convessa [d] decrescente e convessa

10. Siano $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$; il grafico di f in un intorno di $x = 0$ può essere



11. Una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ha grafico  . Quale tra i seguenti può essere il grafico della sua derivata?



Esercizi

1. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + 7 = 0$$

2. La funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 400, \quad x > 0$$

rappresenta il *costo totale* di produzione d'una certa merce, in funzione della quantità prodotta x. Scrivere l'espressione del *costo medio*

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Calcolarne il punto di minimo e tracciare un grafico qualitativo di g. Calcolare poi l'elasticità di f e controllare che nel punto di minimo di g l'elasticità di f è uguale a 1.

3. Supponiamo che il valore d'un oggetto varii nel tempo $x \geq 0$ secondo la formula

$$V(x) = hx^a e^{-bx}$$

con $h, a, b > 0$. Calcolare l'epoca di massimo valore. Scelti per i tre parametri i valori $h = 10000$, $a = 2$, $b = 1$, rappresentare graficamente la funzione V.

4. Supponiamo che la funzione

$$x(t) = 10000 \cdot \frac{1}{1 + 8e^{-t}}$$

descriva la crescita d'una popolazione in funzione del tempo ($x(t)$ = numero medio di individui al tempo t). Tracciare il grafico della funzione $x(t)$ per $t \geq 0$. Per quale valore di t si ha il massimo tasso di crescita $x'(t)$?

5. Determinare il minimo e il massimo della funzione

$$f(x) = (\cos x)^2 + \sin x$$

nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

6. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ \cos x & 0 \leq x < \dfrac{3\pi}{2} \\ 3\pi - 2x & x \geq \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

dopo averne disegnato il grafico, determinare gli eventuali punti

(a) di massimo o minimo locale;
(b) di flesso;
(c) stazionari, cioè in cui $f'(x) = 0$;
(d) in cui $f''(x) = 0$.

7. Verificare che la funzione

$$f(x) = x \sin x - \cos 2x$$

ha un punto stazionario in $x = 0$ e determinarne la natura.

8. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^{x+3} - 8}{x}.$$

9. Verificare che la successione

$$a_n = \frac{1}{n + \sin n}$$

è monotona decrescente. Sfruttare il risultato per dimostrare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$$

10 Scrivere il polinomio di Maclaurin di secondo grado, che approssima la funzione

$$f(x) = e^{3x}\sqrt{1+2x}$$

11 Calcolare i limiti

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x \sin x^3}$$

12 Sia

$$f(x) = x^5 \left(e^{x^3} - \sin(x^2)\right)$$

quanto vale $f^{(11)}(0)$?

13 L'oscillazione di una pallina fissata all'estremità di una molla e libera di muoversi su una retta è descritta dalla funzione

$$x(t) = A\cos(\omega t)\, e^{-kt}$$

con A, k, ω costanti positive. Linearizzando l'espressione, approssimare $x(t)$ per $t \to 0$. L'approssimazione ottenuta è per eccesso o per difetto?

14 Verificare che l'equazione

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 1 = 0$$

nell'intervallo $[-1, 0]$ ammette un'unica soluzione. Verificare che tale soluzione può essere calcolata con approssimazione applicando il metodo di Newton. Calcolare le prime due iterate.

15 Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$$

Senza eseguire ulteriori calcoli, dal grafico di f dedurre il grafico di

$$g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$$

dal grafico di g dedurre il grafico di

$$h(x) = g'(x)$$

Controllare il risultato al computer.

16 Tracciare i grafici delle funzioni, calcolando esattamente eventuali punti di massimo o minimo locale ed eventuali punti di flesso.

$$\text{(a)}\ f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2} \qquad \text{(b)}\ g(x) = x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} \qquad \text{(c)}\ h(x) = (x-2)\, e^{-1/x}$$

17 *Effetto Doppler relativistico* — Se la sorgente e il ricevitore di un'onda si allontanano con velocità relativa v e l'onda è emessa con frequenza ν_0, la frequenza ricevuta è

$$\nu(v) = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}$$

dove c è la velocità della luce. Tracciare il grafico della funzione $\nu = \nu(v)$ nel dominio fisicamente ammissibile $|v| < c$.

18 Tracciare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ i grafici delle funzioni

$$\text{(a)}\ f(x) = x^3 - ax \qquad \text{(b)}\ g(x) = e^{ax^2} \qquad \text{(c)}\ h(x) = x^a \ln x$$

Vero o falso?

1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile; allora

(a) [V] [F] per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in (x, x+1)$ tale che

$$f'(y) = f(x+1) - f(x)$$

(b) [V] [F] se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, f ha un asintoto orizzontale;

(c) [V] [F] se f ha un asintoto orizzontale, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

2 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile; allora

(a) [V] [F] se x_0 è punto di massimo, $f'(x_0) = 0$;

(b) [V] [F] se $f'(x_0) = 0$ allora x_0 è punto di estremo per f;

(c) [V] [F] se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in A$, f è crescente;

(d) [V] [F] se f' si annulla in infiniti punti, f non può essere strettamente crescente;

(e) [V] [F] se x_0 è punto di flesso per f, allora è punto di estremo per f'.

3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, due volte derivabile; allora

(a) [V] [F] se $f''(x_0) = 0$, x_0 è punto di flesso;

(b) [V] [F] se f è strettamente convessa, $f''(x) > 0$ per ogni x.

Trovare l'errore

1 Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

che si presenta nella forma $\frac{\infty}{\infty}$. Per il teorema di de l'Hospital si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \cos x)$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} (1 + \cos x)$ non esiste, anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ non esiste.

2 Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
che si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Si ha
$$\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x}\frac{1}{x^2}$$
Dato che $\frac{\sin x}{x}\to 1$, per $x\to 0$, si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

Ulteriori esercizi

Dimostrare che se f è convessa e $f'(x_0)=0$ allora x_0 è punto di minimo globale per f.

Mostrare che la funzione
$$f(x)=x^2+x\cos x$$
è definitivamente crescente, per $x\to+\infty$.

Tracciare il grafico della funzione
$$f(x)=\arcsin\sqrt{2x-x^2}$$
f ammette massimo e minimo?

Verificare che, per ogni coppia di numeri reali a, b, si ha
$$|\sin a-\sin b|\le|a-b|$$

Dare, per $x\to 0$, una stima asintotica delle funzioni
$$f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)-x \qquad g(x)=\sin\left(x^2\right)-(\sin x)^2$$

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabile. Dimostrare che se x_0 è punto di massimo, allora
$$f'(x_0)(x-x_0)\le 0$$
mentre se x_0 è punto di minimo, allora
$$f'(x_0)(x-x_0)\ge 0$$

Dimostrare il seguente microteorema.

Sia f continua in $x=c$ dalla destra e derivabile in un intorno destro di c (c escluso) ed esista finito $\lim_{x\to c^+}f'(x)=l$, allora f è derivabile dalla destra in c e $f'_+(c)=l$.
Un enunciato analogo vale alla sinistra di c.
Dedurre che *se f è continua in c e se i limiti destro e sinistro della derivata sono finiti e uguali, f risulta derivabile in c.*

8 Sia f derivabile. Usando l'esercizio precedente, dimostrare che la sua derivata prima non può avere né discontinuità a salto, né discontinuità eliminabili[5].

9 *Funzione di Langevin* — Tracciare, per $y>0$, il grafico della funzione
$$L(y)=m_0\left(\frac{1}{\tanh y}-\frac{1}{y}\right)$$
dove m_0 è una costante positiva. Questa funzione entra nella descrizione dei fenomeni di polarizzazione magnetica per orientamento.

10 Il costo totale d'un bene, in funzione della quantità prodotta q sia dato dalla funzione $C=f(q)$, $q\in[a,b]$, con f differenziabile e convessa. Dimostrare che, se nel punto q_0 l'elasticità di f è uguale a uno, allora q_0 è punto di minimo per la funzione $C_M=\frac{f(q)}{q}$.

Soluzioni

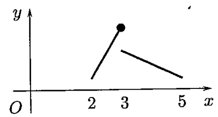
Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

◆ $\boxed{b}$
$$f'(x)=(1-2x)\,e^{-2x}$$
si annulla in $x=\frac{1}{2}$ ed è positiva a sinistra, negativa a destra del punto.

◆ $\boxed{c}$
$$f'(x)=3(\ln x+1)$$
si annulla in $x=1/e$, che è punto di minimo, in quanto
$$f''(1/e)=3e>0$$
Il minimo di f è $f(1/e)=-3/e$.

◆ $\boxed{c}$
Un possibile grafico di f, per esempio è



◆ $\boxed{b}$
Si ha $\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)e^{-x}=\left(2x-x^2-2\right)e^{-x}<0$ per ogni x.

[5] Un punto c si dice punto di discontinuità eliminabile per una funzione f se
$$\lim_{x\to c^-}f(x)=\lim_{x\to c^+}f(x)=l\ \text{(finito)}\neq f(c)$$

5 $\boxed{d}$

Dato che $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, si ha

$$f(1) = 0 \qquad f'(1) = 1 \qquad f''(1) = -1$$

Il polinomio di Taylor è

$$T_2(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$$

6 $\boxed{b}$

Si ha, per $x \to 0$, applicando le formule di Maclaurin

$$\frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^2(1-\cos x)} = \frac{x^2 - 2 + 2\left(1 - x^2/2 + x^4/24 + o\left(x^4\right)\right)}{x^4/2 + o\left(x^4\right)} \to \frac{1}{6}$$

7 $\boxed{c}$

Sia $x \to 0$. Applicando le formule di Maclaurin, si trova

$$\sin x - x\cosh x = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \sim -\frac{x^3}{3}$$

8 $\boxed{a}$

$$f''(x) = 12\left(x^2 - x\right)$$

si annulla per $x = 0$, $x = 1$ e in un introrno di questi punti cambia segno.

9 $\boxed{a}$

Il dominio di f è $(0, +\infty)$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

per ogni $x > 0$;

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x+1)^3} < 0$$

per ogni $x > 0$.

10 $\boxed{d}$

Dato che $f'(0) < 0$ e $f''(0) > 0$, f è localmente decrescente e convessa.

11 $\boxed{d}$

Dal grafico di f si deduce che la derivata è prima positiva poi negativa e si annulla in corrispondenza del punto di massimo. Essendo f concava, f' è decrescente e dove il grafico di f ha tangente verticale la derivata è infinita.

Esercizi

1 Consideriamo la funzione

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$

e tracciamone il grafico. Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

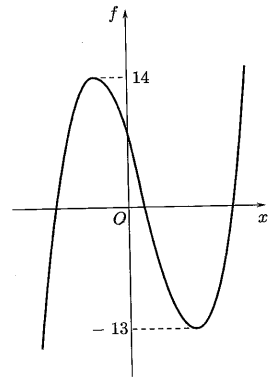
Il segno di f' e le conclusioni che se ne possono trarre riguardo al crescere e decrescere di f sono riportati nella tabella

	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Il punto $x = -1$ è punto di massimo locale per f, il punto $x = 2$ è punto di minimo locale per f. Si ha poi

$$f(-1) = 14 \qquad f(2) = -13$$

Un grafico qualitativo di f è il seguente.



L'equazione $2x^3 - 3x^2 - 12x + 7 = 0$ ha tre soluzioni reali distinte.

2 Si ha

$$g(x) = \frac{x}{100} + \frac{1}{50} + \frac{400}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{100} - \frac{400}{x^2} \qquad x > 0,$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 200$$

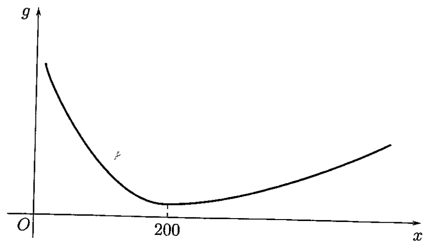
$$g''(x) = \frac{800}{x^2} \qquad g''(200) = \frac{1}{50} > 0$$

perciò il punto di minimo è $x = 200$.

Dato che

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

un grafico qualitativo di g è il seguente.



Per l'elasticità si ha che

$$E_f(x) = \frac{xf'(x)}{f(x)} = x\left(\frac{x}{50} + \frac{1}{50}\right)\left(\frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 400\right)^{-1}$$

e, quindi, $E_f(200) = 1$.

3 Si ha

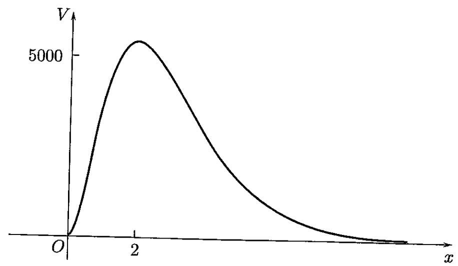
$$V'(x) = he^{-bx}x^{a-1}(a - bx) = 0 \quad \text{per } x = \frac{a}{b}$$

$$V'(x) > 0 \quad \text{per } x = \frac{a}{b}$$

La funzione V cresce per $x < \frac{a}{b}$, decresce per $x > \frac{a}{b}$. L'epoca di massimo valore dell'oggetto è $x = \frac{a}{b}$.
Per i valori assegnati dei parametri, si ottiene $x = 2$. Dato che

$$V(0) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} V(x) = 0$$

un grafico qualitativo di V è il seguente.



4 Controlliamo prima il comportamento in $t = 0$ e per $t \to +\infty$.

$$x(0) = \frac{10000}{9} \qquad \lim_{t\to +\infty} x(t) = 10000$$

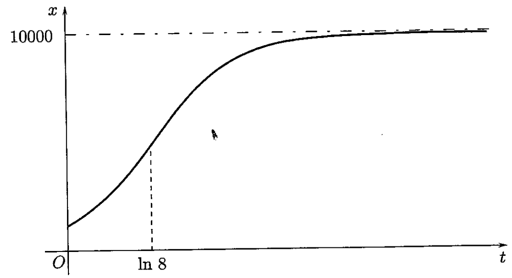
Calcoliamo poi le derivate prima e seconda e ne studiamo il segno

$$x'(t) = \frac{80000e^{-t}}{(1+8e^{-t})^2} > 0 \qquad \text{per ogni } t$$

$$x''(t) = 80000\frac{8e^{-2t} - e^{-t}}{(1+8e^{-t})^3} = 0 \qquad \text{per } t = \ln 8$$

$$x''(t) > 0 \qquad \text{per } t < \ln 8$$

Un grafico qualitativo di f è il seguente



Il massimo tasso di crescita $x'(t)$ si ha in corrispondenza a $t = \ln 8$, che è punto di flesso per f.

5 f è continua su un intervallo chiuso e limitato, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette minimo e massimo; f è derivabile, quindi, punti di minimo o massimo possono essere o gli estremi dell'intervallo o, per il teorema di Fermat, punti in cui f' si annulla.
Calcoliamo il valore di f agli estremi dell'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$f(-\pi) = f(\pi) = 1$$

Calcoliamo poi f' e determiniamone gli zeri:

$$f'(x) = -2\sin x \cdot \cos x + \cos x = \cos x(1 - 2\sin x)$$

f' si annulla per

$$x = \pm\frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6} \qquad x = \frac{5}{6}\pi$$

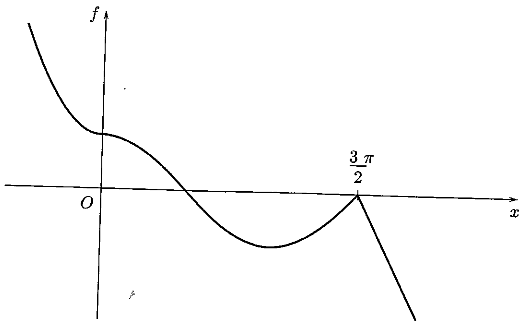
Calcoliamo il valore di f nei punti stazionari e confrontiamo i valori trovati:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4} \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{5}{4}$$

Il minimo di f è -1, il massimo è $\frac{5}{4}$.

6 Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -\sin x & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \\ -2 & x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



Si può poi verificare che $f'(0) = 0$, mentre dato che il grafico presenta un punto angoloso f' in $x = \frac{3}{2}\pi$ non è definita.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ -\cos x & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & x > \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

f'' non è definita in $x = 0$ e in $x = \frac{3}{2}\pi$.

(a) Il punto $x = \pi$ è punto di minimo locale; il punto $x = \frac{3}{2}\pi$ è punto di massimo locale.
(b) Il punto $x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale; il punto $x = \frac{\pi}{2}$ è punto di flesso.
(c) f' si annulla in $x = 0$ (punto di flesso) e in $x = \pi$ (punto di minimo locale).
(d) f'' si annulla in $x = \frac{\pi}{2}$ e per $x > \frac{3}{2}\pi$.

7 Calcoliamo $f'(x)$ e verifichiamo che si annulla in $x = 0$; infatti si ha

$$f'(x) = \sin x + x\cos x + 2\sin 2x$$
$$f'(0) = 0$$

Calcoliamo poi $f''(x)$

$$f''(x) = 2\cos x - x\sin x + 4\cos 2x$$

Poiché $f''(0) = 6 > 0$, concludiamo che $x = 0$ è punto di minimo locale forte per f.

8 Si può applicare il teorema di de l'Hospital (⇛ BPS, pag. 202). Dato che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2)^{x+3} = (x+2)^{x+2}\left((x+2)\ln(x+2) + x + 3\right)$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^{x+3} - 8}{x} = 8\ln 2 + 12$$

Invece di considerare la successione a_n, limitandoci cioè a n intero naturale, l'idea è di considerare "n reale" ossia la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x + \sin x}, \quad x \geq 1$$

In questo modo possiamo utilizzare il calcolo differenziale. Se si riesce a stabilire che, per x grande, f' non cambia segno, f sarà monotona e la corrispondente a_n subirà la stessa sorte. Dato che

$$f'(x) = -\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2} \leq 0$$

per ogni $x \geq 1$, f è decrescente, per cui anche la successione a_n, che è una restrizione di f, è decrescente.
La serie converge per il criterio di Leibniz, in quanto a_n è infinitesima e decrescente.

Usiamo gli sviluppi di Maclaurin per e^t e $\sqrt{1+s}$ con $t = 3x$ e $s = 2x$ rispettivamente. Ciò è lecito perché per $x \to 0$, anche $t \to 0$, $s \to 0$. Per $x \to 0$, si ha

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$
$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$

quindi il polinomio di di Maclaurin di secondo grado che approssima f è

$$P_2(x) = 1 + 4x + 7x^2$$

Applicando le formule di Maclaurin, si ottiene
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \tan x} = \frac{1}{3}$ infatti, per $x \to 0$,

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \sim \frac{x^3}{3}$$

e

$$x^2 \tan x \sim x^3$$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x \sin x^3} = \frac{7}{12}$ infatti, per $x \to 0$,

$$e^{x^2} + 2\cos x - 3 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right) - 3 \sim \frac{7}{12}x^4$$

e

$$x \sin x^3 \sim x^4$$

Utilizzando le formule di Maclaurin, si trova per $x \to 0$, arrestandosi al sesto ordine (perché?),

$$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + o\left(x^6\right)$$
$$\sin\left(x^2\right) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o\left(x^6\right)$$

Nello sviluppo di Maclaurin della funzione f il termine di grado 11 ha coefficiente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Essendo tale coefficiente anche uguale a $\frac{f^{(11)}(0)}{11!}$, si ha

$$f^{(11)}(0)=\frac{2}{3}11!$$

13 Linearizzare per $t \to 0$ significa approssimare $x = x(t)$ con un polinomio di primo grado in t. Si ha, per $t \to 0$,

$$e^{-kt}=1-kt+\frac{k^2}{2}t^2+o\left(t^2\right)$$

$$\cos(\omega t)=1-\frac{\omega^2}{2}t^2+o\left(t^2\right)$$

L'approssimazione al primo ordine è pertanto

$$x(t)\approx A(1-kt)$$

Per capire se l'approssimazione è per difetto o per eccesso approssimiamo al second'ordine: si ha, per $t \to 0$,

$$x(t)=A(1-kt)+\frac{k^2-\omega^2}{2}t^2+o\left(t^2\right)$$

quindi l'approssimazione è per difetto se $k<\omega$, per eccesso se $k>\omega$. Se $k=\omega$, occorre approssimare al terz'ordine. Si ha, per $t \to 0$

$$e^{-kt}=1-kt+\frac{k^2}{2}t^2-\frac{k^3}{6}t^3+o\left(t^3\right)$$

$$\cos(kt)=1-\frac{k^2}{2}t^2+o\left(t^3\right)$$

e quindi

$$x(t)=A(1-kt)+\frac{k^3}{3}t^3+o\left(t^3\right)$$

L'approssimazione è ancora per difetto.

14 Posto $f(x)=x^4+4x^3+6x^2-1$, si ha

$$f(-1)=2 \qquad f(0)=-1$$

Dato che f è continua, per il teorema degli zeri, è assicurata l'esistenza di almeno una radice dell'equazione nell'intervallo $(-1,0)$. Tale radice x^* è unica perché in tale intervallo f è strettamente decrescente, infatti si ha

$$f'(x)=4x^3+12x^2+12x=4x\left(x^2+3x+3\right)$$

che in $(-1,0)$ è negativa. Si ha poi

$$f''(x)=12x^2+24x+12=12(x+1)^2$$

che in $(-1,0)$ è positiva.
Sono verificate le ipotesi di applicabilità del metodo di Newton: la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_0=-1 \\ x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

converge per difetto alla radice x^*. Si noti che abbiamo scelto $x_0=-1$ (anche se $f''(-1)=0$) perché $f(0)$ e $f''(0)$ hanno segno discorde.

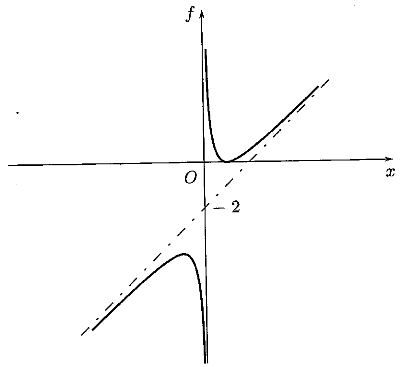
Si ha

$$x_1=-1-\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2} \qquad x_2=-\frac{1}{2}-\frac{1/16}{-7/2}=-\frac{27}{56}=-0.48214\ldots$$

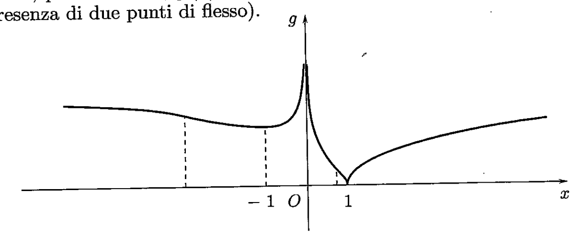
● Scrivendo

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x}=x-2+\frac{1}{x}$$

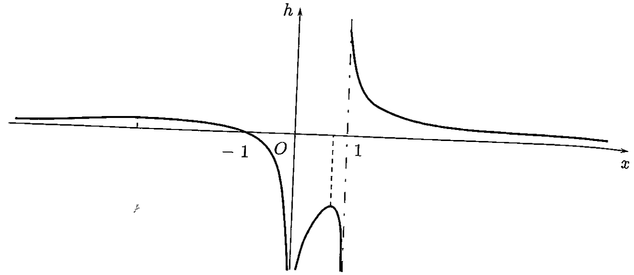
si vede che f ha come grafico un'iperbole avente per asintoti le rette $x=0$ e $y=x-2$, infatti si può ottenere sommando la retta di equazione $y=x-2$ all'iperbole di equazione $y=\frac{1}{x}$.
f è definita per $x\neq0$ e si annulla in $x=1$. Poiché in un intorno di $x=1$ risulta $f(x)\geq0$, $x=1$ è punto di minimo locale.
$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$ si annulla per $x=\pm1$, che sono punti stazionari.
$f''(x)=\frac{2}{x^3}$ ha lo stesso segno di x.
f è concava per $x<0$ e convessa per $x>0$. Il punto $x=-1$ è di massimo locale. Il grafico di f è il seguente.



Dato che la funzione $\sqrt[3]{\cdot}$ è definita in $\mathbb{R}$ ed è crescente, g ha lo stesso dominio e gli stessi punti di massimo e minimo locale di f; g non è però derivabile in $x=1$, dove presenta una cuspide.
Si ha inoltre, per $x\to\pm\infty$, $g(x)\sim\sqrt[3]{x}$. Un grafico qualitativo di g è il seguente (si noti la presenza di due punti di flesso).



h non è definita (oltre che in $x=0$) in $x=1$, interseca l'asse x nel punto $x=-1$ (punto di massimo locale per g) e risulta positiva dove g è crescente, negativa dove g è decrescente. h ha due punti di massimo locale che corrispondono ai punti di flesso di g. Un grafico qualitativo di h è il seguente.



16 (a) Si considera la funzione

$$f_1(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}.$$

Il grafico di f si ottiene dal grafico di f_1 ribaltando al di sopra dell'asse delle ascisse le parti che si trovano al di sotto.
Il dominio di f_1 è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$$f_1(x) = 0 \text{ per } x = -1 \text{ e } x = 2$$

Studiamo il comportamento di f agli estremi del dominio: per $x \to 0^{\pm}$, $f_1(x) \to -\infty$ e per $x \to \pm\infty$, $f_1(x) \to 1$.
f_1 ha come asintoto verticale la retta $x = 0$ e come asintoto orizzontale la retta $y = 1$.
Calcoliamo le derivate prima e seconda e i punti in cui esse si annullano

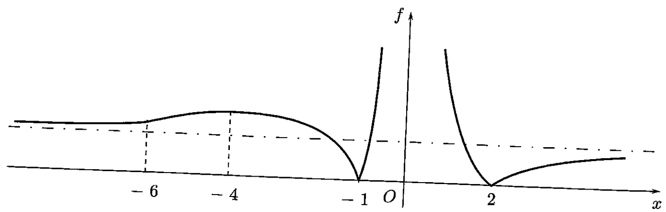
$$f_1'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

$$f_1'(x) = 0 \qquad \text{per } x = -4$$

$$f_1''(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{12}{x^4}$$

$$f_1''(x) = 0 \qquad \text{per } x = -6$$

f_1 ha un punto di massimo locale in $x = -4$ (si può controllare che $f_1''(-4) = -\frac{1}{64} < 0$) e un punto di flesso in $x = -6$. Un grafico qualitativo di f è il seguente.



(b) Il dominio di g è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Si può osservare che g è dispari, infatti

$$g(-x) = -x\sqrt[3]{(\ln|-x|)^2} = -x\sqrt[3]{(\ln|x|)^2} = -g(x)$$

quindi limitiamo lo studio all'intervallo $(0, +\infty)$; si ha

$$g(x) = 0 \quad \text{per } x = 1$$

per $x \to 0^+$, $g(x) \to 0^+$; per $x \to +\infty$, $g(x) \to +\infty$.
Calcoliamo e studiamo il segno della derivata prima

$$g'(x) = \frac{3\ln x + 2}{3\sqrt[3]{(\ln x)}}, \quad x \neq 1$$

$$g'(x) = 0 \text{ per } x = e^{-2/3}$$

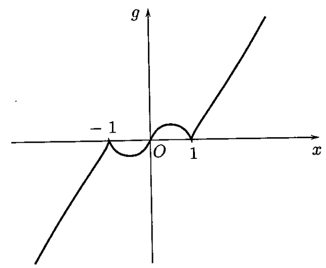
$$g'(x) > 0 \text{ per } 0 < x < e^{-2/3} \text{ o } x > 1$$

Il punto $x = 1$ è punto di minimo locale, il punto $x = e^{-2/3}$ è punto di massimo locale.
Per $x \to 0^+$, $g'(x) \to +\infty$; per $x \to 1^{\pm}$, $g'(x) \to \pm\infty$.
Il grafico di g vicino all'origine tende ad avere tangente verticale e presenta una cuspide in $x = 1$.
Si ha poi

$$g''(x) = \frac{6\ln x - 2}{9x\sqrt[3]{(\ln x)^4}}$$

$$g''(x) = 0 \text{ per } x = e^{1/3}$$

Il punto $x = e^{1/3}$ è punto di flesso. Un grafico qualitativo di f è il seguente.



(c) Il dominio di h è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Si ha facilmente

$$h(x) = 0 \quad \text{per } x = 2$$

Studiamo il comportamento di h agli estremi del dominio:

$$\text{per } \; x \to 0^- \quad h(x) \to -\infty \qquad \text{per } \; x \to 0^+ \quad h(x) \to 0^-$$

la retta $x = 0$ è asintoto verticale per h.
Applicando le formula di Maclaurin si trova:

$$\text{per } x \to \pm\infty \quad h(x) = (x-2)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x - 3 + o(1)$$

la retta $y = x - 3$ è asintoto obliquo per h.

Calcoliamo e studiamo il segno della derivata prima; si ha

$$h'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \left(x^2 + x - 2\right)$$

$$h'(x) = 0 \text{ per } x = -2 \text{ e } x = 1$$

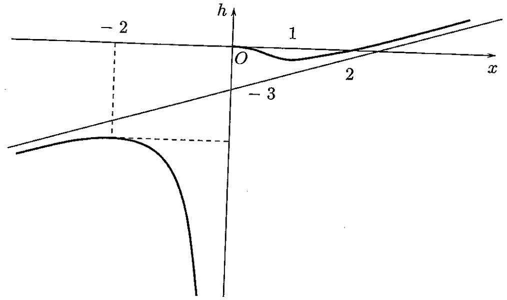
$$h'(x) > 0 \text{ per } x < -2 \text{ e } x > 1$$

h ha un punto di massimo locale in $x = -2$, un punto di minimo locale in $x = 1$.
Calcoliamo e determiniamo gli zeri della derivata seconda:

$$h''(x) = \frac{1}{x^4} e^{-1/x} (5x - 2)$$

$$h''(x) = 0 \text{ per } x = \frac{2}{5}$$

h ha un punto di flesso in $x = \frac{2}{5}$. Un grafico qualitativo di h è il seguente.



17 Consideriamo, per semplicità,

$$f(v) = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{1 + v} = \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}} \qquad -1 < v < 1$$

Il grafico di $\nu(v) = \nu_0 f\left(\frac{v}{c}\right)$ si ottiene dal grafico di f "cambiando unità di misura".
Si ha

$$\lim_{x \to -1} f(v) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1} f(v) = 0$$

la retta $x = -1$ è asintoto verticale per f.
Calcoliamo la derivata prima; si ha

$$f'(v) = \frac{-1}{(1 + v)^2} \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}} = -\frac{1}{(1 + v)\sqrt{(1 - v^2)}}$$

Poiché f' è negativa, f è decrescente. Calcoliamo il limite di f' per $v \to 1$ per vedere con quale tangente il grafico di f si avvicina al punto $(1, 0)$; dato che

$$\lim_{x \to 1} f(v) = -\infty$$

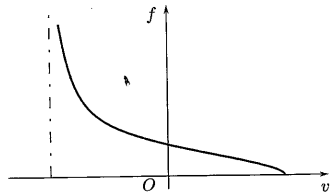
f si avvicina al punto $(1, 0)$ con tangente verticale.
Possiamo calcolare anche la derivata seconda:

$$f''(v) = \frac{1 - 2v}{(1 + v)\sqrt{(1 - v^2)^3}}$$

Si ha

$$f''(v) = 0 \quad \text{per } v = \frac{1}{2}$$

per cui il punto $v = \frac{1}{2}$ è punto di flesso.
Un grafico qualitativo di f (e anche di ν) è il seguente.



Il punto di flesso per ν è $v = \frac{c}{2}$.

(a) Dominio: $\mathbb{R}$.
f è dispari.

$$f(x) = 0 \text{ per } \begin{cases} x = 0 & \text{se } a \leq 0 \\ x = 0,\ x = \pm\sqrt{a} & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \pm\infty$.
Si ha

$$f'(x) = 3x^2 - 2a$$

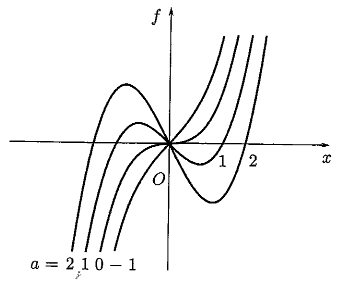
$$f'(x) = 0 \qquad \text{per } \begin{cases} x = 0 & \text{se } a = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{2a}{3}} & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Per $a \leq 0$, f è strettamente crescente; per $a > 0$, f cresce per $x < -\sqrt{\frac{2a}{3}}$, decresce per $-\sqrt{\frac{2a}{3}} < x < \sqrt{\frac{2a}{3}}$ e cresce per $x > \sqrt{\frac{2a}{3}}$. Il punto $x = -\sqrt{\frac{2a}{3}}$ è punto di massimo locale, il punto $x = \sqrt{\frac{2a}{3}}$ è punto di minimo locale.
Si ha poi

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \text{ per } x = 0$$

f è concava per $x < 0$ e convessa per $x > 0$. Il punto $x = 0$ è punto di flesso.
I grafici, al variare di a, sono riportati in figura.



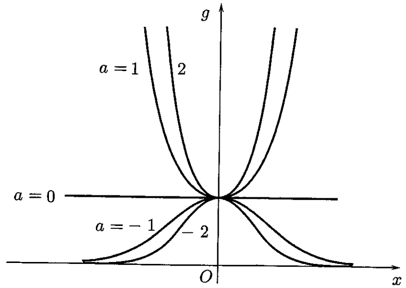
(b) Dominio: $\mathbb{R}$.
g è pari e positiva per ogni x.
Se $a = 0$ si ha $g(x) = 1$.
Per $x \to \pm\infty$, $g(x) \to \begin{cases} 0^+ & \text{se } a < 0 \\ +\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$
Si ha

$$g'(x) = 2axe^{ax^2}$$
$$g'(x) = 0 \text{ per } x = 0$$

Per $a < 0$, f è crescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$; il punto $x = 0$ è punto di massimo.
Per $a > 0$, f è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$; il punto $x = 0$ è punto di minimo.
Si ha poi

$$g''(x) = 2ae^{ax^2}\left(1 + 2ax^2\right),$$
$$g''(x) = 0 \text{ per } \begin{cases} x = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{2a}} & \text{se } a < 0 \\ x = 0 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Per $a < 0$ il grafico di f presenta due punti di flesso in $x = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{2a}}$; per $a > 0$, f è convessa.
I grafici, al variare di a, sono riportati in figura.



(c) Dominio: $(0, +\infty)$.
Per $a = 0$, si ottiene $h(x) = \ln x$.

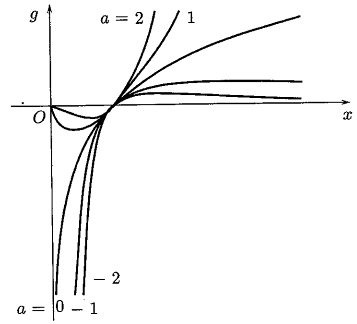
Per ogni a, h si annulla per $x = 1$.
Per $x \to 0^+$ $h \to \begin{cases} -\infty & \text{se } a < 0 \\ 0^- & \text{se } a > 0 \end{cases}$ per $x \to +\infty$, $h \to \begin{cases} 0^+ & \text{se } a < 0 \\ +\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$
Si ha

$$h'(x) = x^{a-1}(a \ln x + 1)$$
$$h'(x) = 0 \text{ per } x = e^{-1/a} \quad \text{se } a \neq 0$$

Per $a < 0$, h è crescente per $x < e^{-1/a}$ e decrescente per $x > e^{-1/a}$; il punto $x = e^{-1/a}$ è punto di massimo.
Per $a > 0$, h è decrescente per $x < e^{-1/a}$ e crescente per $x > e^{-1/a}$; il punto $x = e^{-1/a}$ è punto di minimo.
Si ha poi

$$h''(x) = x^{a-2}\left(\left(a^2 - a\right)\ln x + 2a - 1\right)$$
$$h''(x) = 0 \text{ per } x = e^{(1-2a)/(a^2-a)} \quad \text{se } a \neq 0,\ a \neq 1$$

Per $a = 1$, h è strettamente convessa; per $a \neq 0, 1$, h ha un punto di flesso in $x = e^{(1-2a)/a^2-a}$.
I grafici, al variare di a, sono riportati in figura.



Vero o falso?

1. (a) Vera: si dimostra applicando il teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x, x+1]$.

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(y)$$

per un opportuno $y \in (x, x+1)$.

(b) Falsa: come controesempio si può considerare $f(x) = \ln x$. Infatti $f'(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$, ma f non ha asintoto orizzontale.

(c) Falsa: come controesempio si può considerare $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$. Per $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$ e quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale, mentre

$$f'(x) = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2}$$

non ammette limite per $x \to +\infty$.

2 (a) Falsa: sia, per esempio, $f(x) = x$ in $A = [0,1]$; $x = 1$ è punto di massimo, ma $f'(1) \neq 0$. Naturalmente il punto di minimo non è interno all'intervallo, ma coincide con un estremo.

(b) Falsa: come controesempio si può considerare $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, ma $x = 0$ non è punto di estremo.

(c) Falsa. È vera se ci si limita ad un intervallo ma, in generale è falsa. Basta prendere una funzione definita in intervalli disgiunti su ciascuno dei quali è crescente, ma in quello di sinistra ha valori più grandi. Per esempio, $f(x) = \dfrac{-1}{x}$ nell'insieme $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Si ha che $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ è positiva per ogni $x \in A$, ma f non è crescente su tutto A, infatti

$$f(-1) = 1 > f(1) = -1$$

(d) Falsa: come controesempio si può considerare $f(x) = x + \sin x$. Si ha

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$$

per ogni x. f è crescente strettamente ma $f'(x) = 0$ negli infiniti punti

$$x = (1 + 2k)\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(e) Vero: se x_0 è punto di flesso, f' è crescente (risp. decrescente) in un intorno sinistro di x_0 e decrescente (risp. crescente) in un intorno destro. Ne segue che x_0 è punto di massimo (risp. minimo) per f'.

3 (a) Falsa: come controesempio si può considerare $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, ma $x = 0$ non è punto di flesso per f (è punto di minimo).

(b) Falsa: come controesempio si può considerare ancora $f(x) = x^4$, che è strettamente convessa ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla in $x = 0$.

Trovare l'errore

1 Non si può applicare il teorema: non ne sono verificate le ipotesi, proprio perché $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \cos x)$ non esiste; tuttavia, si ha immediatamente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

in quanto $\sin x$, che oscilla tra -1 e 1, è "trascurabile" rispetto a x, per $x \to +\infty$.

2 Non si può isolare un fattore all'interno di una forma di indecisione e farne il limite separatamente dal resto. Volendo usare il limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, si dovrebbe scrivere: per $x \to 0$, $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$, quindi

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{x^2} - (1 + o(1)) \frac{1}{x^2} = \frac{o(1)}{x^2}$$

Il passaggio (corretto) non permette di trarre alcuna conclusione, in quanto non si hanno informazioni sufficienti per calcolare il limite di $\dfrac{o(1)}{x^2}$.

Il limite si può calcolare, per esempio, applicando il teorema di de l'Hospital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

Ulteriori esercizi

1 Se f è convessa, il grafico di f non ha punti al di sotto della retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$, che, essendo x_0 punto stazionario, è la retta $y = f(x_0)$. Ciò significa che, per ogni x,

$$f(x) \geq f(x_0)$$

e, quindi, x_0 è punto di minimo globale per f.

2 Essendo

$$f'(x) = 2x - x \sin x + \cos x$$

si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} x(2 - \sin x) + \cos x = +\infty$$

Quindi f', per il teorema della permanenza del segno, è definitivamente positiva e perciò f è definitivamente crescente.

3 Come prima cosa, determiniamo il dominio di f.
Per la realtà della radice deve essere

$$2x - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 2$$

Dato che la funzione arcsin è definita in $[-1, 1]$ deve essere

$$-1 \leq \sqrt{2x - x^2} \leq 1$$

ossia

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0 \\ 2x - x^2 \leq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Il dominio di f è $[0, 2]$.
Agli estremi del dominio f si annulla.
f è continua in $[0, 2]$ e derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$ e si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x - x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) = \\ &= \frac{1 - x}{|x - 1|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} \qquad x \neq 0, 1, 2 \end{aligned}$$

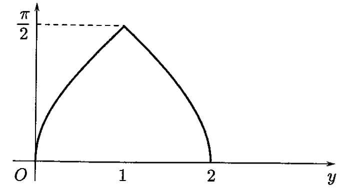
f' è positiva in $(0, 1)$ e negativa in $(1, 2)$.
Il punto $x = 1$ è un punto angoloso per f, infatti (vedi l'esercizio 7, pag. 124):

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1 \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f'(x) = -1$$

Si ha anche

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty$$

Agli estremi del dominio, il grafico di f presenta tangente verticale.



Essendo continua su un intervallo chiuso e limitato, f ammette massimo e minimo.
Il massimo di f è $f(1) = \frac{\pi}{2}$, il minimo di f è $f(0) = f(2) = 0$.

4 Per valutare la differenza $\sin a - \sin b$, applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sin x$ nell'intervallo $[b, a]$ (supponendo $a > b$; analogamente si ragiona se $b > a$). Si deduce che esiste $c \in (b, a)$ tale che

$$\frac{\sin a - \sin b}{a - b} = \cos c$$

e quindi

$$\left|\frac{\sin a - \sin b}{a - b}\right| = |\cos c| \leq 1$$

da cui

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$$

che è vera anche per $a = b$.

5 Usiamo la formula di Maclaurin per $\ln(1 + t)$ con $t = x + x^2$ e per $\sin t$ con $t = x^2$ e $t = x$. Si trova

$$f(x) = x + x^2 - \frac{(x + x^2)^2}{2} + o(x^2) - x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \sim \frac{x^4}{3}$$

6 Dimostriamo l'affermazione nel caso che x_0 sia punto di massimo. Se $x_0 \in (a, b)$, per il teorema di Fermat $f'(x_0) = 0$, quindi l'affermazione è vera.
Supponiamo che $x_0 = a$, allora per ogni $x > a$ si ha $f(x) \leq a$ per cui il rapporto

$$\frac{f(x) - a}{x - a}$$

è ≤ 0, essendo il numeratore ≤ 0 e il denominatore > 0. Risulta allora, per il teorema della permanenza del segno

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - a}{x - a} = f'(a) \leq 0$$

e quindi

$$f'(a)(x - a) \leq 0$$

Analogamente si ragiona se $x_0 = b$.

7 Dimostriamo che

$$f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{x \to c^+} f'(x) \qquad (1)$$

Per il teorema di Lagrange applicato a f nell'intervallo $[c, c+h]$, il rapporto incrementale $[f(c + h) - f(c)]/h$ risulta uguale alla derivata di f in un opportuno punto $c_h \in (c, c+h)$:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} = f'(c_h)$$

Se $h \to 0^+$ il primo membro tende a $f'_+(c)$. D'altra parte, essendo c_h intrappolato tra c e $c + h$, si ha che $c_h \to c^+$ e

$$\lim_{h \to 0^+} f'(c_h) = \lim_{x \to c^+} f'(x)$$

poiché esiste $\lim_{x \to c^+} f'(x)$. La (1) è dunque vera.
Analoga è la dimostrazione per il limite sinistro.
Ovviamente, se f è continua in c e se i limiti destro e sinistro della derivata sono finiti e uguali, f risulta derivabile in quanto derivata sinistra e derivata destra esistono e sono uguali tra loro.

8 Sia f derivabile in un intorno di c e supponiamo per assurdo che f' abbia un punto di discontinuità a salto in $x = c$, cioè

$$\lim_{x \to c^-} f'(x) = l_1 \neq \lim_{x \to c^+} f'(x) = l_2$$

Essendo f derivabile è ovviamente continua. Per la (1) dell'esercizio precedente, si ha

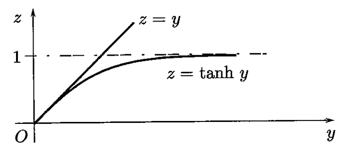
$$f'_-(c) \neq f'_+(c)$$

contro l'ipotesi che f sia derivabile in c; f' non può dunque avere punti di discontinuità a salto.
Se, invece, il limite per $x \to c$ di f' esiste finito, allora, sempre per il microteorema dell'esercizio precedente, tale limite definisce f' nel punto c, cosicché f' risulta continua in c e si perviene ancora ad una contraddizione.

9 Consideriamo la funzione

$$L(y) = m_0 \left(\frac{1}{\tanh y} - \frac{1}{y}\right) = m_0 \frac{y - \tanh y}{y \tanh y} \qquad y > 0$$

L è positiva, poiché, come mostra il confronto grafico, $y > \tanh y$ per $y > 0$.



Calcoliamo i limiti di L per y tendente a 0 e a $+\infty$. Il limite

$$\lim_{y \to 0} \frac{y - \tanh y}{y \tanh y}$$

si presenta nella forma di indecisone $\frac{0}{0}$ e può essere calcolato applicando il teorema di de l'Hospital. Conviene però prima semplificarlo ricordando che per $y \to 0$ si ha $\tanh y \sim y$. Consideriamo quindi

$$\lim_{y \to 0} \frac{y - \tanh y}{y^2}$$

e proviamo a calcolare il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{y \to 0} \frac{1 - 1/(\cosh y)^2}{2y} = \lim_{y \to 0} \frac{(\cosh y)^2 - 1}{2y(\cosh y)^2}$$

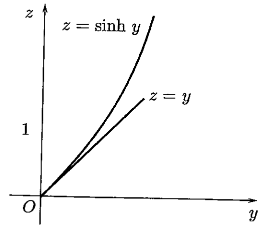
Tale limite è 0 poiché $(\cosh y)^2 - 1 \sim \dfrac{y^2}{2}$, quindi anche

$$\lim_{y\to 0} \frac{y - \tanh y}{y^2} = 0$$

Per y è $\tanh y \to 1$.
Calcoliamo L'. Si ha

$$L'(y) = m_0 \left(-\frac{1}{(\sinh y)^2} + \frac{1}{y^2} \right) = m_0 \frac{(\sinh y)^2 - y^2}{y^2 (\sinh y)^2}$$

L' è positiva poiché, come mostra il confronto grafico, $\sinh y > y$ per $y > 0$, quindi L è crescente.



Si può calcolare il limite di L' per $y \to 0$ per vedere con quale tangente il grafico di L si avvicina all'origine. Conviene applicare le formule di Maclaurin. Dato che, per $y \to 0$,

$$\sinh y = y + \frac{y^3}{3} + o\left(y^3\right)$$

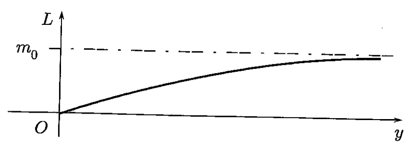
si ha

$$(\sinh y)^2 = \left(y + \frac{y^3}{3} + o\left(y^3\right) \right)^2 = y^2 + \frac{2}{3} y^4 + o\left(y^4\right)$$

per cui si ricava che per $y \to 0$

$$L'(y) = m_0 \frac{y^2 + \frac{2}{3} y^4 + o\left(y^4\right) - y^2}{y^4} \to \frac{2}{3}$$

Un grafico qualitativo di L è il seguente.



10 Essendo f convessa, per ogni $q \in [a, b]$ si ha(6)

$$f(q) \geq f(q_0) + f'(q_0)(q - q_0)$$

(6) Il grafico di f non ha punti al di sotto delle sue rette tangenti.

Poiché $E_f(q_0) = \dfrac{q_0 f'(q_0)}{f(q_0)} = 1$, si ha $f'(q_0) = \dfrac{f(q_0)}{q_0}$, da cui sostituendo $f'(q_0)$ con $\dfrac{f(q_0)}{q_0}$ si ottiene

$$f(q) \geq f(q_0) + \frac{f(q_0)}{q_0}(q - q_0)$$

da cui si ricava

$$\frac{f(q)}{q} \geq \frac{f(q_0)}{q_0}$$

Ciò mostra che q_0 è punto di minimo per la funzione $C_M(q) = \dfrac{f(q)}{q}$.

5. CALCOLO INTEGRALE

1. PRIMITIVE

Esempi

1 Scriviamo una primitiva[1] della funzione

$$f(x) = x + 5\sqrt{x} - \frac{3}{x} \qquad x > 0$$

Per la proprietà di linearità (⇛ BPS, pag. 248, formula (4.1)), si ha

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int x\mathrm{d}x + 5\int \sqrt{x}\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x^2}{2} + 5\frac{2}{3}x^{3/2} - 3\ln x = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - 3\ln x\end{aligned}$$

2 Calcoliamo una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x-1}$$

Dividendo il numeratore per il denominatore, si ottiene

$$f(x) = x^2 + x + 1 + \frac{5}{x-1}$$

Si ha, quindi,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 5\ln|x-1|$$

---

[1] In questi esempi e negli esercizi successivi, utilizzeremo il simbolo $\int f(x)\mathrm{d}x$, che indica la famiglia di primitive di f, anche per indicare *una sola primitiva*.

Non avendo specificato in che intervallo stiamo cercando una primitiva di f, consideriamo il valore assoluto nell'argomento del logaritmo. La formula scritta è valida in entrambi gli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$.

3 Calcoliamo

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} \mathrm{d}x$$

Si può scrivere

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

quindi si ha

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + \arctan x$$

4 Calcoliamo una primitiva di $h(x) = xe^x$. Applichiamo la formula di integrazione per parti (⇛ BPS, pag. 252, formula (4.7)), prendendo x come fattore finito ed e^x come fattore differenziale, si ha

$$\int xe^x \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x$$

E se, invece, avessimo scelto e^x come fattore finito e x come fattore differenziale? Non avremmo combinato nulla: infatti, avremmo scritto un secondo integrale più complicato di quello di partenza

$$\int xe^x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x \mathrm{d}x$$

Per la scelta tra fattore finito e fattore differenziale, conviene pensare, nel caso entrambi i fattori abbiano una primitiva elementare, a quale dei due ha la derivata più semplice (in modo da semplificare l'integrale che compare nella formula a destra).

5 Calcoliamo una primitiva della funzione

$$f(x) = \cos\sqrt{x}$$

Si può applicare il metodo di integrazione per sostituzione (⇛ BPS, pag. 249, formula (4.2)). Posto $t = \psi(x) = \sqrt{x}$, si ha $x = \phi(t) = t^2$, $t \geq 0$, $\mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$. Si ottiene quindi

$$\int \cos\sqrt{x} \mathrm{d}x = \int \cos t \cdot 2t\, \mathrm{d}t\Big|_{t=\sqrt{x}} =$$

e integrando per parti, scegliendo $\cos t$ come fattore differenziale,

$$= 2\left(t \sin t - \int \sin t\, \mathrm{d}t\right)\Big|_{t=\sqrt{x}} = 2(t\sin t + \cos t)|_{t=\sqrt{x}} =$$
$$= 2\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right)$$

6 Calcoliamo

$$\int \frac{1}{x(2-x)} \mathrm{d}x$$

La frazione $\frac{1}{x(2-x)}$ si può pensare ottenuta sommando due frazioni del tipo A/x e $B/(2-x)$ con A, B costanti da determinare. Cerchiamo A, B in modo che *identicamente* si abbia

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{2-x} = \frac{1}{x(2-x)}$$

ossia

$$A(2-x) + Bx = (-A+B)x + 2A = 1$$

Deve essere

$$\begin{cases} -A+B=0 \\ 2A=1 \end{cases}$$

e quindi $A = B = 1/2$. Otteniamo, così

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(2-x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{2(2-x)} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2-x|$$

7 Scriviamo la primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x+1}$$

il cui grafico passa per il punto $(0,0)$. La famiglia di primitive di f si ricava applicando il metodo di sostituzione, ponendo $e^x = t$. Si ha $x = \ln t$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ e quindi

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\Big|_{t=e^x} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t\Big|_{t=e^x} =$$
$$= \ln t - \ln(t+1) + k|_{t=e^x} = x - \ln(e^x+1) + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Imponendo il passaggio per $(0,0)$ si ricava $k = \ln 2$. La primitiva cercata è

$$g(x) = -\ln(e^x+1) + x + \ln 2$$

Test a risposta multipla

1 Una primitiva della funzione $f(x) = e^{1-2x}$ è $g(x) =$

a) e^{1-2x} b) $\frac{e^{1-2x}}{2}$ c) $-\frac{e}{2e^{2x}}$ d) $-2e^{1-2x}$

2 Quale tra le seguenti funzioni *non* è primitiva di $f(x) = \sin 2x$? $g(x) =$

a) $-\frac{\cos 2x}{2}$ b) $-(\cos x)^2$ c) $2\cos 2x$ d) $(\sin x)^2$

3. Una primitiva di $f(x) = xe^{x^2}$ che soddisfa la condizione $f(0) = 1$ è $g(x) =$

a e^{x^2} b $\frac{e^{x^2}}{2} + \frac{1}{2}$ c non esiste d $2e^{x^2} - 1$

4. Quale tra le seguenti funzioni è primitiva di $f(x) = e^{-x^2}$? $g(x) =$

a e^{-x^2} b $-\frac{e^{-x^2}}{2x}$ c $-\frac{e^{-x^2}}{2}$ d nessuna delle precedenti

5. L'insieme delle primitive della funzione $f(x) = x \sin 2x$ è $g(x) =$

a $\frac{x \cos 2x}{2} + c$ b $\sin 2x - x\cos 2x + c$ c $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + c$ d $\frac{x^2}{4}\cos 2x + c$

6. Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ è $g(x) =$

a $\sqrt{1-x^2}$ b $-\sqrt{1-x^2}$ c $\arcsin x$ d $-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

7. Una primitiva della funzione $f(x) = \operatorname{sign} x$ in $[-1, 1]$ è

a $|x|$ b x c $x|x|$ d nessuna delle precedenti

Esercizi

1. Calcolare una primitiva delle funzioni $f(x) =$

(a) $\frac{x+2}{2x-3}$ (b) $\frac{x+3}{(2x+1)^2}$ (c) $\frac{x^2}{x^2-1}$ (d) $\frac{x-1}{x^2+2x+5}$

2. Calcolare i seguenti integrali "quasi immediati"

(a) $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ (b) $\int \frac{dx}{x \ln x}$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ (d) $\int \frac{e^x dx}{(e^x+3)^3}$

3. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali fratte

(a) $\int \frac{x+3}{(x+1)^3}dx$ (b) $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$ (c) $\int \frac{dx}{x^2(x+3)}$ (d) $\int \frac{dx}{x^2+x^4}$

4. Utilizzando la formula di integrazione per parti, calcolare una primitiva di $f(x) = \arctan x$ e di $g(x) = \arcsin x$.

5. Scrivere la famiglia delle primitive della funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$, applicando tutti e tre i metodi d'integrazione.

6. Per le seguenti funzioni scrivere la primitiva che passa per il punto a fianco indicato

(a) $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x^2}$ $(1, 0)$

(b) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ $(0, 0)$

7. Calcolare una primitiva $g(x)$ della funzione $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ e verificare che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Ulteriori esercizi

1. Scrivere una formula ricorsiva per il calcolo dell'integrale

$$I_{n,\alpha} = \int x^\alpha (\ln x)^n \, dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Scrivere una formula ricorsiva per il calcolo di

$$I_n = \int (\sin x)^n \, dx$$

5.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. c

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{e}{2e^{2x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}e^{1-2x}\right) = e^{1-2x}$

2. c

$\frac{d}{dx}(2\cos 2x) = 4 \sin 2x$. Invitiamo il lettore a verificare che altre le funzioni differiscono per una costante.

3. b

La primitive di f si possono scrivere nella forma

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{2} + k$$

con k costante reale. Imponendo il passaggio per $(0, 1)$ si ottiene $k = \frac{1}{2}$.

4. d

La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ha "primitive elementari".

5 $\boxed{c}$

Si applica la formula d'integrazione per parti, scegliendo $\sin 2x$ come fattor differenziale,

$$\int x \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \mathrm{d}x = \dots$$

6 $\boxed{b}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Invitiamo il lettore a calcolare le altre derivate.

7 $\boxed{d}$

La funzione in $\boxed{a}$ ha come derivata f in $[-1,0)$ e in $(0,1]$ ma in $x=0$ non è derivabile.

Esercizi

1 Si tratta di funzioni razionali fratte; le primitive si calcolano applicando il metodo di scomposizione.

(a) Prima si scrive

$$\frac{x+2}{2x-3} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{7}{2x-3}\right)$$

e poi si integra, ottenendo

$$\int \frac{x+2}{2x-3} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \frac{7}{2x-3} \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{4} \ln|2x-3|$$

dato che

$$\int \frac{7}{2x-3} \mathrm{d}x = \frac{7}{2} \int \frac{2}{2x-3} \mathrm{d}x = \frac{7}{2} \ln|2x-3|$$

(b) Scriviamo

$$\frac{x+3}{(2x+1)^2} = \frac{A}{(2x+1)^2} + \frac{B}{2x+1}$$

da cui

$$x + 3 = A + 2Bx + B = 2Bx + A + B$$

Affinché l'identità sia corretta occorre che

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\int \frac{x+3}{(2x+1)^2} \mathrm{d}x = \frac{5}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} =$$
$$= -\frac{5}{4(2x+1)^2} + \frac{1}{4} \ln|2x+1|$$

(c) Scriviamo

$$\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

Integrando si trova

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^2-1} = x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

(d) Osserviamo che il denominatore ha radici complesse. Scriviamo

$$\frac{x-1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{2}{x^2+2x+5}$$

in modo da avere

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x = \ln\left(x^2+2x+5\right)$$

Il secondo termine ha come primitiva un'arcotangente, che si ottiene scrivendo il denominatore nella forma $1 + (\dots)^2$. Infatti

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4\left[1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]$$

e quindi

$$\int \frac{2\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} = \int \frac{1/2\mathrm{d}x}{1 + ((x+1)/2)^2} = \arctan \frac{x+1}{2}$$

Si ha infine

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+2x+5\right) - \arctan \frac{x+1}{2}$$

2 Basta "vedere" la derivata di una funzione composta. Altrimenti applicare il metodo di sostituzione.

(a) Si può scrivere

$$\int x\sqrt{x^2+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int 2x\left(x^2+1\right)^{1/2} \mathrm{d}x =$$

(dato che $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2+1\right) = 2x$)

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}$$

($\Rightarrow$ BPS, pag. 250). Oppure si può porre $\sqrt{x^2+1} = t$; si ha

$$x^2 + 1 = t^2 \qquad 2x\,\mathrm{d}x = 2t\,dt$$

e si ottiene

$$\int x\sqrt{x^2+1} \mathrm{d}x = \int t^2 \mathrm{d}t \Big|_{t=\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{t=\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}$$

(b) Dato che $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \dfrac{1}{x}$, si ha

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int \frac{1/x}{\ln x} \mathrm{d}x = \ln|\ln x|$$

(⇛ BPS, pag. 250).

(c) Si può porre $\sqrt{x} = t$, si ha

$$x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

e si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}}\bigg|_{t=\sqrt{x}} = 2\arcsin t|_{t=\sqrt{x}} = 2\arcsin\sqrt{x}$$

(d) Si può scrivere

$$\int \frac{e^x dx}{(e^x+3)^3} = \int e^x(e^x+3)^{-3}dx =$$

(dato che $\frac{d}{dx}(e^x+3) = e^x$)

$$= \frac{(e^x+3)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(e^x+3)^2}$$

(⇛ BPS, pag. 250). Oppure si può porre $e^x + 3 = t$; si ha $e^x dx = dt$ e si ottiene

$$\int \frac{e^x dx}{(e^x+3)^3} = \int \frac{dt}{t^3}\bigg|_{t=e^x+3} = -\frac{1}{2t^2}\bigg|_{t=e^x+3} = -\frac{1}{2(e^x+3)^2}$$

3 Si applica il metodo di scomposizione, seguendo gli esempi del testo (⇛ BPS, pagg. 276-278).

(a) Dato che

$$\frac{x+3}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

si ha

$$\int \frac{x+3}{(x+1)^3}dx = -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

(b) Scriviamo

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

da cui

$$1 = Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + 2A$$

Affinché l'identità sia corretta occorre che

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2} \qquad C = 0$$

Abbiamo perciò

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+2\right)$$

(c) Scriviamo

$$\frac{1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+3}$$

da cui

$$1 = A(x+3) + B\left(x^2+3x\right) + Cx^2 = (B+C)x^2 + (A+3B)x + 3A$$

Affinché l'identità sia corretta occorre che

$$A = \frac{1}{3} \qquad B = -\frac{1}{9} \qquad C = \frac{1}{9}$$

Abbiamo perciò

$$\int \frac{dx}{x^2(x+3)} = -\frac{1}{3x} - \frac{1}{9}\ln|x| + \frac{1}{9}\ln|x+3|$$

(d) Dato che

$$\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

si ha

$$\int \frac{1}{x^2+x^4}dx = -\frac{1}{x} - \arctan x$$

4 Si ha, scegliendo in entrambi gli integrali $g(x) = 1$ come fattore differenziale,

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{xdx}{x^2+1} =$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$
$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int(-2x)\left(1-x^2\right)^{-1/2}dx =$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

5 Applicando il metodo d'integrazione per scomposizione (dopo aver sommato e sottratto 1 al numeratore), si ottiene

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}dx = \int\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)}\right)^3 - 2\sqrt{(x+1)} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Applicando il metodo d'integrazione per sostituzione ($\sqrt{x+1} = t$), si ottiene lo stesso risultato, infatti si ha

$$x = t^2 - 1 \qquad dx = 2tdt$$

e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\int\left(t^2-1\right)dt\bigg|_{t=\sqrt{x+1}} = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\bigg|_{t=\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+1)}\right)^3 - 2\sqrt{(x+1)} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Applicando il metodo d'integrazione per parti, con fattore differenziale $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, si ottiene un risultato apparentemente diverso

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = 2x\sqrt{(x+1)} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3} + h \qquad h \in \mathbb{R}$$

Invitiamo il lettore a controllare che i due risultati coincidono.

6 (a) La famiglia di primitive di f si ricava applicando la formula di integrazione per parti, scegliendo come fattore differenziale $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Si ha

$$\int \frac{\ln(x+2)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln(x+2) + \int \frac{1}{x(x+2)}\mathrm{d}x =$$

scomponendo

$$= -\frac{1}{x}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{x}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+2) + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Imponendo il passaggio per $(1,0)$ si trova $k = \dfrac{3}{2}\ln 3$.
(b) Posto $t = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, si ha $\sqrt{x} = t^2 - 1$ e successivamente

$$x = \left(t^2-1\right)^2 \qquad \mathrm{d}x = 4t\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t$$

Sostituendo, si ha

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int 4t^2\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t\Big|_{t=\sqrt{1+\sqrt{x}}} = 4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + k\Big|_{t=\sqrt{1+\sqrt{x}}} =$$
$$= 4\left(\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^5}}{5} - \frac{\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}}{3}\right) + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Imponendo il passaggio per l'origine si trova $k = \dfrac{8}{15}$.

7 Si applica la formula d'integrazione per parti, con $g(x) = x$ come fattore differenziale; si ha

$$\int x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$$

Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left[x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) + \ln\left(x^2+1\right)\right] = +\infty$$

Ulteriori esercizi

1 Se $\alpha = -1$ si ha immediatamente

$$\int \frac{(\ln x)^n}{x}\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha \neq -1$, integrando per parti, si ottiene

$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}(\ln x)^n - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^{\alpha+1}(\ln x)^n}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

da cui la formula

$$I_n = \frac{x^{\alpha+1}(\ln x)^n}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$$

2 Si ha

$$I_0 = \int \mathrm{d}x = x + k \qquad k \in \mathbb{R}$$
$$I_1 = \int \cos x\mathrm{d}x = -\sin x + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Per $n \geq 2$ si può scrivere

$$I_n = \int(\sin x)^{n-2}(\sin x)^2\mathrm{d}x = \int(\sin x)^{n-2}\mathrm{d}x - \int(\sin x)^{n-2}(\cos x)^2\mathrm{d}x$$

Scriviamo il secondo integrale nella forma

$$\int(\sin x)^{n-2}\cdot\cos x\cdot\cos x\mathrm{d}x$$

e notiamo che $h(x) = (\sin x)^{n-2}\cdot\cos x$ ha come primitiva $\dfrac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}$. Integriamo per parti tenendo $h(x)$ come fattore differenziale. Si trova

$$\int(\sin x)^{n-2}\cdot\cos x\cdot\cos x\mathrm{d}x = \frac{(\sin x)^{n-1}\cdot\cos x}{n-1} - \int\frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}(-\sin x)\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{(\sin x)^{n-1}\cdot\cos x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int(\sin x)^n\mathrm{d}x$$

Si ricava, quindi,

$$I_n = I_{n-2} - \frac{(\sin x)^{n-1}\cdot\cos x}{n-1} - \frac{1}{n-1}I_n$$

da cui

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} - \frac{(\sin x)^{n-1}\cdot\cos x}{n}$$

Si noti come la formula di ricorrenza permetta di calcolare I_n conoscendo I_0 se n è pari e conoscendo I_1 se n è dispari.
Invitiamo il lettore a dimostrare una formula analoga per il calcolo di

$$\int(\cos x)^n\mathrm{d}x$$

2. INTEGRALI DEFINITI

Esempi

1 Calcoliamo

$$\int_0^\pi (x+3)\sin x \mathrm{d}x$$

Usando la formula d'integrazione per parti (⇛ BPS, pag. 252), scegliendo $\sin x$ come fattore differenziale

$$\int_0^\pi (x+3)\sin x\,\mathrm{d}x = [-(x+3)\cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \pi + 3 + 3 + [\sin x]_0^\pi = 6 + \pi$$

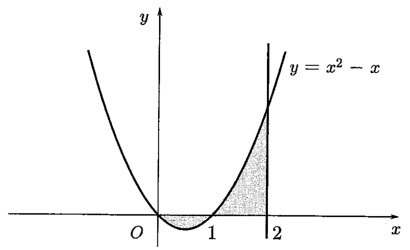
2 Calcoliamo

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$$

Applichiamo la formula di cambiamento di variabile (⇛ BPS, pag. 249, formula (4.3)), ponendo $t = \sqrt[3]{x}$ (invertibile); si ricava $x = t^3$ (derivabile con continuità), $\mathrm{d}x = 3t^2\mathrm{d}t$ e quindi si ha

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int_0^2 e^t \cdot 3t^2\mathrm{d}t = \left[3t^2e^t\right]_0^2 - 6\int_0^2 te^t\mathrm{d}t =$$
$$= 12e^2 - 6\left[te^t - e^t\right]_0^2 = 6e^2 - 6$$

3 Calcoliamo l'area (ombreggiata in figura) della figura piana compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 - x$, l'asse x e la retta $x = 2$.



Tale area è data da

$$= \int_0^2 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x$$

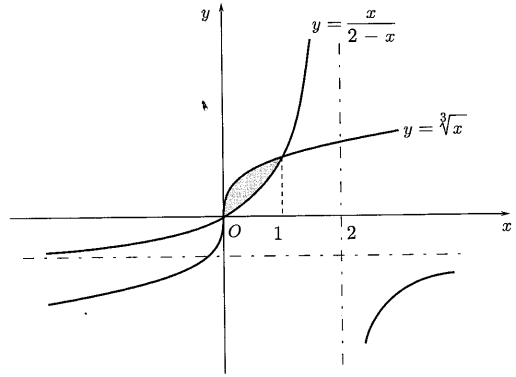
poiché

$$|f(x)| = \begin{cases} x - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Si ha

$$\text{area} = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1$$

4 Calcoliamo l'area della regione piana limitata compresa tra il grafico della funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \dfrac{x}{2-x}$. I grafici delle due funzioni, riportati in figura, si intersecano nei punti $(0,0)$ e $(1,1)$ e per $x \in (0,1)$, $f(x) \ge g(x)$.



L'area è data allora da

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x}{2-x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x + 2\ln(x-2)\right]_0^1 = \frac{7}{4} - 2\ln 2$$

In generale, l'area delle regione piana limitata compresa tra i grafici di due funzioni f e g integrabili in un intervallo $[a,b]$ le rette $x = a$ e $x = b$ è data da

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

5 Calcoliamo la lunghezza della curva di equazione $f(x) = \cosh x$, $x \in [0,a]$. Si ha (⇛ BPS, pag. 256), essendo $f'(x) = \sinh x$

$$\text{lunghezza} = \int_0^a \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^a \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh a$$

6 Calcoliamo il volume del solido ottenuto per rotazione del trapezoide individuato dalla funzione $f(x) = \ln x$, $x \in [1,e]$. Si ha (⇛ BPS, pag. 257)

$$\text{volume} = \pi\int_1^e (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left(\left[x(\ln x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \pi\left[x\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right)\right]_1^e = \pi(e-2)$$

Test a risposta multipla

1. $\int_0^{\pi/2} \cos(7x)\mathrm{d}x =$

[a] $-\frac{1}{7}$ [b] 0 [c] $\frac{1}{7}$ [d] -1

2. Il valor medio della funzione $f(x) = \cos x$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è $v_m =$

[a] 0 [b] 1 [c] $\frac{2}{\pi}$ [d] $\frac{1}{\pi}$

3. $\int_0^{a} x^3\mathrm{d}x = 1$ per $a =$

[a] 0 [b] ± 1 [c] $\pm\sqrt{2}$ [d] $\sqrt{2}$

4. Sia f continua. Se $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$, allora necessariamente

[a] $f(x) = 0$ [b] $a = b$ [c] $a = -b$ e f è dispari [d] nessuna delle altre risposte

5. Una sbarra è posta sull'intervallo $(0, 1)$ dell'asse x. Se la densità della sbarra è $\rho(x) = x + 1$, il baricentro della sbarra ha ascissa $x_b =$

[a] $\frac{2}{3}$ [b] $\frac{5}{6}$ [c] $\frac{5}{9}$ [d] $\frac{1}{2}$

6. Sia f'' continua in $[0, 1]$ e tale che $f(0) = f(1) = e$, $f'(1) = \pi$, allora $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x =$

[a] π [b] $\pi + e$ [c] e [d] $\pi + 2e$

Esercizi

1. Calcolare gli integrali

(a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)}\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}}\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x$

2. Calcolare lo spostamento subito da un punto che si muove lungo una retta con velocità $v = v(t) = 2t - 3$, nell'intervallo di tempo $[1, 3]$.

3. Calcolare l'area del trapezoide individuato dalla funzione $f(x) = \sqrt{x} - x - 2$ nell'intervallo $[3, 5]$.

4. Calcolare l'area della regione piana delimitata dalle curve di equazione $y = -x^2 - 2x + 1$ e $xy + 2 = 0$.

5. Calcolare il valor medio della funzione $f(x) = \sin\sqrt{x}$ nell'intervallo $[0, 4]$.

6. Calcolare la lunghezza della curva di equazione $f(x) = \ln x$, $x \in \left[1, \sqrt{3}\right]$.

7. Calcolare il volume del solido ottenuto per rotazione attorno all'asse x del trapezoide individuato dalla funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in [1, 2]$.

8. Sia

$$f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^3}$$

Posto

$$a_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

determinare il carattere di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

9. Sia $f(x) = \frac{1 - e^x}{e^{2x} + 1}$. Dopo aver calcolato $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x$, calcolare

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x$$

Vero o falso?

1. [V] [F] L'integrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ rappresenta geometricamente l'area della figura piana compresa tra il grafico di f l'asse delle ascisse e le rette $x = a$ e $x = b$.

2. [V] [F] Se $a > b$, l'integrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ è un numero negativo.

3. [V] [F] Se f è discontinua, l'integrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ non esiste.

4. [V] [F] Gli integrali $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ e $\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$ danno valori diversi.

5. [V] [F] Se f è pari e $a > 0$, allora $\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

V F Se f è periodica di periodo T, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,d\,x$$

Trovare l'errore

1 L'integrale di $f(x) = 1/x^2$ tra -1 e 1 è -2; infatti una primitiva di f è $-1/x$ e si ha

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

2 L'integrale di $f(x) = 1/x$ tra -1 e 1 è 0; infatti f è una funzione dispari e l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto a 0.

Ulteriori esercizi

1 Calcolare il valor medio della funzione $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x-1}$ negli intervalli $[0,2]$ e $[2,3]$.
Esiste un punto $c_1 \in [0,2]$ tale che $f(c_1)$ risulti uguale al valor medio di f in tale intervallo? Esiste un punto $c_2 \in [2,3]$ tale che $f(c_2)$ risulti uguale al valor medio di f in tale intervallo?

2 Sia

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} \qquad n \geq 1$$

dopo aver dimostrato la formula

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n}$$

calcolare I_3.

3 Dimostrare che, se f è continua in $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$.

4 Dimostrare il seguente

Teorema della media ponderata – *Siano f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e g positiva in $[a,b]$; allora esiste $c \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1 $\boxed{a}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(7x)\,dx = \left[\frac{1}{7}\sin(7x)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{7}\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = -\frac{1}{7}$$

2 $\boxed{c}$

$$v_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \frac{1}{\pi}[\sin x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

3 $\boxed{c}$

Si ricava dall'equazione $\dfrac{a^4}{4} = 1$.

4 $\boxed{d}$

Con l'esempio

$$\int_0^\pi \sin x dx = 0$$

Si vede facilmente che le risposte $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ sono false.

5 $\boxed{c}$

$x_b = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^1 x\rho(x)dx$ e $m = \text{massa} = \displaystyle\int_0^1 \rho(x)dx$, per cui si ha

$$x_b = \frac{\int_0^1 (x^2+x)\,dx}{\int_0^1 (x+1)\,dx} = \frac{5}{9}$$

6 $\boxed{a}$

Integrando per parti si ha infatti

$$\int_0^1 x f''(x)\,dx = \left[x f'(x)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,dx = f'(1) - f(1) + f(0)$$

Esercizi

1 Gli integrali si calcolano applicando la formula di cambiamento di variabile.

(a) Si pone $\ln x = t$, da cui

$$x = e^t \qquad dx = e^t dt$$

e se $x = 1$, si ha $t = 0$ e se $x = e$, si ha $t = 1$. Perciò

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 1)} dx = \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = 1 - \ln 2$$

(b) Si pone $\sin x = t$, da cui, differenziando, si trova $\cos x dx = dt$; se $x = 0$, si ha $t = 0$ e se $x = \frac{\pi}{2}$, si ha $t = 1$. Perciò

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t+2}} dx = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

(c) Si pone $1 - x^2 = t$; si ha $-2x dx = dt$ e t varia tra 1 e 0.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t} d\, t = \frac{1}{3}\left[\sqrt{t^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

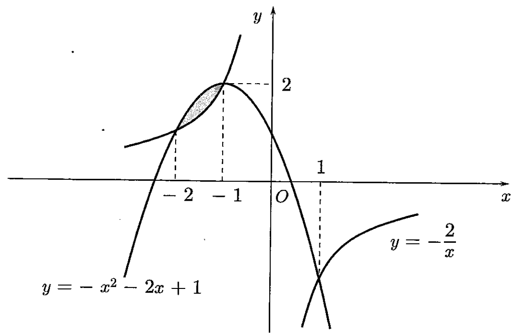
2 Si ha

$$s(3) - s(1) = \int_1^3 (2t-3)\, dt = \left[t^2 - 3t\right]_1^3 = 2$$

3 La funzione è positiva in $[3, 4)$, negativa in $(4, 5]$; l'area del trapezoide è

$$\int_3^4 f(x)\, dx - \int_4^5 f(x)\, dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_3^4 - \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_4^5 =$$
$$= \frac{35}{3} - 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}\sqrt{5}$$

4 Le due curve sono rispettivamente una parabola con vertice $(-1, 2)$ e un'iperbole equilatera avente come asintoti gli assi. Le due curve si intersecano in tre punti di ascisse -2, -1 e 1. L'area delle regione regione piana delimitata dalle curve, ombreggiata in figura è



$$\int_{-2}^{-1} \left(-x^2 - 2x + 1 + \frac{2}{x}\right) dx = \frac{5}{3} - 2\ln 2$$

5 Si ha (⇛ BPS, pag. 245)

$$f_M = \frac{1}{4}\int_0^4 \sin\sqrt{x} dx =$$

(sostituendo $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2t dt$, con t che varia tra 0 e 2)

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 t \sin t dt = \frac{1}{2}\left[-t\cos t + \sin t\right]_0^2 = \frac{\sin 2}{2} - \cos 2$$

6 Si ha

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

Poniamo $\sqrt{1+x^2} = t$; si trova $x^2 = t^2 - 1$, $2x\ dx = 2t\ dt$ con t che varia tra $\sqrt{2}$ e 2. Si ha

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{2}+3}{3}$$

7 Si ha

$$\text{volume } = \pi\int_1^2 \frac{1}{x^4} dx = \pi\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \frac{7\pi}{24}$$

8 Si ha

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

per cui una primitiva di f è

$$g(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

e

$$a_n = \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right]_0^n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Dato che

$$a_n \sim -\frac{1}{n}$$

la serie diverge.

9 Ponendo $e^x = t$, si trova

$$\int_0^k \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_1^{e^k} \frac{1-t}{t\,(t^2+1)}\mathrm{d}t = \int_1^{e^k} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) - \arctan t\right]_1^{e^k} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{e^{2k}}{e^{2k}+1} - \arctan e^k + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

e quindi

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

Vero o falso?

1 Falso. È vero se f è non negativa, altrimenti è una "somma algebrica" di aree, quelle sopra l'asse x prese con segno positivo e quelle sotto con segno negativo (vedi esempio 3).

2 Falso. Per esempio: $\int_1^0 (-1)\mathrm{d}x = 1$.

3 Falso. Per esempio, la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$ è integrabile e

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$$

4 Falso. La variabile di integrazione è "muta": $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ è un numero che dipende solo da f, da a e da b.

5 Vero. Si può infatti scrivere

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ora, ponendo $x = -s$, si ha $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}s$ e

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^0 f(-s)\ \mathrm{d}s = \int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s$$

dato che $f(-s) = f(s)$.

6 Vero. Ponendo $x + a = s$, si ha $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s$ e per $x = 0$ si ha $s = a$, per $x = T$ si ha $s = a + T$; perciò, per la formula di cambiamento di variabile,

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(s)\,\mathrm{d}\,s$$

Trovare l'errore

1 Che il risultato sia sbagliato è evidente: l'integrale di una funzione positiva non può essere negativo! Qual è, comunque, l'errore commesso? Si è applicata una formula senza verificarne le ipotesi di applicabilità: f non è integrabile perché non è limitata. Non lo è nemmeno in senso generalizzato (vedi la prossima sezione).

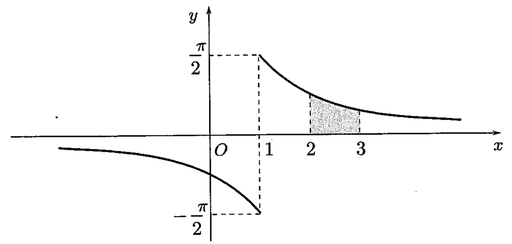
2 È vero che se f è integrabile e dispari, per ogni $a > 0$, si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

La nostra $f(x) = 1/x$ però non è integrabile perché non è limitata. Non lo è nemmeno in senso generalizzato (vedi la prossima sezione).

Ulteriori esercizi

1 Il grafico di f è



Il valor medio di f in $[0,2]$ è $f_{M1} = 0$, poiché f è dispari rispetto alla retta $x = 1$. Il valor medio di f in $[2,3]$ è

$$f_{M2} = \int_2^3 \arctan\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \quad (\text{ integrando per parti})$$
$$= \left[x\arctan\frac{1}{x-1}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2} =$$
$$= 3\arctan\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+2\right) + \arctan(x-1)\right]_2^3 =$$
$$= 2\arctan\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \frac{\pi}{4}$$

Non esiste alcun punto c_1 tale che $f(c_1) = f_{M1} = 0$, in quanto f non si annulla mai. Esiste, invece, un punto c_2 tale che $f(c_2) = f_{M2}$, perché f è continua in $[2,3]$ (⇛ BPS, pag. 244).

2 Scriviamo "meglio" l'integrale

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \int_0^1 \frac{\left(1+x^2-x^2\right)\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = I_n - \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$$

Calcoliamo l'ultimo integrale per parti, scrivendo $x^2 = x \cdot x$, tenendo come fattor differenziale $\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}$ e osservando che questa è la derivata di $-\frac{1}{2n\,(1+x^2)^n}$. Si ottiene

$$\int_0^1 x \cdot \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \left[-\frac{1}{2n}x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 + \frac{1}{2n}I_n$$

da cui

$$I_{n+1} = I_n + \frac{1}{n2^{n+1}} - \frac{1}{2n}I_n = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

Si ha, poi

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{16} = \frac{3}{32}\pi + \frac{1}{4}$$

3 Se, per assurdo, in un punto $c \in [a,b]$ fosse $f(c) > 0$, allora, per il teorema della permanenza del segno, esisterebbe un intorno $(c-\delta, c+\delta)$ in cui, per esempio, $f(x) > \frac{f(c)}{2}$ e quindi sarebbe (essendo f non negativa)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\mathrm{d}x = \delta f(c) > 0$$

che contraddice l'ipotesi.

4 Se f è continua in $[a,b]$ per il teorema di Weierstrass ammette minimo e massimo; siano

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

e si ha, per ogni $x \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M$$

Poiché g è positiva, per ogni $x \in [a,b]$ si può scrivere

$$mg(x) \leq f(x)\,g(x) \leq Mg(x)$$

e per la proprietà di monotonia dell'integrale, si ricava

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

da cui, essendo $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M$$

Il numero $\lambda = \frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$ è compreso tra il minimo e il massimo di f, quindi, per la proprietà dei valori intermedi per le funzioni continue, è un valore assunto da f, ossia esiste c in $[a,b]$ tale che $f(c) = \lambda$. Immediatamente si ricava

$$\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} = f(c) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. INTEGRALI GENERALIZZATI

Esempi

1 Calcoliamo $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Una primitiva di $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ è $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ e si ha (⇛ BPS, pag. 259)

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta} \left(-\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left(-\sqrt{1-(1-\delta)^2}+1\right) = 1$$

perciò

$$\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

2 Verifichiamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \text{converge a } \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Infatti $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è continua e perciò integrabile in $(\varepsilon, 1)$ per ogni $\varepsilon > 0$; nel caso $\alpha \neq 1$ si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \end{cases}$$

mentre se $\alpha = 1$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\log x]_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\log\varepsilon = -\infty$$

3 Calcoliamo $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$, $\alpha > 0$.

La funzione $f(x) = e^{-\alpha x}$ è continua su tutto l'asse reale e quindi possiamo integrarla su un intervallo $[0,k]$. Si ha (⇛ BPS, pag. 262)

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\right]_0^k = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{e^{-\alpha k}}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

e, quindi, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}$ $(\alpha > 0)$

4 Calcoliamo $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.

La funzione integranda è continua su tutto l'asse reale, se i due integrali a destra convergono, possiamo scrivere (⇛ BPS, pag. 263)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

Una primitiva di $xe^{-x^2/2}$ è $-e^{-x^2/2}$ e pertanto

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \lim_{h\to-\infty}\left[-e^{-x^2/2}\right]_h^0 = \left(-1+e^{-h^2/2}\right) = -1\\ \displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\left[-e^{-x^2/2}\right]_0^k = \left(-e^{-k^2/2}+1\right) = +1\end{cases}$$

Essendo $f(x) = xe^{-x^2/2}$ integrabile e dispari, si conclude che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = 0$$

5 Verifichiamo che $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ è integrabile in $[1,+\infty)$ (⇛ BPS, pag. 264, formula (6.6)). f è continua in $(0,+\infty)$, quindi è integrabile in ogni intervallo $[1,k]$ $(k > 1)$. Per $x > 1$ si ha, per esempio, $\log x < \sqrt{x}$, quindi

$$\frac{\log x}{x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Poiché la funzione $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ è integrabile in $[1,+\infty)$, per il criterio del confronto (⇛ BPS, pag. 266), è integrabile anche f.

6 Verifichiamo che $f(x) = \frac{x+e^{-x}}{x^2+\ln x}$ non è integrabile in $[1,+\infty)$. Poiché $f \geq 0$ e continua e $x^2+\ln x \neq 0$ in $[1,+\infty)$ basta studiare l'andamento a $+\infty$ e usare il criterio di confronto asintotico (⇛ BPS, pag. 266).

Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x}$ quindi essendo $g(x) = \frac{1}{x}$ non integrabile anche f non lo è.

7 $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ è integrabile in $[1,+\infty)$. f è continua e integrabile in ogni intervallo $[1,k]$ $(k > 1)$ ma non è definitivamente di segno costante. Proviamo a considerare $|f(x)|$; si ha

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

Poiché $|f|$ è integrabile per il criterio di confronto, essendo maggiorata da una funzione integrabile, si deduce che f è integrabile per il criterio di convergenza assoluta (⇛ BPS, pag. 266).

Test a risposta multipla

1. $\int_{-\infty}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}}$

[a] converge assolutamente [b] diverge a $-\infty$ [c] diverge a $+\infty$ [d] converge

2. $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-x}} =$

[a] $\sqrt{2}$ [b] $2\sqrt{2}$ [c] diverge a $+\infty$ [d] $-2\sqrt{2}$

3. Sia $f : [a,+\infty) \to R$, continua. L'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *sicuramente* non converge se, per $x \to +\infty$,

[a] $f(x) \to 0$ [b] $f(x) \to 3$ [c] f non ammette limite [d] nessuna delle altre risposte

4. $\int_1^{+\infty} \frac{x+2\sin x}{x^3+2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

[a] converge [b] diverge a $+\infty$ [c] oscilla [d] dipende da x

Esercizi

1. Calcolare i seguenti integrali

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x$ (d) $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\mathrm{d}x$

2 Calcolare i seguenti integrali

$$\text{(a)} \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}} \qquad \text{(b)} \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}\mathrm{d}x$$

3 Stabilire se i seguenti integrali convergono (senza provare a calcolarli)

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+3}{x+2\ln x}\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{x+3}{\ln x}\mathrm{d}x$$

$$\text{(c)} \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{e^x-1}\mathrm{d}x \qquad \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^3+5}\mathrm{d}x$$

4 Stabilire se i seguenti integrali convergono, applicando la definizione,

$$\text{(a)} \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} \qquad \text{(b)} \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$$

5 Calcolare l'area della regione illimitata di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \ln(x+1)$, la retta $x = -1$ e l'asse x.

6 Dopo aver tracciato il grafico di

$$f(x) = x^3 e^{1-x^2}$$

calcolare l'area della regione illimitata di piano compresa tra il grafico della funzione e il semiasse positivo delle ascisse.

Trovare l'errore

1 Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Dato che la funzione integranda è dispari, $\int_{-k}^{+k} \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$ per ogni $k > 0$ e perciò

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{+k} \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$$

quindi anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$$

2 Calcoliamo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$. Possiamo scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} = 0$$

Ulteriori esercizi

1 Stabilire per quali valori del parametro reale a esistono finiti gli integrali

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} \frac{\ln|1-x^2|}{x^a}\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^a}\mathrm{d}x$$

2 Dimostrare il seguente *criterio di confronto di una serie con un integrale generalizzato.*
Sia $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ decrescente e infinitesima, per $x \to +\infty$; posto $a_n = f(n)$, $(n \geq 1)$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \textit{ converge se e solo se } \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \textit{ esiste finito}$$

3 Applicando il criterio di confronto con un integrale generalizzato studiare il carattere delle serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

4 Sia

$$f(x) = \frac{(x-1)^a}{x(\ln x)^2} \qquad a \in \mathbb{R}$$

stabilire per quali valori del parametro a esistono finiti gli integrali generalizzati

$$\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_e^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

5 Mostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

è integrabile in $[0,+\infty)$, ma non è assolutamente integrabile, ossia che $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ converge, mentre $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$ diverge.

6 Mostrare che la funzione

$$f(x) = \sin(x^2)$$

è integrabile in $(-\infty, +\infty)$.

5.3. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1 $\boxed{c}$

Infatti, essendo $g(x) = -2\sqrt{2-x}$ una primitiva di $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$, si ha

$$\lim_{k\to-\infty}\int_k^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{k\to-\infty}\left[-2\sqrt{2-x}\right]_k^1 = \lim_{k\to-\infty}\left(-2+2\sqrt{2-k}\right) = +\infty$$

2 $\boxed{b}$

Infatti (vedi l'esercizio 1)

$$\lim_{k\to2}\int_0^k \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{k\to2}\left[-2\sqrt{2-x}\right]_0^k = \lim_{k\to2}\left(-\sqrt{2-k}+2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

3 $\boxed{b}$

Se $f(x) \to 3$ per $x \to +\infty$, per x grande, per esempio, si ha

$$f(x) > 2$$

e una funzione costante ($\neq 0$) non è integrabile in un intorno di $+\infty$.
Si noti che una funzione *può* essere integrabile anche se non ha limite (vedi l'esercizio 6 di pag. 174).

4 $\boxed{a}$

La funzione integranda è continua in $(1, +\infty)$; basta studiare l'integrabilità in un intorno di $+\infty$. Poiché, per $x \to +\infty$

$$\frac{x+2\sin x}{x^3+2\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^2}$$

che è integrabile, l'integrale generalizzato converge.

Esercizi

1 (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx = \lim_{k\to+\infty}\left[\ln\frac{x}{x+1}\right]_1^k = \ln 2$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = 2\lim_{k\to+\infty}\left[\arctan x\right]_0^k = \pi$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = \lim_{k\to+\infty}\left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^k = 2$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx = \lim_{k\to+\infty}\int_e^k \frac{1}{t^2-1}dt = \lim_{k\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_e^k = \frac{1}{2}\ln\frac{e+1}{e-1}$

2 (a) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1/2-\varepsilon}\frac{d\,x}{\sqrt{1-2x}} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[-\sqrt{1-2x}\right]_0^{1/2-\varepsilon} = 1$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x)^2}\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} = 0$

3 (a) Diverge, perché per $x \to +\infty$, $\dfrac{\sqrt{x}+3}{x+2\ln x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, che non è integrabile.
(b) Diverge, perché per $x \to 1$, si ha $\ln x \sim x-1$ e quindi

$$\frac{x+3}{\ln x} \sim \frac{4}{x-1}$$

che non è integrabile.
(c) Converge, perché per $x \to 0$, si ha $e^x - 1 \sim x$ e quindi

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x-1} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che è integrabile.
(d) Converge, perché, essendo $x^3+5 < 1$ si ha

$$\frac{e^{-x}}{x^3+5} \le e^{-x}$$

che è integrabile in $[0, +\infty)$.

4 (a) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{1/2}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\ln|\ln x|\right]_\varepsilon^{1/2} = -\infty$

(b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_2^k\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{k\to+\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^k = \frac{1}{\ln 2}$

5 Si ha

$$\text{area} = -\int_{-1}^0 \ln(x+1)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to0}\left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]_{-1+\varepsilon}^0 = 1$$

6 f è definita in $\mathbb{R}$ ed è dispari. f è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$ e $f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

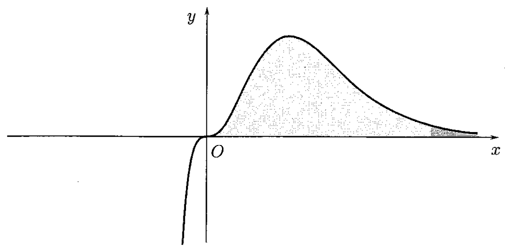
quindi la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f.
Determiniamo i punti stazionari di f risolvendo l'equazione

$$f'(x) = x^2e^{1-x^2}\left(3-2x^2\right) = 0$$

che ha le soluzioni $x = 0,\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Dalle precedenti informazioni possiamo ricavare che il punto $x = 0$ è punto di flesso a tangente orizzontale, mentre i punti $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sono rispettivamente di massimo e minimo.
Per completezza determiniamo altri eventuali punti di flesso risolvendo l'equazione

$$f''(x) = 2x^2 e^{1-x^2}\left(3 - 7x^2 + 2x^4\right) = 0$$

Si trovano le soluzioni $x = 0,\ \pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, che sono i punti di flesso.
Un grafico qualitativo di f è il seguente



L'area richiesta è data da

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_0^k x^3 e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integrando per parti prendendo $g(x) = xe^{1-x^2}$ come fattor differenziale, dato che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{1-x^2} = -2xe^{1-x^2}$, si ha

$$\int_0^k x^3 e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{1-x^2}\right]_0^k + \int_0^k xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{1-x^2}\right]_0^k = \left(-\frac{1}{2}\left(k^2+1\right)e^{1-k^2} + \frac{e}{2}\right)$$

per cui

$$\text{area} = \lim_{k\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\left(k^2+1\right)e^{1-k^2} + \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}$$

Trovare l'errore

1 Il passaggio sarebbe lecito se si fosse prima verificato che l'integrale esiste, ma

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^k \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^k = +\infty$$

e così

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{-k}^0 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-k}^0 = -\infty$$

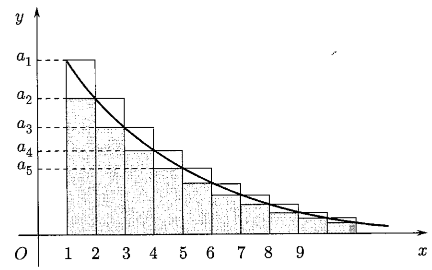
Dato che i limiti sono infiniti di segno opposto, l'integrale generalizzato non esiste.

L'integrale non converge, perché $\int_0^1$ converge solo per $\alpha < 1$ (vedi esempio 2, pag. 169), mentre $\int_1^{+\infty}$: converge solo per $\alpha > 1$ ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 264).

Ulteriori esercizi

1 (a) Sia $f(x) = \frac{\ln\left|1-x^2\right|}{x^a}$; f è continua in $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Occorre controllare l'andamento di f in un intorno di 0, 1 e $+\infty$.
Per $x\to 0$, essendo $\ln\left|1-x^2\right| \sim -x^2$ si ha $f(x) \sim -\frac{1}{x^{a-2}}$; f è integrabile in un intorno di 0 se e solo se $a-2<1$ e cioè $a<3$.
Per $x\to 1$, $f(x) = \ln(1+x)\ln|1-x| \sim \ln 2\ln|1-x|$; f è integrabile perché infinita di ordine inferiore a qualsiasi potenza di $\frac{1}{|1-x|}$.
Per $x\to+\infty$, $\ln\left|1-x^2\right| \sim \ln x^2 = 2\ln x$ e quindi $f(x) \sim \frac{2\ln x}{x^a}$; f è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $a>1$.
In conclusione l'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left|1-x^2\right|}{x^a}\mathrm{d}x$ converge se e solo se $1<a<3$.
(b) Sia $g(x) = \frac{\arctan x}{|x|^a}$; g è continua in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Occorre controllare l'andamento di g per $x\to 0^{\pm}$ e per $x\to\pm\infty$. Dato che g è dispari, basta controllare l'andamento per $x\to 0^+$ e per $x\to+\infty$.
Per $x\to 0^+$, $\arctan x \sim x$ e quindi $g(x) \sim \frac{1}{x^{a-1}}$; g è integrabile in un intorno (destro) di 0 se e solo se $a<2$.
Per $x\to+\infty$, $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ e quindi $g(x) \sim \frac{\pi}{2x^a}$; g è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $a>1$.
In conclusione l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\arctan x}{|x|^a}\,\mathrm{d}x$ converge se e solo se $1<a<2$.

2 Dalla figura si vede che, fissato un intero $k\geq 2$, l'area tra il grafico di f e l'asse x $\left(=\int_1^k f(x)\mathrm{d}x\right)$ è maggiore della somma delle aree dei rettangoli inscritti (ombreggiati),



uguale a $\sum_{n=2}^{k} a_n$, e minore della somma delle aree dei rettangoli circoscritti, uguale a $\sum_{n=1}^{k-1} a_n$. In conclusione, si ha, per $k \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^{k} a_n \leq \int_1^k f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} a_n$$

Se si passa al limite per $k \to +\infty$, per il teorema di confronto dei limiti, si ottiene

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

e perciò l'integrale e la serie condividono il carattere: o convergono entrambi o divergono entrambi.

3 Per l'esercizio 2, basta studiare $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx$.
Si ha

$$\int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx = \begin{cases} \ln(\ln k) - \ln(\ln 2) & \text{se } \alpha = 1 \\ \dfrac{(\ln k)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

per cui

$$\lim_{k\to+\infty} \int_2^k \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \dfrac{(\ln 2)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Come l'integrale, la serie converge se e solo se $\alpha > 1$, diverge negli altri casi.

4 Tra 1 ed e e anche in $x = e$ la funzione è continua e quindi occorre controllare l'andamento solo in un intorno di 1. Per $x \to 1$, $f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^{2-a}}$, integrabile in un intorno di $x = 1$ se e solo se $2 - a < 1$ ossia $a > 1$. Si deduce che $\int_1^e f$ converge se e solo se $a > 1$.
Anche tra e e $+\infty$ la funzione è continua e quindi occorre controllare l'andamento solo in un intorno di $+\infty$. Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{x^{1-a}(\ln x)^2}$; f è integrabile in un intorno di $+\infty$ se e solo se $1 - a > 1$ cioè $a \leq 0$. Si deduce che $\int_e^{+\infty} f$ converge se e solo se $a \leq 0$.
Poiché

$$\int_1^{+\infty} f = \int_1^e f + \int_e^{+\infty} f$$

e i due integrali convergono per valori di a che appartengono a intervalli disgiunti($a > 1$ e $a \leq 0$), si conclude che $\int_1^{+\infty} f$ non converge per alcun valore di a.

5 Basta considerare l'integrale da $\frac{\pi}{2}$ a $+\infty$, dato che per $x \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$, quindi $\int_0^{\pi/2} f$ esiste. Si ha, integrando per parti con fattor differenziale $\sin x$,

$$\int_{\pi/2}^k \frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^k - \int_{\pi/2}^k \frac{\cos x}{x^2}dx = $$
$$= -\frac{\cos k}{k} - \int_{\pi/2}^k \frac{\cos x}{x^2}dx$$

e passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Poiché

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

l'integrale converge, per il criterio di convergenza assoluta.
Per mostrare che $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$ diverge, osserviamo che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx$$

Su un intervallo del tipo $(k-1)\pi < x < k\pi$, si ha $\frac{1}{x} > \frac{1}{k\pi}$ e perciò

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{k\pi}$$

In conclusione

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

quindi, poiché la serie armonica diverge,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$$

6 Basta considerare, per esempio, l'integrale da 1 a $+\infty$, perché la funzione integranda è pari e sicuramente integrabile in $[0, 1]$, in quanto ivi continua. Si ha

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_1^k \sin(x^2)\,dx$$

Ponendo $x^2 = t$ si ha

$$\int_1^k \sin(x^2)\,dx = \int_1^{k^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$$

Successivamente, integrando per parti, tenendo $\sin t$ come fattore differenziale, si trova

$$\int_1^{k^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\right]_1^{k^2} - \frac{1}{4}\int_1^{k^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{\cos\left(k^2\right)}{2k} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{k^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} \mathrm{d}t$$

Si ha dunque, passando al limite per $k \to +\infty$,

$$\int_1^{+\infty} \sin\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t^3}} \mathrm{d}t$$

L'integrale a destra converge in quanto

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{t^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^3}}$$

e la funzione $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^3}}$ è integrabile in un intorno di $+\infty$.

L'esempio mostra che una funzione per essere integrabile in un intorno di $+\infty$ non deve necessariamente essere infinitesima.

Invitiamo il lettore a controllare che anche la funzione $g(x) = \cos\left(x^2\right)$ è integrabile su $(-\infty, +\infty)$.

4. FUNZIONI DEFINITE DA INTEGRALI

Esempi

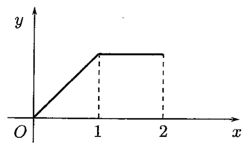
1. Determiniamo l'espressione analitica e tracciamo il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

dove

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Il grafico di f è



Se $x \in [0,1]$

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

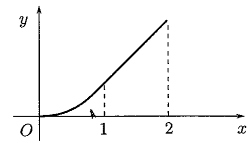
Se $x \in (1,2]$, per la proprietà additiva dell'integrale,

$$\int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + x - 1 = x - \frac{1}{2}$$

quindi

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1/2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Il grafico di F è il seguente



Notiamo che, essendo f continua in $[0,1]$, F risulta derivabile.

2. Tracciamo il grafico della funzione

$$F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{t} e^{-t} \mathrm{d}t$$

La funzione integranda $f(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$ non ha una primitiva elementare e, quindi, non siamo in grado di ricavare per F un'espressione analitica elementare, come nell'esempio precedente. Tuttavia $f(x)$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi sappiamo che la funzione F è definita in $\mathbb{R}$ e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e, per il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (⇛ BPS, pag. 269), siamo in grado di scrivere

$$F'(x) = \sqrt[3]{x} e^{-x}$$

Avendo la derivata di F, possiamo studiarne la monotonia e determinarne eventuali punti di massimo o minimo locale. Dato che

$$F'(x) = 0 \quad \text{per } x = 0$$

e

$$F'(x) < 0 \quad \text{per } x < 0$$

$$F'(x) > 0 \quad \text{per } x > 0$$

la funzione F risulta decrescente in $(-\infty, 0)$, crescente in $(0, +\infty)$ e in $x = 0$ ha un punto di minimo. Possiamo ricavare il valore di F nel punto di minimo:

$$F(0) = \int_0^0 \sqrt[3]{t} e^{-t} \mathrm{d}t = 0$$

Notiamo che questo è l'unico valore di F "calcolabile elementarmente". Calcoliamo anche la derivata seconda di F per studiarne il segno, dedurre le zone di convessità/concavità e determinare eventuali punti di flesso; si ha, per $x \neq 0$,

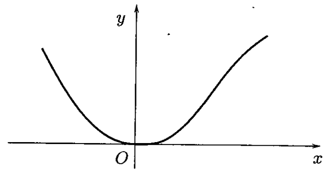
$$F''(x) = \frac{1-3x}{\sqrt[3]{x^2}}e^{-x}$$

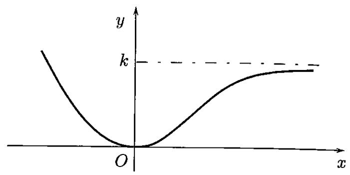
$$F''(x) = 0 \quad \text{per } x = \frac{1}{3}$$

$$F''(x) > 0 \quad \text{per } x < \frac{1}{3} \ (x \neq 0)$$

$$F''(x) < 0 \quad \text{per } x > \frac{1}{3}$$

F è perciò convessa in $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, concava in $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ e ha un punto di flesso in $x = \frac{1}{3}$.
Grafici compatibili con le informazioni sin qui ottenute possono essere





Ci rimangono da calcolare i limiti agli estremi del dominio di F, che sicuramente esistono, dato che F è monotona. Per quanto riguarda il limite per $x \to -\infty$, deve per forza essere

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$$

mentre il limite per $x \to +\infty$ potrebbe essere $+\infty$ o un numero $k > 0$. Osserviamo che, per definizione di integrale generalizzato, se

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sqrt[3]{t}e^{-t}\mathrm{d}t$$

esiste finito, esso coincide con l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{t}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Cerchiamo dunque di capire se la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$ è integrabile in $(0, +\infty)$. Possiamo applicare il criterio di confronto. Per x grande, per esempio, è

$$e^{-x} < \frac{1}{x^2}$$

e quindi

$$f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x} < \frac{1}{x^{5/3}}$$

che è integrabile in un intorno di $+\infty$. Deduciamo che

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = k$$

e quindi F ha un asintoto orizzontale. Un grafico qualitativo di F è quello della figura di destra.

Test a risposta multipla

1. La derivata di $F(x) = \int_0^x |t|\mathrm{d}t$ in $x = 0$ è $f(x) =$

[a] non esiste [b] 0 [c] -1 [d] 1

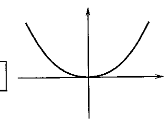
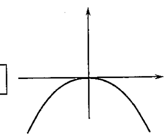
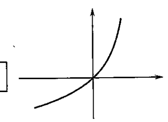
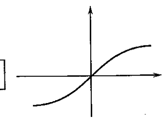
2. La derivata di $F(x) = \int_{-x}^0 e^{-t^3}\mathrm{d}t$ è $f(x) =$

[a] e^{x^3} [b] e^{-x^3} [c] $-e^{-x^3}$ [d] $-e^{x^3}$

3. Sia $F(x) = \int_{-x}^x f(t)\mathrm{d}t$; allora $F'(x) =$

[a] $f(x) - f(-x)$ [b] $f(x) + f(-x)$ [c] $f'(x) - f'(-x)$ [d] $f'(x) + f'(-x)$

4. Sia $f(x) = e^{-x^2}$; il grafico di $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ vicino a $x = 0$ è

[a]  [b]  [c]  [d] 

5. La funzione $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t-2}\mathrm{d}t$ è definita nell'intervallo

[a] $[1, 2)$ [b] $(-\infty, 2]$ [c] $(2, +\infty)$ [d] $(-\infty, 2)$

6. La funzione $F(x) = \int_1^x \frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}t$, per $x \to +\infty$,

[a] non ha limite [b] tende a $+\infty$ [c] ha un asintoto orizzontale [d] non si può dire nulla

Esercizi

Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ \sin x & x>0\end{cases}$$

scrivere l'espressione analitica e tracciare il grafico della funzione

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

F è continua? È derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

Controllare che la funzione

$$F(x)=\int_0^x \frac{e^t}{t^2+3}\mathrm{d}t$$

è invertibile. Detta $G(x)$ la sua funzione inversa, calcolare $G'(0)$.

Scrivere il polinomio di Maclaurin di terzo grado che approssima la funzione

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x^3}$$

Siano a, b derivabili e f continua in $\mathbb{R}$; scrivere una formula per la derivata della funzione

$$\Psi(x)=\int_0^{a(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e successivamente per

$$\Phi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Vero o falso?

1. V F Se f è positiva su tutto $\mathbb{R}$, allora $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ è una funzione strettamente crescente.

2. V F Se f è derivabile e f' è positiva su tutto $\mathbb{R}$, allora $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ è una funzione convessa.

3. V F Se f è pari, allora $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ è pari.

4. V F Se $a(x)$ è pari, allora $F(x)=\displaystyle\int_0^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t$ è pari.

5. V F Se $a(x)$ è dispari, allora $F(x)=\displaystyle\int_0^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t$ è dispari.

Trovare l'errore

1. Sia $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$; la derivata della funzione $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=$ è

$$F'(x)=f(x)-f(0)=\frac{e^x}{x+1}-1$$

2. La derivata della funzione $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^3} e^{\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$ è $F'(x)=e^x$.

Ulteriori esercizi

Dimostrare che se f è integrabile in $[a,b]$ e $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, per ogni $x,y\in[a,b]$ si ha che esiste un numero $k>0$ tale che

$$|F(x)-F(y)|\le k\,|x-y| \qquad (1)$$

Dedurre che F è continua in tutto $[a,b]$.

Sia

$$f(x)=\frac{1}{x^2\ln x}$$

determinare il dominio delle funzioni

$$F(x)=\int_{1/2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad G(x)=\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Tracciare un grafico qualitativo della funzione

$$F(x)=\int_1^x \frac{e^t-1}{\sqrt[3]{t^2(t-2)}}\mathrm{d}t$$

Controllare che la funzione

$$F(x) = \int_1^x e^{1/t^2}\,\mathrm{d}t$$

ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Sia

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

mostrare che $F(x) > 0$ per ogni $x > 0$.

5.4. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{b}$

Essendo $f(t) = |t|$ continua (anche in $t = 0$), la funzione F è derivabile in ogni punto e la sua derivata è $F'(x) = |x|$. Per cui $F'(0) = 0$.

2. $\boxed{a}$

Si ha

$$\int_{-x}^0 e^{-t^3}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{-x} e^{-t^3}\,\mathrm{d}t = \quad (\text{ponendo } t = -s) = \int_0^x e^{s^3}\,\mathrm{d}s$$

per cui $F'(x) = e^{x^3}$.

3. $\boxed{b}$

Per la proprietà additiva, si può scrivere

$$F(x) = \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ora, ponendo $t = -s$, si ha

$$\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x f(-s)\ \mathrm{d}s$$

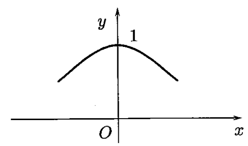
e perciò

$$F(x) = \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(-s)\,\mathrm{d}s$$

La derivata è $F'(x) = f(x) + f(-x)$.

4. $\boxed{d}$

Il grafico di $f(x) = e^{-x^2}$ vicino a 0 è



Dove f cresce, F è convessa; dove f decresce, F è concava. Quando f cresce fino a 0, dove ha un punto di massimo, di conseguenza F in 0 ha un punto di flesso ed è prima convessa, poi concava.

5. $\boxed{d}$

La funzione integranda $f(t) = \dfrac{e^t}{t-2}$ è definita in $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, ed essendo $f(t) \sim \dfrac{e^2}{t-2}$ per $t \to 2$, risulta non integrabile in un intorno di 2. L'intervallo di integrazione non può contenere il punto $x = 2$ e perciò deve essere $x < 2$.

6. $\boxed{c}$

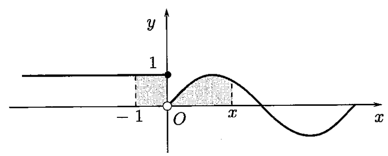
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ è integrabile all'infinito per cui

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

è finito. F ha perciò un asintoto orizzontale.

Esercizi

1. Il grafico di f è



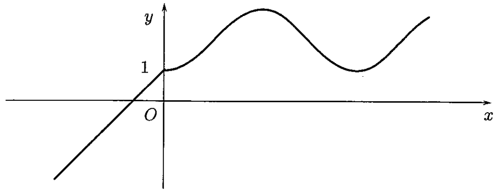
Si ha

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^x \mathrm{d}t & x \le 0 \\ 1 + \displaystyle\int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t & x > 0 \end{cases}$$

ossia

$$F(x) = \begin{cases} x + 1 & x \le 0 \\ 2 - \cos x & x > 0 \end{cases}$$

Il grafico di F è



F è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

2 La funzione integranda $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+3}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$, quindi la funzione F è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ e, per il secondo teorema fondamentale, si ha

$$F'(x) = \frac{e^x}{x^2+3}$$

Dato che F' risulta positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, F è strettamente crescente, quindi invertibile.
Per la regola di derivazione della funzione inversa risulta

$$G'(0) = \frac{1}{F'(G(0))}$$

e dato che $F(0) = \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$, anche $G(0) = 0$. Si ha dunque

$$G'(0) = \frac{1}{F'(0)} = 3$$

3 Ricordiamo che il polinomio cercato è

$$F(x) = F(0) + F'(0)\,x + \frac{1}{2}F''(0)\,x^2 + \frac{1}{6}F'''(0)\,x^3$$

Occorre, dunque, calcolare le derivate prima, seconda e terza di F in $x = 0$. Per il secondo teorema fondamentale, si ha

$$F'(x) = e^{-x^2}$$

e quindi $F'(0) = 1$. Si ha poi

$$F''(x) = -2xe^{-x^2}$$
$$F'''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

da cui $F''(0) = 0$ e $F'''(0) = -2$. Dato che $F(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$, si ha

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

4 Dato che la funzione $f(x) = \sin(x^2)$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ è derivabile con derivata $F'(x) = \sin(x^2)$. Si può pensare di

utilizzare il teorema di de l'Hospital per il calcolo del limite. Osserviamo subito che il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; infatti

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^0 \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

Proviamo a calcolare il limite del rapporto delle derivate; si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

Sono verificate le ipotesi del teorema di de l'Hospital e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

5 La funzione

$$\Psi(x) = \int_0^{a(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

è composta di due funzioni

$$x \mapsto y = a(x) \quad \text{e} \quad F(y) = \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si può perciò scrivere

$$\Psi(x) = F(a(x))$$

Applicando la regola della catena e ricordando che, per il secondo teorema fondamentale, $F'(y) = f(y)$, si ricava

$$\Psi'(x) = \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y)\,a'(x) = f(a(x))\,a'(x)$$

Per la funzione Φ basta scrivere

$$\Phi(x) = \int_0^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{a(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

e si ricava

$$\Phi'(x) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x)$$

Vero o falso?

1 Vero. Infatti se $x_1 < x_2$, dato che f è positiva si ha $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t > 0$ e quindi

$$F(x_2) = \int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1)$$

2 Vero. Dato che $F''(x) = f'(x)$ e se F'' è positiva F è convessa.

3 Falso. Se f è pari, allora F è dispari. Infatti

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = && \text{(ponendo } t=-s\text{)} \\ &= -\int_0^{x} f(-s)\,\mathrm{d}s = && \text{(dato che } f \text{ è pari)} \\ &= -\int_0^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = -F(x) \end{aligned}$$

Analogamente se f è dispari, allora F è pari.

4 Vero. Se $a(x)$ è pari, allora

$$F(-x) = \int_0^{a(-x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{a(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$$

5 Falso. Per esempio: $a(x) = x$ è dispari, ma

$$F(x) = \int_0^{x} (t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + x$$

non è né pari né dispari.

Trovare l'errore

1 Per il secondo teorema fondamentale, la derivata di $F(x)$ è $f(x)$, ossia è

$$F'(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

2 La funzione $F(x) = \int_0^{x^3} e^{\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$ è composta da $F(z) = \int_0^{z} e^{\sqrt[3]{t}}\mathrm{d}t$ e $z = x^3$; la derivata, calcolata con la regola della catena è $F'(x) = 3x^2 e^x$(vedi l'esercizio 5).

Ulteriori esercizi

1 Se f è integrabile in $[a,b]$ deve essere limitata. Sia allora

$$k = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Sia y un punto qualunque in $[a,b]$. Si ha, per la proprietà additiva dell'integrale rispetto all'intervallo d'integrazione,

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

e per le proprietà di monotonia

$$\left|\int_y^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_y^x |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \le k\left|\int_y^x \mathrm{d}t\right| = k|x-y|$$

Tenendo fisso y e facendo tendere x a y, dalla (1) si deduce che quando $x \to y$

$$|F(x) - F(y)| \to 0$$

ossia $F(x) \to F(y)$ che è la definizione di continuità in y.

2 f è definita in $(0,1)\cup(1,+\infty)$ e in tale insieme è continua; risulta quindi integrabile in ogni intervallo chiuso contenuto in $(0,1)$ o in $(1,+\infty)$. Al dominio di F appartengono sicuramente tutti gli $x \in (0,1)$ e analogamente al dominio di G appartengono sicuramente tutti gli $x \in (1,+\infty)$. Chiediamoci ora se al dominio di F appartengono anche gli estremi dell'intervallo $x=0$ e $x=1$.
Dire che $x=0$ appartiene al dominio di F equivale a dire che converge l'integrale (generalizzato)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 \ln x}\mathrm{d}x$$

ma tale integrale non converge poiché, per esempio, vicino a 0,

$$\frac{1}{|\ln x|} > \sqrt{x}$$

e

$$\left|\frac{1}{x^2\ln x}\right| > \frac{1}{x^{3/2}}$$

che non è integrabile in un intorno di $x=0$; quindi $x=0$ non appartiene al dominio della funzione F.
Per $x \to 1$, si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{x-1}$$

Per il criterio di confronto asintotico, f non è integrabile in un intorno di $x=1$, quindi l'integrale $\int_{1/2}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ non converge. Il punto $x=1$ non può perciò appartenere al dominio di F e ciò esclude che vi possano appartenere anche i punti $x>1$, perché se $x>1$, $\int_{1/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ non esiste. Il dominio di F è pertanto l'intervallo $(0,1)$.
Anche $\int_2^1 f(t)\mathrm{d}t$ non converge, quindi il punto $x=1$ e neppure i punti $x<1$ possono appartenere al dominio di G, che pertanto è l'intervallo $(1,+\infty)$.

3 Poniamo

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^2(x-2)}}$$

f è definita e continua nell'insieme $(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.
Per $x\to 0$, $e^x - 1 \sim x$ e così

$$f(x) \sim -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{x} \to 0$$

Pertanto f è prolungabile con continuità in $x=0$.
Per $x \to 2^{\pm}$,

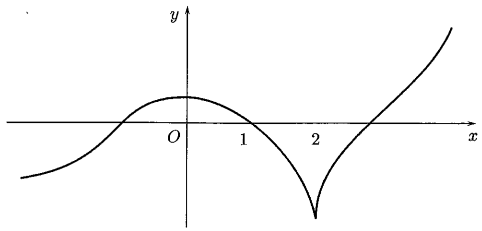
$$f(x) \sim \frac{e^2-1}{\sqrt[3]{4}}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \to \pm\infty \qquad (2)$$

ma anche se non è limitata, in un intorno di $x=2$ è integrabile in senso generalizzato.

Il dominio di F pertanto è tutto $\mathbb{R}$, in quanto per ogni x reale, l'integrale $\int_1^x$ ha valore finito, anche quando l'intervallo di integrazione contiene 0 e 2. Per il secondo teorema fondamentale, si ha

$$F'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^2(x-2)}} & x \neq 0, 2 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e risulta $F'(x) > 0$ per $x < 0$ o $x > 2$. I punti $x = 0$ e $x = 2$ sono rispettivamente di massimo e minimo locale; in particolare, per il limite (2) nel punto $x = 2$ c'è una cuspide.
Studiamo il comportamento di f all'infinito, per dedurre quello di F.
Per $x \to -\infty$, $f(x) \sim \dfrac{-1}{x}$, che è infinitesima ma non è integrabile.
Per $x \to +\infty$, $f(x) \sim \dfrac{e^x}{x} \to +\infty$.
I limiti di F per $x \to \pm\infty$ non sono finiti.
Un grafico qualitativo di F è il seguente



4 La funzione integranda $f(x) = e^{1/x^2}$ per $x \to +\infty$ tende a 1, quindi $F(x) \to +\infty$ e dato che $F'(x) = f(x)$,

$$\lim_{x \to +\infty} F'(x) = 1$$

La F può avere asintoto obliquo con coefficiente angolare 1. Per averne conferma occorre stabilire se $\lim\limits_{x \to +\infty} (F(x) - x)$ esiste finito. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} (F(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\int_1^x e^{1/t^2} \mathrm{d}t - \int_1^x \mathrm{d}t - 1 \right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \left(e^{1/t^2} - 1 \right) \mathrm{d}t - 1$$

Il limite esiste finito perché la funzione $f(x) = e^{1/x^2} - 1$ è integrabile in un intorno di $+\infty$. Infatti, per $x \to +\infty$, si ha

$$e^{1/x^2} - 1 \sim \frac{1}{x^2}$$

che è integrabile.

5 Dato che, per $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ha lo stesso segno di $\sin x$, F risulta crescente negli intervalli dove $\sin x > 0$ e cioè in $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ e decrescente negli intervalli $((2n+1)\pi, 2(n+1)\pi)$, $n \in \mathbb{N}$. I punti $x = 2n\pi$ risultano perciò punti di minimo locale. Per verificare che $F(x) > 0$ per $x > 0$ basta controllare i valori di F nei punti di minimo. Iniziamo a controllare che $F(2\pi) > 0$. Si ha

$$F(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

Ora, dei due integrali a destra, il primo è positivo, il secondo è negativo: per mostrare che $F(2\pi) > 0$, basta mostrare che

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t > \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-\sin t}{t} \mathrm{d}t \tag{3}$$

Si ha, essendo $\sin t > 0$ in $(0, \pi)$ e $\dfrac{1}{t} > \dfrac{1}{\pi}$,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t > \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}$$

Analogamente, essendo $\sin t < 0$ in $(\pi, 2\pi)$ e $\dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\pi}$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{-\sin t}{t} \mathrm{d}t < \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}$$

quindi la (3) è vera.
Per dimostrare che $F(2n\pi) > 0$ per ogni $n \geq 1$, si può procedere per induzione: abbiamo dimostrato l'affermazione per $n = 1$, supponiamo vera l'affermazione per n e la dimostriamo per $n+1$. Dimostriamo cioè che se $F(2n\pi) > 0$ anche $F(2(n+1)\pi) > 0$. Si ha

$$F(2(n+1)\pi) = \int_0^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t =$$
$$= \underbrace{\int_0^{2n\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t}_{=F(2n\pi)>0} + \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t + \int_{2n\pi+\pi}^{2n\pi+2\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

e perciò basta mostrare che

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t > \int_{2n\pi+\pi}^{2n\pi+2\pi} \frac{-\sin t}{t} \mathrm{d}t$$

Ora, ragionando come sopra,

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t > \frac{1}{(2n+1)\pi} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$
$$\int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{-\sin t}{t} \mathrm{d}t < \frac{1}{(2n+1)\pi} \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} (-\sin t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

quindi $F(2(n+1)\pi) > 0$. Per il principio d'induzione $F(2n\pi) > 0$ per ogni $n \geq 1$.

6. EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

1. EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

Esempi

1 Cerchiamo la soluzione dell'equazione alle differenze lineare del primo ordine

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 1 \tag{1}$$

che verifica la condizione iniziale

$$x_0 = 1$$

Ricordiamo che *le soluzioni di un'equazione lineare non omogenea si possono ottenere sommando alle soluzioni dell'equazione omogenea associata una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.*

Quindi, per prima cosa, cerchiamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}s_n$$

Questa, come si verifica facilmente, è data dalla formula

$$s_n = c\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

dove $c = s_0$. Infatti si ha

$$s_1 = \frac{1}{2}s_0 \qquad s_2 = \frac{1}{2}s_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 s_0 \qquad s_3 = \frac{1}{2}s_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 s_0 \ldots$$

Dato che il "termine noto" dell'equazione completa è una costante, cerchiamo poi, come soluzione particolare dell'equazione completa, una successione costante $u_n = k$. Se $u_n = k$ anche $u_{n+1} = k$ e, sostituendo nella (1), si ricava

$$k = \frac{1}{2}k + 1 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

La soluzione generale della (1) è dunque

$$x_n = c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \qquad c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Per determinare la soluzione particolare che verifica la condizione iniziale assegnata dobbiamo determinare la costante c. Per far questo sostituiamo il valore 0 nella (2); si ha

$$x_0 = 1 = c + 2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

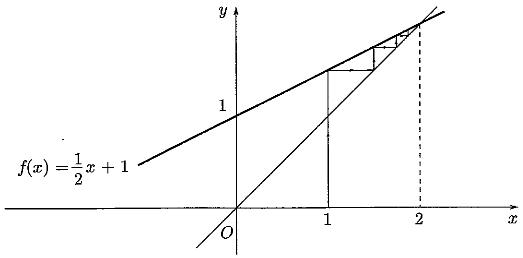
La soluzione cercata è

$$x_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Dato che $(1/2)^n \to 0$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 2$$

come si può anche osservare sul diagramma di fase.



La soluzione particolare $u_n = 2$ rappresenta il *regime permanente*, in altri termini è soluzione di *equilibrio globalmente asintoticamente stabile*.

2 Scriviamo la soluzione generale dell'equazione alle differenze

$$6x_{n+2} + 5x_{n+1} + x_n = 3 \tag{3}$$

Si tratta di un'equazione lineare non omogenea del second'ordine. Come prima cosa determiniamo le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$6z_{n+2} + 5z_{n+1} + z_n = 0$$

L'equazione caratteristica

$$6\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$$

ha le radici

$$\lambda = -\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

quindi ($\Rightarrow$ BPS, pag. 330, formula (2.4)) la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$z_n = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo poi una soluzione dell'equazione non omogenea. Dato che il "termine noto" dell'equazione completa è una costante, pensiamo come soluzione particolare dell'equazione completa a una successione costante $u_n = k$. Se $u_n = k$ anche $u_{n+1} = k$ e $u_{n+2} = k$ e sostituendo nella (3), si ricava

$$6k + 5k + k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

La soluzione generale della (3) è dunque

$$x_n = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Notiamo che per $n \to +\infty$, $x_n \to 1/4$, quindi la soluzione particolare $u_n = 1/4$ è soluzione di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.

3 Scriviamo la soluzione dell'equazione alle differenze

$$x_{n+2} + 4x_n = 0$$

che verifica le condizioni iniziali

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$$

Si tratta di un'equazione lineare omogenea del second'ordine. L'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

ha due radici complesse $\lambda = \pm 2i$, il modulo e l'argomento delle quali sono rispettivamente

$$\rho = 2 \quad \text{e} \quad \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

quindi otteniamo la soluzione generale ($\Rightarrow$ BPS, pag. 330, formula (2.4))

$$x_n = c_1 2^n \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + c_2 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \tag{4}$$

con c_1 e c_2 costanti reali. Per determinare la soluzione particolare che verifica le condizioni iniziali assegnate dobbiamo determinare le costanti c_1 e c_2. Per far questo sostituiamo i valori 0 e 1 nella (4); si ha

$$\begin{cases} x_0 = c_1 = 1 \\ x_1 = 2c_2 = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

La soluzione cercata è

$$x_n = 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right)$$

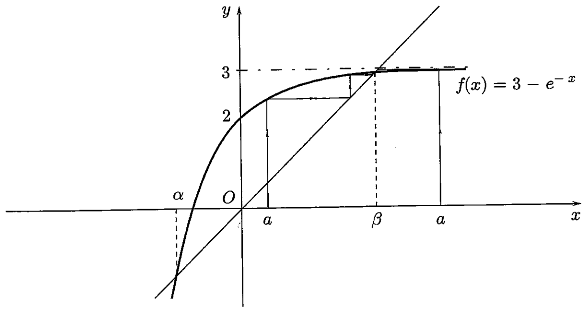
4 Studiamo il carattere della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_{n+1} = 3 - e^{-s_n} \\ s_0 = a \end{cases}$$

La funzione generatrice della successione è

$$f(x) = 3 - e^{-x}$$

f, come mostra il grafico, ha due punti fissi $\alpha < 0$ e β $(2 < \beta < 3)$.



Dato che $f'(x) = e^{-x}$, si ha

$$f'(\alpha) > 1 \qquad 0 < f'(\beta) < 1$$

Dunque ($\Rightarrow$ BPS, pag. 335) α è punto fisso instabile (*repulsore*), β è punto fisso localmente asintoticamente stabile (*attrattore*).
La successione s_n se $a < \alpha$ è decrescente[(1)] e tende a $-\infty$, se $\alpha < a < \beta$ è crescente e tende a β, se $a > \beta$ è decrescente e tende a β. Ovviamente se $a = \alpha$ o $a = \beta$, s_n è costante. La figura mostra che il bacino d'attrazione ($\Rightarrow$ BPS, pag. 335) del punto β è $(\alpha, +\infty)$.

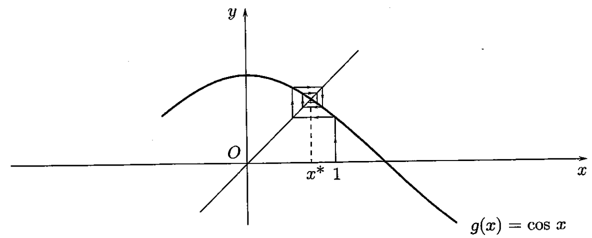
5 Calcoliamo, utilizzando il metodo delle approssimazioni successive, le soluzioni dell'equazione

$$\cos x - x = 0$$

Ogni equazione del tipo $f(x) = 0$ si può ricondurre alla ricerca di punti fissi per la funzione $g(x) = f(x) + x$ ($\Rightarrow$ BPS, pag. 336) . Nel nostro caso cerchiamo i punti fissi di

$$g(x) = \cos x$$

Il grafico mostra che esiste un unico punto fisso x^*.



---

(1) Se la funzione generatrice è crescente, la succesione per ricorrenza è monotona (vedi l'esercizio 3, pag. 201).

Costruiamo la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos x_n \\ x_0 = a \end{cases}$$

Se il punto x^* è di equilibrio asintoticamente stabile per g, ed a appartiene al bacino d'attrazione di x^*, la successione converge a x^*.
Per controllare che x^* sia punto di equilibrio asintoticamente stabile, valutiamo la derivata di g. Dato che $g'(x) = -\sin x$, si ha

$$|g'(x^*)| = \sin x^* < 1$$

quindi x^* è di equilibrio asintoticamente stabile. Il bacino d'attrazione[(2)] di x^* è tutto $\mathbb{R}$, quindi per ogni a la successione converge a x^*. Si può prendere, per esempio, $a = 1$: la successione per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos x_n \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

converge a x^*. Si possono calcolare i valori

$$x_1 = \cos 1 \simeq 0.5403 \qquad x_2 \simeq 0.85755 \qquad x_2 0.65429,$$
$$x_4 \simeq 0.79348 \qquad x_5 \simeq 0.70137 \qquad x_6 \simeq 0.76396\ldots$$

Fare l'esperimento con una calcolatrice tascabile.

Test a risposta multipla

1 La successione per ricorrenza $\begin{cases} s_{n+1} = s_n - 1 \\ s_0 = 4 \end{cases}$

a converge a 4 b diverge a $-\infty$ c diverge a $+\infty$ d è irregolare

2 La successione per ricorrenza $\begin{cases} s_{n+1} = -s_n \\ s_0 = 4 \end{cases}$

a converge a 4 b diverge a $-\infty$ c diverge a $+\infty$ d è irregolare

3 Una soluzione dell'equazione alle differenze $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ è $x_n =$

a n b e^{2n} c 2^n d 3^n

4 Quale tra le seguenti successioni non è soluzione dell'equazione alle differenze $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$?

a n b $2 + 2^n$ c 2^n d 3

---

(2) Si veda l'esercizio 9 a pag. 203.

Esercizi

1. Scrivere la soluzione generale delle seguenti equazioni alle differenze lineari del prim'ordine

$$s_{n+1} = -\frac{s_n}{3} \qquad s_{n+1} = -2s_n + 1$$

Nei due casi discutere il carattere di s_n.

2. Utilizzando un diagramma a gradino stabilire il carattere della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_{n+1} = 2s_n - 1 \\ s_0 = 3 \end{cases}$$

3. Scrivere la soluzione generale delle seguenti equazioni alle differenze lineari del second'ordine

$$2x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_{n+2} + x_n = 0 \qquad x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1$$

4. Scrivere la soluzione dell'equazione alle differenze

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$$

che soddisfa le condizioni $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

5. Calcolare i punti di equilibrio stabile per l'equazione alle differenze

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right) \qquad A > 0$$

La relazione indicata può servire per calcolare velocemente radici quadrate.

6. Utilizzando l'esercizio precedente calcolare $\sqrt{7}$ con tre cifre decimali esatte.

7. Determinare i punti di equilibrio dell'equazione (logistica discreta)

$$x_{n+1} = x_n + a\,(M - x_n) \qquad a, M > 0$$

Discutere la loro stabilità.

8. Nel cuore, l'eccitazione generata da un normale *pacemaker* negli atrii, passa ai ventricoli causando contrazione del cuore e l'invio di sangue agli altri organi. L'eccitazione deve passare attraverso il nodo atrio-ventricolare, che connette elettricamente atrii e ventricoli. Il problema seguente è basato su un modello matematico per la conduzione atrio-ventricolare nei mammiferi[3]. Assumiamo che i tempi (in millisecondi) di conduzione atrio-ventricolare soddisfino la seguente legge di ricorrenza

$$x_{t+1} = \frac{375}{x_t - 90} + 100 \qquad x_t > 90$$

(a) Determinare i punti fissi e studiarne la stabilità.

(b) Analizzare al computer il comportamento asintotico della soluzione che verifica la condizione iniziale $x_0 = 150$.

9. La seguente equazione alle differenze è stata proposta come modello di evoluzione per la densità di popolazione di insetti in anni successivi

$$x_{t+1} = f(x_t) = \alpha x_t e^{-\beta x_t^3}$$

dove α, β sono parametri positivi e $x_t \geq 0$. Per $\alpha = e$ e $\beta = 1/3$,

(a) tracciare il grafico di f;

(b) determinare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

10. Verificare se si può calcolare, usando il metodo delle approssimazioni successive, la radice dell'equazione

$$x + \ln x = 0$$

[3] Simson e altri, American Journal of Phisiology, 1981.

Ulteriori esercizi

1. Determinare una soluzione particolare per l'equazione

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + b_n$$

nei casi

$$b_n = n \quad \text{e} \quad b_n = 2^n$$

2. Dimostrare che la soluzione generale dell'equazione alle differenze

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = u_n \tag{5}$$

può scriversi come

$$x_n = y_n + z_n \tag{6}$$

ove y_n ne è una soluzione particolare e z_n è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$az_{n+2} + bz_{n+1} + cz_n = 0 \tag{7}$$

3. Sia

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \ \text{(assegnato)} \end{cases}$$

con $f : [a, b] \to [a, b]$ crescente. Dimostrare che se $x_1 > x_0$, allora x_n è crescente e che se $x_1 < x_0$, allora x_n è decrescente. In ogni caso, quindi, x_n è monotona.

4. Sia

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ (assegnato)} \end{cases}$$

con $f : [a,b] \to [a,b]$ crescente e continua. Dimostrare che se $x_1 > x_0$ ed esiste un punto fisso di f maggiore di x_0 allora x_n è limitata. Se poi x^* è il primo punto fisso di f alla destra di x_0, allora x_n converge a x^* (per difetto).

5. Sia

$$\begin{cases} s_{n+1} = f(s_n) \\ s_0 \text{ (assegnato)} \end{cases}$$

con $f : [a,b] \to [a,b]$ continua e decrescente. Dimostrare che

(a) la successione[(4)]

$$\begin{cases} x_{n+1} = f^2(x_n) \\ x_0 = s_0 \end{cases}$$

coincide con s_{2n} e la successione

$$\begin{cases} y_{n+1} = f^2(y_n) \\ y_0 = s_1 \end{cases}$$

coincide con s_{2n+1};

(b) le successioni x_n e y_n sono monotone; in particolare $x_n = s_{2n}$ è crescente se e solo se $y_n = s_{2n+1}$ è decrescente e viceversa.

(c) $x_n \to x^*$ se e solo se $y_n \to y^*$ con $x^* = f(y^*)$ e $y^* = f(x^*)$. $s_n \to l \in \mathbb{R}$ se e solo se $l = x^* = y^*$.

6. Studiare, al variare di $a > 0$, il comportamento asintotico della successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_{n+1} = \dfrac{2}{1+s_n} \end{cases}$$

7. Nello studio delle reti neurali[(5)] si incontra la seguente equazione alle differenze

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n}$$

con α e β parametri positivi e $x_n \geq 0$.

(a) Determinare al variare di α e β i punti di equilibrio, la loro stabilità e se la dinamica in un intorno dei punti fissi è monotona o oscillatoria.

(b) Nel caso $\alpha = \beta = 1$, tracciare il diagramma di fase e studiare il comportamento asintotico di x_n.

(c) Esprimere x_n in funzione di x_0 (> 0 generico) e verificare il risultato ottenuto in (b).

---

(4) Ricordiamo che il simbolo f^2 indica $f \circ f$, ossia l'iterata seconda di f.

(5) Glass e Pasternack, Journal of math. biology, 1978.

8. Sia $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f : [a,b] \to [a,b]$ differenziabile. Dimostrare che se esiste un numero $k \in (0,1)$ tale che

$$|f'(x)| \leq k, \quad \text{per ogni } x \in [a,b]$$

allora per l'equazione $x_{n+1} = f(x_n)$ esiste un unico punto di equilibrio ed esso è globalmente asintoticamente stabile.

9. Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente per dimostrare che nell'esempio 5 a pag. 198 il bacino di attrazione è tutto $\mathbb{R}$.

10. Sia $f : [a,b] \to [a,b]$, derivabile con derivata continua e sia x^* un punto fisso per f, dimostrare che

(a) se $|f'(x^*)| < 1$, allora x^* è attrattore;

(b) se $|f'(x^*)| > 1$, allora x^* è repulsore.

6.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{b}$

Si ha $s_n = 4 - n \to -\infty$.

2. $\boxed{d}$

Si ha $\{s_n\} = \{4, -4, 4, -4, 4, -4, \dots\}$.

3. $\boxed{c}$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

che ha le radici $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$, quindi due soluzioni particolari dell'equazione sono $u_n = 1$ e $v_n = 2^n$ e tutte le soluzioni possono essere scritte nella forma

$$x_n = c_1 + c_2 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. $\boxed{a}$

Vedi il test precedente.

Esercizi

1. Per la prima si ha (⇛ BPS, pag. 326, formula (1.5))

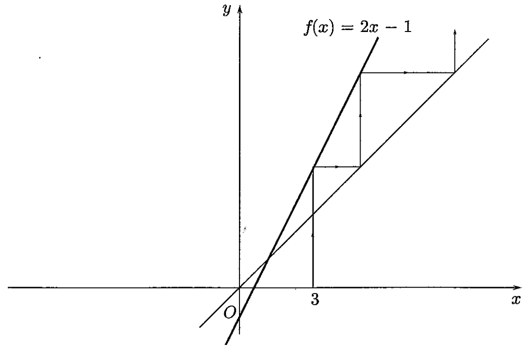
$$s_n = c\left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad c \in \mathbb{R}$$

$s_n \to 0$, per qualunque c.
Per la seconda si ha (⇛ BPS, pag. 327, formula (1.7))

$$s_n = c(-2)^n + \frac{1}{3} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Se $c = 0$, $s_n = \dfrac{1}{3}$ è costante, altrimenti oscilla.

2 $s_n \to +\infty$, come mostra il diagramma.



3 Per la prima l'equazione caratteristica è

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

che ha le soluzioni $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$. La soluzione generale è

$$x_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Per la seconda l'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

che ha le radici $\lambda = \pm i$, di modulo unitario e argomento $\pm\dfrac{\pi}{2}$. La soluzione generale è (⇛ BPS, pag. 331, formula (2.5))

$$x_n = c_1 \sin n\frac{\pi}{2} + c_2 \cos n\frac{\pi}{2} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Per la terza, iniziamo a trovare la soluzione dell'equazione omogenea associata

$$z_{n+2} - 4z_{n+1} + 4z_n = 0$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

che possiede la sola soluzione $\lambda = 2$. La soluzione generale dell'equazione omogenea è (⇛ BPS, pag. 331, formula (2.6))

$$z_n = (c_1 + c_2 n)\, 2^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Determiniamo quindi una soluzione particolare dell'equazione completa. Una successione $u_n = k$ (costante) può essere soluzione, se

$$k - 4k + 4k = 1$$

Si ricava $k = 1$. La soluzione generale dell'equazione completa è quindi

$$x_n = (c_1 + c_2 n)\, 2^n + 1 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4 L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

e ha le due soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione è

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

per determinare la soluzione particolare occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 3c_2 = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione

$$c_1 = -1 \qquad c_2 = 1$$

La soluzione particolare cercata per l'equazione alle differenze è

$$x_n = -2^n + 3^n$$

5 Si ha $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$. I punti fissi di f, soluzioni dell'equazione

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

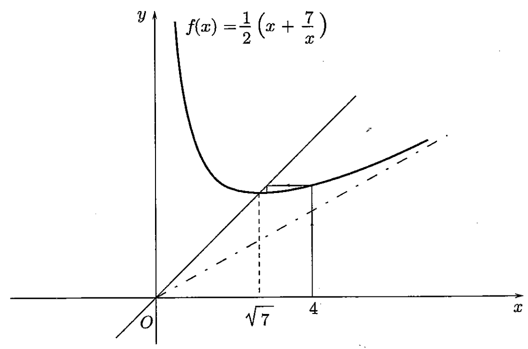
sono

$$x = \pm\sqrt{A}$$

Dato che $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{A}{x^2}\right)$ e $f'(\pm\sqrt{A}) = 0$, entrambi i punti sono di equilibrio localmente asintoticamente stabile.

6 Consideriamo, per esempio, la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{7}{x_n}\right) \\ x_0 = 4 \end{cases}$$



Per quanto visto nell'esercizio precedente e come mostra il diagramma di fase, tale successione converge (per eccesso) a $\sqrt{7}$. Si ha

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{7}{4}\right) = \frac{23}{8} = 2.875 \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(2.875 + \frac{7}{2.875}\right) \simeq 2.6549$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(2.6549 + \frac{7}{2.6549}\right) \simeq 2.6458 \qquad x_4 = \frac{1}{2}\left(2.6458 + \frac{7}{2.6458}\right) \simeq 2.6458$$

Già alla terza iterazione si hanno tre cifre decimali esatte.

7 I punti di equilibrio, soluzioni dell'equazione

$$x + ax\,(M - x) = x$$

sono

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = M$$

Posto $f\,(x) = x + ax\,(M - x)$, si ha $f'\,(x) = 1 + aM - 2ax$, da cui

$$f'\,(0) = 1 + aM \qquad f'\,(M) = 1 - aM$$

Il punto $x = 0$ non è di equilibrio stabile perché $f'\,(0) > 1$. Il punto $x = M$ è di equilibrio asintoticamente stabile se

$$|1 - aM| < 1$$

cioè se

$$aM < 2$$

8 (a) La funzione generatrice è

$$f\,(x) = \frac{375}{x - 90} + 100 \qquad x > 90$$

Determiniamone i punti fissi risolvendo l'equazione

$$\frac{375}{x - 90} + 100 = x$$

L'equazione è equivalente a

$$x^2 - 190x + 8625 = 0$$

che ha le soluzioni

$$x = 115 \quad \text{e} \quad x = 75$$

di cui solo la prima è accettabile. Calcoliamo f' per studiare la stabilità del punto fisso. Si ha

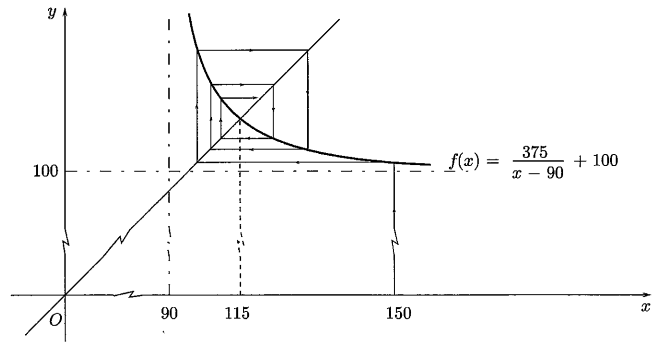
$$f'\,(x) = -\frac{375}{(x - 90)^2}$$

e

$$f'\,(115) = -\frac{375}{625} = -\frac{3}{5}$$

Dato che $|f'\,(115)| < 1$, il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

(b) La soluzione che verifica la condizione iniziale $x_0 = 150$, come mostra il diagramma di fase, per $t \to +\infty$, converge a 115.



9 (a) Per tracciare il grafico di

$$f\,(x) = xe^{1-x^3/3}$$

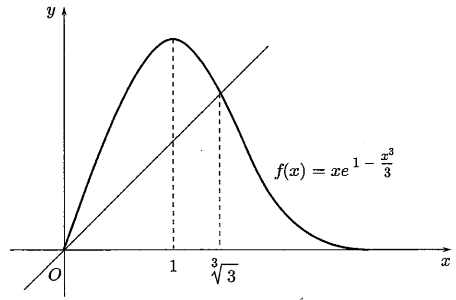
in $[0, +\infty)$, iniziamo con lo studio del comportamento agli estremi del dominio. Si ha

$$f\,(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f\,(x) = 0^+$$

Si vede facilmente che f è positiva in $(0, +\infty)$. Calcoliamo f' e determiniamone gli zeri. Si ha

$$f'\,(x) = \left(1 - x^3\right)e^{1-x^3/3}$$
$$f'\,(x) = 0 \quad \text{per } x = 1$$

per cui $x = 1$ è punto di massimo.



(b) I punti fissi di f si ricavano risolvendo l'equazione

$$xe^{1-x^3/3} = x$$

e sono

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = \sqrt[3]{3}$$

Dato che

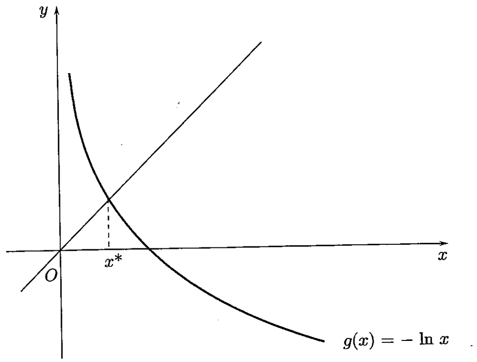
$$f'\,(0) = e > 1 \quad \text{e} \quad f'\left(\sqrt[3]{3}\right) = -2 < -1$$

entrambi i punti sono di equilibrio instabile.

10 L'equazione è equivalente a

$$x = -\ln x$$

e la sua soluzione $x^* \in (0,1)$ è il punto fisso della funzione $g(x) = -\ln x$ (vedi grafico).



Si potrebbe pensare di costruire una successione per ricorrenza

$$\begin{cases} s_{n+1} = -\ln s_n \\ s_0 = a > 0 \end{cases}$$

Purtroppo tale succesione non converge a x^* (a meno che $a = x^*$) perché x^*, per la funzione g, è punto di equilibrio instabile, infatti

$$\left|g'(x^*)\right| = \left|-\frac{1}{x^*}\right| = \frac{1}{x^*} > 1$$

L'equazione data è, però, equivalente a

$$e^{-x} = x$$

quindi x^* è punto fisso anche per la funzione $h(x) = e^{-x}$ (inversa di g) e per la funzione h è di equilibrio stabile, infatti

$$\left|h'(x^*)\right| = \left|-e^{-x^*}\right| = e^{-x^*} < 1$$

Si trova (⇛ BPS, pag. 337)

$$x^* \simeq 0.5671$$

Ulteriori esercizi

1 Nel primo caso si può cercare una soluzione particolare della forma

$$u_n = an + b$$

con a e b parametri reali. Se $u_n = an + b$, $u_{n+1} = a(n+1) + b$ e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$a(n+1) + b = \frac{1}{2}(an + b) + n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - 1\right) n + a + \frac{b}{2} = 0$$

Si ricavano $a = 2$, $b = -4$. Una soluzione particolare è quindi

$$u_n = 2n - 4$$

Nel secondo caso si può cercare una soluzione particolare della forma

$$u_n = a2^n$$

con a parametro reale. Se $u_n = a2^n$, $u_{n+1} = a2^{n+1} = 2a2^n$ e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$2a2^n = \frac{a2^n}{2} + 2^n \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}$$

Una soluzione particolare è quindi

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{3}$$

2 Sia y_n una soluzione particolare della (5), z_n una generica soluzione dell'equazione omogenea (7) e $x_n = y_n + z_n$. Sommando termine a termine la (5) e la (7), si ottiene

$$a(y_{n+2} + z_{n+2}) + b(y_{n+1} + z_{n+1}) + c(y_n + z_n) = u_n + 0$$

quindi anche x_n è soluzione della (5).
Viceversa, proviamo che la (6) fornisce tutte le soluzioni della (5). Osserviamo che la (6) può essere riscritta come

$$x_n - y_n = z_n$$

per cui proviamo che la differenza tra due soluzioni qualunque di (6) risolve la (7). Siano x_n e y_n soluzioni di (5), si ha

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = u_n$$

$$ay_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = u_n$$

da cui sottraendo termine a termine si ricava

$$a(x_{n+2} - y_{n+2}) + b(x_{n+1} - y_{n+1}) + c(x_n - y_n) = 0$$

e quindi $x_n - y_n$ è soluzione di (7).

3 Dobbiamo dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, la proprietà

$$p(n): \qquad x_n \geq x_{n-1}$$

è vera. Per ipotesi, $p(n)$ è vera per $n = 1$. Dimostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Supposta vera $p(n)$, poiché per ipotesi f è crescente, si ha anche

$$f(x_n) \geq f(x_{n-1})$$

ossia

$$x_{n+1} \geq x_n$$

quindi è vera anche $p(n+1)$. Per il principio di induzione $p(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$, cioè x_n è crescente.
Analogamente si dimostra che se $x_1 < x_0$ allora x_n è decrescente. In ogni caso x_n è monotona, quindi regolare.

4 Sia x^* punto fisso di f e $x_0 < x^*$. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $n \geq 0$, la proprietà

$$p(n): \qquad x_n \leq x^*$$

è vera. Per ipotesi, $p(n)$ è vera per $n = 0$. Dimostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$. Supposta vera $p(n)$, poiché per ipotesi f è crescente, si ha anche

$$x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x^*) = x^*$$

quindi è vera anche $p(n+1)$. Per il principio di induzione $p(n)$ è vera per ogni $n \geq 0$, cioè x_n è limitata.
Dato che x_n è crescente e limitata, converge e, se x^* è il primo punto fisso di f alla destra di x_0, allora

$$x_n \to x^*$$

Analogamente si dimostra che se $x_1 < x_0$ ed esiste un punto fisso di f minore di x_0 allora x_n è limitata, in particolare se x^* è il primo punto fisso di f alla sinistra di x_0, allora x_n converge a x^* (per eccesso).

5 (a) Si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= f^2(x_0) = f(f(s_0)) = f(s_1) = s_2 \\ x_2 &= f^2(x_1) = f(f(s_2)) = f(s_3) = s_4 \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f^2(x_n) = f(f(s_{2n})) = f(s_{2n+1}) = s_{2n+2} \end{aligned}$$

Analogamente per y_n.
(b) Dato che f^2 è crescente[6], x_n e y_n sono monotone. Se $x_n = s_{2n}$ è crescente, ossia se $s_{2n} \leq s_{2n+2}$ allora, poiché f decresce, si ha

$$s_{2n+1} = f(s_{2n}) \geq f(s_{2n+2}) = s_{2n+3}$$

e quindi $y_n = s_{2n+1}$ decresce. Gli altri casi sono analoghi.
(c) Se $x_n = s_{2n} \to x^*$ (punto fisso di f^2) allora

$$y_n = s_{2n+1} = f(s_{2n}) \to f(x^*)$$

per la continuità di f.
Se $y_n = s_{2n+1} \to y^*$ (punto fisso di f^2) allora

$$x_n = s_{2n} = f(s_{2n-1}) \to f(y^*)$$

per la continuità di f. Dunque $x^* = f(y^*)$ e $y^* = (x^*)$.
Se, in particolare, f^2 ha gli stessi punti fissi[7] di f deve essere $x^* = y^*$.
Se $x^* = y^* = l$ allora $s_{2n} \to l$, $s_{2n+1} \to l$ e quindi $s_n \to l$. Viceversa se $s_n \to l$ allora anche $x_n = s_{2n} \to l$ e $y_n = s_{2n+1} \to l$, quindi $x^* = y^* = l$.

6 La funzione generatrice della successione è

$$f(x) = \frac{2}{1+x}$$

Iniziamo col determinare i punti fissi di f, soluzioni dell'equazione

$$x = \frac{2}{1+x}$$

che è equivalente a

$$x^2 + x - 2 = 0$$

I punti fissi sono

$$x = -2 \quad \text{e} \quad x = 1$$

[6] Ricordiamo che se f è decrescente $f \circ f$ è crescente (vedi cap. 3, sez. 1, esercizio 8, pag. 69).
[7] Ricordiamo che se un punto x^* è punto fisso per una funzione f, lo è anche per tutte le sue iterate. Non vale l'inverso (vedi cap. 3, sez. 1, esercizio 4, pag. 72).

Poiché

$$f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}$$

si ha

$$f'(-2) = -2 \quad \text{e} \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$$

Dato che

$$|f'(-2)| > 1 \quad \text{e} \quad |f'(1)| < 1$$

il punto $x = -2$ è di equilibrio instabile, mentre il punto $x = 1$ è di equilibrio asintoticamente stabile.
Per $a = 1$ la successione è costante; per ogni $a > 0$ $(a \neq 1)$ la successione $s_n \to 1$ con andamento oscillatorio. Verifichiamolo, per esempio, per $a \in (0,1)$. Per l'esercizio precedente le successioni s_{2n} e s_{2n+1} sono monotone e quindi regolari; in particolare se $s_0 \in (0,1)$, s_{2n} è crescente e s_{2n+1} è decrescente.
Si ha poi che

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{2}{1 + 2/(1+x)} = \frac{2+2x}{3+x}$$

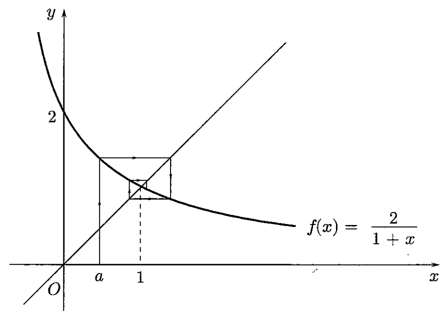
ha gli stessi punti fissi di f, in quanto l'equazione

$$\frac{2+2x}{3+x} = x$$

è equivalente a

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Dunque $s_{2n} \to 1$ e $s_{2n+1} \to 1$ e per l'esercizio precedente anche $s_n \to 1$. Analogo è il caso $a > 1$.
L'andamento di s_n è mostrato nel seguente diagramma.



7 (a) I punti di equilibrio, soluzioni dell'equazione

$$x = f(x) = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$$

sono

$$x = 0$$

e, se $\alpha \neq 1$,

$$x = \frac{\alpha - 1}{\beta}$$

Dato che

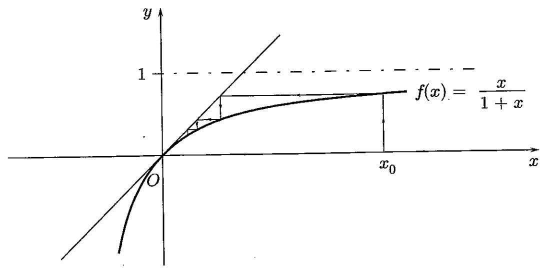
$$f'(x) = \frac{\alpha}{(1+\beta x)^2}$$

si ha

$$f'(0) = \alpha \qquad f'\left(\frac{\alpha - 1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha}$$

Perciò, se $0 < \alpha < 1$, il punto $x = 0$ è di equilibrio stabile, mentre il punto $x = \dfrac{\alpha - 1}{\beta}$ è di equilibrio instabile; se $\alpha > 1$, il punto $x = 0$ è di equilibrio instabile, mentre il punto $x = \dfrac{\alpha - 1}{\beta}$ è di equilibrio stabile. Se $\alpha = 1$, l'unico punto fisso è $x = 0$ e dato che $f'(0) = 1$, in base alla teoria, non si può dire nulla.
La dinamica in un intorno dei punti fissi è monotona, infatti f' è positiva per ogni $x \geq 0$ e quindi f è crescente (vedi l'esercizio 3, pag. 201).

(b) Per $\alpha = \beta = 1$ il diagramma di fase è



Si vede che per ogni $x_0 > 0$ la successione $x_n \to 0$.

(c) Sia

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + x_n} \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

Si ha

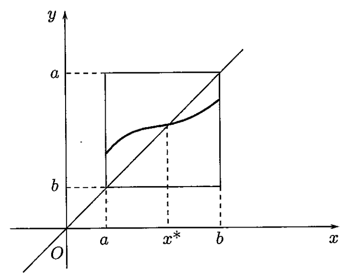
$$x_1 = \frac{x_0}{1+x_0} \qquad x_2 = \frac{\dfrac{x_0}{1+x_0}}{1 + \dfrac{x_0}{1+x_0}} = \frac{x_0}{1+2x_0} \qquad x_3 = \frac{\dfrac{x_0}{1+2x_0}}{1 + \dfrac{x_0}{1+2x_0}} = \frac{x_0}{1+3x_0} \cdots$$

si ricava

$$x_n = \frac{x_0}{1 + nx_0}$$

che per ogni $x_0 > 0$ converge a 0.

8 Come mostrato in figura la bisettrice interseca il grafico di f esattamente in un punto x^*, che risulta pertanto l'unico punto di equilibrio.



Infatti f ha almeno un punto fisso[8]; facciamo vedere che è unico: se ce ne fossero due x^* e $\overline{x}$, si avrebbe, applicando il teorema del valor medio di Lagrange e tenendo conto del fatto che $|f'| \leq k$,

$$0 \leq |x^* - \overline{x}| = |f(x^*) - f(\overline{x})| = \left|f'(c)\right| \cdot |x^* - \overline{x}| \leq k\,|x^* - \overline{x}|$$

che essendo $k < 1$ implica $|x^* - \overline{x}| = 0$ e cioè $x^* = \overline{x}$.
Dimostriamo che ogni altra soluzione x_n dell'equazione

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{8}$$

converge a x^* e quindi che x^* è attrattore globale. Valutiamo la distanza tra x_n e x^*; dalla (8) e dal fatto che $f(x^*) = x^*$ si ha

$$|x_n - x^*| = |f(x_{n-1}) - f(x^*)|$$

Usando ancora il teorema del valor medio di Lagrange e il fatto che $|f'| \leq k$, possiamo scrivere

$$|f(x_{n-1}) - f(x^*)| = \left|f'(c_n)(x_{n-1} - x^*)\right| \leq k\,|x_{n-1} - x^*|$$

da cui

$$|x_n - x^*| \leq k\,|x_{n-1} - x^*|$$

Rifacendo gli stessi calcoli per valutare $|x_{n-1} - x^*|$ si troverebbe

$$|x_n - x^*| \leq k\,|x_{n-1} - x^*| \leq k^2\,|x_{n-2} - x^*|$$

Procedendo ancora in questo modo si arriva a

$$|x_n - x^*| \leq k\,|x_{n-1} - x^*| \leq k^2\,|x_{n-2} - x^*| \leq \cdots \leq k^n\,|x_0 - x^*|$$

Essendo $k < 1$ si conclude che $|x_n - x^*| \to 0$, ossia $x_n \to x^*$, indipendentemente dal valore iniziale x_0.

9 Infatti, si ha, considerando g sull'intervallo $[0,1]$,

$$g : [0,1] \to [0,1]$$

e

$$\left|g'(x)\right| = |-\sin x| \leq \sin 1 < 1$$

Quindi se $a \in [0,1]$, la successione $x_n \to x^*$. D'altra parte, se $a \notin [0,1]$ allora o $x_1 \in [0,1]$ o $x_2 \in [0,1]$ e si ritorna al caso precedente.

---

[8] Lo si dimostra applicando il teorema degli zeri alla funzione $g(x) = f(x) - x$ (vedi cap. 3, sez. 3, esercizio 4, pag. 96).

10 (a) Se $|f'(x^*)| < 1$, per il teorema della permanenza del segno, si ha, in un intorno $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ di x^*,

$$\left|f'(x)\right| \leq \rho < 1$$

Poiché $f(I) \subseteq I$ (il lettore lo dimostri!), per l'esercizio precedente, x^* è attrattore.
(b) Se $|f'(x^*)| > 1$, si ha, in un intorno I di x^*,

$$\left|f'(x)\right| \geq \rho > 1$$

e quindi se $x_0 \in I$, si ha, applicando il teorema del valor medio,

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = \left|f'(c)\right| \cdot |x_0 - x^*| \geq \rho\, |x_0 - x^*|$$

se anche $x_1 \in I$, con lo stesso ragionamento, si trova

$$|x_2 - x^*| \geq \rho^2 |x_0 - x^*|$$

e, procedendo a questo modo, dopo un numero finito di passi si esce da I. Cioè x^* è repulsore.

7. ALGEBRA LINEARE

1. VETTORI IN $\mathbb{R}^2$ E $\mathbb{R}^3$. RETTE E PIANI

Esempi

1 Controlliamo che il vettore(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ con coefficienti rispettivi 4 e 2. Si ha infatti

$$4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2 Controlliamo che ogni vettore $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ può essere scritto come combinazione lineare dei vettori fondamentali

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si ha infatti

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

(1) In questa sezione useremo indifferentemente per i vettori la scrittura in riga o in colonna.

Calcoliamo il prodotto scalare e il prodotto vettore dei vettori

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per il prodotto scalare (⇛ BPS, pag. 40, formula (1.10)) risulta

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 1\cdot(-2) + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 1 = -4$$

Un modo per calcolare il prodotto vettore (⇛ BPS, pag. 42, formula (1.13)) di due vettori di $\mathbb{R}^3$consiste nel calcolare il determinante[(2)] formale di una matrice costituita nel modo seguente: nella prima riga trovano posto i versori **i**, **j** e **k**, nella seconda e terza riga le componenti dei vettori assegnati. Nel nostro caso si ha

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che il vettore **c** è ortogonale sia ad **a** che a **b**.

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = 2 + 6 - 8 = 0, \quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} = -4 + 4 = 0$$

Calcoliamo il prodotto misto dei vettori

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Tale prodotto coincide col determinante della matrice le cui righe o colonne siano le componenti dei tre vettori. Nel nostro caso

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 18$$

Se $\mathbf{a} = (1,2,3)$ i vettori $\mathbf{p} = (x,y,z) = t\mathbf{a} = t(1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$ hanno componenti

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \tag{1}$$

e descrivono, al variare di t in $\mathbb{R}$, la retta in $\mathbb{R}^3$ che passa per l'origine e per il punto **a**. Le equazioni (1) sono le equazioni parametriche della retta.

(2) Si vedano, per il calcolo dei determinanti, gli esempi della prossima sezione. In questo caso, per il calcolo del determinante, è comodo utilizzare il teorema di Laplace (⇛ BPS, pag. 64), sviluppando secondo la prima riga.

La retta parallela che passa per il punto $\mathbf{b} = (2,-1,0)$ si ottiene sommando **b** a **p** e ha equazione vettoriale

$$(x,y,z) = (2,-1,0) + t\,(1,2,3) \qquad t \in \mathbb{R}$$

ed equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Scriviamo l'equazione della retta che passa per i punti $\mathbf{a} = (1,2,3)$ e $\mathbf{b} = (-1,1,-1)$. La direzione della retta è individuata, per esempio, dal vettore[(3)] $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (2,1,4)$. Come nell'esempio precedente si possono scrivere l'equazione vettoriale

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t\,(2,1,4) \qquad t \in \mathbb{R}$$

e le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Nella scrittura precedente si è messo in evidenza il passaggio per **a**. Mettendo in evidenza il passaggio per **b**, si possono scrivere l'equazione vettoriale

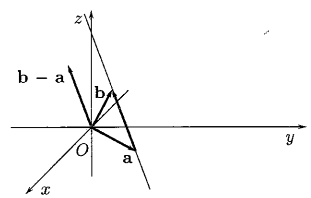
$$(x,y,z) = (-1,1,-1) + s\,(2,1,4) \qquad s \in \mathbb{R}$$

e le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = -1 + 4s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

In generale l'equazione della retta per due punti **a** e **b** può essere scritta nella forma

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = (1-t)\,\mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$



I punti del segmento che congiunge **a** e **b** si ottengono assegnando a t valori compresi tra 0 e 1.

(3) O anche dal vettore $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

7 I vettori (di $\mathbb{R}^3$) ortogonali a un vettore assegnato (diverso dal vettore nullo) stanno su di uno stesso piano passante per l'origine. Il piano per l'origine perpendicolare al vettore $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$ ha equazione

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0$$

dove $\mathbf{p} = (x, y, z)$ indica il generico vettore appartenente al piano. Esplicitando i calcoli, si ha

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (2, 3, -1) &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

Il piano passante per il punto $\mathbf{a} = (3, 2, 5)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$ ha equazione

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{3}$$

ossia

$$\begin{aligned} (x - 3, y - 2, z - 5) \cdot (2, 3, -1) &= 0 \\ 2x + 3y - z - 7 &= 0 \end{aligned}$$

8 Siano $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sono due punti dello spazio $\mathbb{R}^3$. L'insieme dei vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{4}$$

ossia delle combinazioni lineari di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, identifica il piano passante per l'origine e per i punti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Scrivendo la (4) componente per componente si trovano le equazioni parametriche del piano:

$$\begin{cases} x = - c_2 \\ y = c_1 + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ z = 2c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

Ricavando c_2 dalla prima equazione, c_1 dalla seconda e sostituendo nella terza, si ottiene l'equazione cartesiana

$$z = -x + 2y$$

Un altro modo per scrivere l'equazione del piano passante per l'origine e per i punti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è quello di scrivere un vettore $\mathbf{n}$ perpendicolare al piano e ricondursi quindi a scrivere l'equazione del piano per l'origine perpendicolare al vettore $\mathbf{n}$, come nell'esempio precedente. Un vettore ortogonale al piano è, per esempio,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

per cui l'equazione cercata è

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \tag{5}$$

Utilizzando la formula (5) si ricava

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2y + z = 0$$

9 Scriviamo l'equazione del piano che passa per il punto $\mathbf{c} = (2, -1, 3)$, parallelo al piano di equazione $x - 2y + z = 0$.
Un vettore ortogonale al piano è, per esempio, $\mathbf{n} = (1, -2, 1)$. Il piano parallelo a $x - 2y + z = 0$ è quindi ortogonale a $\mathbf{n}$. Detto $\mathbf{p} = (x, y, z)$ il generico vettore del piano incognito, l'equazione di quest'ultimo è

$$(\mathbf{p} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Esplicitando i calcoli, si trova

$$\begin{aligned} (x - 2) - 2(y + 1) + (z - 3) &= 0 \\ x - 2y + z &= 7 \end{aligned}$$

10 Scriviamo l'equazione del piano che passa per tre punti assegnati: siano

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivere l'equazione del piano passante per tre punti assegnati è un pochino più laborioso. Possiamo procedere così: troviamo un vettore $\mathbf{n}$ perpendicolare al piano, come prodotto vettoriale di due paralleli al piano. Questi ultimi si trovano come differenza dei vettori dati: per esempio $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ e $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ sono paralleli al piano cercato. Un vettore $\mathbf{n}$ perpendicolare al piano è, allora, il prodotto vettore

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

Si ha

$$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione del piano passante per $\mathbf{a}$ e perpendicolare a $\mathbf{n}$, applicando la formula (3),

$$\begin{aligned} -5(x - 1) + 4(y - 2) - (z + 2) &= 0 \\ 5x - 4y + z &= -5 \end{aligned}$$

Oppure, direttamente, si scrive

$$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0 \tag{6}$$

ossia

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -5(x - 1) + 4(y - 2) - (z + 2) = 0$$

Un altro modo per scrivere l'equazione del piano passante per tre punti è quello di considerare la generica equazione di un piano

$$ax + by + cz = d$$

e determinarne i parametri a, b, c e d "imponendo il passaggio" per i tre punti dati. Nel nostro esempio si deve risolvere il sistema[4]

$$\begin{cases} a + 2b - 2c = d \\ \quad\;\; b - \; c = d \\ 2a + 4b + \; c = d \end{cases}$$

Il lettore verifichi che la quaterna

$$a = 5 \qquad b = -4 \qquad c = 1 \qquad d = -5$$

è soluzione del sistema.

N. B.: naturalmente la procedura funziona fintantoché i tre punti non sono allineati. Se lo fossero, esisterebbero infiniti piani passanti per i tre punti.

Test a risposta multipla

1. I valori α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha(1,0) + \beta(1,-1) = (1,2)$

$\boxed{a}$ sono infiniti $\boxed{b}$ non esistono $\boxed{c}$ sono $\alpha = 1$, $\beta = -2$ $\boxed{d}$ sono $\alpha = 3$, $\beta = -2$

2. Un vettore perpendicolare alla retta di equazione $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ è

$\boxed{a}$ $(2,3)$ $\boxed{b}$ $(-2,3)$ $\boxed{c}$ $(-3,2)$ $\boxed{d}$ $(3,2)$

3. Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$, la scrittura $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$

$\boxed{a}$ significa $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$ $\boxed{b}$ significa $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ $\boxed{c}$ indica un vettore $\boxed{d}$ non ha alcun significato

4. Il modulo del vettore $\mathbf{v} = (0,-3,4)$ è

$\boxed{a}$ 1 $\boxed{b}$ 7 $\boxed{c}$ 25 $\boxed{d}$ 5

5. I vettori $(1,-1,-2)$, $(-2,a,4)$ sono linearmente indipendenti per

$\boxed{a}$ $a \neq 2$ $\boxed{b}$ nessun valore di a $\boxed{c}$ ogni a $\boxed{d}$ $a = 2$

6. Il prodotto misto dei vettori $\mathbf{x} = (0,1,2)$, $\mathbf{y} = (5,8,-5t)$ e $\mathbf{z} = (0,1,3)$ è

$\boxed{a}$ 5 $\boxed{b}$ un vettore $\boxed{c}$ -5 $\boxed{d}$ 8

[4] Questo è un sistema omogeneo formato da 3 equazioni in 4 incognite, che ha, come vedremo nella sezione 7.3, infinite soluzioni.

7. Le rette di equazione $(x,y,z) = t(1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$ e $(x,y,z) = (0,1,2) + s(1,1,1)$, $s \in \mathbb{R}$, sono

$\boxed{a}$ parallele $\boxed{b}$ incidenti $\boxed{c}$ sghembe $\boxed{d}$ ortogonali

8. La retta di equazione $(x,y,z) = t(1,2,3)$, $t \in \mathbb{R}$, è parallela al piano di equazione

$\boxed{a}$ $x + 2y + 3z = 0$ ⊥ al piano $\boxed{b}$ $3x - 2y - z = 0$ $\boxed{c}$ $x + y - z = 0$ // al piano $\boxed{d}$ nessuna delle altre risposte

9. Un vettore parallelo al piano di equazione $3x + 4y - z = 2$ è

$\boxed{a}$ $(-4,3,0)$ $\boxed{b}$ $(0,1,1)$ $\boxed{c}$ $(3,4,2)$ $\boxed{d}$ $(3,4,-1)$

10. L'equazione del piano che passa per i punti $(0,0,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,3,0)$ è

$\boxed{a}$ $3x + y - z = 0$ $\boxed{b}$ $x + y + z - 3 = 0$ $\boxed{c}$ $3x - y + z = 0$ $\boxed{d}$ $x - 3y + 3z = 0$

11. Siano $\mathbf{a} = (0,1,-1)$ e $\mathbf{n} = (1,0,1)$ l'equazione del piano passante per $\mathbf{a}$ e perpendicolare a $\mathbf{n}$ è

$\boxed{a}$ $x - z = 1$ $\boxed{b}$ $x + z + 1 = 0$ $\boxed{c}$ $y = 1$ $\boxed{d}$ $x + y + z = 0$

$(1,0,1)(x-0, y-1, z+1)$

$x + y - 1$ [illegible]

Esercizi

1. Scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti
   (a) $(1,2,1)$ e $(3,2,3)$
   (b) $(1,2,3)$ e $(1,2,-5)$
   (c) $(0,-1,-1)$ e $(1,2,3)$

2. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $(1,2,3)$ e
   (a) parallela alla retta r di equazione $(x,y,z) = (1+t, 3-t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$;
   (b) perpendicolare al piano di equazione $x - y + 2z = 0$.

3. Le rette di equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 2s \\ y = 2 - s \\ z = -3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

hanno punti in comune?

4. Scrivere l'equazioni dei piani passanti per i punti
   (a) $\mathbf{a} = (-1,2,1)$, $\mathbf{b} = (1,2,3)$ e $\mathbf{c} = (3,2,3)$
   (b) $\mathbf{a} = (1,1,3)$, $\mathbf{b} = (2,2,1)$ e $\mathbf{c} = (3,3,-5)$
   (c) $\mathbf{a} = (0,1,-1)$, $\mathbf{b} = (4,2,1)$ e $\mathbf{c} = (3,1,0)$
   (d) $\mathbf{a} = (1,2,3)$, $\mathbf{b} = (0,1,2)$ e $\mathbf{c} = (2,3,4)$

5 Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $(1,2,3)$ e

(a) parallelo al piano π di equazione $x-y+z=0$;

(b) perpendicolare alla retta di equazione $(x,y,z)=(1+t,2-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$.

6 La retta e il piano rispettivamente di equazioni

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=4+3t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R} \qquad 3x+2y-z=3$$

hanno punti in comune?

7 Dati i vettori $\mathbf{a}=(a,2,1)$, $\mathbf{b}=(a,-1-2)$, $a\in\mathbb{R}$,

(a) determinare per quali valori di a sono ortogonali;

(b) per $a=1$ calcolare l'angolo formato dai due vettori.

8 Dopo aver verificato che i tre vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, provare che ogni altro vettore $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ può essere scritto come loro combinazione lineare. In altri termini i tre vettori costituiscono una *base* di $\mathbb{R}^3$.

9 Calcolare il volume del parallelepipedo costruito sui vettori

$$\mathbf{a}=(0,-1,3) \qquad \mathbf{b}=(1,1,-2) \qquad \mathbf{c}=(2,-3,1)$$

10 Stabilire se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti

$$\mathbf{a}=(0,-4,3) \qquad \mathbf{b}=(2,1,-2) \qquad \mathbf{c}=(-2,3,-1)$$

11 Siano

$$\mathbf{a}=(0,-4,3) \qquad \mathbf{b}=(2,1,-2)$$

calcolare il modulo del prodotto vettore $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$.

12 Trovare la proiezione del punto $\mathbf{p}=(0,1,-1)$ nel piano $x+2y+z=3$.

Vero o falso?

1 $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Se un insieme di vettori contiene il vettore nullo, questi sono sicuramente linearmente dipendenti.

2 $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Dato un insieme di vettori linearmente dipendenti è possibile scrivere ciascuno di essi come combinazione lineare degli altri.

3 $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Due vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente indipendenti.

4 $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ Quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono sempre linearmente dipendenti.

7.1. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1 $\boxed{d}$

Si ricava risolvendo il sistema $\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ -\beta=2 \end{cases}$

2 $\boxed{d}$

I vettori perpendicolari a una retta di equazione $ax+by+c=0$ hanno la forma $t\,(a,b)$ con $t\in\mathbb{R}$. Nel nostro caso $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$ e con $t=6$, si ottiene $(3,2)$. Si può anche scrivere l'equazione della retta nella forma

$$3x+2y-6=0$$

da cui $a=3$ e $b=2$, direttamente.

3 $\boxed{b}$

Indica il prodotto misto che è un numero. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ non ha senso in quanto $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ è un numero e $\mathbf{c}$ è un vettore.

4 $\boxed{d}$

Si ha $|\mathbf{v}|=\sqrt{0+9+16}=5$

5 $\boxed{a}$

Solo per $a=2$ i vettori sono uno "multiplo" dell'altro.

6 $\boxed{c}$

Si ha

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}=\begin{vmatrix}0&1&2\\5&8&-5\\0&1&3\end{vmatrix}=-5$$

7 $\boxed{b}$

Non sono né parallele né perpendicolari, in quanto i vettori direzionali $(1,2,3)$ e $(1,1,1)$ non lo sono. Per controllare se vi sono punti in comune si controlla se esistono s e t tali che

$$\begin{cases} t = s \\ 2t = 1+s \\ 3t = 2+s \end{cases}$$

Si trova $t = s = 1$. Perciò le due rette hanno in comune il punto $(1,2,3)$.

8 $\boxed{c}$

Non solo è parallela, ma giace sul piano, in quanto il punto corrente sulla retta $(x,y,z) = (t,2t,3t)$ soddisfa l'equazione del piano per ogni $t \in \mathbb{R}$: si ha infatti $t + 2t - 3t = 0$. Si noti che il piano in $\boxed{a}$ è perpendicolare alla retta, in quanto il vettore direzionele della retta $(1,2,3)$ è perpendicolare al piano.

9 $\boxed{a}$

Il vettore $(3,4,-1)$ è perpendicolare al piano. Un vettore è paralleo al piano se è ortogonale al vettore $(3,4,-1)$. In questo caso lo è solo il vettore $(-4,3,0)$, in quanto il loro prodotto scalare è nullo:

$$(3,4,-1)\cdot(-4,3,0) = -12+12+0 = 0$$

10 $\boxed{c}$

Si ricava come nell'esempio 8:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} z =$$
$$= -3x + y - z = 0$$

11 $\boxed{b}$

Si ricava come nell'esempio 7, applicando la formula (3).

Esercizi

1 (a) Applicando la formula (2), scegliendo come vettore direzionale

$$(3,2,3) - (1,2,1) = (1,0,1)$$

si ottiene l'equazione parametrica

$$(x,y,z) = (1,2,1) + (1,0,1)\,t \qquad t \in \mathbb{R}$$

ossia

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 1+t \end{cases}$$

Si deduce che la retta giace nel piano $x = z$ e nel piano $y = 2$, quindi è intersezione di questi piani.

(b) Applicando la formula (2), scegliendo come vettore direzionale

$$(1,2,3) - (1,2,-5) = (0,0,8)$$

si ottiene l'equazione parametrica

$$(x,y,z) = (1,2,3) + (0,0,8t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

che può anche essere scritta nella forma

$$(x,y,z) = (1,2,s) \qquad s \in \mathbb{R}$$

Si vede facilmente che la retta è intersezione dei piani $x = 1$ e $y = 2$.

(c) Applicando la (2), scegliendo come vettore direzionale

$$(1,2,3) - (0,-1,-1) = (1,3,4)$$

si ricava

$$(x,y,z) = (0,-1,-1) + t\,(1,3,4) = (t, 3t-1, 4t-1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

2 (a) Scriviamo l'equazione della retta r nella forma

$$(x,y,z) = (1,3,0) + (1,-1,2)\,t \qquad t \in \mathbb{R}$$

che mette in evidenza il vettore direzionale $(1,-1,2)$. La retta parallela a r passante per il punto $(1,2,3)$ ha equazione

$$(x,y,z) = (1,2,3) + (1,-1,2)\,t = (1+t, 2-t, 3+2t) \qquad t \in R$$

ossia

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+2t \end{cases}$$

(b) Un vettore normale al piano è $(1,-1,2)$ e questo deve essere parallelo ad ogni vettore direzionale di una retta ortogonale al piano. Nel nostro caso la retta richiesta coincide con quella determinata al punto (a).

3 No, perché il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = 2s \\ 2 + 3t = 2 - s \\ 4t = -3s \end{cases}$$

è impossibile.

4 (a) I tre punti hanno la seconda coordinata uguale a 2 e perciò individuano il piano di equazione $y = 2$.
(b) I tre punti hanno le prime due coordinate coincidenti e perciò individuano il piano di equazione $y = x$.
(c) Applicando la (6), si ottiene

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + 2y - 3z = 5$$

(d) Applicando la (6), si ottiene

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Nessun piano si ottiene dalla formula. I tre punti sono allineati perché i due vettori $\mathbf{b}-\mathbf{a} = (-1,-1,-1)$ e $\mathbf{c}-\mathbf{a} = (1,1,1)$ sono paralleli, quindi essi giacciono sulla retta di equazione

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t\,(1,1,1) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esistono infiniti piani passanti per i tre punti.

5 (a) Un vettore ortogonale al piano π è $(1,-1,1)$, quindi l'equazione richiesta è

$$(x-1, y-2, z-3)\cdot(1,-1,1) = 0$$
$$x - y + z = 2$$

(b) Un vettore paralleo alla retta, e quindi ortogonale al piano, è $(1,-1,1)$. Si ottiene ancora il piano di equazione $x - y + z = 2$.

6 Sì, infiniti. La retta appartiene al piano, infatti

$$3\,(1+t) + 4 - (4+3t) = 3$$

è un'identità.

7 (a) I vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, cioè se

$$a^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm 2$$

(b) Si ha

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

da cui $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

8 Si prova facilmente che l'unica combinazione lineare dei tre vettori che dà il vettore nullo è quella con coefficienti tutti nulli, infatti il sistema

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Ciò implica che i vettori sono linearmente indipendenti. Per ogni altro vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^3$ poniamo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che porta a scrivere il sistema

$$\begin{cases} a = x_1 \\ a + b = x_2 \\ a + b + c = x_3 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = x_1 \\ b = x_2 - x_1 \\ c = x_3 - x_2 \end{cases}$$

Si può dunque scrivere

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_2 - x_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9 Il volume del parallelepipedo individuato dai vettori concide col valore assoluto del loro prodotto misto. Dato che

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$1(1+6) + 3(-3-2)$
$5 + 3(-5)$

il volume cercato è 10.

10 No. Infatti, come facilmente si verifica, risulta $\mathbf{c} = -\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

11 Ricordiamo che

$$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin\alpha$$

dove α è l'angolo formato dai due vettori. Possiamo calcolare $\cos\alpha$ utilizzando la formula $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$. Dato che

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -10, \quad |\mathbf{a}| = 5, \quad |\mathbf{b}| = 3$$

si ha

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}$$

da cui

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e

$$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}| = 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = 5\sqrt{5}$$

Verifichiamo il risultato, calcolando direttamente il prodotto vettore

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

si ha quindi

$$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}| = \sqrt{25+36+64} = 5\sqrt{5}$$

12 Scriviamo l'equazione della retta r passante per $\mathbf{p}$ e perpendicolare al piano.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Il punto richiesto è il punto di intersezione di r col piano stesso

$$t+2(1+2t)-1+t=0 \quad \Rightarrow \quad t=-\frac{1}{6}$$

Il punto è $\left(-\frac{1}{6},\frac{2}{3},-\frac{7}{6}\right)$.

Vero o falso?

1 Vero. Il vettore nullo può essere sempre scritto come combinazione lineare degli altri vettori: basta prendere i coefficienti tutti nulli.

2 Falso. Dato un insieme di vettori linearmente dipendenti, ne esiste almeno uno che è possibile scrivere come combinazione lineare dei rimanenti. Ciò non significa che sia possibile scrivere *ciascuno* di essi come combinazione lineare degli altri. Per esempio, i vettori

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, dato che

$$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Il primo vettore può essere scritto come combinazione lineare degli altri due; tuttavia non esiste alcuna combinazione lineare dei primi due che dia il terzo vettore (perché?).

3 Falso. Due vettori sono linearmente dipendenti se hanno le componenti proporzionali, ossia se sono uno "multiplo" dell'altro, per esempio i vettori

$$\mathbf{a}=(2,-1,3) \quad \text{e} \quad \mathbf{b}=(-6,3,-9)\ (=-3\mathbf{a})$$

sono linearmente dipendenti.

4 Vero. In $\mathbb{R}^3$ non si possono trovare più di 3 vettori linearmente indipendenti.

2. MATRICI. VETTORI IN IR^n

Richiami teorici

- Il **determinante** di una matrice quadrata è uguale a zero se e solo se le righe (le colonne) della matrice sono linearmente dipendenti.
- Il **rango** di una matrice rappresenta il massimo numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti.

Esempi

1 Consideriamo le due matrici dello stesso tipo[5]

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&4&-3\\-1&0&6\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&-2&4\\5&-3&-6\end{pmatrix}$$

La loro somma si ottiene addizionando gli elementi corrispondenti

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3+0&4+(-2)&-3+4\\-1+5&0+(-3)&6+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\\4&-3&0\end{pmatrix}$$

2 Consideriamo la matrice

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1\\-5&6&0\end{pmatrix}$$

Il prodotto di un numero per una matrice si ottiene moltiplicando ogni elemento della matrice per il numero stesso; il prodotto $-3\mathbf{A}$ è

$$-3\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3\cdot3&-3\cdot2&-3\cdot(-1)\\-3\cdot(-5)&-3\cdot6&-3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-6&3\\15&-18&0\end{pmatrix}$$

3 Consideriamo le due matrici

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&4&-3\\-1&0&6\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&-2\\5&-3\end{pmatrix}$$

Poiché il numero di colonne di $\mathbf{A}$ (tre) è diverso dal numero di righe di $\mathbf{B}$ (due) non è definito il prodotto $\mathbf{AB}$, mentre è definito il prodotto $\mathbf{BA}$. La matrice $\mathbf{BA}$ ha due righe e tre colonne e i suoi elementi si ottengono come prodotto scalare delle righe di $\mathbf{B}$ per le colonne di $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0\cdot3+(-2)\cdot(-1)&0\cdot4+(-2)\cdot0&0\cdot(-3)+(-2)\cdot6\\5\cdot3+(-3)\cdot(-1)&5\cdot4+(-3)\cdot0&5\cdot(-3)+(-3)\cdot6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&-12\\18&20&-33\end{pmatrix}$$

4 Calcoliamo i determinanti delle matrici

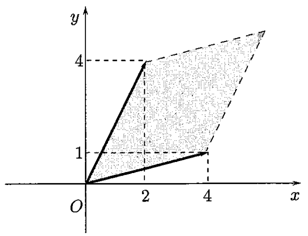
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&1\\2&4\end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

Si ha

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}4&1\\2&4\end{vmatrix}=4\cdot4-1\cdot2=6$$

Ricordiamo che il determinante di una matrice di ordine due ha il significato geometrico di area con segno del parallelogramma individuato dai vettori riga (o colonna) che accostati formano la matrice.

[5] Si possono sommare tra loro solo matrici aventi lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne!



Per il calcolo di $\det \mathbf{B}$ si può utilizzare, per esempio, la regola di Sarrus ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 65). Si ha

$$\det \mathbf{B} = 0 - 9 - 2 + 6 + 1 + 0 = -4$$

Ricordiamo che il determinante di una matrice di ordine tre ha il significato geometrico di volume con segno dell'esaedro individuato dai vettori che accostati formano la matrice.

5 Calcoliamo il determinante della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

applicando il teorema di Laplace ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 64). Moltiplicando gli elementi della terza riga[(6)] per i rispettivi complementi algebrici, si ottiene

$$\det \mathbf{A} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(applicando ancora il teorema di Laplace)

$$= -3\left(2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) - 5\left(3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$
$$= -3 \cdot 35 - 5 \cdot 14 = -175$$

6 Calcoliamo il rango della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

---

(6) Perché proprio la terza riga? Il motivo dovrebbe essere evidente: conviene scegliere la riga o la colonna in cui vi sono più termini nulli.

Anche per il calcolo dei successivi determinanti d'ordine 3, la scelta cade, rispettivamente, sulla prima e sulla terza riga.

utilizzando l'algoritmo di Kronecker ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 74). Iniziamo con l'osservare che il rango di $\mathbf{A}$ è almeno 2, in quanto il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

è diverso da zero. Calcoliamo i minori di ordine 3, che si ottengono orlando il minore trovato. Poiché entrambi i minori

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

sono nulli, si conclude che il rango di $\mathbf{A}$ è 2.

7 Calcoliamo l'inversa della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det(\mathbf{A}) = -5 \neq 0$, quindi $\mathbf{A}$ è invertibile. La matrice dei complementi algebrici degli elementi di $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e la sua trasposta è

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 4/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

8 Siano

$$\mathbf{a}^1 = (12, 0, 13, 0) \qquad \mathbf{a}^2 = (2, 0, 4, 1) \qquad \mathbf{a}^3 = (4, 0, -3, -4)$$

vettori di $\mathbb{R}^4$. Controlliamo che essi sono linearmente dipendenti. Infatti il rango della matrice che si ottiene sovrapponendoli

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 13 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

è 2, perché, per esempio, il minore $\begin{vmatrix} 13 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 13$ è diverso da 0, mentre i minori di ordine 3 sono nulli (basta verificare che $\begin{vmatrix} 12 & 13 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0$). Solo due, quindi, tra i vettori dati sono linearmente indipendenti. Il sottospazio generato da $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ ha dimensione 2 e una sua base è costituita da una qualsiasi coppia dei vettori dati, perché i vettori non sono "paralleli".

Test a risposta multipla

1. Il massimo numero di vettori linermente indipendenti tra $(3,2,7)$, $(1,5,1)$, $(0,0,3)$ e $(0,3,1)$ è

[a] 1 [b] 2 [c] 3 [d] 4

2. Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori tali che $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, allora $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ appartengono rispettivamente a

[a] $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ [b] $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ [c] entrambi a $\mathbb{R}^2$ [d] entrambi a $\mathbb{R}^3$

3. La matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile

[a] solo per $\alpha = 1$ [b] per ogni α [c] per nessun valore di α [d] per ogni α tranne $\alpha = 1$

4. Lo spazio generato dai vettori $(1,2,0,0)$ e $(0,3,4,5)$ ha dimensione

[a] 1 [b] 2 [c] 3 [d] 4

5. Quale tra i seguenti vettori non può essere scritto come combinazione lineare di $\mathbf{a} = (7,-4,1,0)$ e $\mathbf{b} = (-5,1,0,2)$?

[a] $(2,-3,1,2)$ [b] $(1,0,4,8)$ [c] $(-7,4,-1,0)$ [d] $(0,0,0,0)$

6. Quale tra i seguenti insiemi è sottospazio di $\mathbb{R}^2$? L'insieme degli (x,y) tali che

[a] $x+2y=0$ [b] $x+2y+3=0$ [c] $x+2y \geq 0$ [d] $x+y^2=0$

7. Quale tra i seguenti insiemi non è sottospazio di $\mathbb{R}^3$? L'insieme degli (x,y,z) tali che

[a] $x+2y=0$ [b] $x+2y+3z=0$ [c] $x=y=z$ [d] l'insieme vuoto

Esercizi

1. Siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcolare i prodotti **AB** e **BA**.

2. Verificare a matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

non è *invertibile* (ossia non possiede inversa), applicando la definizione.

3. Calcolare l'area del parallelogramma individuato dai vettori $(1,2)$ e $(3,-1)$.

4. I vettori $(1,2)$ e $(0,3)$ formano una base di $\mathbb{R}^2$?

5. Calcolare l'inversa della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Dati i vettori

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinare quanti sono linearmente indipendenti, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

7. Calcolare il rango della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a^2 \\ a & -1 & -4 \end{pmatrix}$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

8. Determinare la dimensione dello spazio generato dai vettori

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -a \end{pmatrix}$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$. Indicarne una possibile base.

Vero o falso?

1. [V] [F] Il determinante della somma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ di due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ quadrate di ordine n è uguale allla somma dei determinanti di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

2. [V] [F] Il determinante del prodotto $\mathbf{AB}$ di due matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ quadrate di ordine n è uguale al prodotto dei determinanti di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.

3. [V] [F] Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrici quadrate di ordine n. Se $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, allora $\det(\mathbf{AB}) \neq \det(\mathbf{BA})$.

4. [V] [F] Un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 è rappresentato geometricamente da un piano.

5. [V] [F] Un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 è rappresentato geometricamente da una retta.

V F Un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 0 è l'insieme vuoto.

Ulteriori esercizi

1. Verificare che l'insieme

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e determinarne una base.

2. Dati k vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con X l'insieme formato da *tutte* le loro combinazioni lineari, cioè l'insieme degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, che possono essere scritti nella forma $\mathbf{x} = \sum_{s=1}^{k} c_s \mathbf{x}^s$. Provare che X è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

3. Controllare che se $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di ordine e α è un numero reale

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$$

7.2. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{c}$

Infatti il rango della matrice che si ottiene sovrapponendo i vettori è 3, perché per esempio il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

è diverso da zero.

2. $\boxed{b}$

3. $\boxed{b}$

$\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$ per ogni α.

4. $\boxed{b}$

Perché i vettori sono linearmente indipendenti.

5. $\boxed{b}$

La matrice che si ottiene accostando i vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $(1, 0, 4, 8)$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

ha rango 3: per esempio è diverso da zero il minore

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 24$$

Gli altri vettori si possono ottenere come combinazione lineare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$: quello in $\boxed{a}$ è la somma dei due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, quello in $\boxed{c}$ è l'opposto di $\mathbf{a}$ e il vettore nullo è sempre combinazione lineare di qualsiasi coppia di vettori.

6. $\boxed{a}$

Infatti $x + 2y = 0$ è l'equazione di una retta passante per l'origine ed è il sottospazio generato, per esempio, dal vettore $(2, -1)$. L'insieme in $\boxed{b}$ non è un sottospazio perché non contiene il vettore nullo. L'insieme in $\boxed{c}$ che è rappresentato geometricamente da un semipiano non è un sottospazio, perché non contiene l'opposto di ogni vettore. Per esempio contiene $(-1, 1)$ ma non $(1, -1)$. Lo stesso vale per l'insieme in $\boxed{d}$ che è rappresentato geometricamente da una parabola.

7. $\boxed{d}$

Infatti il vettore nullo (da solo) è sottospazio, ma non l'insieme vuoto. $\boxed{a}$ e $\boxed{b}$ sono equazioni di piani passanti per l'origine e pertanto sono sottospazi bidimensionali di $\mathbb{R}^3$. $\boxed{c}$ è l'equazione di una retta passante per l'origine e pertanto è sottospazio unidimensionale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizi

1. Si ha

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2-2 & 6-6 \\ 4-4 & 12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2+12 & 4+24 \\ -1-6 & -2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 \\ -7 & -14 \end{pmatrix}$$

L'esempio mostra che il prodotto tra matrici, oltre a non essere commutativo, non verifica la *legge di annullamento del prodotto*.

2. Se $\mathbf{A}$ fosse invertibile esisterebbe una matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma l'uguaglianza è impossibile: moltiplicando la seconda riga di $\mathbf{B}$ per la seconda colonna di $\mathbf{A}$ si dovrebbe ottenere 1, ma in realtà risulta $0\ (\neq 1)$.
Osserviamo che il determinante di $\mathbf{A}$ è uguale a 0.

3 Si ha

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix} = 1\cdot(-1)-2\cdot 3 = -7$$

quindi l'area è uguale a 7.

4 Sì, perché sono linermente indipendenti.

5 Il determinante è -4, quindi $\mathbf{A}$ è invertibile. Sostituendo gli elementi con i loro complementi algebrici, si ottiene

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -3 & 3 & -1\\ -4 & 8 & -4\end{pmatrix}$$

La trasposta di $\mathbf{A}^*$ è

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 8\\ -1 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

Dividendo per $|\mathbf{A}|$, si ha

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -3 & -4\\ -1 & 3 & 8\\ -1 & -1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/4 & 3/4 & 1\\ 1/4 & -3/4 & -2\\ 1/4 & 1/4 & 1\end{pmatrix}$$

6 Il determinante della matrice che si ottiene accostando i vettori è

$$\begin{vmatrix}k & 4 & -2\\ 1 & k & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = k^2-k-6$$

e si annulla per $k=3$ o $k=-2$.
Per $k\neq 3$ e $k\neq -2$ i tre vettori sono, dunque, linearmente indipendenti.
Per $k=3$ o $k=-2$ ci sono due vettori linearmente indipendenti, perché il rango di $\mathbf{A}$ è 2; infatti il minore $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$ ottenuto eliminando la prima riga e la seconda colonna è diverso da 0.

7 Il rango di $\mathbf{A}$ è 2 se almeno uno tra i minori

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ a & -1\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}1 & a^2\\ -1 & -4\end{vmatrix}$$

è diverso da zero. I minori si annullano rispettivamente per $a=-2$ e $a=\pm 2$.
Il rango di $\mathbf{A}$ è 2 per $a\neq -2$, ed è 1 per $a=-2$.

8 Il determinante della matrice ottenuta accostando i vettori è diverso da 0 per $a\neq 2$, quindi per $a\neq 2$ i vettori sono linermente indipendenti, generano $\mathbb{R}^4$ e ne costituiscono una base. Per $a=2$ la matrice è

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 4 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

e il suo rango è 2, infatti

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} = 2\neq 0$$

e tutti i minori di ordine 3 che si ottengono orlandolo hanno determinante nullo.
Lo spazio generato dai vettori ha dimensione 2 e una possibile base è costituita, per esempio, da $\mathbf{a}^1$ e $\mathbf{a}^2$.

Vero o falso?

1 Falso. Per esempio

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

e

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2$$

mentre

$$\det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 4$$

2 Vero. Per il teorema di Binet (⇛ BPS, pag. 65).

3 Falso. Infatti si ha

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\det(A) = \det(\mathbf{BA})$$

4 Vero.

5 Vero.

6 Falso. Un sottospazio di dimensione 0 è costituito dal solo vettore nullo.

Ulteriori esercizi

1 Siano $\mathbf{u}=(x_1,y_1,z_1)$ e $\mathbf{v}=(x_2,y_2,z_2)$ due elementi di L, si deve verificare che anche $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}=(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2)\in L$. Si ha

$$x_1-y_1+z_1=0 \qquad x_2-y_2+z_2=0$$

moltiplicando la prima uguaglianza per α, la seconda per β e sommando membro a membro si ottiene

$$\alpha(x_1-y_1+z_1)+\beta(x_2-y_2+z_2)=0$$

da cui

$$(\alpha x_1+\beta x_2)-(\alpha y_1+\beta y_2)+(\alpha z_1+\beta z_2)=0$$

per cui $\mathbf{w}\in L$. La dimensione di L è 2. Infatti L è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^3$ (per esempio il vettore $(1,0,0)$ non appartiene a L) e in L esiste una coppia di vettori linearmente indipendenti; per esempio

$$(1,1,0) \quad \text{e} \quad (1,0,-1)$$

Tali vettori costituiscono una base di L.

2 Occorre dimostrare che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ anche $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in X$, ossia è ancora una combinazione lineare dei k vettori dati.
Prendiamo due vettori dell'insieme X

$$\mathbf{x} = \sum_{s=1}^{k} c_s \mathbf{x}^s \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \sum_{s=1}^{k} c'_s \mathbf{x}^s$$

Si può scrivere

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha \sum_{s=1}^{k} c_s \mathbf{x}^s + \beta \sum_{s=1}^{k} c'_s \mathbf{x}^s = \sum_{s=1}^{k} \left(\alpha c_s + \beta c'_s\right) \mathbf{x}^s$$

quindi $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ è combinazione lineare di $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k$ con coefficienti $\alpha c_s + \beta c'_s$.

3 Si può scrivere, indicando con $\mathbf{I}$ la matrice identità di ordine n

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha\mathbf{I}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

e quindi, per il teorema di Binet,

$$\det(\alpha\mathbf{A}) = \det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \det(\mathbf{A}) = \alpha^n \det(\mathbf{A})$$

3. SISTEMI LINEARI

Richiami teorici

- **Sistemi equivalenti** — Due sistemi si dicono equivalenti se hanno tutte e sole le medesime soluzioni. Dato un sistema, per passare ad uno equivalente si possono eseguire, eventualmente più volte, le seguenti quattro operazioni:
  a) cambiare l'ordine delle equazioni,
  b) moltiplicare tutti i termini di un'equazione per una stessa costante non nulla,
  c) sommare a un'equazione una combinazione lineare delle altre,
  d) togliere dal sistema equazioni che siano combinazioni lineari delle altre.
- **Metodo di riduzione** — Permette di trasformare un sistema dato in uno equivalente, di risoluzione (quasi) immediata. Usando le operazioni che permettono di passare a sistemi equivalenti, possiamo ridurre un sistema in *forma triangolare* (il procedimento è illustrato negli esempi 3 e 4).

Esempi

1 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - \ y = 0 \end{cases}$$

che può essere scritto in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice dei suoi coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$$

quindi per il teorema di Cramer (⇛ BPS, pag. 73) ha un'unica soluzione. I valori delle due incognite (ricavati con la regola di Cramer) che ne costituiscono la sola soluzione sono

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-5} = 1$$

2 Cosideriamo il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Il rango di $\mathbf{A}$ è 3, come facilmente si verifica calcolando il minore formato dalle prime tre righe

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ invece è 4, poiché

$$\det(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

Per il teorema di Rouché-Capelli (⇛ BPS, pag. 73) il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è impossibile.

3 Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + \ y + \ z = \ 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x - 4y + 5z = -2 \end{cases}$$

col metodo di riduzione. Possiamo, in un primo passaggio, lasciare fissa la prima equazione ed eliminare x dalle altre due. Per esempio, sostituiamo alla seconda equazione la differenza tra essa e il doppio della prima (II−2 I) e alla terza la differenza tra essa e il triplo della prima (III−3I). Si ha

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & \text{I} \\ \quad y - 6z = -5 & \text{II} - 2\text{I} \\ -7y + 2z = -5 & \text{III} - 3\text{I} \end{cases}$$

A questo punto, lasciamo fisse le prime due equazioni e cerchiamo di eliminare y dalla terza. Si può sommare alla terza equazione la seconda moltiplicata per 7, ottenendo

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & \text{I} \\ \quad y - 6z = -5 & \text{II} \\ \quad -40z = -40 & \text{III} + 7\text{II} \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - 6z = -5 \\ \quad\quad z = 1 \end{cases}$$

In questo modo il sistema è ridotto informa triangolare. Sostituendo il valore trovato per z nella seconda equazione, si ricava il valore di y e, successivamente, dalla prima si ricava x. Il sistema ammette, dunque, l'unica soluzione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

4 Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 3x + 3y + z = 2 \\ x + 5y - z = 6 \end{cases}$$

Teniamo fissa la prima equazione e nella seconda e nella terza eliminiamo z, sostituendo alla seconda equazione la somma delle prime due e alla terza la differenza tra la terza e la prima, otteniamo

$$\begin{cases} -x + y - z = 2 & \text{I} \\ 2x + 4y \quad = 4 & \text{II} + \text{I} \\ 2x + 4y \quad = 4 & \text{III} - \text{I} \end{cases}$$

che, poiché le ultime due equazioni coincidono, è equivalente a

$$\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ x + 2y \quad = 2 \end{cases}$$

Nell'ultima equazione sono rimaste due incognite. Possiamo scegliere per y un valore qualsiasi $k \in \mathbb{R}$. In funzione di tale scelta x e z risultano univocamente determinati.

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = k \\ z = 3k - 4 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Il sistema ammette, quindi, infinite soluzioni, dipendenti dal parametro k.

Test a risposta multipla

1. Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo[7] 3×2, tale che il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ abbia un'unica soluzione; allora se r e r' sono rispettivamente i ranghi di $\mathbf{A}$ e $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$

   a) $r = 1,\ r' = 2$ b) $r = r' = 3$ c) $r = r' = 2$ d) $r = r' = 1$

2. Il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

   a) è impossibile b) ha un'unica soluzione c) ha infinite soluzioni d) ha esattamente 2 soluzioni

3. Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

   a) è impossibile per $a = -3$ b) ha un'unica soluzione per ogni a c) ha infinite soluzioni per $a = 3$ d) ha un'unica soluzione per $a \neq \pm 3$

4. Sia $\mathbf{A}$ una matrice avente rango 5, se il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è impossibile, allora il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ è

   a) 5 b) > 6 c) 6 d) non si può dire

5. Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine 7 con $\det(\mathbf{A}) = 0$. Se $\mathbf{b}$ è un vettore di $\mathbb{R}^7$, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

   a) ha un'unica soluzione per ogni $\mathbf{b}$ b) può avere zero o infinite soluzioni, dipende da $\mathbf{b}$ c) ha infinite soluzioni per ogni $\mathbf{b}$ d) è impossibile per ogni $\mathbf{b}$

6. Il sistema $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

   a) è impossibile b) ha un'unica soluzione c) ha infinite soluzioni d) ha esattamente 3 soluzioni

[7] Tre righe e due colonne.

Esercizi

1. Dopo aver verificato che i vettori

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti, scrivere il vettore $\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ e $\mathbf{x}^3$.

2. Determinare i parametri a, b, c, d in modo tale che il piano di equazione

$$ax + by + cz = d$$

passi per i punti $(0, 2, 2)$, $(-1, 1, 1)$ e $(1, 4, -1)$.

3. Stabilire se i seguenti sistemi hanno soluzioni e, in caso affermativo, determinarle.

$$\text{(a)} \begin{cases} -x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 5 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y + 2z - 2t = 2 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 5y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} 2x + y - z + 4t = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2z - t = 1 \end{cases}$$

4. Determinare, al variare del parametro, il numero di soluzioni dei seguenti sistemi.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} k+4 & 3 \\ 4 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vero o falso?

1. [V] [F] Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo 6×5, avente rango massimo, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ è sempre impossibile.

2. [V] [F] Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo 6×7, avente rango massimo, allora il sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ non è mai impossibile.

3. [V] [F] Nel sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

la matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi una delle equazioni del sistema, per esempio la terza, è superflua. Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x - y + 2z = -3 \\ -2x + 2y - 4z = 6 \end{cases}$$

Ulteriori esercizi

1. Sia $\mathbf{A}$ una matrice di tipo $m \times n$. Dimostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

2. Sia $\mathbf{x}^0$ una soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dimostrare che tutte le altre soluzioni possono essere scritte nella forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{z} \tag{7}$$

dove $\mathbf{z}$ è soluzione del sistema omogeneo associato $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

3. Siano dati i vettori

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sapendo che $\mathbf{x}^1$ è soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$ e $\mathbf{z}^1$ è soluzione del sistema omogeneo associato $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$, scrivere

(a) un altro vettore $\mathbf{z}^2 \neq \mathbf{0}$ soluzione del sistema omogeneo $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$;
(b) un altro vettore $\mathbf{x}^2$ soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

4. Sapendo che i vettori

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sono soluzioni di uno stesso sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{b} \neq \mathbf{0})$, scrivere

(a) una soluzione del sistema omogeneo associato $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$;
(b) un'altra soluzione del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

7.3. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{c}$

I ranghi devono essere uguali tra loro e uguali al numero delle incognite, e cioè 2.

2 $\boxed{c}$

Il sistema $\begin{cases} x_1 + \ x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ è ovviamente equivalente a $x_1 + x_2 = 0$. Le soluzioni sono perciò i vettori della forma $k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

3 $\boxed{d}$

Per il teorema di Cramer, il sistema ha un'unica soluzione se $\det \mathbf{A} \neq 0$ e ciò accade se e solo se $a \neq \pm 3$. Per $a = 3$ è impossibile e per $a = -3$ ha infinite soluzioni.

4 $\boxed{c}$

Se il sistema è impossibile, il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ è uguale al rango di $\mathbf{A} + 1$: aggiungendo una colonna il rango può al massimo aumentare di un'unità.

5 $\boxed{b}$

Per il teorema di Cramer, il sistema non può avere un'unica soluzione. Se il rango di $\mathbf{A}$ è uguale al rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ il sistema ha infinite soluzioni, altrimenti è impossibile.

6 $\boxed{a}$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2, mentre quello della matrice completa è 3.

Esercizi

1 I vettori sono linearmente indipendenti perché il determinante della matrice $\mathbf{A}$ che si ottiene accostandoli è diverso da 0, infatti

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2$$

Per scrivere $\mathbf{e}^1$ come combinazione lineare di $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$ e $\mathbf{x}^3$, si devono determinare tre numeri reali a, b e c tali che

$$a\mathbf{x}^1 + b\mathbf{x}^2 + c\mathbf{x}^3 = \mathbf{e}^1$$

Si deve quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + 2b \qquad = 1 \\ 3a + \ b + 4c = 0 \\ 4a + \qquad 6c = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} a = \ 3/2 \\ b = -1/2 \\ c = -1 \end{cases}$$

2 La generica equazione di un piano è $ax + by + cz = d$. Occorre determinare i parametri a, b, c e d risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \qquad 2b + 2c = d \\ -a + \ b + \ c = d \\ \ a + 4b - \ c = d \end{cases}$$

Il sistema (omogeneo) ha infinite soluzioni, che possono, per esempio, essere scritte nella forma

$$a = -5k \qquad b = 4k \qquad c = k \qquad d = 10k \qquad k \in \mathbb{R}$$

Si ottiene il piano di equazione

$$-5x + 4y + z = 10$$

3 (a) La matrice dei coefficienti ha rango 1, la matrice completa ha rango 2: il sistema è impossibile.

(b) La matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno rango 2. Poiché le incognite sono 4, il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da due parametri; scegliendo come parametri z e t le soluzioni possono essere scritte

$$x = 1 + \frac{h-k}{2} \qquad y = \frac{3k-3h}{2} - 1 \qquad z = k \qquad t = h \qquad k, h \in \mathbb{R}$$

(c) Il determinanate della matrice dei coefficienti è diverso da zero: il sistema ha un'unica soluzione. Essendo omogeneo, l'unica soluzione è la soluzione nulla.

(d) La matrice dei coefficienti e la matrice completa hanno rango 3. Poiché le incognite sono 4, il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro; scegliendo come parametro t le soluzioni possono essere scritte

$$x = \frac{5-3k}{2} \qquad y = \frac{k-3}{4} \qquad z = \frac{5k-3}{4} \qquad t = k \qquad k \in \mathbb{R}$$

4 (a) Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9 - a^2 = 0$$

per $a = \pm 3$. Per $a \neq \pm 3$ la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da 0, quindi il sistema ha un'unica soluzione. Per $a = \pm 3$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e la matrice completa ha rango 3, quindi il sistema è impossibile.

(b) I minori di ordine 2 della matrice dei coefficienti si annullano per $k = 2$. Per $k \neq 2$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 e la matrice completa ha rango 3, infatti

$$\begin{vmatrix} k+4 & 3 & 3k \\ 4 & k & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4k^2 + 16k - 16 = -4(k-2)^2$$

si annulla per $k = 2$. Quindi il sistema è impossibile. Per $k = 2$ entrambe le matrici hanno rango 1, il sistema è possibile e poiché le incognite sono 2 ammette infinite soluzioni.

Vero o falso?

1 Falso. Il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ può essere 5 o 6 e il sistema potrebbe anche avere soluzioni.

2 Vero. Il rango di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ è per forza 6 (uguale al rango di $\mathbf{A}$).

3 Falso. È vero che la matrice dei coefficienti ha rango 2 e un'equazione è superflua, ma non si può "buttar via" un'equazione a caso. Si possono eliminare la prima o la seconda che sono equivalenti, ma non la terza.

Ulteriori esercizi

1 Chiamiamo $\mathcal{N}$ l'insieme delle soluzioni del sistema e dimostriamo che $\mathcal{N}$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Se[8] $\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$ l'affermazione è evidente, altrimenti occorre mostrare che se $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ appartengono a $\mathcal{N}$ e α e β sono numeri reali, anche $\alpha\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{x}^2 \in \mathcal{N}$. Poiché $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$, moltiplicando la prima uguaglianza per α e la seconda per β, sommando membro a membro e applicando la proprietà distributiva, si ha

$$\mathbf{0} = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \mathbf{A}\left(\alpha\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{x}^2\right)$$

ossia $\alpha\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{x}^2 \in \mathcal{N}$.

2 Controlliamo che, se $\mathbf{x}^0$ è una soluzione del sistema, ossia se $\mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$, ogni vettore della forma (7) è soluzione. Si ha, infatti, essendo $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}^0 + \mathbf{z}\right) = \mathbf{A}\mathbf{x}^0 + \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

Viceversa, ogni $\mathbf{x}$ soluzione del sistema può essere scritta nella forma (7). Infatti, da $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}$, sottraendo membro a membro e applicando la proprietà distributiva, si ottiene

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

quindi $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ è soluzione del sistema omogeneo e posto $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0 = \mathbf{z}$, si ricava la (7).

3 (a) Ogni multiplo di $\mathbf{z}_1$ è soluzione del sistema $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$; per esempio,

$$\mathbf{z}^2 = 2\mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Soluzione di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è, per esempio,

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^1 + \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4 (a) La differenza

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è soluzione del sistema $\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

(b) Un'altra soluzione di $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è, per esempio,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^2 + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

---

[8] Ricordiamo che il vettore nullo da solo costituisce un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

4. FUNZIONI LINEARI

Esempi

1 Consideriamo la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita

$$\begin{cases} u = 2x - 2y \\ v = -x + y \end{cases}$$

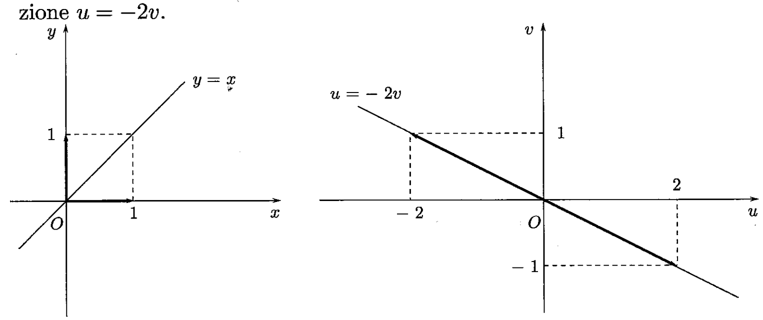
e determiniamone immagine e nucleo. $\mathbf{f}$ è una funzione lineare che può anche essere scritta nella forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

L'insieme immagine (⇛ BPS, pag. 80) di $\mathbf{f}$ è il sottospazio generato dai vettori immagine della base canonica. $\mathbf{f}$ trasforma il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Poiché i due vettori individuano la stessa retta, essa costituisce l'immagine di $\mathbf{f}$, che è l'insieme dei vettori

$$k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

In forma cartesiana, l'immagine di $\mathbf{f}$ è la retta nel piano d'arrivo uv di equazione $u = -2v$.



Il nucleo (⇛ BPS, pag. 80) di $\mathbf{f}$, che è il sottospazio costituito dalla controimmagini del vettore nullo, si ricava risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

In forma cartesiana, è la retta nel piano xy di equazione $x = y$. Può anche essere scritta in forma vettoriale

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

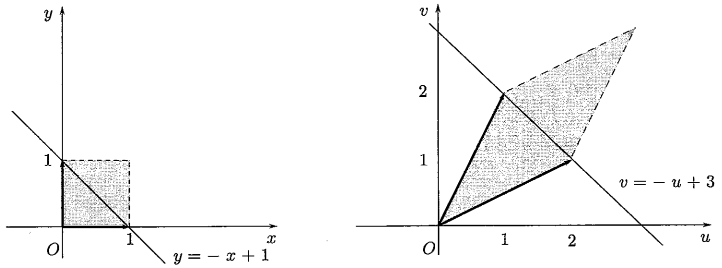
2 Consideriamo la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si tratta di una trasformazione biunivoca da $\mathbb{R}^2$ in sé, in quanto il determinante di $\mathbf{A}$ è diverso da 0:

$$\det(\mathbf{A}) = -3$$

Il valore assoluto del determinante di $\mathbf{A}$ ha un importante significato geometrico: rappresenta il *fattore di dilatazione delle aree* sotto la trasformazione $\mathbf{f}$. La funzione $\mathbf{f}$ trasforma il quadrato di lato unitario individuato dai vettori fondamentali nel parallelogramma indicato in figura, la cui area coincide col modulo del determinante della matrice associata a $\mathbf{f}$.



Ogni trasformazione lineare del piano in sé trasforma rette in rette: per esempio, la retta di equazione $y = -x + 1$ è trasformata nella retta di equazione $v = -u + 3$.
Si controlla facilmente che le rette $y = x$ e $y = -x$ sono trasformate in sé. Tali rette sono *autospazi* associati alla matrice $\mathbf{A}$; in altri termini i loro punti sono gli autovettori di $\mathbf{A}$. Lo verifichiamo calcolando prima gli autovalori. Ciò equivale a cercare per quali valori di a il sistema $\mathbf{Az} = a\mathbf{z}$ ammette infinite soluzioni. $\mathbf{Az} = a\mathbf{z}$ si può riscrivere nella forma $\mathbf{Az} - a\mathbf{z} = \mathbf{0}$, e poi nella forma $(\mathbf{A} - a\mathbf{I})\,\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Tale sistema (lineare omogeneo) ammette infinite soluzioni se e solo se $\det(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = 0$. Dato che

$$\det(\mathbf{A} - a\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-a & 2 \\ 2 & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 - 4 = a^2 - 2a - 3 = 0$$

per $a = -1$ e $a = 3$, gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono

$$-1 \qquad 3$$

Cerchiamo gli autovettori associati a $a = -1$. Poniamo $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Il sistema $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\,\mathbf{z} = \mathbf{0}$ si può scrivere esplicitamente come

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono date da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Gli autovettori associati all'autovalore $a = -1$ sono i vettori della forma $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con k reale non nullo.
Analogamente si ricavano gli autovettori associati a $a = 3$. Si ottengono i vettori della forma $k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con k reale non nullo.

3 Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, lineare e supponiamo di sapere che

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{e}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{e}^3) = \mathbf{f}(\mathbf{e}^2) - \mathbf{f}(\mathbf{e}^1)$$

($\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ indicano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$). Da queste informazioni ricostruiamo la funzione $\mathbf{f}$.
Infatti si ha subito che

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e allora si può scrivere la matrice $\mathbf{A}$ che rappresenta $\mathbf{f}$ in $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Si può scrivere quindi

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice $\mathbf{A}$ ha rango 2 (non c'e' bisogno di calcolarlo!: perché?). L'immagine di $\mathbf{f}$ ha dimensione 2 ed i vettori $\mathbf{f}(\mathbf{e}^1)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{e}^2)$ ne costituiscono una base, di conseguenza la dimensione del nucleo è 1 ($\Rrightarrow$ BPS, pag. 81, formula (5.1)).
Geometricamente l'insieme immagine di $\mathbf{f}$ coincide con il piano che passa per l'origine e per i punti $\mathbf{f}(\mathbf{e}^1)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{e}^2)$, di equazione $w = 6u - 3v$.
Il nucleo è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed è l'insieme dei vettori ortogonali alle righe della matrice $\mathbf{A}$. Tale sistema, equivalente a

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

ha come soluzioni i vettori

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

che costituiscono una retta passante per l'origine.

4 Calcoliamo autovalori e autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (3-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0$$

per $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 2$.
In corrispondenza all'autovalore 3 (di molteplicità 2), il sistema $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ diventa

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione i vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Abbiamo, quindi, un autospazio di dimensione 1. L'autovalore 3 non è regolare.
In corrispondenza all'autovalore 2 (regolare), il sistema $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ diventa

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione i vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$.

Test a risposta multipla

1. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^8$ una funzione lineare. La matrice che rappresenta $\mathbf{f}$ è

a) di tipo 7×8 b) di tipo 8×7 c) quadrata d) non si può dire

2. Quale tra le seguenti funzioni è lineare?

a) $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $f(x,y) = x + y^2$ c) $f(x,y) = x - y + 2$ d) $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

3. Quale tra le seguenti funzioni non è lineare?

a) $\mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-2z \end{pmatrix}$ c) $f(x,y,z,t) = x - y + 2z - t$ d) $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix}$

4. La funzione $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ ax^2 - y \end{pmatrix}$ è lineare

a) solo per $a = 3$ b) per nessun valore di a c) solo per $a = 0$ d) per ogni valore di a

5. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$; se la dimensione del nucleo di $\mathbf{f}$ è 1, allora

a) la dimensione dell'immagine di $\mathbf{f}$ è 3 b) la dimensione dell'immagine di $\mathbf{f}$ è 2 c) $\mathbf{f}$ è suriettiva d) $\mathbf{f}$ è iniettiva

6. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$; se il nucleo di $\mathbf{f}$ è costituito dal solo vettore nullo, quale affermazione è falsa?

a) $\mathbf{f}$ è iniettiva b) la matrice associata a $\mathbf{f}$ ha determinante 0 c) $\mathbf{f}$ è suriettiva d) $\mathbf{f}$ è invertibile

7. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, lineare e tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}^1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^2) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$. Le dimensioni dell'immagine e del nucleo di $\mathbf{f}$ sono rispettivamente

a) 2 e 0 b) 2 e 2 c) 0 e 2 d) 1 e 1

8. Quale tra i seguenti vettori non appartiene allo spazio immagine della funzione lineare associata alla matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. Quale tra i seguenti vettori appartiene al nucleo della funzione lineare associata alla matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ la matrice che la rappresenta. $\mathbf{f}$ è invertibile se e solo se

a) $\alpha = 0$ b) $\alpha = 3$ c) $\alpha \neq 0$ d) $\alpha \neq 9$

11 Gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ sono

[a] 0 e 7 [b] 5 e 7 [c] 0 e 9 [d] 7 e 9

12 La matrice $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

[a] non ha autovalori reali [b] ha autovalori reali distinti [c] ha come autovalore 0 [d] ha autovalori reali coincidenti

Esercizi

1 Descrivere l'insieme immagine e il nucleo delle seguenti funzioni lineari

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$2x - y - 3z = 0$

$$t = f(x, y, z) = (2, -1, -3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} t$$

(c) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(d) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2 Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineari e siano

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{A}^T$ le matrici che le rappresentano. Stabilire se $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ sono iniettive e se sono suriettive.

3 Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare, tale che

$$f(\mathbf{e}^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(\mathbf{e}^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}^3) = f(\mathbf{e}^1) + 2f(\mathbf{e}^2) \qquad f(\mathbf{e}^4) = -f(\mathbf{e}^3)$$

($\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4$ indicano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$). Scrivere la matrice $\mathbf{A}$ associata a $\mathbf{f}$ e calcolare le dimensioni dell'immagine e del nucleo di $\mathbf{f}$.

4 Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare e sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice che la rappresenta.

(a) Dire per quali valori di k è invertibile.

(b) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di controimmagini del vettore $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5 Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare e

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{a}^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{f}(\mathbf{a}^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice che rappresenta $\mathbf{f}$ (rispetto alla base canonica).

6 Descrivere le trasformazioni del piano xy in sé, rappresentate dalle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

indicando, in particolare, eventuali "rette fisse". Calcolare poi gli autovalori delle matrici.

7 Determinare autovalori e autovettori delle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8 Descrivere le trasformazioni dello spazio xyz in sé, rappresentate dalle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

indicando, in particolare, eventuali "rette fisse" ed eventuali "piani fissi". Calcolare poi gli autovalori delle matrici.

9. Determinare autovalori e autovettori delle matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Stabilire se le matrici sono diagonalizzabili, indicando, in caso affermativo, una matrice che le diagonalizzi.

10. Costruire una matrice $\mathbf{Q}$ *ortogonale* (cioè tale che $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$) che diagonalizzi la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vero o falso?

1. V F Una matrice quadrata è singolare[9] se e solo se ha come autovalore 0.
2. V F Una matrice con elementi reali non può avere autovalori complessi.
3. V F Una matrice di ordine 3 ha almeno un autovalore reale.
4. V F Una matrice con autovalori reali distinti è diagonalizzabile.

Ulteriori esercizi

1. Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata di ordine 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dimostrare che, detti λ_1 e λ_2 i suoi autovalori, si ha

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d \quad \text{e} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = ad - bc = \det(\mathbf{A})$$

Il risultato può essere generalizzato.
Se $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *è una matrice quadrata di ordine* n *con autovalori* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *e* $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ *(traccia di* $\mathbf{A}$*), si ha*

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad e \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

---
[9] Ricordiamo che una matrice si dice singolare quando ha determinante nullo.

2. Calcolare autovalori e autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Sia $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ e sia $\mathbf{A} = (x_i x_j)$; calcolare autovalori e autovettori di $\mathbf{A}$.

7.4. Soluzioni

Test a risposta multipla

Le risposte esatte sono

1. $\boxed{b}$

2. $\boxed{d}$

Infatti si può scrivere $\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le funzioni in $\boxed{a}$ e in $\boxed{c}$ sono lineari affini.

3. $\boxed{d}$

Lo si verifica, per esempio, calcolando l'immagine di $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che è $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e non, come dovrebbe, il vettore nullo.

4. $\boxed{c}$

Per eliminare il termine quadratico.

5. $\boxed{a}$

La somma delle dimensioni del nucleo e dell'immagine deve essere 4 (uguale alla dimensione dello spazio di partenza).

6. $\boxed{b}$

Il nucleo ha dimensione 0 e quindi l'immagine ha dimensione 7. Il rango della matrice $\mathbf{A}$ associata a $\mathbf{f}$ è 7 e quindi $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

7. $\boxed{d}$

La dimensioni del nucleo (che contiene il vettore non nullo $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2$) e dell'immagine (che contiene il vettore non nullo $\mathbf{f}(\mathbf{x}^1)$) non possono essere 0 e la loro somma deve essere 2.

8 $\boxed{d}$
Non è combinazione lineare delle colonne di $\mathbf{A}$, infatti

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Il vettore nullo appartiene sempre all'immagine di una funzione lineare. I vettori in $\boxed{a}$ e in $\boxed{b}$ sono immagini, rispettivamente, di $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9 $\boxed{a}$
I vettori del nucleo sono ortogonali alle righe di $\mathbf{A}$ e si ricavano dal sistema

$$\begin{cases} 3x - \quad\quad 4z = 0 \\ \quad\; - y \quad\; = 0 \end{cases}$$

Possono essere scritti nella forma $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R}$.

10 $\boxed{c}$
$\mathbf{f}$ è invertibile se e solo se il determinante della matrice che la rapppresenta è diverso da 0; ciò accade per $\alpha \neq 0$.

11 $\boxed{b}$
Per una matrice triangolare, gli autovalori concidono con gli elementi della diagonale principale.

12 $\boxed{a}$
Gli autovalori si ricavano dall'equazione

$$(5-\lambda)^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 5 \pm 3i$$

sono complessi coniugati.

Esercizi

1 (a) L'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$, il nucleo è il piano di equazione

$$2x - y - 3z = 0$$

formato dai vettori ortogonali al vettore $(2, -1, -3)$.

(b) L'immagine di $\mathbf{f}$ è la retta passante per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; il nucleo è $\{0\}$ (contiene solo il numero 0).

(c) L'immagine di $\mathbf{f}$ è il piano di equazione $3u - 2v - 5w = 0$, il nucleo è $\{\mathbf{0}\}$ (contiene solo il vettore nullo).

(d) L'immagine di $\mathbf{f}$ è tutto $\mathbb{R}^2$, il nucleo si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si trova la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

2 Il rango di $\mathbf{A}$ è 3, quindi l'insieme immagine di $\mathbf{f}$ coincide con $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{f}$ è suriettiva. La dimensione del nucleo è $4 - 3 = 1$, quindi $\mathbf{f}$ non è iniettiva.
Essendo il rango di $\mathbf{A}^T$ uguale al rango di $\mathbf{A}$, l'immagine di $\mathbf{g}$ ha dimensione 3. Il nucleo è costituito dal solo vettore nullo: $\mathbf{g}$ è iniettiva e non è suriettiva.

3 Si ha

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'immagine e il nucleo di $\mathbf{f}$ hanno entrambi dimensione 2.

4 (a) $\mathbf{f}$ è invertibile se e solo se $\det \mathbf{A}$ è diverso da 0. Si ha

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} = -k^2 - 3k + 10$$

che si annulla per $k = 2$ o $k = -5$, per cui $\mathbf{f}$ è invertibile se e solo $k \neq 2$ e $k \neq -5$.
(b) Determinare il numero di controimmagini di $\mathbf{b}$ equivale a determinare il numero di soluzioni del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Per $k \neq 2$ e $k \neq -5$ il vettore $\mathbf{b}$ ha un'unica controimmagine

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Per $k = -5$ il rango di $\mathbf{A}$ è 2 e quello di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ è 3, quindi $\mathbf{b}$ non ha controimmagini. Per $k = 2$ sia rango di $\mathbf{A}$ è 2 che quello di $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ sono uguali a 2, quindi $\mathbf{b}$ ha infinite controimmagini.

5 Sia $\mathbf{A}$ la matrice che rappresenta $\mathbf{f}$. Devono valere le relazioni

$$\mathbf{Aa}^1 = \mathbf{b}^1 \qquad \mathbf{Aa}^2 = \mathbf{b}^2$$

che possono essere scritte in un'unica formula

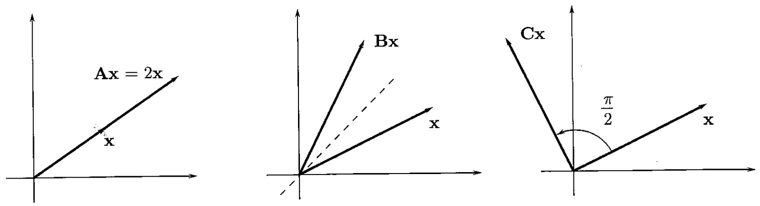
$$\mathbf{A}\left(\mathbf{a}^1\ \mathbf{a}^2\right) = \left(\mathbf{b}^1\ \mathbf{b}^2\right)$$

da cui si ricava

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{b}^1\ \mathbf{b}^2\right)\left(\mathbf{a}^1\ \mathbf{a}^2\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\left(\mathbf{b}^1\ \mathbf{b}^2\right)$ rappresenta $\mathbf{f}$ se nello spazio di partenza si sceglie come base $\left\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2\right\}$. La matrice $\left(\mathbf{a}^1\ \mathbf{a}^2\right)^{-1}$ trasforma i vettori $\mathbf{a}^1$ e $\mathbf{a}^2$ nei vettori fondamentali.

6 Sono, rispettivamente, una dilatazione (di rapporto 2), una simmetria rispetto alla bisettrice e una rotazione di $\pi/2$ in verso antiorario.



Per la prima ogni retta per l'origine è trasformata in sé, per la seconda sono trasformate in sé le bisettrici degli assi, per la terza non vi sono "rette fisse". Gli autovalori delle matrici **A**, **B** e **C** sono rispettivamente

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_1 = i \text{ e } \lambda_2 = -i$$

Tutti gli autovalori sono regolari.
Si noti la presenza di "rette fisse" solo nel caso di autovalori reali. Per la matrice **A** il sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è equivalente all'identità $\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è autovettore. Per la matrice **B** sono autovettori i punti delle bisettrici.

7 La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, come la matrice **A** dell'esercizio precedente, ha come equazione caratteristica

$$(2 - \lambda)^2 = 0$$

e quindi l'autovalore $\lambda = 2$ (con molteplicità algebrica 2), che, però, in questo caso non è regolare. Infatti il sistema $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si riduce all'equazione $x_2 = 0$ e l'autospazio associato è formato dai vettori $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ ed ha dimensione 1.

L'equazione caratteristica delle matrice **B** è

$$(2 - \lambda)^2 + 4 = 0$$

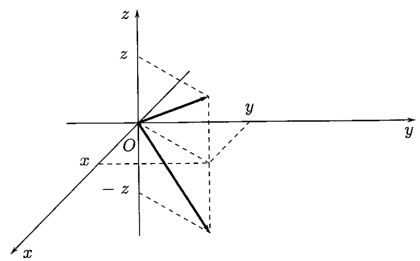
che ha soluzioni complesse $2 \pm 2i$. Agli autovalori $2 + 2i$ e $2 - 2i$ corrispondono, per esempio, gli autovettori complessi $\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$, soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} -2ix - 4y = 0 \\ x - 2iy = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2ix - 4y = 0 \\ x + 2iy = 0 \end{cases}$$

8 Esaminiamo l'azione di **A** e **B** su di un generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Per **A** si ha

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

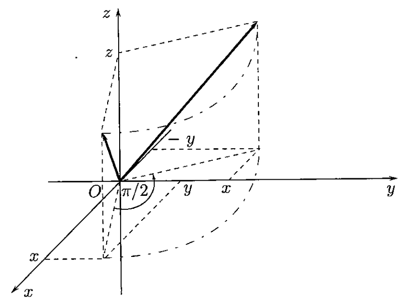
La trasformazione è dunque una simmetria rispetto al piano xy. In questa trasformazione l'asse z e tutte le rette del piano xy sono trasformate in sé.



Per **B** si ha

$$\mathbf{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

La trasformazione è dunque una rotazione attorno all'asse z. In questa trasformazione solo l'asse z è trasformata in sé. In entrambi i casi, però, il piano xy è trasformato in sé.



Gli autovalori di **A**, soluzioni dell'equazione

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1 - \lambda)^2 (-1 - \lambda) = 0$$

sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = -1$$

Gli autovalori di **B**, soluzioni dell'equazione

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \left(\lambda^2 + 1\right)(1 - \lambda) = 0$$
$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \text{ e } \lambda_3 = 1$$

9 L'equazione caratteristica per la matrice **A** è

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1 - \lambda)\left[(2 - \lambda)^2 - 4\right] = 0$$

si trovano gli autovalori

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 4$$

a cui corrispondono, per esempio, gli autovettori

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

soluzioni, rispettivamente, dei sistemi

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2y + \quad 4z = 0 \\ y + \quad 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ y + 4z = 0 \\ y + \ z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \\ y - 2z = 0. \end{cases}$$

Per la matrice $\mathbf{B}$ l'equazione caratteristica è

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 4\right] = \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 5\right) = 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ ha l'autovalore reale 1 e gli autovalori complessi coniugati $1+2i$ e $1-2i$, a cui corrispondono, per esempio, (in $\mathbb{C}^3$) gli autovettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2ix \qquad\qquad = 0 \\ 2x - 2iy - \ 2z = 0 \\ 3x + \ 2y - 2iz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2ix \qquad\qquad = 0 \\ 2x + 2iy - \ 2z = 0 \\ 3x + \ 2y + 2iz = 0 \end{cases}$$

Entrambe le matrici sono diagonalizzabili perché hanno autovalori distinti. Una matrice che diagonalizza $\mathbf{A}$ è, per esempio,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre una che diagonalizza $\mathbf{B}$ è

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -i & i \end{pmatrix}$$

(tali matrici sono ottenute accostando gli autovettori).

10 La matrice $\mathbf{A}$ è simmetrica, quindi tale matrice $\mathbf{Q}$ sicuramente esiste (⇛ BPS, pag. 86). Si calcolano gli autovalori di $\mathbf{A}$, che sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ e due corrispondenti autovettori, per esempio,

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(che sono ortogonali). Poiché occorrono autovettori di norma unitaria, basta dividere $\mathbf{x}^1$ e $\mathbf{x}^2$ per la loro norma $\sqrt{2}$. Una matrice ortogonale che diagonalizza $\mathbf{A}$ è

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vero o falso?

1 Vero. L'equazione caratteristica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ per $\lambda = 0$ si riduce a $\det \mathbf{A} = 0$.

2 Falso. Per esempio, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ non ha autovalori reali.

3 Vero. L'equazione caratteristica è di terzo grado, quindi ha sicuramente una soluzione reale.

4 Vero. Una matrice di ordine n è diagonalizzabile se ha n autovettori reali linearmente indipendenti. Ciò accade sicuramente se gli autovalori sono reali distinti.

Ulteriori esercizi

1 L'equazione caratteristica di $\mathbf{A}$ è

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Svolgendo i conti si trova

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

per cui le radici dell'equazione hanno somma $a+d$ e prodotto $ad - bc$.
Se $\mathbf{A}$ ha ordine n l'equazione caratteristica è

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}\mathbf{A}\lambda^{n-1} + \cdots + \det \mathbf{A} = 0$$

che può essere scritta

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda) = 0$$

2 Non è necessario scrivere il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}$ per determinare autovalori e autovettori. Basta osservare che

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Così ogni vettore la cui somma delle componenti è uguale a zero è un autovettore con autovalore 0. In particolare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sono quattro autovettori linearmente indipendenti, con autovalore 0. Inoltre

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di $\mathbf{A}$ con autovalore 15 (uguale alla traccia di $\mathbf{A}$), poiché

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = (1+2+3+4+5)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 15\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

3 Ogni vettore ortogonale a $\mathbf{x}$ è autovettore con autovalore $\lambda = 0$. Infatti, si può scrivere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1\mathbf{x}^T \\ x_2\mathbf{x}^T \\ \vdots \\ x_n\mathbf{x}^T \end{pmatrix}$$

e quindi, se $\mathbf{v} \perp \mathbf{x}$ si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1(\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{v}) \\ x_2(\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{v}) \\ \vdots \\ x_n(\mathbf{x}^T\cdot\mathbf{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

Di vettori ortogonali a $\mathbf{x}$ linearmente indipendenti ce ne sono $n-1$, quindi $\lambda = 0$ è autovalore con molteplicità $n-1$.

Poiché $\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |\mathbf{x}|^2 =$ somma degli autovalori , si ha che l'autovalore mancante è proprio $|\mathbf{x}|^2$ e un autovettore corrispondente è $\mathbf{x}$ stesso; infatti

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1\mathbf{x}^T \\ x_2\mathbf{x}^T \\ \vdots \\ x_n\mathbf{x}^T \end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1|\mathbf{x}|^2 \\ x_2|\mathbf{x}|^2 \\ \vdots \\ x_n|\mathbf{x}|^2 \end{pmatrix} = |\mathbf{x}|^2\mathbf{x}$$