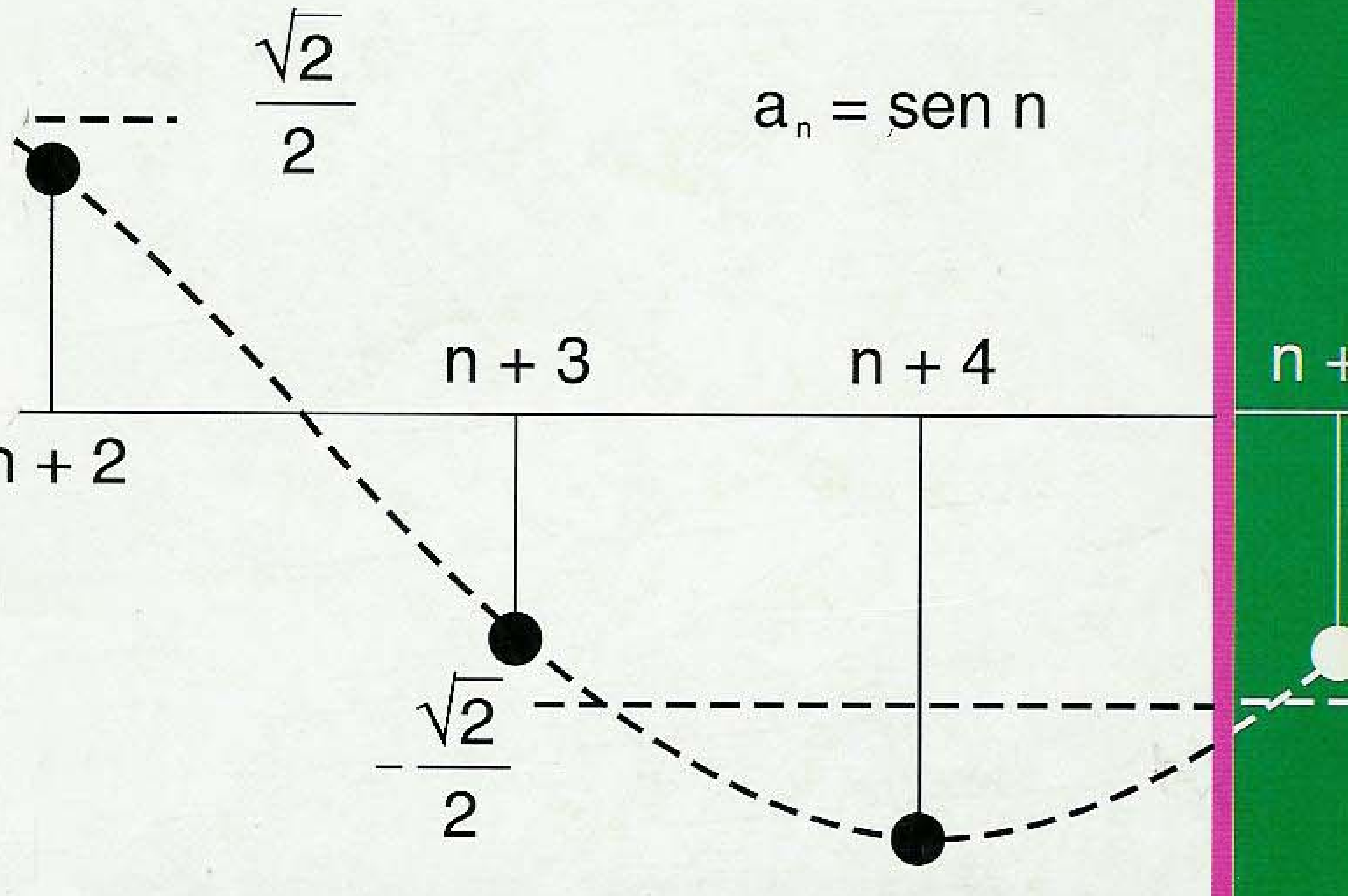
Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Esercitazioni di Matematica

I° Volume parte prima



Liguori Editore

Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Esercitazioni di Matematica

1° Volume
parte prima

edizione riveduta

Liguori Editore

Seconda edizione italiana Gennaio 1995
Liguori Editore, Srl
via Posillipo 394
I 80123 Napoli
http://www.liguori.it

Marcellini, Paolo :
Esercitazioni di Matematica : 1° Volume parte prima/P. Marcellini, C. Sbordone
Napoli : Liguori, 1995
ISBN 88 - 207 - 1684 - 4

Ristampe:

9 8 7 6 5 4 2005 2004 2003 2002 2001 2000

Questo volume è stato stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

I N D I C E

Capitolo 4
NUMERI COMPLESSI

Capitolo 5
MATRICI E SISTEMI LINEARI

Capitolo 6
GEOMETRIA ANALITICA

Capitolo 7
LIMITI DI SUCCESSIONI

Capitolo 11
CALCOLO DI LIMITI CON L'USO DELLE DERIVATE

Capitolo 12
SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

Capitolo 1

NUMERI REALI

1A. Operazioni sugli insiemi

Sia S un insieme e P una proprietà definita su S. L'insieme di tutti gli elementi di S per cui P è vera si indica con

$$\{x \in S:\ P\}$$

(il simbolo "$\in$" si legge "appartiene"; il simbolo":" si legge "tale che") e si chiama *sottoinsieme* (o *parte*) di S determinato dalla proprietà P.

L'insieme delle parti di S si indica con P(S). Il sottoinsieme *vuoto* di S è l'insieme degli elementi di S determinato da una proprietà falsa in S e si indica con φ. L'insieme i cui elementi sono $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si indica con $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Se X,Y sono due sottoinsiemi di S, la loro *unione* $X \cup Y$ è il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà P = « $x \in X$ oppure $x \in Y$ »; cioè:

$$X \cup Y = \{x \in S:\ x \in X \text{ oppure } x \in Y\}\ .$$

L' *intersezione* $X \cap Y$ di X, Y è il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà $P =$ « $x \in X$ e $x \in Y$ »; quindi:

$$X \cap Y = \{x \in S \ : \ x \in X \text{ e } x \in Y\} \ .$$

Il *complemento* di Y rispetto ad X è il sottoinsieme di S determinato dalla proprietà $P=$ « $x \in X$ e $x \notin Y$ » (il simbolo "$\notin$" si legge "non appartiene"); quindi il complemento, che si indica con $X-Y$, è definito da

$$X - Y = \{x \in S \ : \ x \in X \text{ e } x \notin Y\} \ .$$

In particolare il *complementare* di un sottoinsieme X di S è l'insieme $S-X$ e si indica con $\complement X$, oppure con X^c, oppure con $-X$. Risulta quindi:

$$X^c = \{x \in S \ : \ x \notin X\} \ .$$

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n sottoinsiemi di S. La loro *unione* $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ è il sottoinsieme di S definito da

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \{x \in S: \ \exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}: \ x \in X_i\} \ ;$$

la loro *intersezione* $\bigcap_{i=1}^{n} X_i$ è il sottoinsieme di S definito da

$$\bigcap_{i=1}^{n} X_i = \{x \in S: \ x \in X_i \ , \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

(il simbolo "$\forall$" si legge "per ogni").

Una successione $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ di sottoinsiemi di S si indica anche con il simbolo $(X_i)_{i\in N}$, dove N è l'insieme dei numeri naturali. Si pone inoltre:

$$\bigcup_{i\in N} X_i = \{x\in S:\ \exists i\in N : x\in X_i\} ,$$

$$\bigcap_{i\in N} X_i = \{x\in S:\ x\in X_i,\ \forall i\in N\} .$$

Si dice che X è *contenuto* (o *incluso*) in Y se ogni elemento di X è anche elemento di Y; in tal caso si scrive $X\subseteq Y$. In simboli risulta

$$X \subseteq Y \quad \Longleftrightarrow \quad x\in X \Longrightarrow x\in Y$$

(il simbolo "<—>" si legge "se e solo se"; il simbolo "—>" si legge "implica").

Due insiemi X,Y sono *uguali* se ognuno di essi è contenuto nell'altro, cioè:

$$X=Y \Longleftrightarrow X\subseteq Y \ \text{ e } \ Y\subseteq X .$$

Si dice inoltre che X è *contenuto strettamente* (o *propriamente*) in Y se $X \subseteq Y$ e se $X \neq Y$ e si scrive $X\subset Y$.

Come già detto, indichiamo con N l'insieme dei numeri *naturali*, cioè l'insieme

$$N = \{1,2,3,\dots,n,\dots\} ;$$

indichiamo inoltre con Z l'insieme degli *interi* (o interi relativi), con Q l'insieme dei numeri *razionali* e con R l'insieme dei numeri *reali*.

1.1 Consideriamo l'insieme $S = \{1,2,3\}$. Quali delle seguenti scritture sono corrette?

$$1 \in S, \quad 2 \notin S, \quad \{1\} \in S, \quad \{1\} \subseteq S .$$

[La prima e la quarta]

1.2 Quali delle seguenti scritture sono corrette?

$$-1 \in \{x \in R: x^2 = 1\}, \qquad 0 \in \{x \in R: x^2 \neq 1\},$$

$$0 \in \{x \in R: x^2 \leq 1\}, \qquad 1 \in \{x \in R: x^2 < 1\},$$

$$\{x \in R: x^2 \leq 1\} \subset \{x \in R: x^2 \leq 4\} .$$

[Tutte tranne la quarta]

1.3 Quali dei seguenti sottoinsiemi di N sono vuoti?

$$A = \{n \in N: n = n-3\}, \qquad B = \{n \in N: n = 2n-3\},$$

$$C = \{n \in N: 1/(n+2) \in N\}, \quad D = \{n \in N: n/2 \in N\} .$$

[Soltanto A,C sono vuoti. Invece $B = \{3\}$, mentre D è costituito dai numeri naturali pari]

1.4 Consideriamo l'insieme $S = \{1,2,3\}$. Determinare l'insieme $P(S)$ delle parti di S.

[$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$]

1.5 Determinare i tre sottoinsiemi di N individuati dalle seguenti proprietà (il simbolo "$\exists$" si legge "esiste"):

$$P_1 = \ll \exists k \in N: \; x = 3k \gg ,$$

$$P_2 = \ll \exists k \in N: \; x = 3k+1 \gg ,$$

$$P_3 = \ll \exists k \in N: \; x = 3k+2 \gg .$$

[$\{3,6,9,12,\dots\}$; $\{4,7,10,13,\dots\}$; $\{5,8,11,14,\dots\}$]

1.6 Indicare per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di N una proprietà che lo determini:

$A = \{1,3,5,7,9,...\}$, $B=\{3,5,7,9,11,...\}$,

$C = \{3,6,9,12,15,...\}$, $D=\{2,5,8,11,14,...\}$,

$E = \{2,4,8,16,32,...\}$, $F=\{1,4,9,16,25,...\}$.

[A : « $\exists k \in N : x = 2k-1$ »; B: « $\exists k \in N : x=2k+1$ » ;

C : « $\exists k \in N : x = 3k$ » ; D: « $\exists k \in N : x=3k-1$ » ;

E : « $\exists k \in N: x = 2^k$ » ; F: « $\exists k \in N : x=k^2$ »]

1.7 Determinare esplicitamente il seguente sottoinsieme dell'insieme Z dei numeri interi:

$$X = \{x \in Z : 1/x \in Z\} .$$

[Se $x > 1$ allora $0 < 1/x < 1$; perciò in tal caso $1/x \notin Z$. Si verifica in modo analogo che $1/x \notin Z$ se $x < -1$. Rimane da esaminare il caso $-1 \le x \le 1$. La risposta finale è $X = \{-1,1\}$]

1.8 Sia $X = \{x \in Z: \exists k \in Z: x = 3k\}$. Quale relazione sussiste tra i due insiemi

$A=\{x \in Z: \exists k \in Z: x=6k\}$, $B=\{x \in Z: \exists k \in X: x=2k\}$.

[A = B]

1.9 Indichiamo con N_p, N_d rispettivamente l'insieme dei numeri *pari* e *dispari*, cioè:

$N_p=\{n \in N: \exists k \in N: n=2k\}$, $N_d =\{n \in N: \exists k \in N: n=2k-1\}$.

In quale relazione sono con N_p, N_d i seguenti sottoinsiemi di N?

$$A = \{n \in N : n^2 \in N_p\}, \qquad B = \{n \in N : n^2 \in N_d\} ,$$

$$C = \{n \in N : n^3 \in N_p\}, \qquad D = \{n \in N : n^3 \in N_d\} .$$

[Risulta $A=N_p$, $B=N_d$. Infatti se n è pari anche n^2 è pari ($n=2k \Rightarrow n^2 = 2(2k^2)$) e se n è dispari anche n^2 è dispari ($n=2k-1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 - 4k+1 = 2(2k^2-2k+1)-1$); dunque un numero naturale è pari se e solo se il suo quadrato è pari, mentre è dispari se e solo se il suo quadrato è dispari. Analogamente si verifica che $C=N_p$, $D=N_d$]

1.10 Verificare che

$$X \subseteq Y \iff X \cup Y = Y .$$

[$\Rightarrow$ In generale risulta $Y \subseteq X \cup Y$. Quindi basta verificare che $X \cup Y \subseteq Y$. Ciò segue dal fatto che, se $x \in X \cup Y$, allora $x \in Y$ oppure $x \in X \subseteq Y$; perciò in ogni caso $x \in Y$.

$\Leftarrow$ Basta osservare che $X \subseteq X \cup Y = Y$]

1.11 Verificare che

$$X \subseteq Y \iff X \cap Y = X .$$

[$\Rightarrow$ Essendo certamente $X \cap Y \subseteq X$, basta dimostrare che $X \subseteq X \cap Y$; ciò segue subito dall'ipotesi, dato che, se $x \in X$, allora anche $x \in Y$ e quindi $x \in X \cap Y$.

$\Leftarrow$ Basta osservare che $X = X \cap Y \subseteq Y$]

1.12 Verificare che

$$X \subseteq Y \iff Y^c \subseteq X^c .$$

[Supponiamo che $X \subseteq Y$; allora $x \in Y^c \Rightarrow x \notin Y \Rightarrow x \notin X \Rightarrow x \in X^c$.
Viceversa, se $Y^c \subseteq X^c$, allora $x \in X \Rightarrow x \notin X^c \Rightarrow x \notin Y^c \Rightarrow x \in Y$]

1.13 Verificare che $X-Y = X \cap Y^c$.

[$x \in X-Y \iff x \in X$ e $x \notin Y \iff x \in X$ e $x \in Y^c \iff x \in X \cap Y^c$]

1.14 Verificare che $(X^c)^c = X$.

[$x \in (X^c)^c \iff x \notin X^c \iff x \in X$]

1.15 Dimostrare la *proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione* :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) .$$

1.16 Dimostrare la *proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione* :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) .$$

1.17 Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di N:

$$X_o = \{n \in N: \ \exists k \in N: \ n=4k\} ,$$
$$X_1 = \{n \in N: \ \exists k \in N: \ n=4k-1\},$$
$$X_2 = \{n \in N: \ \exists k \in N: \ n=4k-2\},$$
$$X_3 = \{n \in N: \ \exists k \in N: \ n=4k-3\}.$$

Verificare che essi sono a due a due disgiunti e che si ha:

$$X_o \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 = N.$$

[Verifichiamo ad esempio che $X_1 \cap X_2 = \Phi$. Se esistesse $n \in X_1 \cap X_2$, esisterebbero due numeri naturali k_1, k_2 tale che $n=4k_1-1$, $n=4k_2-2$; ciò è assurdo in quanto ne seguirebbe $4k_1-1=4k_2-2$, cioè $k_2-k_1= 1/4$ non sarebbe un numero intero.

L'ultima uguaglianza si può dimostrare verificando che ogni numero pari appartiene a $X_0 \cup X_2$, mentre ogni numero dispari appartiene a $X_1 \cup X_3$.

A tale scopo consideriamo n pari. In tal caso esiste $h \in N$ per cui $n=2h$; inoltre esiste $k \in N$ tale che $h=2k$ oppure $h=2k-1$ a seconda che h sia pari o dispari. Nel primo caso risulta $n=2h$, $h=2k$ e perciò $n=4k \in X_0$. Nel secondo caso si ha $n=2h$, $h=2k-1$ e perciò $n=4k-2 \in X_2$. Analogamente si procede se n è dispari]

1.18 Dimostrare le *relazioni di De Morgan:*

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c \; ; \quad (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c .$$

[Dimostriamo la prima: $x \in (X \cup Y)^c \iff x \notin X \cup Y \iff x \notin X$ e $x \notin Y \iff x \in X^c$ e $x \in Y^c \iff x \in X^c \cap Y^c$.

Dimostriamo la seconda: $x \in (X \cap Y)^c \iff x \notin X \cap Y \iff x \notin X$ o $x \notin Y \iff x \in X^c$ o $x \in Y^c \iff x \in X^c \cup Y^c$]

1.19 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n sottoinsiemi di un insieme prefissato. Generalizzando l'esercizio precedente, dimostrare le relazioni di De Morgan:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c \; ; \quad \left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} X_i^c .$$

[Dimostriamo la prima: $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)^c \iff x \notin \bigcup_{i=1}^{n} X_i \iff$

$x \notin X_i, \quad \forall i = 1,2,\ldots,n \iff x \in X_i^c \quad \forall i=1,2,\ldots,n \iff$

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} X_i^c$. Analogamente si dimostra la seconda]

1.20 Per ogni $k \in N$ poniamo $X_k = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{k}\}$.

Determinare il sottoinsieme di R $\bigcap_{k \in N} X_k$.

[$\bigcap_{k \in N} X_k = \{1\}$. Ciò segue dalle relazioni:

$1 \in \bigcap_{k \in N} X_k \subseteq X_1 = \{1\}]$

1.21 Per ogni $k \in N$ poniamo $X_k = \{n \in N:\ n > k\}$.

Determinare l'insieme $\bigcap_{k \in N} X_k$.

[$\bigcap_{k \in N} X_k = \phi$. Infatti, se esistesse $m \in \bigcap_{k \in N} X_k$, risulterebbe $m \in X_k$ $\forall k \in N$. In particolare, per k=m, avremmo $m \in X_m$, cioè l'assurdo $m > m$]

1.22 Per ogni $k \in N$ poniamo $X_k = \{n \in N:\ n \geq k\}$.

Determinare l'insieme $\bigcap_{k \in N} X_k$.

[Come nell'esercizio precedente risulta $\bigcap_{k \in N} X_k = \phi$. Però la dimostrazione va lievemente modificata]

1B. Funzioni

Una *funzione* dall'insieme X all'insieme Y è una legge che ad ogni elemento dell'insieme X fa corrispondere un elemento dell'insieme Y. Se indichiamo con f tale funzione, scriveremo $f\colon X \to Y$, oppure $y = f(x)$ con $x \in X$ e $y \in Y$. Si dice che X è il *dominio* (o *insieme di definizione*) di f.

Sottolineamo che una funzione $f\colon X \to Y$ è una regola che ad ogni $x \in X$ associa *un solo* $y \in Y$. In generale non è detto che ad ogni $y \in Y$ corrisponda un $x \in X$ per cui $y = f(x)$; potrebbe infatti accadere che a qualche $y \in Y$ non corrisponda alcun x, oppure che a qualche $y \in Y$ corrispondano molti $x \in X$ per cui $y = f(x)$.

Ad esempio, la funzione $f\colon N \to N$ definita $f(x) = 2x$ è la corrispondenza che ad ogni numero naturale associa il suo doppio. Con i simboli usati in precedenza risulta X=N, Y=N. Ad ogni numero naturale $x \in X$ corrisponde un solo $y \in Y$ (uguale a 2x). Non vale però il viceversa: non è vero che ad ogni $y \in Y$ corrisponde un numero naturale $x \in X$ tale che $2x=y$; ciò è possibile soltanto se y è pari; infatti, solo se y è pari $x = y/2 \in N$.

Consideriamo un altro esempio: la funzione $f:R \to R$ definita da $f(x)=x^2$, cioè $y=x^2$, con $x,y \in R$. Anche in questo caso ad ogni $x \in R$ è associato un solo $y \in R$ per cui $y=x^2$. Però solo ad $y=0$ corrisponde un solo x ($x = 0$) per cui $y=x^2$; al contrario, se $y>0$ esistono due numeri x reali per cui $y=x^2$ ($x=\pm\sqrt{y}$), mentre se $y < 0$ non esiste alcun numero reale per cui $x^2=y<0$.

Sia $f: X \to Y$. Si dice che f è *suriettiva* (o *surgettiva*) se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ per cui $y=f(x)$.

Ad esempio, le due funzioni considerate precedentemente non sono suriettive. Viceversa, la funzione $f:R \to R$ definita da $f(x)=2x$ è suriettiva.

Sia $f:X \to Y$. Si dice che f è *iniettiva* se dalla relazione $f(x)=f(x')$ segue $x=x'$. Ciò è equivalente a dire che se $x \neq x'$ allora $f(x) \neq f(x')$.

La funzione $f:N \to N$ definita da $f(x)=2x$ è iniettiva, mentre la funzione $f:R \to R$ definita da $f(x)=x^2$ non è iniettiva (perchè, se $(x)^2=(x')^2$, allora risulta $x=x'$ oppure $x=-x'$, e ciò contrasta con la definizione data se $x' \neq 0$).

Se $f:X \to Y$ è contemporaneamente iniettiva e suriettiva, allora si dice che f è *invertibile* o *bigettiva* (oppure si dice che f è una *corrispondenza biunivoca*).

Se $f : X \to Y$ è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi X,Y, allora è definita la *funzione inversa*, come quella funzione che ad ogni $y \in Y$ fa corrispondere il solo $x \in X$ per cui $y=f(x)$. La funzione inversa si indica con il simbolo f^{-1}. Naturalmente il dominio di f^{-1} è Y e si ha: $f^{-1}: Y \to X$.

Infine, se abbiamo due funzioni $g:X \to Y$ e $f:Y \to Z$, possiamo considerare la *funzione composta* $h:X \to Z$ definita combinando le due precedenti funzioni nel modo seguente: se $y=g(x)$ e $z=f(y)$ allora $z=h(x)$. Si usano i zione f^{-1}: $N \to N$ definita da: $f^{-1}(y) = y+1$ se y è dispari, $f^{-1}(y) =$ $= y-1$ se y è pari. Quindi, in questo caso, f^{-1} coincide con f]

1.27 Sia $f:N\to N$ la funzione definita nell' esercizio precedente. Verificare che la funzione composta di f con f stessa è la funzione identità, cioè verificare che $f(f(x)) = x$ per ogni $x \in N$.

1.28 Consideriamo le funzioni $f:N\to N$ e $g:N\to N$ definite da $f(x)=x^3$, $g(x)=2x$. Determinare le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

[$g \circ f(x)=g(f(x))=2x^3$; $f \circ g(x)=f(g(x)) = 8x^3$]

1.29 Date le funzioni $g:X\to Y$, $f:Y\to Z$, $h=f\circ g$, (perciò $h:X\to Z$), dimostrare che:

(a) Se h è iniettiva anche g è iniettiva.
(b) Se h è iniettiva e g è suriettiva allora f è iniettiva.

[(a) Se $g(x) = g(x')$ allora $f(g(x))=f(g(x'))$, cioè $h(x)=h(x')$. Dato che per ipotesi h è iniettiva, allora $x=x'$.
(b) Allo scopo di provare che $f:Y\to Z$ è iniettiva, consideriamo y,y' tali che $f(y) = f(y')$. Dato che g è suriettiva, esistono $x,x' \in X$ tali che $g(x) = y$, $g(x')=y'$. Allora $f(g(x)) = f(g(x'))$, cioè $h(x)=h(x')$. Dato che h è iniettiva risulta $x=x'$ e perciò $y=g(x)=g(x')=y'$]

Consideriamo una funzione $f:X\to Y$. Se A è un sottoinsieme di X, l'*immagine* di A mediante f, indicata con f(A), è il sottoinsieme di Y definito da

$$f(A) = \{y\in Y: \ \exists x\in A : y=f(x) \} .$$

Se B è un sottoinsieme di Y, l' *immagine inversa* di B mediante f, indicata con $f^{-1}(B)$, è il sottoinsieme di X definito da

$$f^{-1}(B)=\{x\in X:\ f(x)\in B\}\ .$$

1.30 Sia $f\colon X \to Y$. Verificare che

(a) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A, \qquad \forall A \subseteq X$;

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B, \qquad \forall B \subseteq Y$.

[(a) Se $x \in A$ allora $f(x) \in f(A)$ e perciò $x \in f^{-1}(f(A))$ per la stessa definizione di immagine inversa.
(b) Se $y \in f(f^{-1}(B))$ allora esiste $x \in f^{-1}(B)$ tale che $y=f(x)$. Essendo $x \in f^{-1}(B)$, per definizione si ha che $f(x) \in B$. Dunque $y \in B$]

1.31 Esibire un esempio di funzione per cui non vale il segno "=", invece che "$\supseteq$", nella formula (a) dell'esercizio precedente.

[Ad esempio $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x)=x^2$. Se $A=\{x\in\mathbb{R}: 0\le x\le 1\}$, risulta $f(A) = A$ e $f^{-1}(f(A))=f^{-1}(A)=\{x\in \mathbb{R}: -1\le x \le 1\}$]

1.32 Esibire un esempio di funzione per cui non vale il segno "=", invece che "$\subseteq$", nella formula (b) dell'esercizio 1.30.

[Ad esempio ogni funzione *costante* $f\colon X \to Y$ con Y contenente più di un punto. Una funzione f costante è definita da $f(x)=y_0$ per ogni $x\in X$, con y_0 fissato in Y. Risulta $f(A)=\{y_0\}$ qualunque sia $A \subseteq X$; risulta quindi anche $f(f^{-1}(B))=\{y_0\}$ qualunque sia $B \subseteq Y$]

1.33 Dimostrare che $f\colon X\to Y$ è iniettiva se e solo se $f^{-1}(f(A)) = A$ per ogni $A \subseteq X$.

[Se la condizione enunciata è soddisfatta, allora, in particolare, per ogni $\bar{x} \in X$ si ha $f^{-1}(f(\{\bar{x}\}))=\{\bar{x}\}$, cioè $\{x\in X: f(x)=f(\bar{x})\}=$ $=\{\bar{x}\}$ e dunque f è iniettiva.
Viceversa, se f è iniettiva e $A \subseteq X$, per la (a) dell'esercizio 1.30, basta dimostrare che è $f^{-1}(f(A))\subseteq A$. Sia dunque $x \in f^{-1}(f(A))$, allora è $f(x) \in f(A)$ ed essendo f iniettiva, si ha necessariamente $x\in A$]

1.34 Dimostrare che $f:X \to Y$ è suriettiva se e solo se $f(f^{-1}(B)) = B$ per ogni $B \subseteq Y$.

[Se la condizione enunciata è soddisfatta, si ha in particolare $f(f^{-1}(Y)) = Y$ ed essendo $f^{-1}(Y) = X$ se ne deduce $f(X) = Y$, cioè che f è suriettiva. Viceversa, se f è suriettiva e $B \subseteq Y$, per la (b) dell'esercizio 1.30 basta provare che $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$. Se $y \in B$ esiste $x \in X$ tale che $y=f(x)$. Allora $y=f(x) \in B$ e cioè $x \in f^{-1}(B)$; perciò esiste $x \in f^{-1}(B)$ tale che $y=f(x)$. Da cui l'asserto, per definizione di immagine di un insieme]

1C. **Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore**

Un sottoinsieme X dell'insieme R dei numeri reali si dice *limitato superiormente* se esiste un numero reale L tale che $x \le L$ per ogni $x \in X$. Un siffatto L si dice *maggiorante* di X. Analogamente diciamo che X è *limitato inferiormente* se esiste un *minorante* di X, cioè se esiste un numero reale $\ell \le x$ per ogni $x \in X$.

Ad esempio, l'insieme X dei numeri reali positivi è limitato inferiormente ma non è limitato superiormente. Infatti lo zero (ed anche ogni numero reale negativo) è un minorante per X; mentre se, per assurdo, supponiamo che L sia un maggiorante di X, dovrebbe risultare $L \ge x$ per ogni $x \in R$ e ciò non vale ad esempio per $x = L + 1$.

Un sottoinsieme X dell'insieme dei numeri reali si dice *limitato* se è limitato sia superiormente che inferiormente. Quindi X è limitato se e solo se esistono due numeri reali ℓ, L tali che $\ell \le x \le L$ per ogni $x \in X$.

1.35 Verificare che i seguenti sottoinsiemi di R sono limitati

$$A = \{\frac{n-1}{n} : n \in N\}; \qquad B = \{\frac{2n}{n^2+1} : n \in Z\}.$$

[Risulta $0 \leq x \leq 1$ per ogni $x \in A$. Invece per l'insieme B, si può verificare la relazione $-1 \leq x \leq 1$ per ogni $x \in B$ (si veda anche l'esercizio 1.38)]

1.36 Ricordando la definizione di valore assoluto ($|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x<0$), verificare che un insieme X è limitato se e solo se esiste un numero reale M tale che $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$

[Se X è limitato, per definizione esistono due numeri reali ℓ, L tali che $\ell \leq x \leq L$ per ogni $x \in X$. Sia M il più grande tra $|\ell|$, $|L|$; risulta $L \leq |L| \leq M$ e $\ell \geq -|\ell| \geq -M$. Se ne deduce che $-M \leq x \leq M$ per ogni $x \in X$ e ciò equivale a (vedere l'esercizio 3.27) $|x| \leq M$. Viceversa, se $|x| \leq M$ per ogni $x \in X$, allora risulta $-M \leq x \leq M$ e quindi $-M$ è un minorante per X, mentre M è un maggiorante]

Sia X un sottoinsieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Si dice che un numero reale M è l'*estremo superiore* di X se M è il più piccolo dei maggioranti di X. Ciò equivale a dire che M è uno dei maggioranti e che inoltre ogni numero inferiore ad M, diciamo $M-\varepsilon$ con ε positivo, non è un maggiorante; quindi $M-\varepsilon$ è minore di qualche elemento di X. In simboli:

$$\left.\begin{array}{c} M = \text{estremo superiore} \\ \text{dell'insieme } X \\ (M = \sup X) \end{array}\right| \iff \begin{cases} M \geq x, & \forall x \in X; \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in X : M - \varepsilon < x. \end{cases}$$

Analogamente, se X è un sottoinsieme di R non vuoto e limitato inferiormente, si dice che m è l'*estremo inferiore* di X se m è il più grande dei minoranti di X. Ciò significa che m è un minorante di X e che ogni numero superiore ad m, diciamo $m+\varepsilon$, con ε positivo, non è un minorante. In simboli:

$$\left.\begin{array}{c} m = \text{estremo inferiore} \\ \text{dell'insieme } X \\ (m = \inf X) \end{array}\right| \iff \begin{cases} m \leq x, & \forall x \in X; \\ \forall \varepsilon > 0 & \exists x \in X : m + \varepsilon > x. \end{cases}$$

Per descrivere gli insiemi non limitati si utilizzano i simboli $+\infty$, $-\infty$. In particolare si dice che l'estremo superiore di un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è $+\infty$ se X non è limitato superiormente; mentre si dice che l'estremo inferiore di X è $-\infty$ se X non è limitato inferiormente. In simboli:

$$\sup X = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall L \ \exists x \in X : x > L ;$$
$$\inf X = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \ell \ \exists x \in X : x < \ell .$$

La prima delle due relazioni sopra scritte si spiega in questo modo: l'estremo superiore di X vale $+\infty$ se X non è limitato superiormente; cioè se, qualunque sia il numero $L \in \mathbb{R}$ che fissiamo, L non è un maggiorante di X; dire che L non è un maggiorante equivale a dire che non vale la relazione: $x \leq L$ per ogni $x \in X$; ciò significa che per almeno un $x \in X$ vale la relazione opposta: $x > L$. Analogamente si spiega la definizione di $\inf X = -\infty$.

Osserviamo che nelle relazioni sopra scritte ci si può limitare a considerare $L > 0$, $\ell < 0$.

Per finire ricordiamo che se l'estremo superiore M di un insieme X è un numero reale che appartiene ad X stesso, si dice che M è il *massimo* di X. Analogamente si dice che un numero reale m è il *minimo* di X se m è l'estremo inferiore di X e se m è anche un elemento di X. In simboli:

$$\left.\begin{array}{l} M = \text{massimo di } X \\ \\ (M = \max X) \end{array}\right| \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} M \geq x, \quad \forall x \in X; \\ \\ M \in X . \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} m = \text{minimo di } X \\ \\ (m = \min X) \end{array}\right| \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} m \leq x, \quad \forall x \in X; \\ \\ m \in X . \end{array}\right.$$

Ad esempio, la prima delle due relazioni sopra scritte si spiega in questo modo: per definizione M è il massimo di X se valgono le seguenti tre relazioni

$$M \geq x, \quad \forall x \in X; \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X: M - \varepsilon < x; \quad M \in X.$$

Allora, dato che $M \in X$, la seconda relazione è verificata automaticamente perchè, per ogni $\varepsilon > 0$, risulta $M - \varepsilon < x$ pur di scegliere $x = M$.

1.37 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore ed eventualmente il massimo ed il minimo dell' insieme

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in N \right\} .$$

[Dato che $n \in N$, risulta $(n-1)/n \geq 0$; inoltre per $n=1$ risulta $(n-1)/n = 0$. Ciò significa che il numero reale 0 è il minimo di A (e quindi è anche l'estremo inferiore) perchè: $0 \leq x$, $\forall x \in A$; $0 \in A$. Perciò $\inf A = \min A = 0$. Verifichiamo ora che $\sup A = 1$, cioè che $1 \geq x$, $\forall x \in A$; e che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$: $1 - \varepsilon < x$. La relazione $1 \geq x$, $\forall x \in A$ significa $1 \geq (n-1)/n$, che equivale a $n \geq n-1$, cioè $0 \geq -1$ che è quindi verificata. Fissato $\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione nell' incognita n: $1 - \varepsilon < (n-1)/n$; semplificando la frazione a secondo membro abbiamo $1 - \varepsilon < 1 - 1/n$, cioè $-\varepsilon < -1/n$, che equivale a $\varepsilon > 1/n$, cioè ancora $n > 1/\varepsilon$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, abbiamo trovato dei valori di $n \in N$ per cui $(n-1)/n > 1 - \varepsilon$; abbiamo infatti verificato che basta scegliere $n > 1/\varepsilon$. Ad esempio, se $\varepsilon = 1$ possiamo scegliere $n=2$; se $\varepsilon = 0.001$ basta prendere n più grande di mille, e così via.
Il numero 1 non è un massimo per l'insieme A perchè $1 \notin A$. Infatti la relazione $1 \in A$ significa che per qualche $n \in N$ risulta $1 = (n-1)/n$; tale relazione equivale a $n = n-1$, cioè $0 = -1$ che è una relazione falsa]

1.38 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore ed eventualmente il massimo ed il minimo dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} : n \in Z \right\} .$$

[Come già indicato nell'esercizio 1.35, l'insieme dato è limitato. Infatti risulta $-1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1$ per ogni $n \in Z$, come si verifica facilmente eseguendo i conti:

$$-1 \leq 2n/(n^2+1) \leq 1 \iff -(n^2+1) \leq 2n \leq n^2+1 \iff$$
$$-(n^2+2n+1) \leq 0 \leq n^2-2n+1 \iff -(n+1)^2 \leq 0 \leq (n-1)^2 .$$

L'ultima relazione è manifestamente vera a causa dei quadrati. Dato che per $n=\pm 1$ risulta $2n/(n^2+1)=\pm 1$, il numero $m=-1$ è il minimo di A, mentre $M=1$ è il massimo. Riassumendo abbiamo che $\sup A=\max A = 1$, $\inf A = \min A =-1$]

1.39 Calcolare gli estremi superiore ed inferiore ed eventualmente il massimo ed il minimo dei seguenti insiemi

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} : n\in N \right\}; \qquad B = \left\{ \frac{3n+2}{n} : n\in N \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n\in N \right\}; \quad D = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} : n\in N \right\}$$

[$\sup A = \max A = 2$, $\inf A=1$. Conviene rappresentare gli elementi di B nella forma $3+2/n$; risulta $\sup B = \max B=5$, $\inf B = 3$. Riguardo agli insiemi C,D, è opportuno considerare separatamente i termini che hanno l'indice n pari (ed in tal caso $(-1)^n=1$) da quelli che hanno l'indice n dispari (per cui risulta $(-1)^n=-1$). Si ottiene $\sup C = \max C = 1/2$, $\inf C = \min C =-1$; $\sup D = 1$, $\inf D=-1$]

1.40 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del sottoinsieme di numeri reali X che in forma decimale hanno parte intera uguale a zero e parte decimale con una sola cifra decimale diversa da zero.

[L'insieme considerato si può rappresentare nella forma:

$$X = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \{1,2,3,\dots,9\},\ n\in N \right\}.$$

Risulta $\inf X=0$, $\max X = 9/10$]

1.41 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del sottoinsieme dei numeri reali X che in forma decimale hanno parte intera uguale a zero e parte decimale formata da un numero finito di cifre diverse da zero.

[Risulta $\inf X=0$, $\sup X=1$. Se si ammette che il numero finito di cifre decimali diverse da zero possa anche essere zero, allora risulta anche min X=0]

1.42 Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore del sottoinsieme di numeri reali X che in forma decimale hanno parte intera uguale a zero e parte decimale composta dalle sole cifre 0 e 7.

[min X=0, max $X=0.\overline{7} = 7/9$]

1.43 Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme

$$A = \{ n + \frac{2}{n} : \; n \in N \} \; .$$

[Per ogni $n \in N$ indichiamo con $x_n = n+2/n$. Se $n > 2$ risulta $0 < 2/n < 1$; sommando n in tutti i membri otteniamo $n < x_n < n+1$ per ogni $n > 2$. Ciò implica che l'insieme A non è limitato superiormente e quindi sup A = =+ ∞ . Inoltre, dalla relazione $n < x_n$, $\forall n \geq 3$ deduciamo che $x_n > n \geq 3$. Dato che da verifica diretta risulta $x_1 = x_2 = 3$, possiamo concludere che min A = inf A = 3]

1.44 Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore degli insiemi

$$A = \{ n+ \frac{3}{n} : n \in N \} ; \qquad B = \{ n+ \frac{4}{n} : n \in N \} ;$$

$$C = \{ \frac{1}{n} - n : n \in N \} ; \qquad D = \{ (-1)^n n+ \frac{1}{n} : n \in N \} .$$

[sup A=+ ∞, min A=7/2; sup B=+ ∞ , min B=4; max C=0, inf C=- ∞ ; sup D =+∞, inf D =-∞]

1.45 Siano A,B due insiemi limitati e non vuoti di numeri reali, con $A \subseteq B$. Verificare che

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

[L'estremo inferiore di A è un minorante di A e l'estremo superiore di A è un maggiorante, quindi $\inf A \leq \sup A$. L'estremo inferiore di B è un minorante di B, cioè $\inf B \leq b$ per ogni $b \in B$; essendo $A \subseteq B$, in particolare si ha $\inf B \leq a$ per ogni $a \in A$ e perciò $\inf B$ è un minorante di A. Ma allora $\inf B \leq \inf A$, perchè $\inf A$ è il più grande minorante di A. Analogamente si dimostra l'ultima disuguaglianza].

1.46 Siano $f:X \to R$, $g:X \to R$ due funzioni limitate. Verificare che

$$\inf_{x \in X} f(x) + \inf_{x \in X} g(x) \leq \inf_{x \in X} \{f(x)+g(x)\};$$

$$\sup_{x \in X} f(x) + \sup_{x \in X} g(x) \geq \sup_{x \in X} \{f(x)+g(x)\}.$$

[Indichiamo con $m = \inf_{x \in X} f(x)$, $m' = \inf_{x \in X} g(x)$. Risulta $m \leq f(x), m' \leq g(x)$, $\forall x \in X$; quindi $m+m' \leq f(x)+g(x)$ per ogni $x \in X$. Ciò significa che $m+m'$ è un minorante della funzione somma $f(x) + g(x)$. Perciò $m+m' \leq$ $\leq \inf_{x \in X} \{f(x)+g(x)\}$. In modo analogo si dimostra l'altra disuguaglianza]

1D. Numeri razionali e numeri reali

Ricordiamo che il campo dei numeri reali R è *completo;* ciò si può esprimere dicendo che ogni sottoinsieme X di R, non vuoto e limitato superiormente, ammette in R estremo superiore. Analogamente ogni insieme $X \subset R$ non vuoto e limitato inferiormente ammette in R estremo inferiore.

Il campo Q dei numeri razionali non gode di tale proprietà, cioè non è completo. In altre parole esistono degli insiemi limitati in Q che non hanno in Q estremo inferiore o estremo superiore (si vedano ad esempio gli esercizi 1.49, 1.50).

1.47 Dimostrare che non esiste alcun numero razionale $x \in Q$ tale che $x^3 = 2$.

[Supponiamo per assurdo che esista una frazione m/n, con m e n interi positivi primi fra loro, tale che $(m/n)^3=2$. In tal caso $m^3=2n^3$; perciò m^3 è pari. Ma allora anche m è pari, perchè se fosse dispari anche m^3 sarebbe dispari. Quindi m è della forma $m=2k$ con $k\in N$; ne segue $8k^3=2n^3$, cioè $n^3=4k^3$. Ma allora anche n è pari e ciò è assurdo, perchè avevamo supposto m,n primi fra loro]

1.48 Sia M l'estremo superiore in R dell'insieme

$$A = \{x\in Q:\ x^3<2\} .$$

Verificare che risulta $M^3=2$.

[Si può dimostrare che non sono possibili le relazioni $M^3<2$ e $M^3>2$. Limitatamente alla prima delle due, supponiamo per assurdo che $M^3<2$ e mostriamo che in tal caso M non è un maggiorante di A, cioè che esiste $x\in A$, per cui $M<x$; se un tale x esiste, deve essere della forma $x=M+\varepsilon$ con $\varepsilon>0$. Poniamo quindi $x=M+\varepsilon$ e mostriamo che è possibile scegliere ε (con $0<\varepsilon\leq 1$) in modo che $x\in A$, cioè in particolare $(M+\varepsilon)^3<2$.
Essendo $\varepsilon\leq 1$ si ha pure $\varepsilon^2\leq\varepsilon$, $\varepsilon^3\leq\varepsilon$; quindi $(M+\varepsilon)^3=M^3+3M^2\varepsilon+3M\varepsilon^2+\varepsilon^3\leq M^3+\varepsilon(3M^2+3M+1)$. Ma allora risulta $(M+\varepsilon)^3<2$ se scegliamo ε minore di $(2-M^3)/(3M^2+3M+1)$]

1.49 Verificare che l'insieme $A = \{x\in Q:\ x^3<2\}$ non ammette estremo superiore nell'ambito dei numeri razionali.

[Utilizzare i risultati degli esercizi 1.48 e 1.47]

1.50 Verificare che l'insieme $B= \{x\in Q:\ x^3>2\}$ non ammette estremo inferiore nell'ambito dei numeri razionali.

1.51 Se a è un numero razionale e x,y sono numeri irrazionali ($a\in Q$; $x,y\in R-Q$), che cosa si può dire su $a+x$, $x+y$, $a\cdot x$, $x\cdot y$?

[$a+x\in R-Q$; $a\cdot x\in R-Q$ se $a\neq 0$; su $x+y$ e $x\cdot y$ non si può in generale dire nulla, nel senso che è possibile che siano razionali o irrazionali (il lettore esibisca degli esempi)]

1.52 Siano $m,n\in N$ e supponiamo che $\sqrt{m}$ sia un numero irrazionale. Verificare che $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ è irrazionale.

[Se $a=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ fosse razionale, allora anche

$$a^2=m+2\sqrt{m}\sqrt{n}+n=2a\sqrt{m}-m+n$$

sarebbe razionale; il che è assurdo perchè nell'uguaglianza sopra scritta a secondo membro compare un numero irrazionale, essendo $a\neq 0$]

Ricordiamo che due insiemi non vuoti di numeri reali A,B si dicono *contigui* se $x=\sup A=\inf B$. In tal caso x è l'*elemento di separazione* di A e B.

Si verifica che A,B sono contigui se:

$$A,B \text{ contigui} \iff \begin{cases} a\leq b,\ \forall a\in A,\ \forall b\in B; \\ \forall \varepsilon>0\ \exists a\in A,\ \exists b\in B:\ b-a<\varepsilon\ . \end{cases}$$

In tal caso l'elemento di separazione x di A,B verifica le disuguaglianze $a\leq x\leq b$ per ogni $a\in A$ e per ogni $b\in B$.

1.53 Consideriamo i due insiemi di numeri razionali

$$A=\left\{\frac{n-1}{n}:\ n\in N\right\}\ ,\qquad B=\left\{\frac{n+1}{n}:\ n\in N\right\}\ .$$

Verificare che A,B sono contigui e determinare il loro elemento di separazione.

[Si può verificare che $\sup A=\inf B=1$. Oppure si può ricorrere alla caratterizzazione precedente cominciando col mostrare che $a\leq 1\leq b$ per ogni $a\in A$, $b\in B$, cioè che $(n-1)/n\leq 1\leq (n+1)/n$ per ogni $n\in N$. Sottraendo 1 a tutti i membri si trova $-1/n\leq 0\leq 1/n$ che è una relazione manifestamente vera, essendo $n>0$. Verifichiamo poi che per ogni $\varepsilon>0$ esiste almeno un $n\in N$ tale che $(n+1)/n-(n-1)/n<\varepsilon$. Semplificando il primo membro si ottiene $2/n<\varepsilon$, che è soddisfatta per $n>2/\varepsilon$. Dunque A,B sono contigui e $x=1$ è il loro elemento di separazione]

1.54 Verificare che i due insiemi seguenti

$$A = \{\frac{n}{n+1} : n \in N\}, \quad B = \{\frac{n+1}{n} : n \in N\},$$

sono contigui e determinare il loro elemento di separazione.

[1]

1.55 Sia B l'insieme costituito da un solo numero $b_\circ > 0$. Determinare $b_\circ$ in modo che gli insiemi

$$A = \{\frac{n}{n^2+9} : n \in N\}, \quad B = \{b_\circ\},$$

risultino contigui.

[Si impone la condizione $b_o = \sup A$. Allo scopo di calcolare l'estremo superiore di A, posto $a_n = n/(n^2+9)$, si possono verificare le relazioni $a_n \leq 1/6$, $\forall n$ e $a_3 = 1/6$. Quindi $b_o = \max A = 1/6$]

1.56 Sia A l'insieme costituito da un solo numero $a_\circ \leq 0$. Determinare $a_\circ$ in modo che gli insiemi

$$A = \{a_\circ\}, \qquad B = \{\frac{n}{n^2+4} : n \in N\},$$

risultino contigui.

[$a_o = \inf B = 0$]

1.57 *Nell'ambito dei numeri razionali* non sempre due insiemi contigui ammettono un elemento di separazione. Esibire due insiemi contigui di numeri razionali che non hanno elemento separatore razionale.

[Ad esempio gli insiemi A,B degli esercizi 1.49, 1.50]

1E. Valori approssimati di numeri reali

La *parte intera* del numero reale x, indicata con [x], è il più grande intero (relativo) minore o uguale ad x. Si ha perciò

$$[x] = m \quad : \quad m\in Z, \quad m \leq x < m+1.$$

Sia x un numero reale positivo, con rappresentazione decimale $x=m.a_1a_2a_3\ldots$. I numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono interi compresi fra 0 e 9 e si chiamano le *cifre decimali* di x. I numeri razionali

$$x_o=m, \qquad x_1=m.a_1 \ , \qquad x_2=m.a_1a_2, \ \ldots$$

$$x'_o=m+1, \quad x'_1=x_1+\frac{1}{10} \ , \quad x'_2=x_2+\frac{1}{10^2} \ , \ \ldots$$

si chiamano rispettivamente *valori approssimati per difetto* e *valori approssimati per eccesso* di x, a meno di un'unità, di 1/10, di 1/100, ecc.

Per ogni k=0,1,2,... si ha

$$x_k \leq x \leq x'_k \ , \qquad\qquad x'_k - x_k = 10^{-k} \ ,$$

da cui $0\leq x-x_k \leq x'_k - x_k = 10^{-k}$.

Per $k \geq 1$, il numero x_k si chiama anche *valore abbreviato* di x alla k-esima cifra decimale.

Se x è un numero reale positivo, dei due valori x_k x'_k approssimati per difetto e per eccesso a meno di 10^{-k},uno è più prossimo ad x dell'altro(a parità, se $x'_k-x=x-x_k=1/(2\cdot 10^{k})$,conveniamo che x'_k sia il più prossimo ad x);lo chiameremo *valore arrotondato* di x alla k-sima cifra decimale(a meno di 10^{-k})e lo indicheremo con x^*_k .

Per stabilire quale dei valori x_k, x'_k è il valore arrotondato di x alla k-sima cifra decimale, si procede nel modo seguente:

(a) Si considera la (k+1)-sima cifra decimale a_{k+1} di x;

(b) se $a_{k+1}\in\{0,1,2,3,4\}$ allora $x^*_k = x_k$;

(c) se $a_{k+1} \in \{5,6,7,8,9\}$ allora $x_k^* = x_k'$.

1.58 Utilizzando le disuguaglianze

$$3.141592 < \pi < 3.141593 ,$$

determinare per ciascuno dei numeri π, $\pi/100$, $\pi \cdot 100$, la parte intera, il valore abbreviato alla seconda cifra decimale, il valore arrotondato alla seconda cifra decimale.

[$x = \pi \Rightarrow [x] = 3,\ x_2 = 3.14,\ x_2^* = 3.14;$

$x = \pi/100 \Rightarrow [x] = 0,\ x_2 = 0.03,\ x_2^* = 0.03;$

$x = \pi \cdot 100 \Rightarrow [x] = 314,\ x_2 = 314.15,\ x_2^* = 314.16$]

1.59 Scrivere due numeri reali che differiscono fra loro per meno di 1/100, ma che non hanno nè parte intera, nè cifre decimali uguali.

[Ad esempio 0.999 e 1=1.000]

1.60 Sia x_k il valore abbreviato alla k-sima cifra decimale di un numero positivo x. Verificare che $x_k = [10^k x]/10^k$.

[Se $x = m.a_1 a_2 a_3 \ldots$, allora $10^k x = m a_1 a_2 \ldots a_k . a_{k+1} \ldots$; quindi $[10^k x] = m a_1 a_2 \ldots a_k$, da cui segue $[10^k x]/10^k = m.a_1 a_2 \ldots a_k = x_k$]

1.61 Siano x,y due numeri reali positivi e x_k, y_k i rispettivi valori abbreviati alla k-sima cifra decimale. Verificare che $x_k + y_k$ è un approssimazione di x+y con un errore inferiore a $2/10^k$.

[Essendo $0 \le x - x_k \le 10^{-k}$, $0 \le y - y_k \le 10^{-k}$, sommando risulta $0 \le (x+y) - (x_k + y_k) \le 2 \cdot 10^{-k}$]

1.62 Ricordiamo che $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$, $\sqrt{3} = 1.732050\ldots$; per ottenere l'espressione decimale di $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

con errore minore di 0.001, quali valori abbreviati di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ basterà sommare?

[Tenendo conto dell'esercizio precedente si ha $0 \leq \sqrt{2} + \sqrt{3} - (x_4 + y_4) <$ $< 2\cdot 10^{-4} < 0.001$, ove $x_4 + y_4 = 1.4142 + 1.7320 = 3.1462$. Pertanto $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.146\ldots$ con tre cifre decimali esatte]

1.63 Sia x_k^* il valore arrotondato alla k-sima cifra decimale di un numero positivo x. Verificare che $x_k^* = [10^k x + 0.5]/10^k$.

[Si può procedere in modo simile a come indicato nell'esercizio 1.60]

1.64 Determinare i valori arrotondati alla seconda cifra decimale dei seguenti numeri reali

4.855; 83.7; 2.718; 3.994; 3.997.

[4.9; 83.7; 2.72; 3.99; 4]

1.65 Per ognuno dei seguenti numeri scrivere i valori approssimati per difetto, per eccesso ed il valore arrotondato a meno di 10^{-3}.

(a) 1.2368; (b) 0.1295; (c) 0.0011.

[(a) 1.236, 1.237, 1.237; (b) 0.129, 0.13, 1.13; (c) 0.001, 0.002, 0.001]

1.66 Per ognuno dei seguenti numeri scrivere i valori approssimati per difetto, per eccesso ed il valore arrotondato a meno di 10^{-2}.

(a) $\frac{1}{3}$; (b) $\frac{1}{4}$; (c) $\frac{1}{6}$.

[(a) 0.33, 0.34, 0.33; (b) 0.25, 0.26, 0.25; (c) 0.16, 0.017,0.17]

1.67 Qual'è il più grande valore di k per cui i valori arrotondati a meno di 10^{-k} dei seguenti numeri coincidono?

(a) 2.71828, 2.71832 ;
(b) 0.39765, 0.4 ;
(c) 3.14159, 3.13961 .

[(a) k=4; (b) k=2; (c) k=2]

1.68 Se un numero x differisce da un numero y per meno di 10^{-4}, possiamo dire che le prime tre cifre decimali di x sono identiche alle prime tre cifre decimali di y?

[Dipende. Se $y = m.\ a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ e se a_4 è diverso da 0 e da 9 allora $x = m.\ a_1 a_2 a_3 \dots$, cioè le prime tre cifre decimali di x sono identiche alle corrispondenti cifre decimali di y. Se invece $a_4 = 0$ oppure $a_4 = 9$ allora x può avere cifre decimali differenti da y, come accade ad esempio con x=0.9999, y = 1 = 1.0000, oppure con x=2, y = =1.9999]

1F. Il principio di induzione

Il principio di induzione matematica può essere enunciato nel modo seguente: *Supponiamo di avere una successione* P_n *di proposizioni* (n=1,2,3,...); P_n *è vera per ogni* n *se*

(i) P_1 *è vera;*

(ii) *per ogni* $k \in N$, P_k *implica* P_{k+1} .

La validità di tale principio si basa sul fatto che ogni insieme non vuoto di numeri naturali è dotato di minimo. Dunque, se P_n fosse falsa per qualche n, vi sarebbe il più piccolo n per cui P_n è falsa, diciamolo n_0. Per la (i) non potrebbe essere $n_0=1$, quindi $n_0 \geq 2$. Allora $n_0-1 \in N$ e inoltre P_{n_0-1} sarebbe vera in contrasto con la (ii).

1.69 Facendo uso del principio di induzione dimostra re la formula $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, che, per esteso si scrive:

$$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n=1+2+4+8+\ldots+2^n = 2^{n+1} - 1.$$

[Per n=1 la formula è vera, infatti: $2^0+2^1 = 2^2 - 1$. Supponiamo che la formula sia vera per n=k e cerchiamo di dedurne che la formula è vera anche per n=k+1. Perciò per ipotesi risulta

$$1+2+4+8+\ldots+2^k = 2^{k+1} - 1 .$$

Sommando ad entrambi i membri 2^{k+1} otteniamo

$$1+2+4+8+\ldots+2^{k+1}=2^{k+1}+2^{k+1}-1=2\cdot 2^{k+1}-1=2^{k+2}-1.$$

Abbiamo quindi ottenuto la validità della formula anche per n=k+1.In base al principio di induzione la formula data vale per ogni $n \in N$]

1.70 Utilizzando il principio di induzione dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2} .$$

[la formula vale per n=1, infatti: $1= (1\cdot2)/2$. Supponiamola vera per n=k e dimostriamo che essa è allora anche vera per n=k+1:

$$(1+2+\ldots+k)+(k+1)= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)=(k+1)(\frac{k}{2} +1)= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$]

1.71 Utilizzando il principio di induzione dimostrare la formula

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)=1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2 .$$

[La formula è vera per n=1, infatti: $1 = 1^2$. Supponendo che l'uguaglianza valga per n=k e sommando (2k+1) ad entrambi i membri, la si ottiene per n=k+1:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= k^2 +(2k+1)=(k+1)^2$$]

1.72 Dimostrare l'uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2+4+6+\ldots+2n = n(n+1) .$$

[Si può far uso del principio di induzione, oppure si può utilizzare la formula dell'esercizio 1.70, moltiplicando entrambi i membri per 2.]

1.73 Consideriamo la formula dell'esercizio 1.70. Da essa, cambiando n con 2n, oppure moltiplicando entrambi i membri per 2, otteniamo le due identità:

$$1+2+3+4...+2n = n(2n+1) \;;$$
$$2+4+6+ ...+2n = n(n+1) \;.$$

La prima uguaglianza esprime la somma dei primi 2n numeri naturali, mentre la seconda esprime la somma dei numeri naturali *pari* $\leq 2n$. Dedurre da esse la somma dei numeri naturali *dispari* $\leq 2n$.

[Per differenza si ottiene la formula dell'esercizio 1.71]

1.74 Dimostrare mediante il principio di induzione che $2^n > n$ per ogni $n \in N$.

[Per n=1 la disuguaglianza si scrive $2^1 > 1$ ed è quindi verificata. Dimostriamo ora che, dall'ipotesi $2^k > k$, segue la tesi $2^{k+1} > k+1$. A tale scopo dall'ipotesi otteniamo $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 2k$. Ciò non è equivalente alla tesi; però implica la tesi, dato che $2k=k+k \geq k+1$. Riassumendo, dall'ipotesi $2^k > k$ deduciamo che: $2^{k+1} > 2k \geq k+1$; confrontando il primo e l'ultimo membro riconosciamo la tesi $2^{k+1} > k+1$]

1.75 Sia $a \geq -1$. Dimostrare che vale la seguente *disuguaglianza di Bernoulli:*

$$(1+a)^n \geq 1+na, \qquad \forall n \in N.$$

[La relazione data vale per n=1 (in particolare con il segno di =). Supponendo che essa valga per n=k ne deduciamo

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k (1+a) \geq (1+ka)(1+a) =$$

$$=1+a+ka+ka^2 = 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a.$$

L'ultimo passaggio è stato possibile perchè $ka^2 \geq 0$]

1.76 Nella dimostrazione sopra proposta, per dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$, dove è stata utilizzata l'ipotesi $a \geq -1$?

[Abbiamo moltiplicato entrambi i membri della disuguaglianza $(1+a)^k \geq 1+ka$ per la quantità $1+a$. Affinchè il verso della disuguaglianza rimanga inalterato occorre che $1+a \geq 0$, cioè $a \geq -1$]

1.77 Consideriamo ancora la disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$. Dimostrare che, se $n=2$, la disuguaglianza vale per ogni $a \in R$. Inoltre, mostrare con un esempio che, se $n=3$, esistono numeri reali a per cui la disuguaglianza non vale.

[Se $n=2$: $(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \geq 1+2a$, $\forall a \in R$. Se $n=3$ la disuguaglianza non vale ad esempio con $a=-4$, o, più generalmente, se $a < -3$; infatti

$$(1+a)^3 = 1+3a+3a^2+a^3 = 1+3a+a^2(3+a).$$

Perciò, se $a < -3$ risulta $3+a < 0$ e quindi $(1+a)^3 < 1+3a$; viceversa se $a \geq -3$ allora $3+a \geq 0$ e quindi $(1+a)^3 \geq 1+3a$]

1.78 Sia $x \geq 1$. Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli verificare che

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}, \qquad \forall n \in N.$$

[La disuguaglianza si può scrivere in modo equivalente: $\sqrt[n]{x} \leq 1+(x-1)/n$, cioè ancora $x \leq [1+(x-1)/n]^n$. E' quindi naturale scegliere, nella disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$, $a = (x-1)/n$. Si ottiene.. ..]

1.79 Dimostrare mediante il principio di induzione che, se x_1, x_2 sono numeri reali positivi con $x_1 < x_2$, allora per ogni $n \in N$ si ha $x_1^n < x_2^n$.

[Se $x_1^k < x_2^k$ allora $x_1^{k+1} = x_1^k x_1 < x_2^k x_1 < x_2^k x_2 = x_2^{k+1}$]

1.80 Sia $a \neq 1$. Facendo uso del principio di induzione dimostrare la formula che esprime la somma di una progressione geometrica di ragione a:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\ldots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad .$$

[La formula è vera per n=1, in quanto in tal caso essa si riduce alla uguaglianza $1+a = (1-a^2)/(1-a)$. Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo n e verifichiamo che essa risulta vera anche per il successivo n+1; infatti:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} =$$

$$= \frac{1-a^{n+1}-a^{n+1}+a^{n+2}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a} \quad]$$

1.81 Dimostrare l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9+16+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

$$\left[\quad \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \right.$$

$$= \frac{(n+1)\,[\,2n^2+n+6n+6\,]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \quad ;$$

si ottiene la conclusione osservando che $(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$]

1.82 Dimostrare la formula

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

[Conviene verificare per induzione separatamente le due uguaglianze:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad .$$

Oppure, dopo aver verificato la prima delle due uguaglianze, si può procedere per induzione sulla formula originaria effettuando la verifica diretta per n=1 e procedendo poi così:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)(n+1)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)(n+1) + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2]$$

1.83 Dimostrare che, qualunque sia $n \in N$, il numero n^2+n è pari.

[1^2+1 è pari. Supponiamo ora che k^2+k sia pari; allora

$$(k+1)^2+(k+1) = k^2+3k+2 = (k^2+k) + 2(k+1)$$

è anche un numero naturale pari]

1.84 La seguente proprietà è manifestamente falsa: « Comunque si scelgono due numeri naturali a,b risulta sempre a=b ».
Indichiamo con n il più grande tra due numeri naturali a,b, cioè n=max {a,b}. Altrettanto falsa risulta la seguente proposizione: « Comunque si scelgono due numeri naturali a,b, posto n = = max {a,b}, risulta a=b=n ».
E' ovvio che la proposizione è falsa, perchè ad esempio max {4,7} = 7, ma 4 ≠ 7. Diamo di seguito una dimostrazione sbagliata basata sul principio di induzione. Si chiede di trovare l'errore nella dimostrazione proposta.
"TEOREMA" - $a,b \in N$; $\max\{a,b\} = n \Rightarrow a=b=n$.
"Dimostrazione". Procediamo per induzione su n. Se n=1 il teorema è vero; infatti, se max{a,b}= =1, essendo a,b interi positivi deve essere a= =b=1.
Con il metodo di induzione supponiamo vero il teorema per n=k:

$$\max\{a,b\} = k \Rightarrow a = b = k.$$

Per verificare il teorema con $n=k+1$ siano a', b' due numeri naturali tali che $\max\{a',b'\} = k+1$. Occorre provare che $a'=b'=k+1$. A tale scopo poniamo $a=a'-1$, $b=b'-1$. Risulta $\max\{a,b\} = \max\{a',b'\} - 1 = k$. Per l'ipotesi di induzione risulta $a=b=k$. Dato che $a'=a+1$, $b'=b+1$, si ottiene infine $a'=b'=k+1$.

[L'errore non è nell'aver posto convenzionalmente $N=\{1,2,3,\dots\}$, invece che $N=\{0,1,2,3,\dots\}$; perchè, con la seconda scelta, avremmo potuto applicare il metodo di induzione partendo da $n=0$, invece che da $n=1$, con una dimostrazione identica nella sostanza.
L'errore è nel non aver verificato se tutti i numeri considerati appartengono all'insieme N. Infatti, $a', b' \in N$; è vero che anche $a=a'-1$ $b=b'-1$ sono numeri naturali?
Per ben comprendere l'importanza di questa verifica il lettore rilegga la seconda parte della "dimostrazione" proposta nel caso particolare $k=1$]

1.85 Dimostrare per induzione che, per ogni n, valgono i seguenti raffinamenti della disuguaglianza di Bernoulli

(a) $(1+a)^n \geq 1+na+\dfrac{n(n-1)}{2}a^2$, per ogni $a \geq 0$

(b) $(1+a)^n \geq 1+na+\dfrac{n(n-1)}{2}a^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3$,

per ogni $a \geq -1$.

[Tener conto, nel caso (a), che è $a^3 \geq 0$, mentre, nel caso (b), utilizzare che è $a^4 \geq 0$]

1.86 Dimostrare che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$.

[Si può procedere per induzione, oppure si può dedurre il risultato da 1.81 mediante la relazione

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{2n}k^2 - \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \sum_{k=1}^{2n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k^2$$]

Capitolo 2

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

2A. Definizioni

Due semirette r,r' con vertice in uno stesso punto 0 dividono il piano che le contiene (privato delle due semirette) in due parti; tali parti vengono chiamate angoli (figura 2.1).

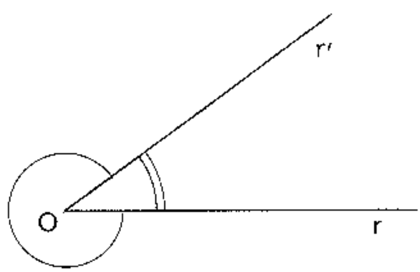


figura 2.1

Se le due semirette coincidono, cioè se r=r', allora una delle due parti in cui è diviso il piano è vuota; in tal caso l'angolo non vuoto è chiamato *angolo giro.* Per convenzione, la *misura in gradi* dell'angolo giro è 360, e si scrive 360° (360 gradi).

In figura 2.2 è disegnato l'angolo giro ed alcuni suoi sottomultipli interi. La metà dell'angolo giro è chia mata *angolo piatto,* misura 180° e corrisponde a due semirette r,r' allineate con versi opposti. La quarta parte dell'angolo giro è chiamata *angolo retto* e misura 90°. E' noto dalla geometria che è possibile associare una misura in gradi a qualsiasi angolo piano.

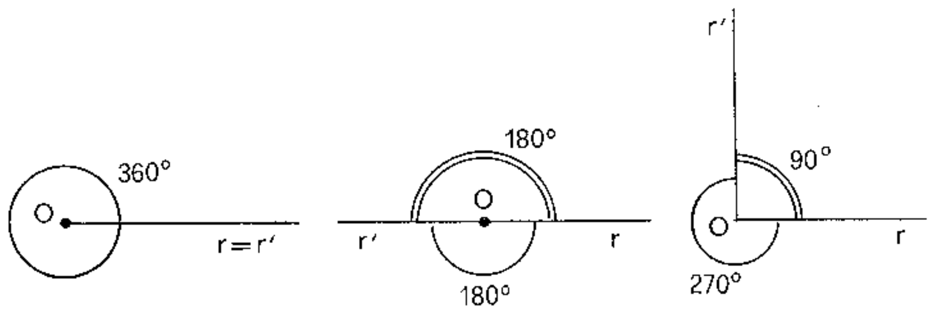


figura 2.2

Oltre che in gradi, è utile misurare gli angoli in *radianti*. Per far ciò, consideriamo la circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice 0, punto di incontro delle due semirette r,r', come in figura 2.3.

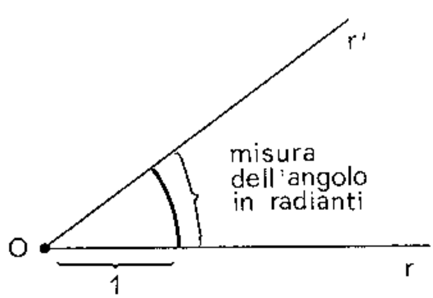


figura 2.3

La misura in radianti di un angolo è la lunghezza dell'arco di circonferenza intercettato dalle due semirette. Dato che la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π, il numero 2π è appunto la misura in radianti dell'angolo giro, π è la misura in radianti dell'angolo piatto, $\pi/2$ è la misura in radianti dell'angolo retto.

Poichè un valore numerico approssimato di π e' 3.14, un angolo giro misura più di 6 radianti, un angolo piatto misura circa 3 radianti, mentre un angolo retto misura circa un radiante e mezzo. Per lo stesso motivo un angolo di un radiante misura circa 60° (essendo all'incirca i 2/3 di un angolo retto); più precisamente:

2.1 Determinare la misura in gradi di un angolo che, espresso in radianti, vale 1.

[Indicando con x la misura in gradi dell'angolo di un radiante, abbiamo la proporzione $x : 1 = 360:2\pi$, da cui $x = 360/2\pi = 180/\pi \cong 57$. Quindi un angolo di un radiante misura circa 57°; utilizzando anche i *primi* ed i *secondi*, si trova più precisamente che un radiante corrisponde all'incirca a 57° 17' 44"]

2.2 Determinare la misura in radianti degli angoli che, espressi in gradi, valgono rispettivamente 1°, 60°.

[Se x rappresenta la misura in radianti dell'angolo di un grado, vale la proporzione $x:1 = 2\pi:360$, da cui $x=\pi/180 \cong 0.017$. Analogamente un angolo di 60° misura $\pi/3 \cong 1.047$ radianti]

2.3 Verificare che vale la seguente tabella di corrispondenze tra valori di angoli espressi in gradi ed in radianti.

gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π

Si è detto che un angolo è individuato da due semirette r,r' uscenti da uno stesso punto 0 e che la misura dell'angolo in radianti è la lunghezza dell'arco di circonferenza, di raggio 1 e centro 0, intercettato dalle due semirette. Consideriamo r come retta di riferimento fissata e pensiamo di percorrere la circonferenza di raggio 1 per passare da r ad r'.

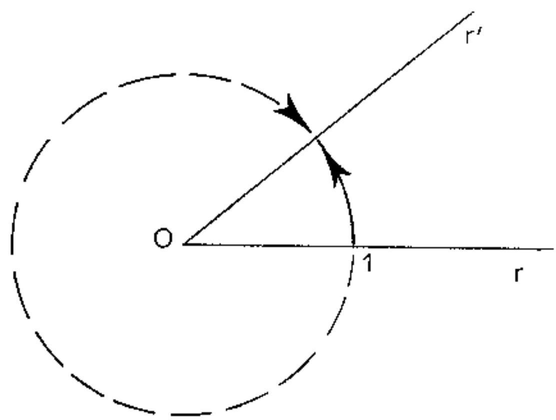


figura 2.4

In figura 2.4 l'angolo minore formato da r,r' è percorso in *senso antiorario,* mentre l'angolo maggiore (tratteggiato) è percorso in *senso orario.* Nel primo caso si dice che l'angolo è orientato positivamente, nel secondo che è orientato negativamente.

Perciò possiamo definire la *misura di un angolo orientato* individuato da due semirette r,r', come la misura dell'angolo presa rispettivamente con il segno positivo o negativo a seconda che l'angolo sia percorso da r ad r' in senso antiorario oppure orario.

Allo stesso modo, nel movimento da r ad r' si può percorrere più volte la circonferenza di raggio 1 con centro nel vertice dell'angolo. Ad esempio, consideriamo in figura 2.4 la retta r fissata e percorriamo la circonferenza di raggio 1 fino a raggiungere la retta r'. Se andiamo in verso antiorario e ci fermiamo al primo incontro di r', individuiamo un angolo la cui misura in radianti è un numero α positivo. Se percorriamo in senso antiorario la circonferenza fino ad incontrare più volte r', individuiamo angoli le cui misure in radianti valgono

$$\alpha+2\pi, \quad \alpha+4\pi, \quad \alpha+6\pi, \ldots, \quad \alpha+2k\pi, \ldots$$

Se invece, a partire da r percorriamo la circonferenza in senso orario fino ad incontrare la semiretta r', in funzione del numero di giri otteniamo gli angoli le cui misure in radianti valgono

$$\alpha-2\pi, \quad \alpha-4\pi, \quad \alpha-6\pi, \ldots, \quad \alpha-2k\pi, \ldots$$

Definiamo ora le funzioni *seno* e *coseno*. A tale scopo consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale di assi x,y ed assumiamo il semiasse positivo delle x (ascisse) come retta r di riferimento per misurare gli angoli. Consideriamo inoltre un angolo orientato che misura α radianti ($\alpha \in R$), come in uno dei casi indicati in figura 2.5. Ricordiamo che la circonferenza di riferimento ha centro nell'origine degli assi ed ha raggio 1.

Il seno di α, indicato con sen α, *è l'ordinata del punto P sulla circonferenza di riferimento che sottende un angolo di misura* α, cioè del punto P estremo dell' arco di circonferenza di misura α.

Il coseno di α, indicato con cos α, *è l'ascissa del punto P sulla circonferenza di riferimento che sottende un angolo di misura* α.

Consideriamo alcuni esempi: Cominciamo con $\alpha = 0$; in questo caso il punto P è sull'asse delle x ed ha coordinate (1,0); in base alla definizione risulta

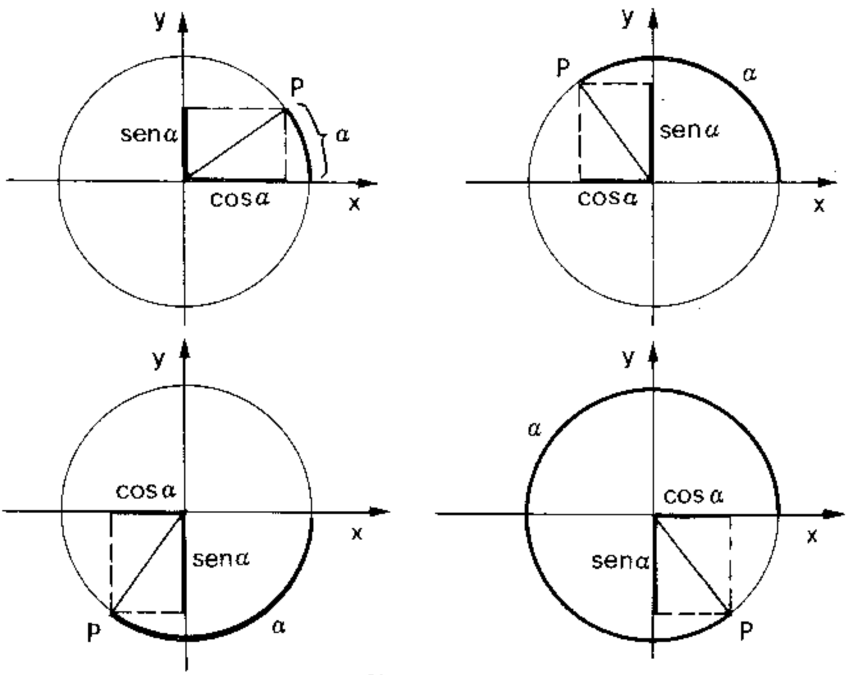


figura 2.5

sen 0=0, cos 0=1. Troviamo lo stesso risultato per $\alpha=2\pi$, oppure per $\alpha=-2\pi$; cioè

$$\operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen}(-2\pi) = \operatorname{sen} 2k\pi = 0, \quad \forall k\in Z;$$
$$\cos 2\pi = \cos(-2\pi) = \cos 2k\pi = 1, \quad \forall k\in Z.$$

Se invece $\alpha=\pi/2$ il punto P si trova sull'asse y ed ha coordinate (0,1); perciò $\operatorname{sen}(\pi/2)=1, \cos(\pi/2)=0$.

Allo stesso modo si verifica che

$$\operatorname{sen} \pi = 0, \qquad \cos \pi = -1;$$
$$\operatorname{sen}(3/2)\pi=-1, \qquad \cos(3/2)\pi = 0.$$

Dalla stessa definizione segue che le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π, cioè

$$\operatorname{sen}(\alpha+2\pi) = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \cos(\alpha+2\pi)= \cos\alpha, \ \forall \alpha.$$

2.4 Stabilire per quali valori di $\alpha\in[0,2\pi]$ risulta

(a) sen $\alpha = 0$ (b) sen $\alpha > 0$ (c) sen $\alpha < 0$

[(a) $\alpha=0$, $\alpha=\pi$, $\alpha=2\pi$; (b) $0 < \alpha < \pi$; (c) $\pi<\alpha<2\pi$]

2.5 Stabilire per quali valori di $\alpha\in[0,2\pi]$ risulta

(a) cos $\alpha=0$ (b) cos $\alpha>0$ (c) cos $\alpha<0$

[(a) $\alpha=\pi/2$, $\alpha=(3/2)\pi$; (b) $0\leq\alpha<\pi/2$ e $(3/2)\pi < \alpha \leq 2\pi$; (c) $\pi/2 < \alpha < (3/2)\pi$]

2.6 Determinare tutti i numeri reali α per cui risulta

(a) sen $\alpha = 0$ (b) cos $\alpha = 0$

[(a) $\alpha=k\pi$, $\forall k\in Z$; (b) $\alpha=\pi/2+k\pi$, $\forall k \in Z$]

2.7 Determinare tutti i numeri reali α per cui risulta

(a) sen $\alpha = 1$ (b) sen $\alpha = -1$

[(a) $\alpha=\pi/2 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) $\alpha=(3/2)\pi+2k\pi$ $\forall k\in Z$]

2.8 Determinare tutti i numeri reali α per cui si ha

(a) cos $\alpha = 1$ (b) cos $\alpha = -1$

[(a) $\alpha=2k\pi$, $\forall k\in Z$; (b) $\alpha=(2k+1)\pi$, $\forall k\in Z$]

2.9 Stabilire per quali numeri $\alpha\in[0,2\pi]$ risulta senα = cosα.

[$\pi/4$, $(5/4)\pi$]

2.10 Utilizzando la definizione delle funzioni seno e coseno verificare che

(a) sen$(-\alpha)=-$ senα (b) cos$(-\alpha)=$ cosα

La tangente di α, indicata con tgα, *è definita mediante il rapporto*

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} .$$

Naturalmente il denominatore $\cos\alpha$ deve essere diverso da zero e ciò accade per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, con $k\in Z$. Quindi la funzione tangente è definita se il suo argomento α è diverso da $\pi/2 + k\pi$.

Analogamente si definisce la *cotangente di* α, indicata con $\text{cotg }\alpha$, mediante il rapporto

$$\text{cotg }\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}, \qquad \alpha \neq k\pi.$$

Le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo π, cioè, per ogni α per cui sono definite, risulta

$$\text{tg}(\alpha+\pi) = \text{tg }\alpha , \quad \text{cotg}(\alpha+\pi) = \text{cotg }\alpha.$$

2B. Elenco delle principali proprietà

Per comodità del lettore indichiamo di seguito alcune tra le principali proprietà delle funzioni trigonometriche $\text{sen }\alpha, \cos\alpha, \text{tg }\alpha$, con solo alcuni cenni di dimostrazione. Daremo ulteriori elementi di dimostrazione nei paragrafi successivi.

Dalla definizione del seno e del coseno risulta immediatamente che

(1) $\quad -1 \leq \text{sen }\alpha \leq 1, \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1, \quad \forall\alpha\in R;$

ciò si può scrivere in modo equivalente con il valore assoluto (si veda l'esercizio 3.27):

(2) $\quad |\text{sen}\alpha| \leq 1, \quad |\cos\alpha| \leq 1, \qquad \forall\alpha\in R.$

Altre disuguaglianze molto utili, sono le seguenti per la funzione seno:

(3) $\quad \text{sen}\alpha < \alpha, \ \forall\alpha > 0; \quad |\text{sen}\alpha| \leq |\alpha|, \ \forall\alpha\in R.$

La relazione fondamentale tra seno e coseno è:

(4) $\qquad \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 , \qquad \forall\alpha\in R;$

tale formula segue dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo di cateti $|\text{sen}\alpha|$, $|\cos\alpha|$ in figura 2.5 (si ricordi che l'ipotenusa è lunga 1).

Utili sono anche le *formule di addizione* (dimostrate nel paragrafo 2D):

$$(5)\qquad \text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\,\cos\beta + \text{sen}\beta\,\cos\alpha\ ,$$
$$(6)\qquad \cos\,(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\ ,$$

e le *formule di sottrazione:*

$$(7)\qquad \text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\,\cos\beta - \text{sen}\beta\,\cos\alpha\ ,$$
$$(8)\qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\ .$$

Ponendo $\beta=\alpha$ nelle (5), (6) si ottengono le *formule di duplicazione* :

$$(9)\qquad \text{sen}\,2\alpha = 2\text{sen}\alpha\,\cos\alpha\ ,$$
$$(10)\qquad \cos\,2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\ .$$

Altra conseguenza delle formule di addizione e sottrazione (si veda l'esercizio 2.28) sono le *formule di prostaferesi:*

$$(11)\qquad \text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\cos\,\frac{p-q}{2}\ ,$$

$$(12)\qquad \text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\,\cos\,\frac{p+q}{2}\ ,$$

$$(13)\qquad \cos\,p + \cos\,q = 2\,\cos\,\frac{p+q}{2}\,\cos\,\frac{p-q}{2}\ ,$$

$$(14)\qquad \cos\,p - \cos\,q = -2\,\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\ .$$

Circa la tangente, dalla definizione $\text{tg}\alpha=\text{sen}\alpha/\cos\alpha$, e dalle corrispondenti formule per seno e coseno, si ottengono le *formule di addizione, sottrazione e duplicazione* per la tangente

$$(15)\qquad \text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}\ ,\quad \text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\alpha-\text{tg}\beta}{1+\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}\ ,$$

$$(16)\qquad \text{tg}2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}\ .$$

Le formule seguenti esprimono $\text{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{tg}\alpha$ co me funzione razionale di tg(α/2) e sono utili, ad esempio, per risolvere per sostituzione alcuni integrali indefiniti od alcune equazioni trigonometriche (si veda l'esercizio 2.47). Posto t=tg(α/2), si ha:

$$(17)\quad \text{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Riportiamo una tabella di valori del seno, coseno e tangente per alcuni angoli particolari. All'inizio del paragrafo successivo è indicato il metodo per ricavare tali valori.

α radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
α gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
senα	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tgα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	non è definita	0	non è definita	0

I valori della tavola precedente possono essere riportati in un riferimento cartesiano come nelle figure 2.6, 2.7, 2.8, ottenendo alcuni punti (evidenziati nelle figure) appartenenti rispettivamente ai grafici delle funzioni seno, coseno e tangente. I grafici completi si disegnano in modo preciso facendo uso delle derivate.

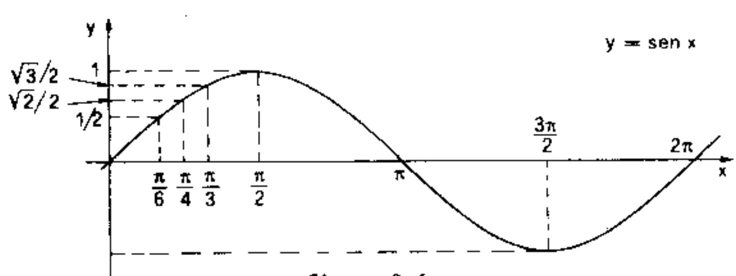


figura 2.6

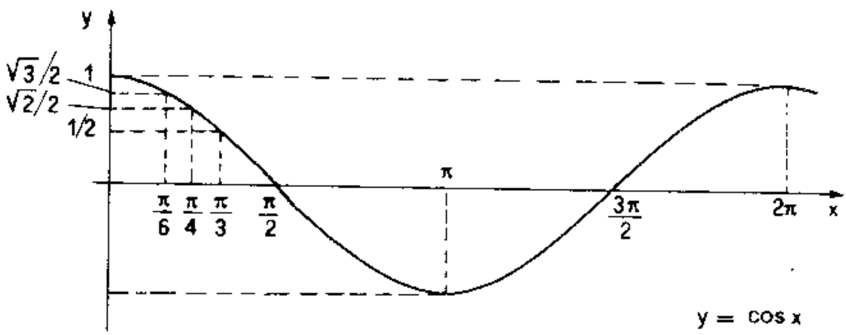


figura 2.7

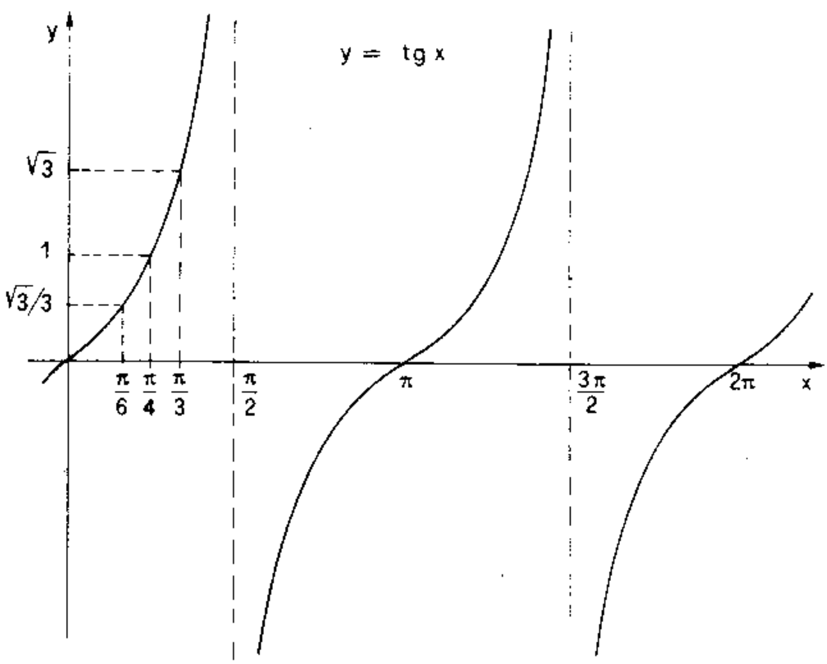


figura 2.8

Nel leggere le figure 2.6, 2.7, è utile tener presente i valori approssimati $\sqrt{2}/2 \cong 0.7$, $\sqrt{3}/2 \cong 0.87$; mentre in figura 2.8 sono utili i valori $\sqrt{3}/3 \cong 0.58$, $\sqrt{3} \cong 1.73$.

2C. Risoluzione di triangoli rettangoli

Nella tavola proposta nel paragrafo precedente sono indicati i valori di senα, cosα, tgα in particolare per α = 30°, 45°, 60°. Di seguito proponiamo la verifica di tali valori.

2.11 Verificare che sen (π/6) = 1/2.

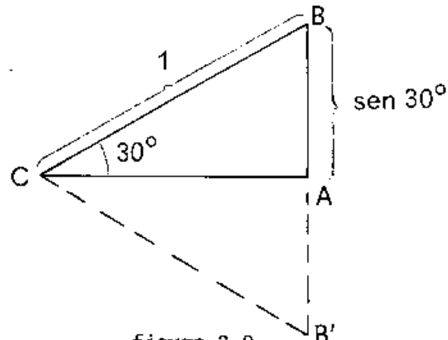


figura 2.9

[Si consideri la figura 2.9, dove è disegnato un triangolo rettangolo ABC avente l'ipotenusa di lunghezza 1 ed un angolo di 30°. Dato che la somma degli angoli interni ad ogni triangolo vale 180°, l'angolo in B vale 60°. Perciò, il triangolo BCB', disegnato in figura 2.9 raddoppiando il triangolo iniziale, ha i tre angoli uguali ed è quindi equilatero; dunque il lato BB' è lungo 1, cioè $\overline{AB}$ = 1/2]

2.12 Verificare che sen (π/4) = $\sqrt{2}/2$.

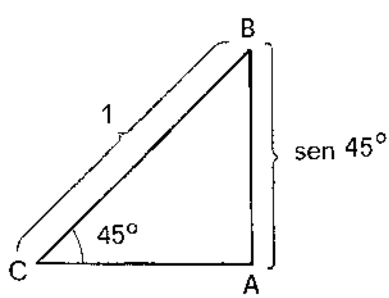


figura 2.10

[Si consideri in figura 2.10 il triangolo ABC, rettangolo in A. Dato che la somma degli angoli interni al triangolo vale 180°, l'angolo in B vale 45° come l'angolo in C. Perciò il triangolo è isoscele e $\overline{AB} = \overline{CA}$. Per il teorema di Pitagora $1 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 2\,\overline{AB}^2$, da cui $\overline{AB}^2 = 1/2$, cioè $\overline{AB} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$]

2.13 Verificare che sen $(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

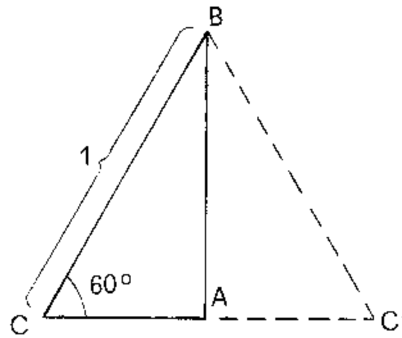


figura 2.11

[Il triangolo BCC' in figura 2.11, ottenuto raddoppiando il triangolo rettangolo ABC, è equilatero. Perciò $\overline{CC'} = 1$ e $\overline{CA} = 1/2$. Per il teorema di Pitagora sen $60° = \overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2} = \sqrt{3}/2$]

2.14 Verificare che

(a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

[Si può procedere in modo analogo a quanto fatto rispettivamente negli esercizi 2.13, 2.12, 2.11]

Consideriamo un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, come in figura 2.12. Per semplicità di disegno supponiamo che il lato CB abbia lunghezza maggiore di 1.

Con centro in C tracciamo una circonferenza (tratteggiata in figura) di raggio 1 che incontra CB in B'; sia poi A' il piede della perpendicolare al cateto CA passante per

B'. Per definizione risulta senα = $\overline{A'B'}$, cosα = $\overline{CA'}$.

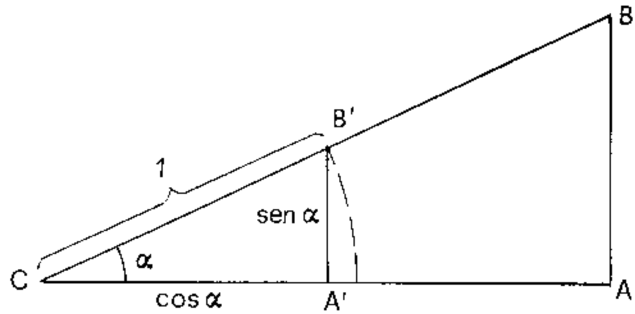


figura 2.12

Per le proprietà dei triangoli simili (i triangoli ABC e A'B'C sono simili perchè hanno angoli corrispondenti uguali fra loro) vale la proporzione $\overline{A'B'}$ / $\overline{CB'}$ = $\overline{AB}/\overline{CB}$. Dato che $\overline{CB'}$ = 1, risulta quindi

$$\text{sen}\ \alpha = \overline{A'B'} = \overline{AB}/\overline{CB}\ .$$

Si ricava quindi che $\overline{AB}$ = $\overline{CB}$ senα. Abbiamo perciò verificato che *in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa per il seno dello angolo opposto.*

Analogamente per il coseno si ottiene

$$\cos\alpha = \overline{CA'} = \overline{CA'}/\overline{CB'} = \overline{CA}/\overline{CB}\ ;$$

cioè $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$ cosα. Quindi *in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente.*

Dividendo membro a membro le due relazioni trovate: $\overline{AB}$ = $\overline{CB}$ senα, $\overline{CA}$ = $\overline{CB}$ cosα, otteniamo

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\alpha\ ;$$

cioè $\overline{AB}$ = $\overline{CA}$ tgα. Quindi *in un triangolo rettangolo la lunghezza di un cateto è uguale alla lunghezza dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.*

Ricordiamo infine la relazione fondamentale

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

che si ottiene dal teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo A'B'C in figura 2.12. L'esercizio seguente si risolve mediante tale identità fondamentale.

2.15 Verificare le identità

(a) $1+\text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (b) $1+\text{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$

2D. Formule di addizione e conseguenze

Le formule di addizione e sottrazione (dette anche soltanto formule di addizione) sono le seguenti

$$\text{sen}(\alpha\pm\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \text{sen}\beta\cos\alpha\,,$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta\,,$$
$$\text{tg}\,(\alpha\pm\beta) = (\text{tg}\alpha \pm \text{tg}\beta)/(1 \mp \text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta).$$

Indichiamo come dimostrare tali formule, limitandoci per semplicità al caso in cui gli angoli α,β sono positivi e $\alpha+\beta < \pi/2$.

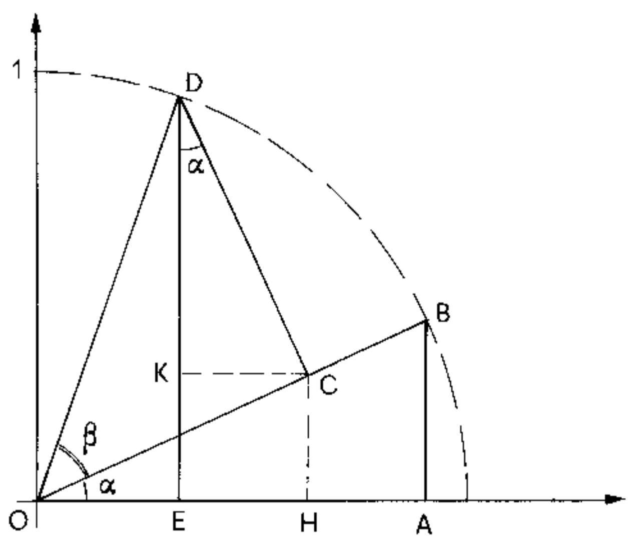


figura 2.13

Con riferimento alla figura 2.13 risulta

$$\operatorname{sen}\alpha = \overline{AB}\ , \qquad \cos\alpha = \overline{0A}\ ,$$

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{CD}\ , \qquad \cos\beta = \overline{0C}\ ,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{ED}\ , \quad \cos(\alpha+\beta) = \overline{0E}\ .$$

Inoltre l'angolo segnato in D vale α perchè i lati sono perpendicolari a quelli corrispondenti all'angolo in 0.

Per dimostrare la formula che esprime sen $(\alpha+\beta)$ scriviamo:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{ED} = \overline{HC} + \overline{KD}\ .$$

Il segmento HC è il cateto opposto all'angolo α del triangolo rettangolo HC0, la cui ipotenusa vale $\overline{0C} = \cos\beta$. Perciò:

$$\overline{HC} = \overline{0C}\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta\operatorname{sen}\alpha\ .$$

Analogamente $\overline{KD} = \overline{CD}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$, che, insieme alla relazione precedente, prova la formula di addizione $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.

2.16 Con riferimento alla figura 2.13, dimostrare la formula di addizione relativa a $\cos(\alpha+\beta)$, con $\alpha,\beta>0$, $\alpha+\beta < \pi/2$.

[Con i simboli della figura 2.13 risulta $\cos(\alpha+\beta) = \overline{OE} = \overline{OH} - \overline{KC}$. Inoltre $\overline{OH} = \overline{OC}\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$, $\overline{KC} = \overline{CD}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$]

2.17 Dimostrare la formula di addizione relativa a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

[Utilizzando le formule di addizione relative al seno ed al coseno abbiamo

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos\alpha\cos\beta$ si ottiene il risultato]

2.18 Utilizzando le formule di addizione e sottrazione dimostrare che valgono le identità

(a) $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$

(b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$ (purchè tutte le quantità siano definite)

2.19 Verificare che risulta

(a) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (b) $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Verificare inoltre che la somma dei quadrati dei valori indicati vale 1, come ci si deve aspettare in generale dalla relazione $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

[E' utile scrivere $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(45° - 30°)$ e poi applicare le formule di sottrazione. Analogamente per il coseno]

2.20 Verificare che $\operatorname{tg} 15° = 2 - \sqrt{3}$.

[Basta utilizzare l'esercizio precedente e poi verificare, eseguendo il prodotto, che $(2-\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$]

2.21 Verificare che risulta

(a) $\operatorname{sen} 75° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (b) $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(c) $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$

2.22 Indichiamo con α,β,γ, $(0 < \alpha,\beta,\gamma < \pi/2)$ gli angoli di un triangolo. Verificare che

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

[Si usi il fatto che, essendo $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, risulta $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\pi-\gamma) = -\operatorname{tg}\gamma$]

2.23 Verificare le formule di duplicazione

(a) $\operatorname{sen}2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

(b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ $(=1-2\text{sen}^2\alpha=2\cos^2\alpha-1)$
(c) $\text{tg}2\alpha = 2\text{tg}\alpha/(1-\text{tg}^2\alpha)$

[Basta porre $\beta=\alpha$ nelle formule di addizione. Le formule indicate in parentesi in (b) seguono dalla relazione fondamentale $\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$]

2.24 Verificare le identità (dette formule di triplicazione):

(a) $\text{sen}\, 3\alpha = 3\text{sen}\alpha - 4\text{sen}^3\alpha$
(b) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

[Cominciare con il porre $\beta=2\alpha$ nelle formule di addizione]

2.25 Verificare che, per $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, valgono le identità

(a) $\cos 2\alpha = (1-\text{tg}^2\alpha)/(1+\text{tg}^2\alpha)$

(b) $$\frac{(1+\text{tg}\alpha)^2}{2} = \frac{1+\text{sen}2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

2.26 Verificare le identità

(a) $\text{sen}\,(\pi+\alpha) = -\text{sen}\alpha$ (b) $\cos\,(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$
(c) $\text{sen}\,(\pi-\alpha) = \text{sen}\alpha$ (d) $\cos\,(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$
(e) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$ (f) $\cos\,(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \text{sen}\alpha$
(g) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$ (h) $\cos\,(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\text{sen}\alpha$

[Verifichiamo ad esempio la (a): Per le formule di addizione si ha:

$$\text{sen}\,(\pi+\alpha) = \text{sen}\,\pi\cos\alpha + \cos\pi\,\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\,\alpha$$]

2.27 Verificare le identità

(a) $\text{tg}(\pi-\alpha) = -\text{tg}\alpha$ (b) $\text{tg}(\frac{\pi}{2}\pm\alpha) = \mp\text{cotg}\alpha$

2.28 Utilizzando le formule di addizione verificare le formule di prostaferesi:

(a) $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

(b) $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

(c) $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

(d) $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$

[Ponendo $\alpha = (p+q)/2$, $\beta = (p-q)/2$, si ha $\alpha+\beta = p$, $\alpha-\beta = q$. Ponendo tali valori nelle formule di addizione relative a $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)$ abbiamo

$$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} + \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

$$\operatorname{sen} q = \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} - \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}.$$

Sommando membro a membro le due relazioni otteniamo (a), sottraendo otteniamo (b). Si procede in modo analogo per ottenere (c), (d) a partire da $\cos(\alpha\pm\beta)$].

2.29 Mediante le formule di prostaferesi verificare le identità

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}$$

2.30 Facendo uso delle formule di duplicazione (esercizio 2.23) verificare che, posto $t = \operatorname{tg}(\alpha/2)$ con $\alpha \neq (2k+1)\pi$, risulta

(a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ (b) $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

[Si scrivano le formule di duplicazione relative all'angolo $\alpha/2$, invece che α. Con tale sostituzione (c) corrisponde esattamente alla (c) dell'esercizio 2.23. Per le (a), (b) abbiamo

$$\operatorname{sen}\alpha = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Dividendo per $1 = \text{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2)$ e poi, dividendo ancora numeratore e denominatore per $\cos^2(\alpha/2)$, otteniamo

$$\text{sen}\alpha = \frac{2\,\text{sen}(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}{\text{sen}^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)} = \frac{2\,\text{tg}(\alpha/2)}{\text{tg}^2(\alpha/2)+1}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2) - \text{sen}^2(\alpha/2)}{\text{sen}^2(\alpha/2)+\cos^2(\alpha/2)} = \frac{1-\text{tg}^2(\alpha/2)}{\text{tg}^2(\alpha/2)+1} \quad]$$

Negli esercizi 2.47, 2.48 è proposta un'applicazione delle formule dell'esercizio precedente.

2E. Equazioni trigonometriche

Una *equazione* è un'espressione del tipo $f(x) = 0$, con $f(x)$ funzione (reale di variabile reale) assegnata. Una *soluzione* dell'equazione è un numero reale x per cui $f(x) = 0$. Risolvere un'equazione significa determinare tutte le sue soluzioni. Se $f(x)$ è una funzione trigonometrica (senx, cosx, tgx) od è espressa mediante funzioni trigonometriche, diremo che la corrispondente equazione $f(x) = 0$ è un' *equazione trigonometrica*.

Le seguenti si dicono *equazioni trigonometriche elementari:*

$$\text{sen}\,x = a, \qquad \cos x = a, \qquad \text{tg}\,x = a,$$

dove a è un numero reale assegnato. Per scrivere correttamente *tutte* le soluzioni di tali equazioni è utile far riferimento ai grafici delle funzioni senx, cosx, tgx e tener presente che tali funzioni sono periodiche.

Cominciamo con $\text{sen}x = a$, $a \in \mathbb{R}$, facendo riferimento alla figura 2.14, dove sono disegnati in uno stesso sistema di assi cartesiani x,y i grafici della funzione $y = \text{sen}\,x$ e della retta $y = a$, per tre diversi valori di a.

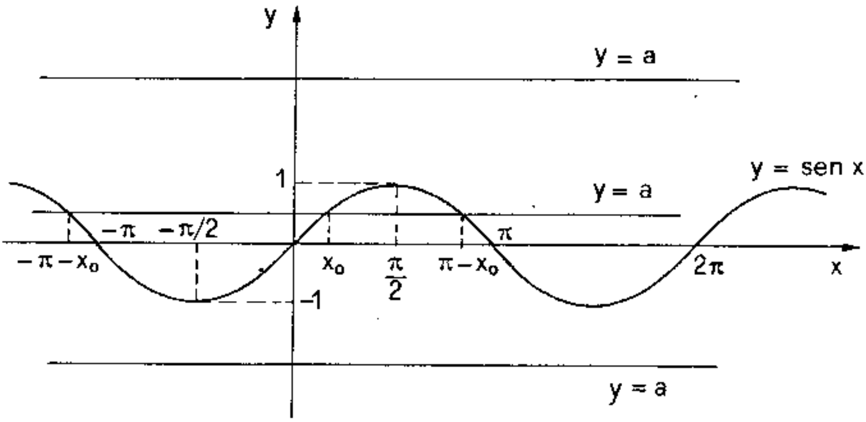


figura 2.14

Otteniamo il seguente schema di risoluzione

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } x = a \\ a > 1 \text{ oppure } a < -1 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } x = a \\ -1 \le a \le 1 \end{array}\right\} \iff$$ scelto $x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ tale che sen$x_0 = a$, le soluzioni sono $x_0 + 2k\pi$, $\pi - x_0 + 2k\pi$ $\forall k \in Z$.

2.31 Risolvere le equazioni

(a) sen $x = \sqrt{2}/2$ (b) sen $x = -1/2$

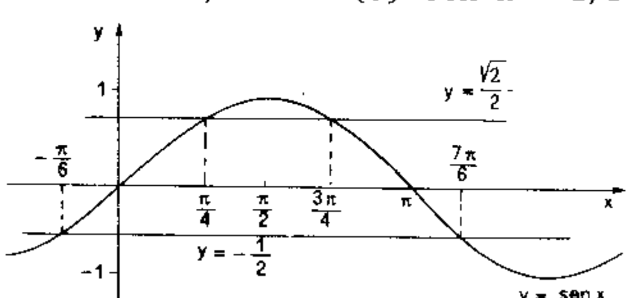


figura 2.15

[(a) Risulta sen $x = \sqrt{2}/2$ per $x = \pi/4$. Leggendo il grafico in figura 2.15 si trova che sen $x = \sqrt{2}/2$ anche per $x = \pi - \pi/4=(3/4)\pi$. Dato che la funzione sen x è periodica di periodo 2π, tutte le soluzioni dell'equazione data sono $x = \pi/4 + 2k\pi$, $x = (3/4)\pi+2k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) Ricordiamo che sen $x = 1/2$ per $x=\pi/6$; dalla figura 2.15 si legge che sen $x = -1/2$ per $x = -\pi/6$ e $x = \pi+\pi/6=(7/6)\pi$. Per la periodicità le soluzioni dell'equazione data sono $x=-\pi/6+2k\pi$ (che si può scrivere in modo equivalente $x = (11/6)\pi+2k\pi$) e $x = (7/6)\pi + 2k\pi$, $\forall k\in Z$]

2.32 Risolvere le equazioni

(a) sen $x = 0$ (b) sen $x = 1$ (c) sen $x=2$

[(a) $x=k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) $x = \pi/2 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$; (c) nessuna soluzione]

Consideriamo ora l'equazione $\cos x = a$, $a\in R$, e facciamo riferimento alla figura 2.16.

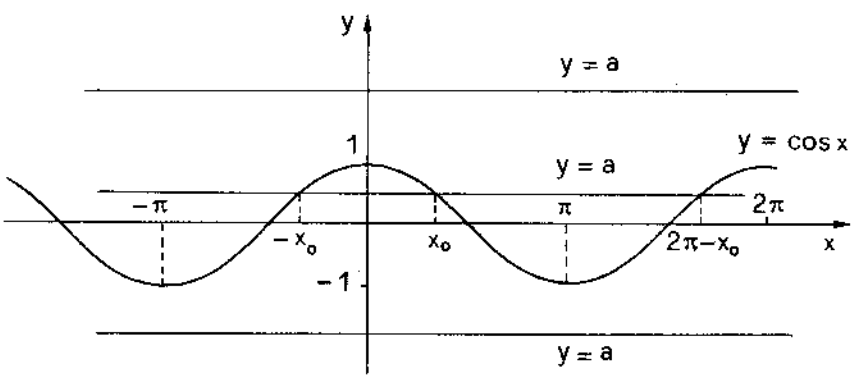


figura 2.16

Otteniamo il seguente schema di risoluzione

$$\left.\begin{array}{l}\cos x = a \\ a>1 \text{ oppure } a<-1\end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos x = a \\ -1 \le a \le 1\end{array}\right\} \iff$$ scelto $x_o \in [0,\pi]$ tale che $\cos x_o = a$, le soluzioni sono $x = \pm x_o + 2k\pi$, $\forall k \in Z$.

2.33 Risolvere le equazioni

(a) $\cos x = \sqrt{3}/2$ (b) $\cos x = 0$

[(a) $x = \pm \pi/6 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) $x = \pm \pi/2 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$, che si può scrivere in modo equivalente $x = \pi/2 + k\pi$, $\forall k \in Z$]

2.34 Risolvere le equazioni

(a) $\cos x = -1/2$ (b) $\cos x = 1$

[(a) $x = \pm (2/3)\pi + 2k\pi$; (b) $x = 2k\pi$]

Facciamo riferimento alla figura 2.17 per l'equazione $tgx = a$, con $a \in R$.

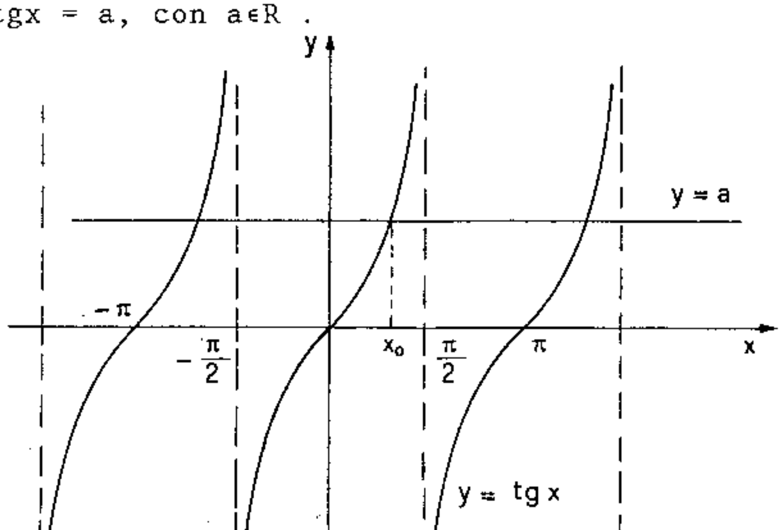


figura 2.17

Otteniamo le soluzioni seguenti

$tg\ x = a \iff$ scelto $x_o \in (-\pi/2, \pi/2)$ tale che $tgx_o = a$, le soluzioni sono $x = x_o + k\pi$, $\forall k \in Z$.

2.35 Risolvere le equazioni

(a) $\operatorname{tg} x = 0$ (b) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 1$

[(a) $x = k\pi$, (b) $x = \pi/6 + k\pi$]

2.36 Risolvere le equazioni

(a) $1 - \operatorname{tg} x = 0$ (b) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

[(a) $x=\pi/4 + k\pi$; (b) l'equazione data equivale a $\operatorname{tg} x = -1$, che ha per soluzioni $x=-\pi/4+k\pi$]

Negli esercizi che seguono proponiamo la risoluzione di alcune equazioni trigonometriche più generali.

2.37 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $\operatorname{sen}^2 x = 1$ (b) $2\cos^2 x - 1 = 0$

[(a) $x = \pi/2 + k\pi$; (b) $x = \pm\pi/4 + 2k\pi$ e inoltre $x=\pm(3/4)\pi + 2k\pi$, che si può anche scrivere : $x = \pi/4 + k\pi$]

2.38 Risolvere le equazioni

(a) $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$ (b) $2\cos^2 x - 3\cos x+1=0$

[(a) Attenzione a non semplificare entrambi i membri per senx, perchè in tal caso si perdono le soluzioni corrispondenti a $\operatorname{sen} x = 0$. Le soluzioni dell'equazione data sono $x = k\pi$ e $x=\pi/2 + 2k\pi$; (b) Si tratta di una equazione di secondo grado in cos x. Risolvendo rispetto a cosx si trova $\cos x = 1$ oppure $\cos x = 1/2$. Perciò le soluzioni dell'equazione data sono $x = 2k\pi$ e $x=\pm\pi/3 + 2k\pi$]

2.39 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $\cos^2 x + 3\operatorname{sen} x - 3=0$ (b) $2\operatorname{sen}^2 x+7\cos x=8$

[(a) Ponendo $\cos^2 x =1-\operatorname{sen}^2 x$ si ottiene una equazione di secondo grado in senx che, risolta, dà $\operatorname{sen} x = 1$ oppure $\operatorname{sen} x = 2$; $\operatorname{sen} x=1$ ha per soluzioni $x = \pi/2 + 2k\pi$, che sono anche le soluzioni dell'equazione data, perchè $\operatorname{sen} x = 2$ non è verificata da alcun valore reale di x; (b) Ponendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, si verifica che non ci sono soluzioni]

2.40 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $2\,\text{sen}^2x = \cos x + 1$ (b) $\text{sen}^2x = \cos x - 1$

[(a) $\pm\,\pi/3 + 2k\pi$, $\pi + 2k\pi$; (b) $2k\pi$]

2.41 Risolvere le equazioni

(a) $\text{tg}^2x - \text{tg}x = 0$ (b) $\text{tg}x + \text{cotg}\,x + 2 = 0$

[(a) $k\pi$, $\pi/4 + k\pi$, (b) $-\pi/4 + k\pi$]

2.42 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $\text{tg}\,x + \text{sen}\,x = 1 + \cos x$ (b) $1 + \text{sen}^2x = \text{tg}^2x + \cos^2x$

[(a) $\pi + 2k\pi$, $\pi/4 + k\pi$; (b) $k\pi$, $\pi/4 + k\pi/2$]

2.43 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $\text{sen}^2x = 2\cos^2x - 1/2$ (b) $\text{sen}^2x + \cos^2x = 2$

[(a) $\pm\,\pi/4 + k\pi$, (b) la risposta è immediata senza alcun conto: nessuna soluzione]

2.44 Risolvere le equazioni

(a) $\text{sen}\,2x - \cos x = 0$ (b) $\cos 2x - \text{sen}\,x = 0$

[Utilizzare le formule di duplicazione]

2.45 Determinare le soluzioni delle equazioni

(a) $\text{sen}\,x \cdot \cos x \cdot \text{tg}\,x = 1$ (b) $1 - 4\,\text{sen}x\cos x = 0$

[Nessuna soluzione, dato che $\text{sen}^2x = 1$ solo se $\cos x = 0$; (b) Con la sostituzione $2\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,2x$ si trovano le soluzioni $x = \pi/12 + k\pi$, $x = (5/12)\pi + k\pi$]

2.46 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $2\cos^2x + \text{sen}^2 2x = 2$ (b) $2\cos x + \cos 2x = 1/2$

[(a) $\pi/4 + k\pi/2$, $k\pi$; (b) $\pm\,\pi/3 + 2k\pi$]

2.47 Risolvere le equazioni

(a) $\text{sen } x + \cos x = 1$ (b) $\text{sen } x - \cos x = 1$

[Conviene scrivere le equazioni date in funzione di $t=\text{tg}(x/2)$, ponendo

$\text{sen } x = 2t/(1+t^2)$, $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$.

Nell'effettuare tale sostituzione occorre verificare se si scartano eventuali soluzioni corrispondenti al caso in cui $\text{tg}(x/2)$ non è definita, cioè $x/2 = \pi/2 + k\pi$, cioè ancora $x=\pi+2k\pi$.
(a) $x = \pi+2k\pi$ non è soluzione dell'equazione data. Scrivendo la equazione corrispondente in funzione di $t = \text{tg}(x/2)$, si trova $2t^2 - 2t = 0$, che ammette le soluzioni $t=0$ e $t=1$. Essendo $t=\text{tg}(x/2)$, risulta infine $x=2k\pi$ e $x=\pi/2 + 2k\pi$; (b) con la sostituzione $\text{tg}(x/2)=t$ si trova $t=1$, da cui $x=\pi/2 + 2k\pi$. Inoltre l'equazione data ammette anche le soluzioni $\pi+2k\pi$]

2.48 Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche con il metodo indicato nell'esercizio precedente

(a) $\sqrt{3}\,\text{sen } x + \cos x = 1$ (b) $\text{sen } x + 2\cos x - 1 = 0$

[(a) $2k\pi$, $(2/3)\pi + 2k\pi$; (b) $\pi/2 + 2k\pi$]

2.49 Risolvere le equazioni

(a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$
(b) $\text{sen } x + \text{sen } 2x + \text{sen } 3x = 0$

[Utilizzare le formule di prostaferesi (a) $\pi/4 + k\pi/2$, $\pm(2/3)\pi + 2k\pi$; (b) $k\pi$, $\pm\pi/2 + 2k\pi$, $\pm(2/3)\pi+2k\pi$]

2.50 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $\text{sen } x + \text{sen } 3x = 0$ (b) $\text{sen } x = \text{sen } 3x - 2\cos 2x$

[(a) $k\pi/2$, $\pi/2 + k\pi$; (b) $\pi/4 + k\pi/2$, $\pi/2 + 2k\pi$]

2.51 Risolvere le equazioni trigonometriche

(a) $\text{sen } x + \text{sen } (\pi/2+x) = 0$ (b) $3\,\text{sen}^2 x = \cos^2 x$
(c) $4\,\text{sen}^2 x - 8\cos x + 1 = 0$ (d) $\text{tg}(x+\pi/4) = 2+3\,\text{tg}\,x$

[(a) $-\pi/4 + k\pi$; (b) $\pm\pi/6 + k\pi$; (c) $\pm\pi/6 + 2k\pi$;
(d) $\pm\pi/6 + k\pi$]

2.52 Determinare le soluzioni delle equazioni

(a) $\text{sen}(\cos x)=0$ (b) $\text{sen}(\text{sen}\, x) = 1$

[(a) Ponendo $\cos x=t$, l'equazione $\text{sen}\, t=0$ ha per soluzioni $t = k\pi$, con $k \in Z$. Se $k \neq 0$, l'equazione $t = \cos x=k\pi$ non ha soluzioni, perchè i valori della funzione $\cos x$ sono nell'intervallo $[-1,1]$, mentre $k\pi$ è esterno all'intervallo $[-3,3]$. Se $k = 0$, l'equazione $\cos x =0$ ha come soluzioni $x= \pi/2 + k\pi$, che sono quindi le soluzioni dell'equazione data; (b) nessuna soluzione]

Capitolo 3

DISEQUAZIONI

3A. Disequazioni di primo e di secondo grado

Se n è un numero naturale, un *polinomio* $p(x)$ di *grado* n è un'espressione del tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 ,$$

dove x è la variabile (che supponiamo reale) e a_k, per $k=0,1,\ldots,n$, sono i *coefficienti* (che supponiamo reali), con $a_n \neq 0$.

Una *disequazione algebrica* è una espressione di uno dei seguenti quattro tipi:

$$p(x) > 0, \quad p(x) \geq 0, \quad p(x) < 0, \quad p(x) \leq 0.$$

Notiamo che, pur di cambiare il segno a tutti i coefficienti del polinomio $p(x)$ (il che equivale a considerare il polinomio $-p(x)$), ci si può sempre ricondurre ad una disequazione del tipo $p(x) > 0$, oppure $p(x) \geq 0$.

Allo scopo di elencare alcuni metodi risolutivi per le disequazioni algebriche, andiamo per ordine in base al grado del polinomio.

Consideriamo una disequazione algebrica di *primo grado*, ad esempio del tipo

$$ax + b > 0, \qquad \text{con} \quad a \neq 0.$$

Dopo aver scritto la disequazione nella forma equivalente: $ax > -b$, si divide per il coefficiente a. Occorre tener conto del segno di a, perchè, *dividendo entrambi i membri di una disequazione per una quantità* $a \neq 0$, *il verso della disequazione rimane invariato o cambia a seconda che* a *sia positivo o negativo*. Nel nostro caso si ottiene:

$$a>0: \quad ax+b > 0 \iff ax > -b \iff x > -b/a;$$
$$a<0: \quad ax+b > 0 \iff ax > -b \iff x < -b/a.$$

3.1 Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado:

(a) $x+5 > 0$ (b) $3x + 7 > 0$
(c) $5-x > 0$ (d) $-x - 7 > 0$

[(a) $x > -5$; (b) $x > -7/3$; (c) $x < 5$; (d) $x < -7$]

3.2 Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado:

(a) $2x+1 \geq 0$ (b) $2x+1 < 0$
(c) $-x > 0$ (d) $2x-4 \leq 0$

[(a) $x \geq -1/2$; (b) $x < -1/2$; (c) $x < 0$; (d) $x \leq 2$]

3.3 Risolvere le seguenti disequazioni

(a) $3x + 4 - x + 1 < x - 6$

(b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4}x \geq \dfrac{5}{4}x + 2$

(c) $x - 7 - 2x < 7 - x$

(d) $x + 7 + 2x \leq 7 - x$

[(a) $x < -11$; (b) dopo aver semplificato, la disequazione data si scrive $1/3 \geq 2$ che è una relazione falsa, indipendentemente da x; quindi (b) non ha alcuna soluzione; (c) la disequazione data è equivalente alla scrittura $-7 < 7$, che è vera indipendentemente da x; quindi tutti i numeri reali x risolvono (c); (d) $x \leq 0$]

Una disequazione (algebrica) di *secondo grado* è, ad esempio, del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0, \qquad \text{con} \quad a \neq 0.$$

Per risolvere tale disequazione è opportuno considerare il *discriminante,* o *delta* , definito da $\Delta=b^2-4ac$, e distinguere i casi in cui $\Delta>0$, $\Delta=0$, $\Delta<0$.

1° caso: $\Delta>0$. Se il Δ è positivo, l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ammette due radici reali distinte x_1, x_2 definite da

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Verifichiamo che vale la scomposizione:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \;;$$

infatti

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)+\sqrt{b^2-4ac}\right]\left[(2ax+b)-\sqrt{b^2-4ac}\right]$$

$$= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)\right]= \frac{1}{4a}\left[4a^2x^2+4abx+4ac\right]$$

$$= ax^2 + bx + c.$$

Perciò:

$$ax^2+bx+c > 0 \iff a(x-x_1)(x-x_2) > 0.$$

Se $a>0$, deve risultare $(x-x_1)(x-x_2)> 0$ e ciò è possibile se $(x-x_1)$, $(x-x_2)$ hanno lo stesso segno, cioè se sono entrambi positivi o entrambi negativi. Le quantità $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$ sono positive se $x > x_1$ e $x > x_2$; dato che $x_2 > x_1$, ciò è verificato se $x > x_2$. Analogamente $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$ sono entrambi negativi se $x < x_1$.

Se $a < 0$, deve essere $(x-x_1)(x-x_2) < 0$; ciò è equivalente a dire che $(x-x_1)$,$(x-x_2)$ hanno segno discorde. Essendo $x_2 > x_1$, non è possibile che $x-x_2$ sia positivo e $x-x_1$ negativo. Quindi deve essere $x-x_2 < 0$ (cioè $x < x_2$) e $x-x_1 > 0$ (cioè $x > x_1$). Quindi in questo caso le soluzioni sono tutti i numeri x compresi tra x_1 e x_2.

Se siamo interessati a risolvere la disequazione $ax^2+bx+c < 0$, possiamo ricondurci al caso precedente cambiando i segni di tutti i coefficienti. Naturalmente le radici x_1,x_2 rimangono invariate, mentre occorre ricordare che è cambiato il segno di a. Le soluzioni della disequazione cambiano in corrispondenza.

Riassumiamo di seguito il caso $\Delta=b^2-4ac > 0$:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0, \quad \Delta > 0 \end{array}\right\} \iff \quad x < x_1 \quad e \quad x > x_2 \,;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a < 0, \quad \Delta > 0 \end{array}\right\} \iff \quad x_1 < x < x_2 \,;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c < 0 \\ a > 0, \quad \Delta > 0 \end{array}\right\} \iff \quad x_1 < x < x_2 \,;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c < 0 \\ a < 0, \quad \Delta > 0 \end{array}\right\} \iff \quad x < x_1 \quad e \quad x > x_2$$

Risultati analoghi valgono per le disequazioni $ax^2+bx+c \geq 0$, $ax^2+bx+c \leq 0$.

2° caso: $\Delta = 0$. Se il discriminante Δ è nullo, la equazione $ax^2+bx+c = 0$ ammette una sola radice reale o, come si dice anche, due radici coincidenti $x_1=x_2=$ $=-b/2a$. Come in precedenza risulta

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a\,(x-x_1)^2 \;.$$

Se ne deduce che, se $a > 0$, allora $ax^2+bx+c > 0$ per ogni $x \neq x_1$; mentre, se $a < 0$, allora $ax^2+bx+c<0$ per ogni $x \neq x_1$.

Riassumiamo il caso $\Delta=b^2-4ac = 0$ nel seguente schema:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff x \neq x_1 (=x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a < 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c \geq 0 \\ a>0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff \forall x \in \mathbb{R} \text{ è soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c \geq 0 \\ a < 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff x=x_1 (=x_2)\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c < 0 \\ a > 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c < 0 \\ a < 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff x \neq x_1\ (= x_2)\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c \leq 0 \\ a > 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff x = x_1\ (=x_2);$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c \leq 0 \\ a < 0,\ \Delta=0 \end{array}\right\} \iff \forall x \in R \text{ è soluzione.}$$

3° caso : $\Delta < 0$. Se il discriminante Δ è negativo l'equazione $ax^2+bx+c=0$ non ammette soluzioni reali.

Non è possibile effettuare la scomposizione del polinomio ax^2+bx+c come effettuato nel caso $\Delta>0$; però continua a valere l'ultima parte della scomposizione che qui riprendiamo:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{1}{4a}\,[4a^2x^2+4abx+4ac] \\ &= \frac{1}{4a}\,[(2ax+b)^2 - (b^2-4ac)]. \end{aligned}$$

Dato che stiamo supponendo che $b^2-4ac<0$, nella parentesi quadra appare una quantità sicuramente positiva. Perciò il segno di ax^2+bx+c è identico al segno del coefficiente a. Si ottiene il seguente schema:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a > 0,\ \Delta<0 \end{array}\right\} \iff \forall x \in R \text{ è soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c > 0 \\ a < 0,\ \Delta<0 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c < 0 \\ a>0,\ \Delta<0 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c < 0 \\ a<0,\ \Delta<0 \end{array}\right\} \iff \forall x \in R \text{ è soluzione.}$$

Risultati analoghi valgono per le disequazioni $ax^2+bx+c \geq 0$, $ax^2+bx+c \leq 0$.

3.4 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

(a) $x^2-3x+2 < 0$ (b) $1-x^2 \leq 0$

(c) $2x^2-3x+1 \geq 0$ (d) $x^2+5x > 0$

[(a) $1 < x < 2$; (b) $x \leq -1$ e $x \geq 1$; (c) $x \leq 1/2$ e $x \geq 1$;
(d) $x < -5$ e $x > 0$]

3.5 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

(a) $16x^2+8x+1 > 0$ (b) $16x^2+8x+1 < 0$

(c) $x^2 \leq 0$ (d) $-9x^2+12x-4 \geq 0$

[(a) $x \neq -1/4$; (b) nessuna soluzione; (c) $x = 0$; (d) $x=2/3$]

3.6 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

(a) $x^2-x+1 < 0$ (b) $-2x^2+3x-2 < 0$
(c) $3x^2-7x+5 \geq 0$ (d) $-1+5x-7x^2 \geq 0$

[(a) nessuna soluzione; (b) $\forall x \in R$; (c) $\forall x \in R$; (d) nessuna soluzione]

3.7 Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado

(a) $16x^2+24x+9 \leq 0$ (b) $5+4x-3x^2 > 0$
(c) $5+4x+3x^2 > 0$ (d) $(x+5)(6-x) \leq 0$

[(a) $x=-3/4$; (b) $(2-\sqrt{19})/3 < x < (2+\sqrt{19})/3$; (c) $\forall x \in R$;
(d) $x \leq -5$ e $x \geq 6$]

3.8 Risolvere le seguenti disequazioni

(a) $(x-2)(x+2) + (x+1)^2 - 1 < 0$

(b) $(x-2)(x+2) - (x+1)^2 - 1 > 0$

(c) $(x+1)^2 + (x-1)^2 \leq 0$

(d) $(x+1)^2 \leq (x-1)^2$

[(a) $-2 < x < 1$; (b) Si riduce ad una disequazione di primo grado le cui soluzioni sono $x < -3$; (c) non ha soluzioni; (d) si tratta di una disequazione di primo grado con soluzioni $x \leq 0$]

3B. Disequazioni algebriche di grado superiore al secondo

Non esistono metodi risolutivi per equazioni o disequazioni algebriche di grado n comunque elevato. In questo paragrafo esponiamo alcuni metodi risolutivi, che sono validi nell'ambito delle condizioni specificate.

Una disequazione di quarto grado del tipo seguente è detta *disequazione biquadratica:*

$$ax^4 + bx^2 + c > 0.$$

Si risolve tale disequazione in due passi, con la sostituzione $t = x^2$. Si risolve preliminarmente la disequazione $at^2+bt+c > 0$; supponiamo ad esempio che sia $\Delta=b^2-4ac > 0$, $a > 0$ per cui si trovano limitazioni del tipo $t < t_1$, $t > t_2$. Ci si è ricondotti a studiare le due disequazioni di secondo grado $x^2 < t_1$, $x^2 > t_2$. Di seguito sono proposti alcuni esempi.

3.9 Risolvere la seguente disequazione biquadratica

$$4x^4 - 17x^2 + 4 > 0$$

[Ponendo $x^2=t$, si risolve preliminarmente la disequazione $4t^2 - 17t + 4 > 0$. Risulta $\Delta = 289-64=225 > 0$. Le due radici dell'equazione $4t^2-17t+4=0$ sono $t_1 = 1/4$, $t_2 = 4$; perciò la disequazione nell'incognita t ha soluzioni: $t < 1/4$ e $t > 4$. In corrispondenza otteniamo le due disequazioni di secondo grado $x^2 < 1/4$, $x^2 > 4$. La prima delle due disequazioni ha per soluzioni $-1/2 < x < 1/2$; la seconda $x < -2$, $x > 2$. In definitiva, la disequazione biquadratica ha soluzioni: $x < -2$, $-1/2 < x < 1/2$, $x > 2$]

3.10 Risolvere la seguente disequazione biquadratica

$$9x^4 + 4x^2 - 5 > 0$$

[Poniamo $x^2= t$; risolviamo preliminarmente la disequazione $9t^2+4t-5 > 0$ ottenendo $t < -1$ e $t > 5/9$. In termini della incognita x abbiamo ottenuto le due disequazioni $x^2 < -1$, $x^2 > 5/9$. La prima delle due non ha alcuna soluzione, mentre per la seconda otteniamo

$x < -\sqrt{5}/3$, $x > \sqrt{5}/3$. Riassumendo, le soluzioni della disequazione data sono $x < -\sqrt{5}/3$ e $x > \sqrt{5}/3$]

3.11 Risolvere la disequazione biquadratica

$$x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0$$

[Ponendo $x^2 = t$ otteniamo la disequazione $t^2 - 2t - 8 \leq 0$, che ha come soluzioni $-2 \leq t \leq 4$. Quindi devono valere contemporaneamente le due disequazioni $-2 \leq x^2$, $x^2 \leq 4$. La prima delle due è soddisfatta da ogni $x \in R$; la seconda è soddisfatta da $-2 \leq x \leq 2$. L'intersezione dei due insiemi è costituita dall'intervallo $-2 \leq x \leq 2$, che rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione biquadratica data]

3.12 Risolvere le seguenti disequazioni biquadratiche

(a) $x^4 - 3x^2 \geq 0$ (b) $x^4 + 8x^2 + 15 \leq 0$

(c) $x^4 - x^2 + 1 > 0$ (d) $x^4 + 2x^2 > 0$

[(a) $x \leq -\sqrt{3}$, $x=0$, $x \geq \sqrt{3}$; (b) nessuna soluzione; (c) $\forall x \in R$; (d) $x \neq 0$]

Un altro tipo di equazioni o disequazioni per cui è noto un semplice metodo risolutivo è quello delle equazioni o disequazioni *reciproche* di quarto grado, che sono relative ad un polinomio $p(x)$ della forma

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a,$$

ed in tal caso si parla di *polinomio reciproco di prima specie*, oppure

$$p(x) = ax^4 + bx^3 - bx - a,$$

ed in questo caso si dice che $p(x)$ è un *polinomio reciproco di seconda specie*.

3.13 Sia $p(x)$ un polinomio reciproco di prima o di seconda specie. Sia x_0 una radice del polinomio, cioè $p(x_0) = 0$, con $x_0 \neq 0$. Verificare che anche $1/x_o$ è radice del polinomio dato.

[Se ad esempio $p(x)$ è un polinomio reciproco di prima specie e di quarto grado, allora, per ogni $x \neq 0$ risulta $p(x)/x^4 = p(1/x)$. Perciò, se $p(x_o) = 0$ allora anche $p(1/x_o) = 0$.
Se $p(x)$ è un polinomio reciproco di seconda specie e di quarto grado risulta $p(x)/x^4 = -p(1/x)$ per ogni $x \neq 0$]

Per risolvere una disequazione reciproca di prima specie di quarto grado del tipo

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a > 0,$$

per $x \neq 0$, si dividono entrambi i membri per x^2; con ciò non si altera il verso della disuguaglianza. Si ottiene la disequazione equivalente

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c > 0.$$

Ponendo $t = x + 1/x$, risulta

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x+\frac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2.$$

Effettuando le sostituzioni, si trova la disequazione di secondo grado nell'incognita t:

$$at^2 + bt + c - 2a = 0.$$

Ricordando che $t = x+1/x$, occorre poi risalire ai valori x.

3.14 Risolvere la seguente disequazione reciproca di prima specie

$$2x^4 - 3x^3+4x^2-3x+2 > 0.$$

[Si verifica direttamente che $x=0$ è soluzione. Assumendo $x \neq 0$ e dividendo per x^2 si trova la disequazione equivalente

$$2(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x + \frac{1}{x}) + 4 > 0.$$

Ponendo $t=x+1/x$, risulta $x^2+1/x^2 = t^2 - 2$, da cui $2t^2-3t > 0$. E' una disequazione di secondo grado che ha per soluzioni $t < 0$ e $t>3/2$. In corrispondenza abbiamo le due disequazioni:

$$x + \frac{1}{x} < 0, \qquad x + \frac{1}{x} > \frac{3}{2} \quad .$$

Moltiplicando entrambi i membri per x, e tenendo conto del segno di x, otteniamo i quattro casi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 +1 < 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 +1 > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 +1 > \frac{3}{2}x \end{cases} ; \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 1 < \frac{3}{2}x \end{cases} .$$

Il primo sistema non ha soluzioni; il secondo ha come soluzioni ogni $x < 0$; il terzo ha per soluzioni ogni $x > 0$; il quarto non ha soluzioni.

Riassumendo, ogni $x \in R$ è soluzione della disequazione data]

3.15 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche di prima specie

(a) $x^4 -2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \leq 0$

(b) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 \geq 0$

[(a) $x=1$; (b) $x \leq (3-\sqrt{5})/2$, $x=1$, $x \geq (3+\sqrt{5})/2$]

Consideriamo un polinomio reciproco di seconda specie di quarto grado:

$$p(x) = ax^4 + bx^3 - bx - a, \qquad (a \neq 0).$$

Si verifica direttamente che $x=1$, $x=-1$ sono radici del polinomio, cioè $p(1) = p(-1) = 0$. Sempre direttamente si verifica che vale la scomposizione

$$p(x) = (x^2-1)(ax^2+bx+a) \quad .$$

Perciò, una disequazione reciproca di seconda specie del tipo

$$ax^4+bx^3-bx-a > 0,$$

equivale a risolvere separatamente i due sistemi:

$$\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ ax^2+bx+a > 0 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ ax^2+bx+a < 0 \end{cases}$$

4.16 Risolvere la seguente disequazione reciproca di seconda specie

$$2x^4-5x^3+5x-2 > 0 \ .$$

[Utilizzando la scomposizione

$$2x^4 - 5x^3 + 5x-2 = (x^2 - 1)(2x^2 - 5x + 2) \ ,$$

la disequazione data è equivalente ai due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 2x^2 - 5x+2 > 0 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ 2x^2 -5x + 2 < 0 \end{cases}$$

Il polinomio $p_1(x) = x^2-1$ è positivo se $x<-1$, $x > 1$, ed è negativo altrimenti. Otteniamo i tre sistemi equivalenti

$$\begin{cases} x < - 1 \\ 2x^2-5x+2 > 0 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 -5x+2 >0 \end{cases} \quad ; \qquad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ 2x^2-5x+2 < 0 \end{cases} \ .$$

Il polinomio $p_2(x)=2x^2 -5x+2$ è positivo se $x < 1/2$, $x > 2$, ed è negativo altrimenti. Ne segue che il primo sistema ha per soluzioni $x < - 1$, il secondo $x > 2$, il terzo $1/2 < x < 1$. Perciò, le soluzioni della disequazione iniziale sono: $x < - 1$, $1/2 < x < 1$, $x > 2$]

4.17 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche di seconda specie

(a) $x^4-2x^3+2x-1 \le 0$
(b) $3x^4+10x^3-10x-3 \ge 0$

[(a) $-1 \le x \le 1$; (b) $x \le -3$, $-1 \le x \le - 1/3$, $x \ge 1$]

4.18 Risolvere le seguenti disequazioni reciproche

(a) $2x^4 - 5x^3+4x^2 - 5x+2 < 0$

(b) $x^4-4x^3+4x-1 < 0$

(c) $4x^4-17x^3+17x-4 \ge 0$

(d) $4x^4-17x^3+8x^2-17x+4 \geq 0$

[(a) $1/2 < x < 2$; (b) $-1 < x < 2-\sqrt{3}$, $1 < x < 2+\sqrt{3}$;
(c) $x \leq -1$, $1/4 \leq x \leq 1$, $x \geq 4$; (d) $x \leq 1/4$, $x \geq 4$]

3.19 Risolvere le disequazioni

(a) $x^8-7x^4+12 > 0$ (b) $x^6-7x^3+12 > 0$

(c) $x^8-2x^7-3x^6 \geq 0$ (d) $x^{10}-x^6 \geq 0$

[(a) Effettuando la sostituzione $x^4=t$, si determina il risultato finale: $x < -\sqrt{2}$, $-\sqrt[4]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$, $x > \sqrt{2}$; (b) $x < \sqrt[3]{3}$, $x > \sqrt[3]{4}$; (c) Si metta in evidenza il fattore x^6. Il risultato finale è: $x \leq -1$, $x=0$, $x \geq 3$; (d) $x \leq -1$, $x=0$, $x \geq 1$]

3C. Disequazioni razionali. Sistemi di disequazioni

Un'espressione del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0 ,$$

dove $p(x)$, $q(x)$ sono polinomi, si dice *disequazione razionale*. Risolvere tale disequazione significa determinare quei numeri reali x per cui $p(x)$ e $q(x)$ hanno lo stesso segno; perciò la disequazione data è equivalente ai due *sistemi di disequazioni:*

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) < 0 \end{cases} .$$

3.20 Risolvere la disequazione razionale

$$\frac{x+1}{x-1} > 0$$

[Consideriamo i due sistemi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema è soddisfatto da $x > 1$, il secondo da $x < -1$. Perciò la disequazione razionale data ha per soluzioni $x < -1$ e $x > 1$]

3.21 Risolvere le disequazioni razionali

(a) $\frac{x+5}{x+6} < 0$ (b) $\frac{1-x}{x} > 0$

[(a) $-6 < x < -5$; (b) $0 < x < 1$]

3.22 Risolvere le disequazioni razionali

(a) $\frac{3-x}{x+1} \geq 0$ (b) $\frac{7-x}{4-3x} \leq 0$

[(a) la disequazione data è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} 3 - x \leq 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} .$$

Il primo sistema ha per soluzioni $-1 < x \leq 3$. Tale intervallo è anche l'insieme delle soluzioni della disequazione razionale data, perchè il secondo sistema non ammette soluzioni; (b) $4/3 < x \leq 7$]

3.23 Risolvere la disequazione razionale

$$\frac{x^2-2x}{x^2-4x+3} < 0$$

[la disequazione è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x^2 -2x > 0 \\ x^2 -4x + 3 < 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} .$$

Consideriamo il primo sistema : la prima disequazione del primo sistema ha per soluzioni $x<0, x>2$; mentre la seconda disequazione ha per soluzioni $1<x<3$; i valori di x comuni sono quindi $2<x<3$. Il secondo sistema ha per soluzioni $0<x<1$. Perciò la disequazione data ha soluzioni $2<x<3$, $0<x<1$]

3.24 Risolvere le disequazioni razionali

(a) $2 + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x+1}$ (b) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2-x}$

[(a) E' conveniente portare tutti gli addendi a primo membro, riducen do le frazioni a comune denominatore. Il risultato è $x < -1$, $x = 0$, $x > 1$; (b) $0 < x \leq 1$, $x > 2$]

3.25 Risolvere le disequazioni razionali

(a) $\dfrac{3x^2+7x+4}{x^4-2x^2-3} \leq 0$ (b) $\dfrac{10}{x^2+1} > 6 - x^2$

[(a) $-\sqrt{3} < x \leq -4/3$, $-1 \leq x < \sqrt{3}$; (b) $x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$]

3.26 Risolvere la seguente disequazione razionale

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \geq 0$$

[$0 < x \leq 1 - \sqrt{3}/3$, $1 < x \leq 1 + \sqrt{3}/3$, $x > 2$]

Ricordiamo la definizione di *valore assoluto*, indicato con $|x|$, di un numero reale x:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Risulta $|x| \geq 0$ per ogni $x \in R$ e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$. Valgono inoltre le proprietà: $|-x| = |x|$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $|x/y| = |x|/|y|$. Altre importanti proprietà sono enunciate nei tre esercizi che seguono.

3.27 Sia $r \geq 0$. Dimostrare che:

$$|x| \leq r \qquad \Longleftrightarrow \qquad -r \leq x \leq r .$$

[Ricordando la definizione di $|x|$, la relazione $|x| \leq r$ equivale ai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x \leq r \end{cases} .$$

Il primo sistema equivale a $0 \leq x \leq r$, mentre il secondo equivale a

$-r \le x < 0$; l'unione dei due intervalli è appunto l'intervallo $-r \le x \le r$]

3.28 Sia $r > 0$. Dimostrare che:

$$|x| < r \iff -r < x < r \ .$$

3.29 Dimostrare la *disuguaglianza triangolare:*

$$|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2| \ , \qquad \forall x_1, x_2 \in R.$$

[Prendiamo in considerazione la relazione $|x| \le r$, già studiata nell'esercizio 3.27. Ponendo $r = |x|$, risulta evidentemente $|x| \le |x|$ (in particolare vale il segno di uguale); in base all'esercizio 3.27 otteniamo $-|x| \le x \le |x|$, $\forall x \in R$. Se x_1, x_2 sono numeri reali, abbiamo quindi

$$-|x_1| \le x_1 \le |x_1| \ , \ -|x_2| \le x_2 \le |x_2| \ .$$

Sommando membro a membro otteniamo

$$-(|x_1| + |x_2|) \le x_1 + x_2 \le (|x_1| + |x_2|).$$

Utilizzando di nuovo l'esercizio 3.27 con $r = |x_1| + |x_2|$, otteniamo la disuguaglianza triangolare]

3.30 Risolvere la disequazione: $|x+3| - 2 > 0$.

[La disequazione data è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x + 3 \ge 0 \\ x + 3 - 2 > 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x + 3 < 0 \\ -(x+3) - 2 > 0 \end{cases} .$$

Dal primo si ottiene $x > -1$, dal secondo $x < -5$. Perciò la disequazione data ha per soluzione tutti i numeri reali x per cui $x < -5$ e $x > -1$]

3.31 Risolvere le disequazioni:

(a) $2 - |x-2| \ge 0$ (b) $x \ge 2(|x| - 1)$

[(a) $0 \le x \le 4$; (b) $-2/3 \le x \le 2$]

3.32 Risolvere le disequazioni:

(a) $x^2+2|x|-3<0$ (b) $x^2-2|x|-3>0$

[La disequazione (a) è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+2x-3<0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x<0 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} .$$

Risolvendo le disequazioni di secondo grado si ottiene

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -3<x<1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x<0 \\ -1<x<3 \end{cases} .$$

Il primo sistema dà $0 \leq x < 1$, il secondo $-1<x<0$. Perciò la disequazione iniziale ha per soluzioni: $-1<x<1$; (b) Procedendo in modo simile a quanto indicato per l'esercizio (a), si trova il risultato: $x<-3$, $x>3$]

3.33 Risolvere le disequazioni:

(a) $\dfrac{4|x|}{x^2-2|x|-3} < -1$ (b) $2|x^2-x| > |x|$

[(a) $-3<x<-1$, $1<x<3$; (b) $x<0$, $0<x<1/2$, $x>3/2$ (senza risolvere disequazioni di secondo grado, il risultato si ottiene più semplicemente dividendo entrambi i membri della disequazione data per $|x|$)]

3.34 Risolvere le disequazioni

(a) $\left|\dfrac{x-1}{x-7}\right| > 1$ (b) $\left|\dfrac{2x-1}{5-x}\right| < 2$

[(a) $x>4$, $x \neq 7$; (b) $x<11/4$]

3.35 Risolvere le disequazioni

(a) $|2x^2-16x+31| < 1$ (b) $(x+1)^2 < |x^2-1|$

[(a) $3<x<5$, $x \neq 4$; (b) $x<0$, $x \neq -1$]

3D. Disequazioni irrazionali

Fissato un numero naturale n, espressioni del tipo

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad , \quad \sqrt[n]{p(x)} < q(x) \ ,$$

dove $p(x)$, $q(x)$ sono polinomi, si dicono *disequazioni irrazionali*. Il metodo di risoluzione è differente a secondo che n sia pari o dispari. Di seguito distinguiamo i due casi.

La funzione $y = x^n$ è strettamente crescente su R se n è un numero naturale *dispari*. In formule ciò si esprime:

$$x_1 < x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^n < x_2^n \qquad \text{(n dispari)}.$$

Ne segue in particolare che la funzione x^n è invertibile su tutto l'asse reale, se n è dispari. La funzione inversa è $y = \sqrt[n]{x}$ è definita su tutto R ed è strettamente crescente, cioè:

$$x_1 < x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} \qquad \text{(n dispari)}.$$

In base a tali proprietà, le disequazioni irrazionali con n dispari si risolvono elevando alla n-sima potenza entrambi i membri. Precisamente:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \overset{\text{n dispari}}{\Longleftrightarrow} \quad p(x) > [q(x)]^n \ ;$$

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \quad \overset{\text{n dispari}}{\Longleftrightarrow} \quad p(x) < [q(x)]^n \ .$$

3.36 Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 3x - 2} > x$$

[Elevando entrambi i membri alla terza potenza e semplificando per x^3 si ottiene la disequazione equivalente $-x^2+3x-2 > 0$, che ha per soluzioni: $1 < x < 2$]

3.37 Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt[3]{x(x^2-1)} > x - 1$$

[Elevando alla terza potenza entrambi i membri otteniamo la disequazione equivalente

$$x^3 - x > (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Semplificando per x^3 si ottiene la disequazione di secondo grado $3x^2 - 4x + 1 > 0$, che ha per soluzioni $x < 1/3$ e $x > 1$]

Se n è un numero naturale *pari* la funzione $y=x^n$ è strettamente crescente per $x \geq 0$. In formule ciò si scrive:

$$0 \leq x_1 < x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1^n < x_2^n \qquad (n \text{ pari}).$$

La funzione x^n è invertibile nell'intervallo $[0,+\infty)$ se n è pari. La funzione inversa è $y=\sqrt[n]{x}$; è definita per $x \geq 0$ ed è strettamente crescente, cioè:

$$0 \leq x_1 < x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2} \qquad (n \text{ pari}).$$

Consideriamo ora la disequazione irrazionale con n pari:

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x).$$

Per le proprietà di monotonia espresse in precedenza, anche in questo caso eleviamo entrambi i membri della disequazione alla n-sima potenza; però richiediamo anche che $p(x) \geq 0$ e $q(x) > 0$. In simboli:

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \quad \stackrel{n \text{ pari}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} p(x) < [q(x)]^n \\ p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la condizione $q(x) > 0$ è necessaria affinchè valga l'equivalenza sopra scritta; infatti la relazione $p(x) < [q(x)]^n$ può essere verificata anche se $q(x)$ è negativo (dato che n è pari), ma in tal caso non sarebbe verificata la relazione $\sqrt[n]{p(x)} < q(x)$, perchè il primo membro è maggiore od uguale a zero.

Infine consideriamo la disequazione irrazionale con n pari:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) ;$$

occorre richiedere che $p(x) \geq 0$. In tal caso, se $q(x)$ è negativo, la disequazione data è verificata; mentre, se $q(x) \geq 0$, allora possiamo imporre la condizione $p(x) > [q(x)]^n$, ed in tal caso risulta automaticamente $p(x) \geq 0$. In definitiva abbiamo:

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \overset{\text{n pari}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} q(x) < 0 \\ p(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) > [q(x)]^n \end{cases}.$$

3.38 Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt{4x^2-1} < x - 3$$

[La disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 4x^2 - 1 \geq 0 \\ x-3 > 0 \\ 4x^2 - 1 < (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 ; \end{cases}$$

la terza disequazione si scrive anche $3x^2 +6x-10 < 0$, che ha per soluzioni $-1-\sqrt{39}/3 < x < -1+\sqrt{39}/3$; la seconda disequazione ha per soluzioni $x > 3$. Dato che $-1+\sqrt{39}/3 < 3$ (infatti ciò equivale a $\sqrt{39}/3 < 4$, cioè $\sqrt{39} < 12$, cioè ancora $39 < 144$, che è vera), il sistema non ha soluzioni. Perciò anche la disequazione data non ha soluzioni]

3.39 Risolvere la disequazione irrazionale

$$\sqrt{2-x^2} > 2x - 1$$

[la disequazione data ha per soluzioni l'unione delle soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ 2-x^2 \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2-x^2 > (2x-1)^2 \end{cases}$$

Eseguendo i conti otteniamo i due sistemi equivalenti

$$\begin{cases} x < 1/2 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ -1/5 < x < 1 \end{cases} .$$

Cioè ancora:

$$-\sqrt{2} \leq x < 1/2 \quad ; \quad 1/2 \leq x < 1 \ .$$

Perciò la disequazione data ha per soluzioni: $-\sqrt{2} \leq x < 1$]

3.40 Risolvere le disequazioni

(a) $\sqrt{3x-1} \geq 2$ (b) $\sqrt{1-x^2} < x$

[(a) $x \geq 5/3$; (b) $\sqrt{2}/2 < x \leq 1$]

3.41 Risolvere le disequazioni

(a) $\sqrt{1-x^2} > x$ (b) $\sqrt{1-x^2} + x \geq 0$

[(a) $-1 \leq x < \sqrt{2}/2$; (b) $-\sqrt{2}/2 \leq x \leq 1$]

3.42 Risolvere le disequazioni

(a) $\sqrt[3]{64x^3 - x} > 4x - 3$ (b) $\sqrt[3]{8x^3-7} < 2x - 1$

[(a) $\forall x \in R$; (b) $-1/2 < x < 1$]

3.43 Risolvere la disequazione $\sqrt{3x^2-1} > \sqrt{x^2-3}$.

[la disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \\ 3x^2 - 1 > x^2 - 3 \ , \end{cases}$$

che ha per soluzioni: $x \leq -\sqrt{3}$, $x \geq \sqrt{3}$]

3.44 Risolvere le disequazioni

(a) $|x|\sqrt{1-2x^2} > 2x^2-1$ (b) $x\sqrt{1-2x^2} > 2x^2-1$

[(a) Dato che $|x| = \sqrt{x^2}$, la disequazione data è equivalente a $\sqrt{x^2(1-2x^2)} > 2x^2-1$, che ha come soluzioni: $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$. Tali soluzioni si trovano più semplicemente osservando che deve essere $1-2x^2 \geq 0$ e che per tali x il secondo membro della disequazione è minore o uguale a zero. Perciò la disequazione data è equivalente alla disequazione di secondo grado $1-2x^2 > 0$;
(b) Conviene studiare separatamente i casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Se $x \geq 0$ la disequazione si risolve come nel caso (a) e si ottiene $0 \leq x < \sqrt{2}/2$. Se invece $x < 0$, si può porre $y=-x$ e risolvere la disequazione $y\sqrt{1-2y^2} < 1-2y^2$ con $y > 0$. Semplificando per $\sqrt{1-2y^2}$ (>0) si ottiene la disequazione più semplice $y < \sqrt{1-2y^2}$ che, nell'ambito delle $y > 0$, ha soluzioni $0 < y < \sqrt{3}/3$. Riassumendo, le soluzioni della disequazione iniziale sono $-\sqrt{3}/3 < x < \sqrt{2}/2$]

3.45 Risolvere la disequazione

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1} - 2 < 0$$

[Ponendo $y = \sqrt[6]{x-1}$, risulta $\sqrt[3]{x-1} = y^2$. Con tali notazioni occorre risolvere $y^2 + y - 2 < 0$. Tenendo conto che $y \geq 0$, deve essere $0 \leq y < 1$ ... la soluzione è $1 \leq x < 2$]

3E. Disequazioni esponenziali e logaritmiche

In questo paragrafo prendiamo in considerazione le funzioni *esponenziale* $y = a^x$ e *logaritmo* $y = \log_a x$, con a numero reale positivo e diverso da 1.

A titolo di esempio consideriamo la funzione esponenziale con base $a = 2$: $y = 2^x$. Allo scopo di disegnare un grafico approssimativo della funzione 2^x, riportiamo i valori di tale funzione in corrispondenza ad alcuni valori interi di x:

x	2	1	0	-1	-2
2^x	4	2	1	1/2	1/4

Con l'aiuto di tali valori disegnamo il grafico approssimativo in figura 3.1.

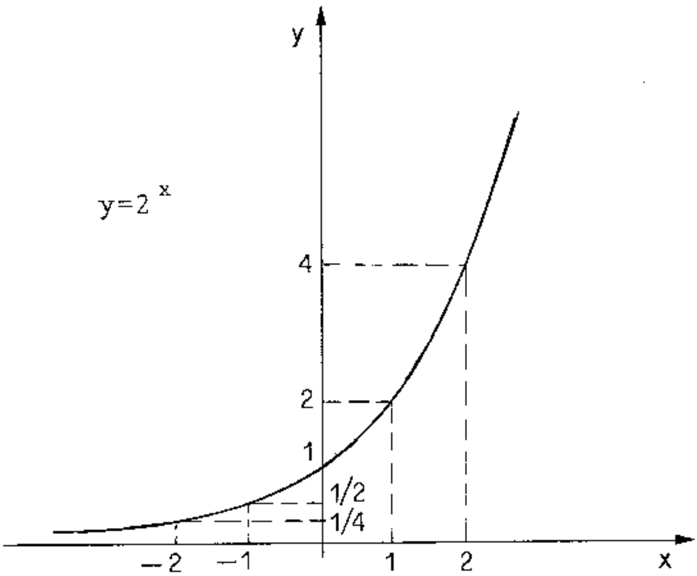


figura 3.1

La funzione 2^x è definita per ogni $x \in R$, è positiva per ogni x, ed è *strettamente crescente,* cioè:

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad 2^{x_1} < 2^{x_2} .$$

Consideriamo ora una funzione esponenziale con base a minore di 1, ad esempio a = 1/2. Abbiamo la seguente tavola di valori, ed in corrispondenza il grafico della funzione $(1/2)^x$ in figura 3.2.

x	2	1	0	-1	-2
$(1/2)^x$	1/4	1/2	1	2	4

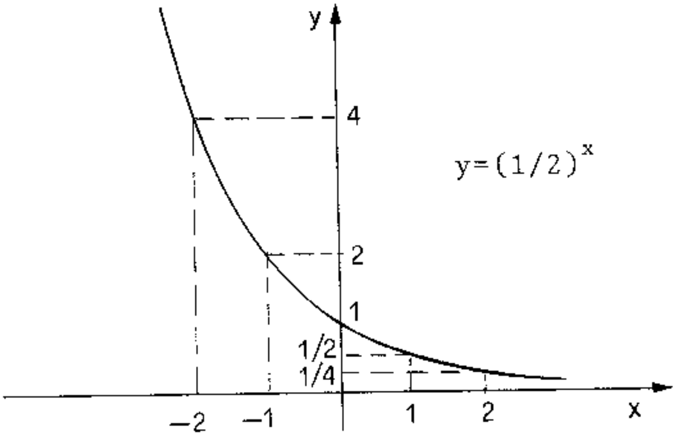


figura 3.2

La funzione $(1/2)^x$ è definita e positiva per ogni $x \in R$, ed è *strettamente decrescente,* cioè

$$x_1 < x_2 \implies \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} .$$

Più in generale, la funzione esponenziale $y = a^x$ è strettamente crescente se la base a è maggiore di 1, ed è strettamente decrescente se $0 < a < 1$. In formule:

$$x_1 < x_2, \quad a > 1 \implies a^{x_1} < a^{x_2} ;$$

$$x_1 < x_2, \quad 0 < a < 1 \implies a^{x_1} > a^{x_2} .$$

Particolarmente importante è il caso in cui la base è uguale al numero di Nepero e (=2.71...).Dato che $e > 1$, la funzione esponenziale $y = e^x$ è strettamente crescente.

Qualunque sia la base a ($a>0$, $a \neq 1$) la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ è definita su R e la sua immagine (o codominio) è l'insieme dei numeri reali positivi. Inoltre la corrispondenza tra R e $(0,+\infty)$ è biunivoca, dato che a^x è strettamente monotona; infatti, per verificare che a^x è invertibile, consideriamo $x_1 \neq x_2$ e verifichiamo che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Pur di cambiare l'ordine dei due punti risulterà $x_1 < x_2$ e quindi se $a > 1$, $f(x_1) < f(x_2)$; mentre, se $0 < a < 1$, $f(x_1) > f(x_2)$.

La funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale. Scriveremo $y = \log_a x$, intendendo che y è l'*esponente* che occorre dare alla *base* a per ottenere x; in formule:

$$y = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y .$$

Come in precedenza la base a è un numero positivo e diverso da 1. Come inversa della funzione esponenziale, la funzione logaritmo è definita nell' insieme $(0,+\infty)$, con valori in R. Quando si scrive $y = \log x$, senza indicare esplicitamente la base, si intende che essa è uguale al numero di Nepero e.

Se la base è maggiore di 1, la funzione logaritmo è strettamente crescente. Infatti, consideriamo $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, con $x_1 < x_2$; se fosse $y_1 > y_2$, per la monotonia della funzione esponenziale , avremmo $a^{y_1} > a^{y_2}$, cioè $x_1 = a^{y_1} > a^{y_2} = x_2$, contrariamente alle ipotesi. Per lo stesso motivo è assurdo che $y_1 = y_2$, perchè avremmo $x_1 = x_2$. Deve perciò risultare $y_1 < y_2$. Con lo stesso ragionamento si verifica che la funzione logaritmo è strettamente decrescente se la base è un numero positivo minore di 1. In formule abbiamo quindi:

$$x_1 < x_2,\ a > 1 \implies \log_a x_1 < \log_a x_2;$$
$$x_1 < x_2,\ 0 < a < 1 \implies \log_a x_1 > \log_a x_2.$$

Esempi di grafici della funzione logaritmo, con base maggiore o minore di 1, sono riportati in figura 3.3.

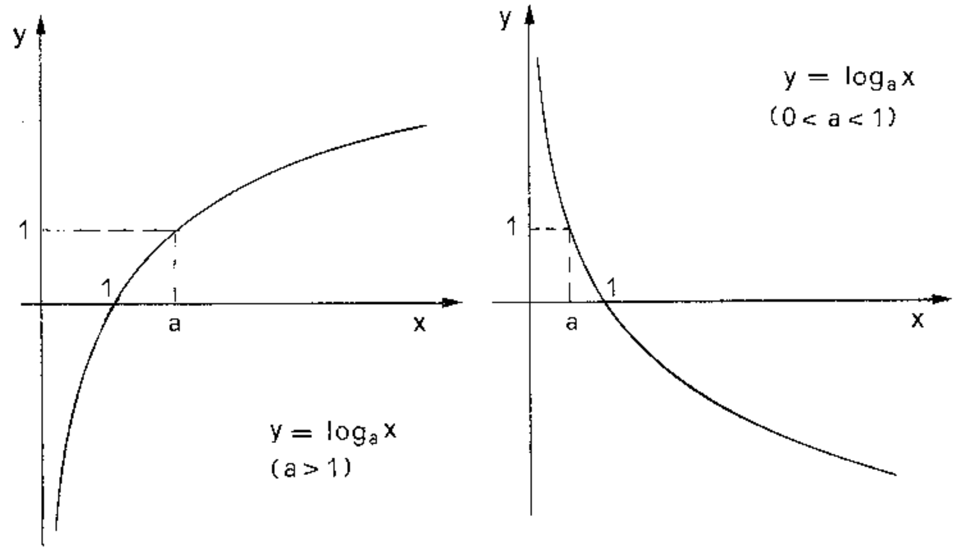


figura 3.3

3.46 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

(a) $\log_{10}10$ (b) $\log_2 8$ (c) $\log_7 1$

[(a) $\log_{10}10$ è uguale al numero reale y per cui $10^y = 10$; evidentemente $y = 1$, cioè $\log_{10}10=1$; (b) $\log_2 8$ è l'esponente y da dare alla base 2 per ottenere 8, cioè $2^y=8$; risulta quindi $\log_2 8 = y = 3$; (c) l'esponente da dare a 7 per ottenere 1 è 0; quindi $\log_7 1=0$]

3.47 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

(a) $\log_8 4$ (b) $\log_3 \frac{1}{3}$ (c) $\log_{1/2} 4$

[(a) L'espressione $y = \log_8 4$ è equivalente a $8^y = 4$. Ricordando che $8=2^3$, risulta $8^y=2^{3y} = 4$; quindi $3y=2$, cioè $y=2/3$; in definitiva $\log_8 4 = 2/3$; (b) l'esponente da dare a 3 per ottenere 1/3 è -1; quindi $\log_3 (1/3)=-1$; (c) Risulta $(1/2)^{-2} = 4$, quindi $\log_{1/2} 4=-2$]

3.48 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

(a) $\log_{1/8} 4$ (b) $\log_{1/4} 8$ (c) $\log_{1/2} \frac{1}{8}$

[(a) $-2/3$; (b) $-3/2$; (c) 3]

3.49 Calcolare il valore dei seguenti logaritmi

(a) $\log_9 3$ (b) $\log_{10} 10^{\sqrt{2}}$ (c) $\log_{11}\sqrt{11}$

[(a) $1/2$; (b) $\sqrt{2}$; (c) $1/2$]

3.50 Risolvere la disequazione $\log_5 x > 2$.

[Scrivendo anche a secondo membro della disequazione un logaritmo in base 5 abbiamo $\log_5 x > 2 = \log_5 25$; dato che la funzione $\log_5 x$ è strettamente crescente, ciò equivale a $x > 25$]

3.51 Risolvere la disequazione $\log_3 x < \frac{1}{2}$.

[La disequazione data si può anche scrivere $\log_3 x < \log_3 \sqrt{3}$; dato che la funzione $\log_3 x$ è strettamente crescente, ciò equivale a $0 < x < \sqrt{3}$]

3.52 Risolvere la disequazione $\log_{1/7} x < \sqrt{2}$.

[La disequazione $\log_{1/7} x < \sqrt{2} = \log_{1/7}(1/7)^{\sqrt{2}}$ ha per soluzione i numeri $x > (1/7)^{\sqrt{2}}$ dato che la funzione $y=\log_{1/7} x$ è strettamente decrescente]

3.53 Risolvere la disequazione $\log_{1/5} (x^2+4x) > -1$.

[La disequazione data si può anche scrivere:

$$\log_{1/5} (x^2+4x) > \log_{1/5} 5 .$$

Dato che la funzione logaritmo in base 1/5 è strettamente decrescente, otteniamo le relazioni equivalenti

$$0 < x^2 + 4x < 5 .$$

La prima delle due disequazioni di secondo grado ha per soluzioni : $x < -4$, $x > 0$; la seconda ha per soluzioni: $-5 < x < 1$. Riportiamo tali valori nello schema in figura 3.4.

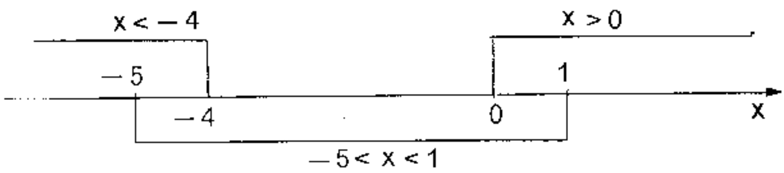


figura 3.4

I numeri x che risolvono la disequazione data sono quindi quelli che verificano le relazioni: $-5 < x < -4$, $0 < x < 1$]

3.54 Risolvere la disequazione

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq 1 .$$

[La base del logaritmo è il numero di Nepero e. Dato che $\log e=1$, la disequazione data è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1 + 1/x \leq e \\ 1 + 1/x > 0 . \end{cases}$$

La prima delle due disequazioni ha per soluzioni: $x < 0$ e $x \geq 1/(e-1)$; la seconda disequazione ha per soluzioni: $x < -1$ e $x > 0$. I valori comuni sono $x < -1$ e $x \geq 1/(e-1)$]

3.55 Risolvere le disequazioni

(a) $\log (x-1) < -1$ (b) $\log_{1/2} (3x-2x^2)<0$

[(a) $1 < x < 1 + 1/e$; (b) $1/2 < x < 1$]

3.56 Risolvere le disequazioni

(a) $\log_2 [x^2(x^2-2)] < 3$ (b) $\log x^2 > \log x$

[(a) $-2 < x < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < x < 2$; (b) $x > 1$]

3.57 Risolvere la disequazione

$$\log (x^4-4x^2+5) \geq \log (x^2+1)$$

[$x \leq -2$, $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 2$]

3.58 Risolvere la disequazione $4^x > 2$.

[La disequazione si può anche scrivere $4^x > 2 = 4^{1/2}$; dato che la funzione esponenziale 4^x è strettamente crescente, la disequazione è soddisfatta se e solo se $x > 1/2$]

3.59 Risolvere la disequazione $(1/3)^{(1-12x)x} < 3$.

[La disequazione $(1/3)^{(1-12x)x} < 3 = (1/3)^{-1}$ è equivalente a $x-12x^2 > -1$, dato che la funzione esponenziale con base 1/3 è strettamente decrescente. Il risultato finale è $-1/4 < x < 1/3$]

3.60 Risolvere la disequazione $8^{x+1} \geq 2^{x^2}$.

[Dato che $8 = 2^3$, la disequazione data si può anche scrivere $2^{3(x+1)} \geq 2^{x^2}$, ed è quindi equivalente a $3(x+1) \geq x^2$. Tale disequazione di secondo grado ha per soluzioni i numeri reali x per cui $(3-\sqrt{21})/2 \leq x \leq (3+\sqrt{21})/2$]

3.61 Risolvere le disequazioni

(a) $e^{4x^4-5x^2+1} < 1$ (b) $e^{|x-1|} < e^x$

[(a) $-1 < x < -1/2$, $1/2 < x < 1$; (b) $x > 1/2$]

3.62 Risolvere la disequazione $4^x + 2^x - 2 < 0$.

[Ponendo $t = 2^x$, risulta $4^x = t^2$. La disequazione $t^2+t-2 < 0$ è soddisfatta da $-2 < t < 1$. Perciò abbiamo $-2 < 2^x < 1$; la prima disequazione è soddisfatta per ogni $x \in R$, mentre la seconda è soddisfatta da $x<0$. Riassumendo, i numeri reali negativi sono le soluzioni della disequazione data]

3.63 Risolvere le disequazioni

(a) $e^x + e^{-x} < \frac{10}{3}$ (b) $e^x - e^{-x} > -2$

[(a) Ponendo $e^x = t$ risulta $e^{-x} = 1/t$; quindi occorre risolvere la disequazione $t + 1/t < 10/3$. Si tratta di una disequazione razionale che ha per soluzioni: $t < 0$ e $1/3 < t < 3$. In corrispondenza la disequazione $e^x < 0$ non ha soluzioni, mentre le disequazioni $1/3 < e^x < 3$ hanno per soluzioni $-\log 3 = \log(1/3) < x < \log 3$;
(b) $x > \log(-1+\sqrt{2})$]

3.64 Risolvere le disequazioni

(a) $(x+1)^{(x^2-1)} > 1$ (b) $(x^2-3)^x < x^2-3$

[(a) Occorre distinguere i casi in cui la base $x+1$ è compresa tra 0 e 1, oppure è maggiore di 1. Si ottengono i due sistemi

$$\begin{cases} 0 < x+1 < 1 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x+1 > 1 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} .$$

Eseguendo i calcoli si ottiene il risultato finale: $-1 < x < 0$ e $x > 1$;
(b) $x < -2$, $\sqrt{3} < x < 2$]

3.65 Risolvere le disequazioni

(a) $\log(x-1)^2 - \log(x-2)^2 > 0$
(b) $\log_{(x-2)}(2x^2-13x+21) > 0$

[(a) $x > 3/2$, $x \neq 2$; (b) $5/2 < x < 3$; $x > 4$]

3F. Disequazioni trigonometriche

Nel capitolo 2 abbiamo già dato alcuni richiami di trigonometria. Ricordiamo qui alcune proprietà delle funzioni sen x, cos x, tg x.

Le funzioni sen x e cos x sono *periodiche* di periodo 2π; la funzione tg x è periodica di periodo π; ciò significa che:

$$\text{sen}\,(x+2k\pi) = \text{sen}\,x\,, \qquad k\in Z;$$
$$\cos\,(x+2k\pi) = \cos\,x\,, \qquad k\in Z;$$
$$\text{tg}\,(x+k\pi) = \text{tg}\,x\,, \qquad k\in Z.$$

Per comodità del lettore riportiamo la seguente tavola di valori.

x radianti	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x gradi	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sen x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tg x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	non definita	0	non definita	0

Prendiamo in considerazione disequazioni trigonometriche del tipo senx > a, cos x > a, tg x > a, essendo a un numero reale assegnato. Cominciamo con la disequazione relativa alla funzione sen x e facciamo riferimento alla figura 3.5, dove è tracciato il gra-

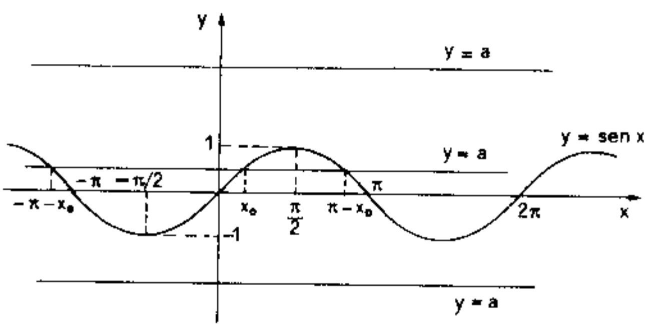


figura 3.5

fico della funzione sen x e, nello stesso sistema di riferimento, anche il grafico della funzione costante y = a, per diversi valori del parametro reale a.

Tenendo presente che i valori della funzione sen x sono compresi tra -1 e 1, abbiamo il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x > a\\ a \geq 1\end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x > a\\ a < -1\end{array}\right\} \iff \forall x \in R\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x > a\\ -1 \leq a < 1\end{array}\right\} \iff$$ scelto x_o tale che sen $x_o = a$ con $-\pi/2 \leq x_o < \pi/2$, le soluzioni sono: $x_o + 2k\pi < x < \pi - x_o + 2k\pi,\ \forall k \in Z$.

In modo analogo otteniamo uno schema di risoluzione per la disequazione sen x < a:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x < a\\ a > 1\end{array}\right\} \iff \forall x \in R;$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x < a\\ a \leq -1\end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen } x < a\\ -1 < a \leq 1\end{array}\right\} \iff$$ scelto x_o tale che sen $x_o = a$ con $-\pi/2 < x_o \leq \pi/2$, le soluzioni sono: $-\pi - x_o + 2k\pi < x < x_o + 2k\pi,\ \forall k \in Z$.

3.66 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) sen $x > \sqrt{2}/2$ (b) sen $x < 1/2$

[(a) $\pi/4+2k\pi < x < (3/4)\pi+2k\pi$, $\forall k \in Z$;
(b) $-(7/6)\pi+2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.67 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $\text{sen } x > -1$ (b) $\text{sen } x < -1/2$

[(a) $-\pi/2+2k\pi < x < (3/2)\pi+2k\pi$, $\forall k \in Z$, cioè: $x \neq -\pi/2+2k\pi$ $\forall k \in Z$; (b) $-(7/6)\pi + 2k\pi < x < -\pi/6 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.68 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $2\,\text{sen}^2 x - 5\,\text{sen} x + 2 < 0$ (b) $\text{sen}^2 x < \text{sen } x$

[(a) Ponendo $t = \text{sen } x$, si ottiene la disequazione di secondo grado $2t^2 - 5t + 2 < 0$ che ha per soluzioni $1/2 < t < 2$. La disequazione $\text{sen } x < 2$ è soddisfatta da ogni $x \in R$, mentre la disequazione $1/2 < \text{sen } x$ è soddisfatta da $\pi/6 + 2k\pi < x < (5/6)\pi + 2k\pi$, $\forall k \in Z$, che costituisce quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione data; (b) ponendo $t = \text{sen } x$, si determinano le soluzioni: $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $x \neq \pi/2 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.69 Determinare i numeri reali x dell'intervallo $[0,2\pi]$ che soddisfano le disequazioni

(a) $\text{sen } x < \sqrt{3}/2$ (b) $2\,\text{sen}^2 x > 1$

[(a) $0 \leq x < \pi/3$, $(2/3)\pi < x \leq 2\pi$; (b) $\pi/4 < x < (3/4)\pi$, $(5/4)\pi < x < (7/4)\pi$]

Studiamo la disequazione $\cos x > a$ facendo riferimento alla figura 3.6.

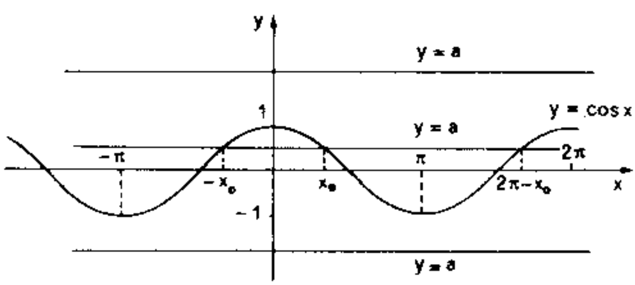


figura 3.6

Si ottiene il seguente schema di risoluzione:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > a \\ a \geq 1 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > a \\ a < -1 \end{array}\right\} \iff \forall x \in R;$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x > a \\ -1 \leq a < 1 \end{array}\right\} \iff$$ scelto x_0 tale che $\cos x_0 = a$, con $0 < x_0 \leq \pi$, le soluzioni sono: $-x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$.

Analogamente si ottiene uno schema di risoluzione per la disequazione $\cos x < a$:

$$\left.\begin{array}{l} \cos x < a \\ a > 1 \end{array}\right\} \iff \forall x \in R;$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x < a \\ a \leq -1 \end{array}\right\} \iff \text{nessuna soluzione;}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x < a \\ -1 < a \leq 1 \end{array}\right\} \iff$$ scelto x_0 tale che $\cos x_0 = a$, con $0 \leq x_0 < \pi$, le soluzioni sono: $x_0 + 2k\pi < x < 2\pi - x_0 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$.

3.70 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $\cos x > \sqrt{3}/2$ (b) $2 \cos x < 1$

[(a) $-\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) $\pi/3 + 2k\pi < x < 2(k+1)\pi - \pi/3$, $\forall k \in Z$]

3.71 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $\cos x > 1$ (b) $\cos x < 0$

[(a) nessuna soluzione, (b) $\pi/2+2k\pi < x < (3/2)\pi + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.72 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $\cos^2 x - 2\cos x - 3 < 0$

(b) $|\cos x - 1| < \cos x$

[(a) Ponendo $t = \cos x$, si ottiene la disequazione $t^2-2t-3<0$ che ha per soluzioni $-1 < t < 3$. Le corrispondenti disequazioni $-1< \cos x<3$ sono soddisfatte da ogni $x \neq \pi + 2k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) dato che $\cos x - 1 \leq 0$ per ogni $x \in R$, risulta $|\cos x - 1| = 1- \cos x$; perciò la disequazione data è equivalente a $1-\cos x < \cos x$, cioè $\cos x > 1/2$, che ha per soluzioni $-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.73 Determinare i numeri reali x dell' intervallo $[0,2\pi]$ che soddisfano le disequazioni

(a) $1+2\cos x > 0$ (b) $3-4\cos^2 x > 0$

[(a) $0 \leq x < (2/3)\pi$, $(4/3)\pi< x \leq 2\pi$; (b) $\pi/6 < x < (5/6)\pi$, $(7/6)\pi< x < (11/6)\pi$]

Studiamo le disequazioni $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$, facendo riferimento alla figura 3.7.

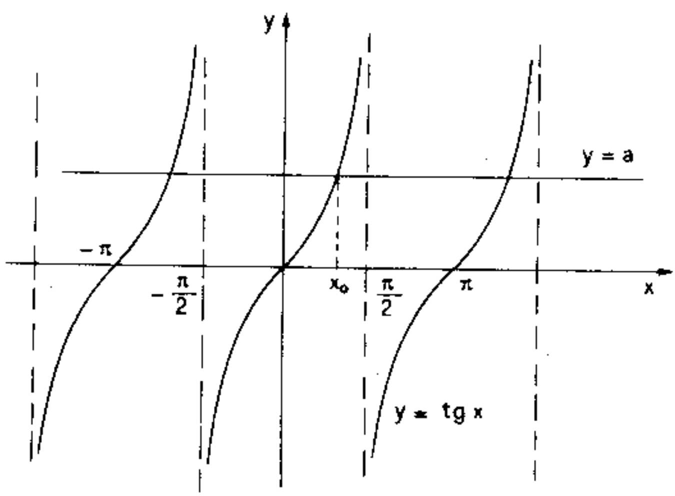


figura 3.7

Tenendo presente che la funzione $y=\text{tg}x$ è periodica di periodo π, abbiamo il seguente schema di risoluzione:

$\text{tg } x > a$	$\Longleftrightarrow$	scelto x_0 tale che $\text{tg } x_0 = a$, con $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$, le soluzioni sono: $x_0 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi, \quad \forall k \in Z$;
$\text{tg } x < a$	$\Longleftrightarrow$	scelto x_0 tale che $\text{tg } x_0 = a$, con $-\pi/2 < x_0 < \pi/2$, le soluzioni sono: $-\pi/2 + k\pi < x < x_0 + k\pi \quad \forall k \in Z$.

3.74 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $\text{tg } x > 0$ (b) $\text{tg } x < -1$

[(a) $k\pi < x < \pi/2 + k\pi$, $\forall k \in Z$; (b) $-\pi/2 + k\pi < x < -\pi/4 + k\pi, \forall k \in Z$]

3.75 Risolvere le disequazioni trigonometriche

(a) $\sqrt{3} + \text{tg } x > 0$ (b) $1 - \sqrt{3} \text{ tg } x > 0$

[(a) $-\pi/3 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi, \forall k \in Z$; (b) $-\pi/2 + k\pi < x < \pi/6 + k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.76 Risolvere nell'intervallo $[0,\pi]$ le disequazioni:

(a) $\text{sen } x < \cos x$ (b) $\text{sen}^2 x < \cos^2 x$

[(a) la disequazione data è equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \text{tg } x < 1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \cos x < 0 \\ \text{tg } x > 1 \end{cases} .$$

Osserviamo che l'equivalenza dipende anche dal fatto che, nell'intervallo $[0, \pi]$, la funzione $\cos x$ si annulla per $x=\pi/2$, ma in tal caso, essendo $\text{sen}(\pi/2) = 1$, la disequazione $\text{sen } x < \cos x$ non è verificata. Le soluzioni finali sono: $0 \le x < \pi/4$; (b) $0 \le x < \pi/4$, $(3/4)\pi < x \le \pi$]

3.77 Risolvere nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ le disequa zioni:

(a) $3-tg^2x \leq 0$ (b) $(3tg^2x-2)tg^2x < 1$

[(a) $-\pi/2 < x \leq -\pi/3$, $\pi/3 \leq x < \pi/2$; (b) $-\pi/4 < x < \pi/4$]

3.78 Risolvere la disequazione sen x < cos 2 x.

[Ricordando la formula di duplicazione $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$, possiamo scrivere la disequazione equivalente $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 < 0$. Ponendo $t = \text{sen}\, x$, si trova $-1 < t < 1/2$. Le soluzioni finali sono: $-(7/6)\pi + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi$, $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.79 Risolvere nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la disequazione

$$4\,\text{sen}\, x \cos x + 1 < 0 .$$

[Utilizzando la formula di duplicazione $2\,\text{sen}\, x \cos x = \text{sen}\, 2x$, si ottiene la disequazione equivalente $2\,\text{sen}2x + 1 < 0$, cioè $\text{sen}2x < -1/2$. Ponendo $2x = t$, occorre risolvere la disequazione $\text{sen}\, t < -1/2$ per $t \in [-2\pi, 2\pi]$. Si ottiene $-(5/6)\pi < t < -\pi/6$, $(7/6)\pi < t < (11/6)\pi$. Le soluzioni della disequazione data sono perciò $-(5/12)\pi < x < -\pi/12$, $(7/12)\pi < x < (11/12)\pi$]

3.80 Risolvere la disequazione trigonometrica

$$2\cos^2 x + 3\,\text{sen}\, x - 3 > 0$$

[Con la sostituzione $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ si ottiene la disequazione equivalente $2\,\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\, x + 1 < 0$, che a sua volta equivale a $1/2 < \text{sen}\, x < 1$. La soluzione finale è: $\pi/6 + 2k\pi < x < (5/6)\pi + 2k\pi$, $x \neq \pi/2 + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.81 Risolvere le disequazioni

(a) $\sqrt{1-2\,\text{sen}^2 x} \geq \sqrt{2}\,\text{sen}\, x + 1$

(b) $\sqrt[3]{7-8\cos^3 x} \geq 1 - 2\cos x$

[(a) $(2k+1)\pi \leq x \leq (5/4)\pi + 2k\pi$, $(7/4)\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi$, $\forall k \in Z$;

(b) $-(5/6)\pi + 2k\pi \leq x \leq (5/6)\pi + 2k\pi$, $\forall k \in Z$]

3.82 Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} + 2} > \sqrt[3]{\operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 6\right)}$$

[Utilizzare la sostituzione $1/\cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)/\cos^2 x = \ldots$
Il risultato è: $-\pi/2 + k\pi < x < \pi/4 + k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$]

Capitolo 4

NUMERI COMPLESSI

4A. Forma algebrica e trigonometrica

Un numero complesso si può rappresentare sotto la forma

$$a + i\,b\ ,$$

con a,b numeri reali. In tal caso si dice che il numero complesso è rappresentato in *forma algebrica*. Il simbolo i prende il nome di *unità immaginaria* ed ha la proprietà che $i\cdot i=i^2 = -1$. Il numero reale a si chiama *parte reale* del numero complesso, mentre b è detto *coefficiente della parte immaginaria*. Se il coefficiente della parte immaginaria è nullo il numero è reale;se la parte reale è nulla si dice che il numero è *immaginario puro*.

Le operazioni di somma, differenza, prodotto tra numeri complessi si svolgono senza difficoltà,pur di ricordare che $i^2 = -1$. Per il quoziente conviene moltiplicare sia il dividendo a + ib, che il divisore c + id, per il *numero complesso coniugato* c - id:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)\cdot(c - id)}{(c + id)\cdot(c - id)}\ .$$

Il vantaggio di tale operazione è nel fatto che il prodotto $(c+id)(c-id)$ a denominatore è un numero reale; infatti:

$$(c+id)(c-id) = c^2 - (id)^2 = c^2 - i^2d^2 = c^2+d^2.$$

La divisione è quindi possibile se $c^2+d^2\neq 0$, cioè quando il numero complesso divisore $c + id$ è diverso da zero.

4.1 Eseguire le seguenti operazioni tra numeri complessi

(a) $(1+i)+(1-2i)$ (b) $(1-i)-(1+i)$
(c) $(1+i)\cdot(1-2i)$ (d) $(1+i)\cdot(1+i)$

[(a) $2-i$; (b) $-2i$; (c) $1-2i + i - 2i^2 = 3-i$; (d) $1+2i + i^2 = 2i$]

4.2 Scrivere in forma algebrica i seguenti numeri complessi

(a) $i/(1-i)$ (b) $1/i$
(c) $(1-i)/(1+i)$ (d) $13\cdot(1+i)/(2-3i)$

[(a) Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+i$ otteniamo

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{i-1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i .$$

Perciò la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria del numero complesso quoziente sono rispettivamente $-1/2$ e $1/2$;

(b) $-i$; (c) $-i$; (d) $-1+5i$]

In figura 4.1 è disegnata la *rappresentazione geometrica* del numero complesso $z = a + ib$.

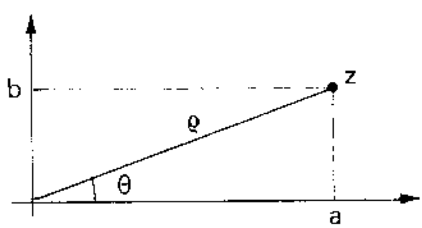


figura 4.1

Nella stessa figura 4.1 è anche rappresentato il *modulo* ρ e l'*argomento* ϑ del numero complesso z. L'argomento è determinato a meno di multipli di 2π; il valore di ϑ compreso nell'intervallo $(-\pi,\pi]$ si chiama *argomento principale*. Valgono le relazioni:

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}\ , \qquad \begin{cases} a = \rho \cos \vartheta \\ b = \rho \operatorname{sen} \vartheta \end{cases} .$$

Quindi $z = a + ib = \rho \cos \vartheta + i\rho \operatorname{sen}\vartheta$. Perciò possiamo rappresentare il numero complesso z in *forma trigonometrica*

$$z = \rho\ (\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta).$$

Dato un numero complesso z in forma algebrica: $z = a + ib$, per ottenere la corrispondente forma trigonometrica si calcola prima il modulo $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, poi si scrivono le relazioni

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{b}{\rho}\ , \quad \cos \vartheta= \frac{a}{\rho},\ \left(\Longrightarrow \operatorname{tg} \vartheta= \frac{b}{a} \text{ se } a \neq 0\right),$$

le quali permettono di determinare l'argomento ϑ a meno di multipli di 2π.

4.3 Calcolare il modulo e l'argomento dei numeri complessi

(a) $1 + i$ (b) $2-2i$

(c) $\sqrt{3} + i$ (d) $-1 + i\sqrt{3}$

[(a) $\rho = \sqrt{2}$, $\vartheta =\pi/4 + 2k\pi$; (b) $\rho =2\sqrt{2}$, $\vartheta =-\pi/4+2k\pi$; (c) $\rho =2$, $\vartheta = \pi/6 + 2k\pi$; (d) $\rho =2$, $\vartheta =(2/3)\pi + 2k\pi$]

4.4 Scrivere in forma algebrica i numeri complessi che hanno come modulo e come argomento principale le coppie di numeri indicati di seguito

(a) $\rho= 1$, $\vartheta=\pi/2$ (b) $\rho = 3$, $\vartheta=-\pi/2$

(c) $\rho=4,\ \vartheta=\pi/3$ (d) $\rho=\sqrt{2},\ \vartheta=-\pi/4$

[(a) i; (b) $-3i$; (c) $\cancel{2\sqrt{3}+2i}$; (d) $1-i$]

(c) $z = 2 + i\,2\sqrt{3}$

4B. **Potenze e radici**

Mediante le formule di addizione per il seno e il coseno (richiamate nel paragrafo 2D) è possibile esprimere in forma trigonometrica il prodotto di due numeri complessi z, z':

$$\begin{aligned} z\cdot z' &= \rho(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\vartheta)\cdot\rho'(\cos\vartheta' + i\ \mathrm{sen}\vartheta') \\ &= \rho\rho'[(\cos\vartheta\cos\vartheta' - \mathrm{sen}\vartheta\ \mathrm{sen}\vartheta') + i(\mathrm{sen}\vartheta\cos\vartheta' + \mathrm{sen}\vartheta'\cos\vartheta)] \\ &= \rho\rho'[\cos(\vartheta+\vartheta') + i\ \mathrm{sen}\ (\vartheta+\vartheta')] \end{aligned}$$

Quindi il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli, mentre l'argomento del prodotto è la somma degli argomenti dei singoli fattori.

Ponendo $\vartheta' = \vartheta$, si ottiene la formula per il quadrato di un numero complesso z:

$$z^2 = \rho^2\ (\cos 2\vartheta + i\ \mathrm{sen}\ 2\vartheta);$$

più generalmente si verifica (il lettore esegua la verifica per induzione su n) che vale la *formula di De Moivre* per la potenza n-sima, con n numero naturale:

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\ \mathrm{sen}\ n\vartheta)\ .$$

4.5 Verificare che la potenza sesta del numero complesso $z = (\sqrt{3} + i)/2$ vale -1.

[Il numero complesso dato ha modulo $\rho = 1$ e argomento $\vartheta = \pi/6 + 2k\pi$. Quindi in forma trigonometrica si scrive $z = \cos(\pi/6) + i\ \mathrm{sen}\ (\pi/6)$. Dalla formula di De Moivre si ottiene quindi $z^6 = \cos\pi + i\ \mathrm{sen}\,\pi = -1$]

4.6 Determinare la forma algebrica dei numeri complessi

(a) $(1-i)^6$ (b) $(1+i)^8$ (c) $(1-i)^{12}$

[(a) $8i$; (b) 16; (c) -64]

4.7 Determinare la forma algebrica dei numeri complessi

$$(a)\quad (\sqrt{3}+i)^6 \qquad (b)\ \left(\frac{1}{i}\right)^4 \qquad (c)\ \left(\frac{1+i}{i-1}\right)^3$$

[(a) - 64; (b) 1; (c) i]

Una radice n-sima di un numero complesso z è un numero complesso w tale che $w^n = z$. Se i moduli e gli argomenti di z,w sono rispettivamente (ρ,ϑ), (ρ',ϑ'), dato che $w^n = z$, per le formule di De Moivre risulta

$$\rho = (\rho')^n, \qquad \vartheta + 2k\pi = n\vartheta';$$

perciò $\rho' = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{1/n}$, $\vartheta' = (\vartheta+2k\pi)/n$.

In forma trigonometrica le radici n-sime di un numero complesso $z = \rho\,(\cos\vartheta + i\ \mathrm{sen}\,\vartheta)$ si rappresentano nella forma

$$w_k = \rho^{1/n}\left[\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right],$$

e si verifica che si ottengono n radici distinte (se $\rho \neq 0$), corrispondenti ai valori $k=0,1,2,\dots,n-1$.

4.8 Determinare le tre radici cubiche del numero z=1

[Il numero complesso z = 1 ha modulo $\rho = 1$ e argomento principale $\vartheta=0$. Pertanto le radici cubiche sono rappresentate da

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{3}, \qquad k = 0,1,2.$$

Cioè $w_o = \cos 0 + i\ \mathrm{sen}\ 0 = 1$, $w_1 = \cos(2/3)\pi + i\ \mathrm{sen}\,(2/3)\pi = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, $w_2 = \cos(4/3)\pi + i\ \mathrm{sen}\,(4/3)\pi = -1/2 - i\sqrt{3}/2$. In figura 4.2 sono rappresentati geometricamente w_o, w_1, w_2 nel piano complesso]

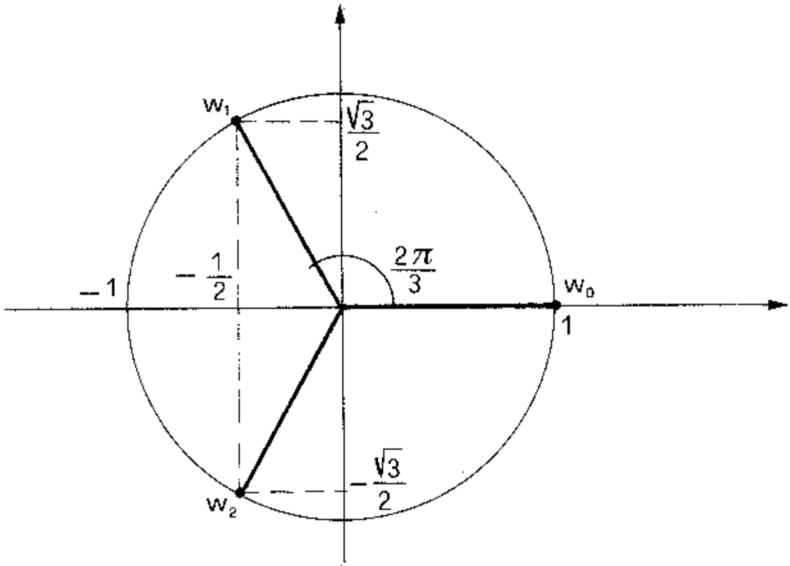


figura 4.2

4.9 Determinare le radici quadrate dei numeri complessi

(a) 1 (b) -1 (c) i (d) -i

[(a) $\pm$ 1 ; (b) $\pm$ i; (c) $\pm \sqrt{2}/2\,(1+i)$; (d) $\pm \sqrt{2}/2\,(1-i)$]

4.10 Determinare le radici terze dei numeri complessi

(a) 8 (b) - 8

[(a) 2, $-1 \pm i\sqrt{3}$; (b) -2, $1 \pm i\sqrt{3}$]

4.11 Determinare le radici quarte dei numeri complessi

(a) 1 (b) - 4

[(a) ± 1, $\pm i$; (b) $\pm (1+i)$, $\pm (1-i)$]

4.12 Determinare le radici cubiche di -i.

$[i, \pm \sqrt{3}/2 - i/2]$

4.13 Verificare che le radici quadrate di un numero complesso (non nullo) sono una opposta dell'altra.

[Sia $z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$. Allora $w_o = \sqrt{\rho}\,[\cos(\vartheta/2) + i \operatorname{sen}(\vartheta/2)]$ è una delle due radici, mentre l'altra è

$$w_1 = \sqrt{\rho}\,\left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta}{2} + \pi\right)\right] = -\sqrt{\rho}\,\left[\cos\frac{\vartheta}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right]$$

Perciò $w_1 = -w_o$]

4.14 Verificare che le radici quadrate di un numero reale negativo $-a$ $(a > 0)$ sono date da $\pm i\sqrt{a}$.

[Il numero complesso $-a$ $(a > 0)$ ha modulo $\rho = a$ ed argomento principale $\vartheta = \pi$. Le sue radici quadrate sono quindi

$$\sqrt{a}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{a}, \quad \sqrt{a}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{a}$$

4C. Radici complesse di equazioni algebriche

Un' *equazione algebrica* di grado $n \in N$ nel campo complesso è un'espressione del tipo

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_o = 0 \;;$$

n è il *grado* dell'equazione; z è la *variabile* (o incognita) complessa; a_k per $k=0,1,\ldots,n$ sono i *coefficienti* complessi, con $a_n \neq 0$.

Un'equazione algebrica di *primo grado* è del tipo

$$az + b = 0$$

e, se $a \neq 0$, ha per soluzione il numero complesso $z = -b/a$.

4.15 Risolvere le equazioni algebriche di primo grado

(a) $iz + 1 = 0$ (b) $(2+i)z - 4 + 3i = 0$

[(a) $z = -1/i = i$; (b) $z = 1-2i$]

4.16 Risolvere le equazioni di primo grado

(a) $(1-i)z-2=0$ (b) $iz+1-i = 0$

[(a) $1+i$; (b) $1+i$]

Un'equazione algebrica di *secondo grado* è del tipo

$$az^2 + bz + c = 0$$

con $a \neq 0$. Ha due soluzioni complesse (distinte se $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$) che sono espresse da

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Naturalmente la radice quadrata va intesa nel campo complesso, come indicato nel paragrafo precedente. Si noti che, nel campo complesso, le radici quadrate (di $\Delta=b^2-4ac$) sono due (coincidenti solo se $\Delta=0$) e sono una opposta dell'altra (si veda l'esercizio 4.13).

4.17 Risolvere l'equazione di secondo grado $z^2+z+1=0$.

[Utilizzando la formula risolutiva si trovano due soluzioni $z = (-1 \pm \sqrt{-3})/2$. Con la regola di calcolo delle radici di numeri complessi, o più semplicemente (si veda l'esercizio 4.14) osservando che

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} = \pm i \sqrt{3},$$

si trova poi $z = (-1 \pm i \sqrt{3})/2$]

4.18 Risolvere nel campo complesso le equazioni di secondo grado

(a) $z^2 + 4 = 0$ (b) $z^2 - 4 = 0$

[(a) $\pm 2i$; (b) ± 2]

4.19 Risolvere nel campo complesso le equazioni

(a) $5z^2 - 4z+1 = 0$ (b) $z^2+4z+5 = 0$

[(a) $(2 \pm i)/5$; (b) $-2 \pm i$]

4.20 Risolvere l'equazione $4z^2-4z+3-2\sqrt{3}i = 0$.

[La formula risolutiva fornisce $z = (1\pm\sqrt{-2 + 2\sqrt{3}i})/2$. Per calcolare la radice quadrata utilizziamo la forma trigonometrica:

$$-2+2\sqrt{3}i=4\left(\cos \frac{2\pi}{3} +i \text{ sen } \frac{2\pi}{3}\right), \text{ da cui } \sqrt{-2 + 2\sqrt{3}i}=$$

$= \pm (1+\sqrt{3}i)$. Perciò le soluzioni dell'equazione data sono $z_1 = 1 + (\sqrt{3} / 2)i$, $z_2 = - (\sqrt{3} / 2)i$]

4.21 Risolvere le equazioni di secondo grado a coefficienti complessi

(a) $iz^2-2z+3i = 0$ (b) $iz^2+2z-2 = 0$

[(a) $i, -3i$; (b) $\pm \sqrt[4]{5}/2+i (1 \pm \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt{3}/2)$]

4.22 Risolvere l'equazione biquadratica

$$z^4 - (1+i)z^2 + i = 0 .$$

[Ponendo $z^2 = w$ si ottiene l'equazione di secondo grado in w: $w^2 - (1+i) w + i = 0$, che ha per soluzioni $w = (1+i \pm \sqrt{-2i})/2$. Calcolando la radice quadrata si ottiene $w_1 = 1$, $w_2 = i$. In corrispondenza abbiamo $z^2 = 1$, $z^2 = i$, che risolte danno $z=\pm 1$, $z=\pm(1+i)/\sqrt{2}$]

4.23 Risolvere le equazioni biquadratiche

(a) $z^4+1 = 0$ (b) $z^4+(1-2i)z^2-2i=0$

[(a) $\pm (1+i)/\sqrt{2}$, $\pm (1-i)/\sqrt{2}$; (b) $\pm i$, $\pm (1+i)$]

Un altro metodo per risolvere un'equazione consiste nel sostituire all'incognita complessa z l'espressione algebrica $x + iy$, con x,y incognite reali, come negli esempi che seguono.

4.24 Si risolva con la sostituzione $z=x+iy$ l'equazione già considerata nell'esercizio 4.21(a):

Capitolo 5

MATRICI E SISTEMI LINEARI

5A. Determinanti

Ricordiamo alcune proprietà delle matrici $n \times n$ e dei loro determinanti:

1) Scambiando fra loro due righe o due colonne, il determinante cambia di segno.
2) Moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) per una costante, il determinante risulta moltiplicato per la stessa costante.
3) Se due righe (o due colonne) sono uguali, il determinante è nullo.

Diremo che *una riga (o una colonna) si moltiplica per un fattore* se tutti gli elementi di quella riga (o colonna) si moltiplicano per quello stesso fattore.

Diremo inoltre che una riga (risp. una colonna) di una matrice è *combinazione lineare* di altre righe (risp. colonne) se i suoi elementi si ottengono sommando i corrispondenti elementi di tali righe (risp. colonne) dopo aver moltiplicato ciascuna di queste per un fattore.

Si dimostrano allora le seguenti ulteriori proproprietà:

4) Se una riga (risp. una colonna) di una matrice A è combinazione lineare di altre righe (risp.colonne)

di A, allora det A = 0.
5) Se ad una riga (risp. ad una colonna) si aggiunge una combinazione lineare di altre righe (risp. colonne), allora il determinante non cambia.

Infine sussiste la seguente proprietà:
6) La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (o colonna) è uguale a zero.

5.1 Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

[det A = - 16; det B = 0.012; det C = 20; det D = 0]

5.2 Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

sia ${}^tA$ la *matrice trasposta* di A, cioè la matrice che ha per righe le colonne di A:

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Verificare che sussiste l'uguaglianza $\det {}^tA = \det A$.

5.3 Sia A una *matrice triangolare superiore*, cioè tale che gli elementi al di sotto della diagonale principale sono tutti nulli:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Verificare che vale l'uguaglianza:

$$\det A = a_{11}\; a_{22}\; a_{33} \dots a_{nn} .$$

[Sviluppando il determinante di A secondo la prima colonna si ha:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sviluppando il determinante a secondo membro secondo la sua prima colonna si ha

$$\det A = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e così via]

5.4 Sviluppare il determinante

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

secondo gli elementi della prima riga. Verificare poi che la somma dei prodotti degli elementi della seconda riga per i complementi algebrici dei corrispondenti elementi della prima riga è uguale a zero.

[Si ha

$$A = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} +(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 31 - 76 = -50 \ ]$$

5.5 Per quali valori del parametro λ il determinante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda - 1 & 2-2\lambda & 2\lambda - 2 \\ 2\lambda - 2 & 3-2\lambda & 2\lambda - 2 \\ \lambda - 1 & 1-\lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

è uguale a zero?

[Sottraendo e sommando l'ultima colonna rispettivamente dalla prima ed alla seconda colonna, si ottiene

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\lambda - 2 \\ 0 & 1 & 2\lambda - 2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda$$

che è zero se e solo se $\lambda = 0$]

5.6 Sviluppare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \text{sen } 2x & \text{sen } 3x \\ \text{sen } 2x & \text{sen } 3x & \text{sen } 4x \\ \text{sen } 3x & \text{sen } 4x & \text{sen } 5x \end{pmatrix}.$$

[Addizionando la terza riga alla prima, trasformando le somme in prodotti mediante le formule di prostaferesi (ved. cap. secondo) e mettendo in evidenza un fattore nella prima riga, si ottiene

$$\det A = 2\cos x \begin{vmatrix} \operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x \\ \operatorname{sen} 2x & \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x \\ \operatorname{sen} 3x & \operatorname{sen} 4x & \operatorname{sen} 5x \end{vmatrix} = 0]$$

5.7 Verificare che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

è nullo, senza svilupparlo.

[Sottraendo dalla seconda riga la prima e dalla quarta riga la terza, si ottiene una matrice con due righe uguali]

5.8 Verificare che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & -3 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

è uguale a zero.

[Sottraendo la seconda colonna dalla prima si ottiene la terza colonna]

5.9 Verificare che il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

è uguale a zero.

[La terza riga è la somma delle prime due]

5.10 Sviluppare il determinante della matrice nxn:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & -1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 & -1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots -1 \end{pmatrix} .$$

[Sottraendo la prima riga da ognuna delle successive e poi sviluppando secondo gli elementi della prima colonna, si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & -2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -2 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots -2 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\, 2^{n-1}$$]

5.11 Si chiama *determinante di Vandermonde* di n numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$, il determinante di ordine n

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Verificare che lo sviluppo del determinante di Vandermonde è uguale al prodotto di tutte le $n!/2!(n-2)!$ possibili differenze $a_k - a_h$ con $k > h$.

[Sottraendo da ogni riga la precedente moltiplicata per a_1 e poi sviluppando secondo gli elementi della prima colonna, si è ricondotti ad un determinante di ordine n-1 in ogni colonna del quale si può mettere in evidenza una differenza del tipo $a_k - a_1$.

Si ha infatti:

$$V(a_1,a_2,\dots,a_n) = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & a_4^{n-2} \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Il determinante che figura a secondo membro è il determinante di Vandermonde degli n-1 numeri a_2 , $a_3,\dots,a_n$ e perciò vale la formula di ricorrenza

$$V(a_1,a_2,\dots,a_n)=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot V(a_2,a_3,\dots,a_n)$$

Applicando ripetutamente tale formula, si ottengono le relazioni

$$V(a_2,a_3,\dots,a_n) =$$

$$=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots(a_n-a_2)\cdot V(a_3, a_4,\dots,a_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V(a_{n-2}, a_{n-1},a_n)=(a_{n-1}-a_{n-2})(a_n - a_{n-2}) V(a_{n-1},a_n)$$

$$V(a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n - a_{n-1}$$

Moltiplicando membro a membro le precedenti relazioni si ottiene poi facilmente la formula

$$\begin{aligned} V(a_1, a_2,\dots,a_n) = (a_2-a_1) (a_3-a_1)\dots(a_n - a_1) \cdot \\ \cdot(a_3-a_2)\dots(a_n-a_2). \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \cdot(a_{n-1}-a_{n-3})(a_{n-1}-a_{n-2})\cdot \\ \cdot(a_n-a_{n-1}) \,] \end{aligned}$$

5.12 Utilizzando l'esercizio precedente, verificare che:

$$\begin{vmatrix} 1^0 & 2^0 & \dots & n^0 \\ 1^1 & 2^1 & \dots & n^1 \\ 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} = 1^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 3^{n-3}\cdot\ldots\cdot(n-2)^2\cdot(n-1)$$

5B. Caratteristica di una matrice

Oltre alle matrici (quadrate) $n \times n$, si possono considerare più in generale le matrici rettangolari, $m \times n$, cioè le matrici del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con m righe ed n colonne. E' ben noto che, se $m \neq n$, non si definisce il determinante di una siffatta matrice, ma che da essa si possono estrarre delle matrici quadrate i cui determinanti si dicono *minori* estratti dalla matrice rettangolare. Il numero di righe (o di colonne) della matrice estratta si chiama *ordine* del minore.

Si chiama *caratteristica* di A l'ordine massimo dei minori non tutti nulli che si possono estrarre dalla matrice A. Perciò l'intero positivo k è la caratteristica della matrice A se

i) dalla matrice A si può estrarre almeno un minore non nullo di ordine k

ii) tutti i minori di ordine maggiore di k, che si possono estrarre dalla matrice A, sono nulli.

5.13 Determinare la caratteristica della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

[2]

5.14 Determinare la caratteristica di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} ; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} .$$

[A:2 ; B : 2 ; C : 2 ; D : 2]

5.15 Determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

[2]

5.16 Determinare la caratteristica della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} .$$

[3]

5.17 Determinare, in funzione del parametro λ, la caratteristica della matrice

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} .$$

[La caratteristica di $A(\lambda)$ è uguale a 3 per $\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -2$; è uguale a 2 per $\lambda = -2$; è uguale a 1 per $\lambda = 1$]

5C. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

Sia n un intero positivo ed indichiamo con $\mathbb{R}^n$ lo insieme delle n-ple ordinate $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di numeri reali.

Se $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ sono due elementi di R^n, si chiama *somma* di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ e si indica con $\underline{x} + \underline{y}$ l'n-pla

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Se $\lambda \in R$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, si chiama *prodotto* di λ per $\underline{x}$ e si indica con $\lambda \underline{x}$ l'n-pla

$$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

L'insieme R^n, munito dell'addizione e della moltiplicazione sopra definite è uno *spazio vettoriale,* e i suoi elementi si chiamano anche *vettori* . Il vettore $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ si chiama *vettore nullo.*

Sia $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k)$ una k-pla di vettori di R^n. Si chiama *combinazione lineare* di $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_k$ ogni vettore della forma

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sono numeri reali.

Si dimostra che l'insieme E di tutte le possibili combinazioni lineari di $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ è un *sottospazio vettoriale* di R^n, cioè gode delle seguenti proprietà:

$$\underline{x}, \underline{y} \in E \Longrightarrow \underline{x} + \underline{y} \in E$$

$$\lambda \in R, \underline{x} \in E \Longrightarrow \lambda \underline{x} \in E,$$

e prende il nome di *sottospazio vettoriale generato* da $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$.

Una k-pla $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k)$ di vettori di R^n si chiama *famiglia generatrice* di R^n, se il sottospazio vettoriale generato da $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ coincide con R^n; cioè se

$$\forall \underline{x} \in R^n, \ \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R \text{ tali che } \underline{x} = \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k .$$

I vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ si dicono *linearmente indipendenti* se, per $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R$ si ha

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{x}_k = \underline{0} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$$

altrimenti si dice che essi sono *linearmente dipendenti*.

Si verifica che se i vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{k-1}$ sono linearmente indipendenti e se $\underline{x}_k$ non è combinazione lineare di $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{k-1}$, allora anche i vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{k-1}, \underline{x}_k$ sono linearmente indipendenti.

Inoltre i vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots \underline{x}_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno almeno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.

Si chiama *base* di R^n una famiglia generatrice di R^n costituita da vettori linearmente indipendenti.

Posto $\underline{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$; $\underline{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots,$ $\underline{e}_n = (0,0,\ldots,1)$, la famiglia $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ è una particolare base di R^n, detta *base canonica* di R^n.

Siano $\underline{u}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\underline{u}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$, ..., $\underline{u}_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{nk})$ dei vettori di R^n.

Si chiama *matrice nella base canonica di* R^n *dei vettori* $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k)$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Si dimostra che i vettori $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se tale matrice ha caratteristica k.

Per stabilire se i vettori $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k$ sono linearmente indipendenti, ovvero se essi costituiscono una famiglia generatrice, si può applicare il *metodo di Gauss:*
indichiamo con $L_1, L_2, \ldots, L_n$ le righe della matrice A;

- se $a_{11} \neq 0$, sostituiamo L_2 con $L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$, L_3 con $L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1$, ..., L_n con $L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1$.

  In tal modo otteniamo una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

  che è la matrice di una famiglia di vettori aventi le stesse caratteristiche di quella iniziale.
- se $a_{11} = 0$: se tutti gli elementi della prima colonna sono nulli, allora $\underline{u}_1$ è il vettore nullo e i vettori sono linearmente dipendenti. Per stabilire se la famiglia $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k)$ è generatrice basta verificare che la famiglia $(\underline{u}_2, \underline{u}_3, \ldots, \underline{u}_k)$ lo è, cioè si tratta di applicare il metodo alla matrice

privata della sua prima colonna.
Se uno degli a_{i1} non è nullo, basta scambiare tra loro le righe L_1 e L_i, riconducendosi al caso in cui a_{11} non è nullo.

Si compiono poi le stesse operazioni sulle righe $L_2, \ldots, L_n$ e così via. Alla fine si ottiene una matrice di uno dei seguenti tipi:

- se $n > k$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & c_{kk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

I vettori sono linearmente indipendenti se nessuno dei numeri $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk}$ è nullo; inoltre la famiglia $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k)$ non è generatrice.

- se $n = k$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & c_{nn} \end{pmatrix}$$

La famiglia $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k)$ è una base se nessuno dei numeri $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$ è nullo.

- se $n < k$:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & \cdots & c_{1k} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & \cdots & c_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & c_{nn} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

I vettori sono linearmente dipendenti. Inoltre la famiglia $(\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_k)$ è generatrice se e solo se nessuno dei numeri $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$ è nullo.

5.18 Siano $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ vettori di R^3. Se le coppie $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$, $(\underline{x}_1, \underline{x}_3)$ e $(\underline{x}_2, \underline{x}_3)$ sono costituite da vettori linearmente indipendenti, si può concludere che i vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ sono linearmente indipendenti?

[No. Ad esempio i vettori $\underline{x}_1 = (1,0,0)$, $\underline{x}_2 = (0,1,0)$ e $\underline{x}_3 = (1,1,0)$ verificano le nostre ipotesi ma, essendo $\underline{x}_3 = \underline{x}_1 + \underline{x}_2$, i vettori dati sono linearmente dipendenti]

5.19 Siano $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ vettori di R^3. Se i vettori $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ e $\underline{x}_3$ sono linearmente indipendenti, si può concludere che i vettori $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ sono anch'essi linearmente indipendenti?

[Sì. Siano λ_1 e λ_2 numeri reali tali che $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 = \underline{0}$; allora ovviamente è anche $\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + 0\underline{x}_3 = \underline{0}$ ed essendo $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ linearmente indipendenti, deve essere $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Da cui l'asserto]

5.20 Sia E l'insieme dei vettori (x,y,z) di R^3 tali che $x - 2y - z = 0$. Verificare che E è il sottospazio vettoriale di R^3 generato dai vettori $\underline{u} = (1,1,-1)$ e $\underline{v} = (1,0,1)$.

[Sia $\underline{w} = (x,y,z)$ un elemento di R^3. Allora $\underline{w}$ è una combinazione lineare di $\underline{u}$ e $\underline{v}$ se e solo se esistono due numeri reali λ e μ tali che $\underline{w} = \lambda\underline{u} + \mu\underline{v}$, cioè tali che

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu - a \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni di tale sistema si ricava

$$\lambda = y \quad \text{e} \quad \mu = x - y\ .$$

Tali valori di λ e μ verificano l'ultima equazione se e solo se $z = x - 2y$ cioè se e solo se $\underline{w}$ appartiene ad E]

5.21 Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\underline{u}_1 = (1,a,a),\ \underline{u}_2 = (a,1,a),\ \underline{u}_3 = (a,a,1).$$

Per quali valori di a i tre vettori sono linearmente indipendenti?

[Utilizziamo il metodo di Gauss. Moltiplichiamo la prima riga della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

per a e sottraiamo la riga risultante dalle altre due. Otteniamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Se $a = -1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambiando fra loro le ultime due righe si ricava subito che i vettori $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

Se è $a \neq 1$, moltiplichiamo la seconda riga della matrice A per $a/(a+1)$ e sottraiamo la riga risultante dall'ultima riga. Otteniamo così la matrice B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 - \dfrac{a(a-a^2)}{1+a} \end{pmatrix}$$

Essendo

$$1 - a^2 - \frac{a(a-a^2)}{1+a} = \frac{-2a^2+a+1}{1+a}$$

ed essendo 1 e -1/2 le radici del trinomio $x \to -2x^2 + x + 1$, possiamo concludere che se $a \in \mathbb{R} - \{1,-1/2\}$, allora i vettori $\underline{u}_1$, $\underline{u}_2$, $\underline{u}_3$, sono linearmente indipendenti]

5.22 Siano a,b,c numeri reali. Consideriamo i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\underline{x} = (1,a,a^2); \quad \underline{y} = (1,b,b^2); \quad \underline{z} = (1,c,c^2)$$

Verificare che essi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se il prodotto $(a-b)(a-c)(b-c)$ non è nullo, cioè se e solo se i numeri a,b,c sono a due a due distinti fra loro.

[Se due dei tre numeri a,b,c sono uguali fra loro, due dei tre vettori $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ saranno uguali fra loro e perciò $\underline{x},\underline{y},\underline{z}$ saranno linearmente dipendenti.

Se a,b,c sono a due a due distinti, la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} .$$

Verifichiamo col metodo di Gauss che il suo determinante è diverso da zero; si veda anche l'esercizio 5.11).

Sottraiamo la prima riga moltiplicata per a dalla seconda riga e sottraiamo la prima riga moltiplicata per a^2 dall'ultima riga. Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

Sottraiamo ora la seconda riga moltiplicata per b+a dall'ultima riga . Si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & c^2-a^2-(c-a)(b+a) \end{pmatrix}$$

Essendo $b-a \neq 0$ ed essendo $c^2 - a^2 -(c-a)(b+a)=(c-a)(c-b) \neq 0$, il determinante è diverso da zero]

5D. Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Sia dato il *sistema* di n equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

i cui *coefficienti* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ costituiscono la matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e i cui *termini noti* $b_i \in \mathbb{R}$ costituiscono il vettore $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Per risolvere tale sistema si può ricorrere alla seguente

REGOLA DI CRAMER. *Se* $\det A \neq 0$ *allora il sistema (*) ammette un'unica soluzione* $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$.

Precisamente, indicata con B_j *la matrice che si ottiene da A sostituendo la sua j-sima colonna con il vettore* $\underline{b}$*, si ha:*

$$\overline{x}_j = \det B_j / \det A.$$

Invece, se risulta det A = 0, allora occorre invocare il teorema di Rouchè-Capelli esposto nel paragrafo seguente.

Il metodo di Cramer si rivela però poco efficiente nella pratica, specialmente nel caso di sistemi di n equazioni in n incognite con n abbastanza grande.

Ad esempio un sistema di 25 equazioni in 25 incognite richiede più di 26! moltiplicazioni. Questo numero è dell'ordine di 10^{26} e così un computer che sappia eseguire 10^3 moltiplicazioni al secondo, impiegherebbe 10^{16} anni per completarle.

Un altro metodo risolutivo di uso frequente è il *metodo di eliminazione di Gauss* che consiste nel trasformare il dato sistema lineare in un altro di *forma triangolare,* ad esso equivalente, cioè avente le sue stesse soluzioni.

Poichè tale metodo è sostanzialmente equivalente a quello descritto nel paragrafo 5C, ci limiteremo adesso a descriverlo nel caso particolare di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \, . \end{cases}$$

Se è $a_{11} \neq 0$, moltiplichiamo la prima riga per a_{21}/a_{11} e sottraiamo dalla seconda riga la riga risultante. Poi moltiplichiamo la prima riga per a_{31}/a_{11} e sottraiamo dalla terza riga la riga risultante.

In tal modo otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{22} x_2 + a'_{23} x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad a'_{32} x_2 + a'_{33} x_3 = b'_3 \, . \end{cases}$$

Se è $a'_{22} \neq 0$, moltiplichiamo la seconda riga per a'_{32}/a'_{22} e sottraiamo dalla terza riga la riga risultante.

In tal modo otteniamo il sistema *in forma triangolare*

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}\, x_2 + a'_{23}\, x_3 = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad a''_{33}\, x_3 = b''_3 \end{cases}$$

che è equivalente a quello originario.

Il procedimento risolutivo continua riscrivendo le equazioni "all'indietro" nel modo seguente

$$x_3 = b''_3/a''_{33} \qquad\qquad (\text{se } a''_{33} \neq 0)$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}\, x_3)/a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3)/a_{11}$$

Notiamo che nel trasformare un sistema in forma triangolare si eseguono le seguenti operazioni:

1) moltiplicazione di un'equazione per una costante;
2) addizione di equazioni;
3) scambio di due equazioni.

Si dimostra che, eseguendo tali operazioni su un dato sistema, si perviene ad un sistema equivalente.

5.23 Risolvere con la regola di Cramer il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 1 \\ x + 3y - z = 2 \\ -x + y + 2z = 1\ . \end{cases}$$

[La matrice del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante è det A = 24. Inoltre si ha det $B_1 = -27$, det $B_2 = 21$, det $B_3 = -12$, ove con B_i abbiamo indicato la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i-sima col vettore (1,2,1). Allora, per la regola di Cramer è

$$x = \frac{\det B_1}{\det A} = -\frac{9}{8}; \quad y = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{7}{8}; \quad z = \frac{\det B_3}{\det A} = -\frac{1}{2} \quad]$$

Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi lineari

5.24 $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$ $\left[\, x = \frac{13}{5}; \quad y = -3; \quad z = -\frac{12}{5} \,\right]$

5.25 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ $[\, x = 1; \quad y = z = 0 \,]$

5.26 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$ $[\, x = y = z = 0 \,]$

5.27 $\begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ 2x + \frac{1}{3}y - z = 2 \\ x + y - z = 4/3 \end{cases}$ $\left[\, x = \frac{8}{15}; \quad y = -\frac{1}{5}; \; z = -1 \,\right]$

5.28 $\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 6 \\ -x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$ $[\, x = 1; \quad y = -1; \quad z = 2 \,]$

5.29 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 12x_4 = 36 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$ [$x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = -1; x_4 = 3$]

5.30 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 9 \end{cases}$ [$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$]

5.31 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$ [$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$]

5.32 Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 11y + 19z = 7 \\ 6x + 19y + 47z = 10. \end{cases}$$

[Per eliminare l'incognita x dalle ultime due equazioni, moltiplichiamo la prima equazione per 5 e sottraiamo dalla seconda equazione l'equazione risultante; poi moltiplichiamo la prima equazione per 6 e sottraiamo dalla terza equazione l'equazione risultante. Otteniamo così il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ \quad y + 4z = -13 \\ \quad 7y + 29z = -14\ . \end{cases}$$

Per eliminare l'incognita y dalla terza equazione, moltiplichiamo la seconda equazione per 7 e sottraiamo dalla terza equazione l'e quazione risultante. In tal modo otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ \quad\; y + 4z = -13 \\ \qquad\;\; z = 77 \end{cases}$$

Sostituendo nella seconda equazione il valore di $z = 77$ dato dalla terza, si ricava $y = -321$. Sostituendo tali valori di z e y nella prima equazione si ottiene il valore di $x = 415$.
Dunque la soluzione del sistema dato è $(415, -321, 77)$]

Risolvere con il metodo di Gauss i seguenti sistemi lineari con l'accorgimento di « riordinare » le equazioni di un sistema, nel caso che la sua prima equazione manchi dell'incognita x.

5.33 $\begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ x + 5y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$ $[x = -2;\ y = 0;\ z = 4]$

5.34 $\begin{cases} y + 3z = 9 \\ 2x + 2y - z = 8 \\ -x + 5z = 8 \end{cases}$ $[x = 2;\ y = 3;\ z = 2]$

5.35 $\begin{cases} y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$ $[x = 0;\ y = 1;\ z = 0]$

5.36 $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = 0 \end{cases}$ $[x = 9;\ y = -36;\ z = 30]$

5.37 Risolvere con il metodo di Gauss il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 10 \end{cases} .$$

[Sottraiamo opportuni multipli della prima equazione dalle altre tre, in modo da eliminare x_1 in ciascuna di queste.

Otteniamo così il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - 5x_4 = -13 \\ x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Sottraiamo ora opportuni multipli della seconda equazione dalla terza e dalla quarta, in modo da eliminare da queste la variabile x_2.

Si ha così il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ -x_3 - 4x_4 = -11 \\ -3x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Sottraendo dalla quarta equazione il triplo della terza, otteniamo il sistema triangolare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ -x_3 - 4x_4 = -11 \\ 13x_4 = 39 \end{cases} .$$

Con una sostituzione "all'indietro" otteniamo $x_4 = 3$; $x_3 = -1$; $x_2 = 1$; $x_1 = 2$]

5.38 Discutere rispetto al parametro λ il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ \lambda y + z = 2 \\ x + y + \lambda z = -1. \end{cases}$$

[Il determinante del sistema è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

per cui, per $\lambda \neq 1$ il sistema ammette una sola soluzione, che si ottiene con la regola di Cramer. Se invece $\lambda = 1$, con verifica diretta si trovano infinite soluzioni del tipo $(-3,y,2-y)$]

5E. Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Dato il sistema lineare di m equazioni in n incognite

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

le due matrici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

si chiamano *matrice incompleta* e *matrice completa* del sistema (*) .

Ricordiamo il seguente notevole

TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI.- *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (*) abbia soluzioni è che le matrici completa ed incompleta del sistema abbiano la stessa caratteristica.*

Inoltre, se il sistema ha soluzioni, detta k la caratteristica delle due matrici del sistema, per risolvere il sistema stesso si procede nel modo seguente:

1) si scelgono k delle m equazioni, in modo tale che la matrice dei coefficienti di queste abbia caratteristica uguale a k
2) nel nuovo sistema ottenuto, avente k equazioni in n incognite, si scelgono k incognite, in modo tale che il determinante dei loro coefficienti sia non nullo ed alle rimanenti n-k incognite si attribuiscono valori arbitrari
3) si risolve questo sistema di k equazioni in k incognite, con determinante non nullo, mediante le regole note
4) gli *n* numeri così trovati, costituiscono una soluzione del sistema (*).

Nel caso $k < n$, si suol dire che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni. Nel caso $k = n$, il sistema ha evidentemente una sola soluzione.

5.39 Risolvere il sistema di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}.$$

[Poichè le due matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe caratteristica 2, grazie al teorema di Rouchè-Capelli , il sistema ammette ∞^{3-2} cioè ∞^1 soluzioni. Per trovare le soluzioni, osserviamo che il determinante della matrice formata con i coefficienti delle incognite x e y è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \;;$$

possiamo attribuire a z un valore arbitrario e risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ 2x - y = z + 3 \end{cases}$$

con la regola di Cramer. Essendo:

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ z+3 & -1 \end{vmatrix} = 2(z+1); \quad B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & z+3 \end{vmatrix} = 3z + 1$$

si ottiene $x = 2(z+1)$; $y = 3z + 1$. Le soluzioni del sistema dato sono pertanto: $x = 2(z+1)$; $y = 3z+1$; $z = z$, con z arbitrario]

5.40 Risolvere il sistema di tre equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \\ 4x + 5y = 7 \end{cases} .$$

[La matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ha caratteristica 2, essendo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

ha anch'essa caratteristica 2, perchè il suo determinante è zero. Per il teorema di Rouchè - Capelli, il sistema ha un'unica soluzione, essendo $k = n = 2$. Per determinare tale soluzione, consideriamo il sistema delle prime due equazioni del sistema dato:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

nel quale il determinante dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Dalla regola di Cramer si trova la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{3} \quad ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3} \quad]$$

5.41 Risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x \quad\; - z = -2 \end{cases}$$

[Essendo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

il sistema non si può risolvere con la regola di Cramer. Vediamo se è possibile utilizzare il teorema di Rouchè-Capelli. La caratteristica della matrice incompleta è 2, in quanto, ad esempio

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Anche la matrice completa ha caratteristica 2, giacchè si verifica facilmente che tutti i suoi minori del terzo ordine sono nulli. Dunque, per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ammette ∞^{n-k}, cioè ∞^1 soluzioni. Per determinare tali soluzioni basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1-2z \\ \quad\;\; x = z - 2 \end{cases}$$

Si trova $x = z - 2$; $y = 5 - 4z$; $z = z$ con z arbitrario]

5.42 Risolvere il sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases} .$$

[La matrice incompleta ha caratteristica 2, mentre quella completa ha caratteristica 3. Per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema non ammette alcuna soluzione]

5.43 Studiare al variare del parametro λ il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 3z = 3 \\ 2x + 2y + \lambda z = 6 \\ \quad\; x + z = 3 \end{cases} .$$

[Il determinante della matrice incompleta è uguale a $\lambda-6$. Pertanto per $\lambda \neq 6$ il sistema ammette un'unica soluzione e precisamente $x=3$; $y=z=0$. Per $\lambda=6$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni]

5.44 Risolvere il sistema di tre equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x + y + 3z + t = 1 \\ 2x - 4y + 3z - t = 5 \end{cases} .$$

[Consideriamo le matrici incompleta e completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ;$$

poichè la terza riga si ottiene sottraendo dagli elementi della prima riga, moltiplicati per 3, i corrispondenti elementi della seconda, tutti i minori del terzo ordine di tali matrici sono nulli. Essendo poi

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 ,$$

le due matrici hanno caratteristica 2, e perciò il sistema ammette

∞^2 soluzioni, che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 2 - 2z \\ x + y = 1 - 3z - t \end{cases}$$

Si trova $x = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}t$; $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}t$; $z=z$; $t=t$]

5F. Applicazioni lineari

Siano E, F due spazi vettoriali su R e sia $\phi: E \to F$ un' *applicazione lineare* di E in F, cioè una funzione da E verso F tale che

$$\phi(\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2) = \lambda_1 \phi(\underline{u}_1) + \lambda_2 \phi(\underline{u}_2)$$

per ogni $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in E$ e per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

Si chiama *nucleo* di ϕ l'insieme *ker* ϕ dei vettori $\underline{u} \in E$ la cui immagine mediante ϕ è il vettore nullo di F.

Si chiama *immagine* di ϕ l'insieme *Im* ϕ dei vettori $\underline{v} \in F$ del tipo $\underline{v} = \phi(\underline{u})$ con $\underline{u} \in E$.

Sia $\phi : R^n \to R^m$ un'applicazione lineare e sia $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n)$ la base canonica di R^n. L'applicazione ϕ è univocamente determinata da $(\phi(\underline{e}_1), \phi(\underline{e}_2), \ldots, \phi(\underline{e}_n))$. Si chiama *matrice di* ϕ la matrice della famiglia $(\phi(\underline{e}_1), \ldots, \phi(\underline{e}_n))$ nella base canonica di R^m.

Sia $\phi : R^n \to R^m$ un'applicazione lineare. Si dimostra che la funzione ϕ è *iniettiva* se e solo se è verificata una delle seguenti condizioni fra loro equivalenti

i) $\ker \phi = \{\underline{0}\}$

j) i vettori $\phi(\underline{e}_1), \phi(\underline{e}_2), \ldots, \phi(\underline{e}_n)$ sono linearmente indipendenti.

L'immagine di ϕ, Imϕ è il sottospazio vettoriale di R^m generato dalla famiglia $(\phi(\underline{e}_1), \phi(\underline{e}_2), \dots, \phi(\underline{e}_n))$. Pertanto ϕ è *suriettiva* se e solo se tale famiglia è generatrice.

Alla luce di tali nozioni e risultati possiamo interpretare in modo diverso la questione della risoluzione di un sistema di m equazioni in n incognite. Precisamente, considerato il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

sia $\phi : R^n \to R^m$ l'applicazione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Posto $\underline{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, siamo così ricondotti a risolvere in R^n l'equazione nell'incognita $\underline{u}$

$$(*) \qquad \phi(\underline{u}) = \underline{b} .$$

Se ϕ è iniettiva e suriettiva, il sistema ammette una unica soluzione.

Altrimenti, se $\underline{u}$ è una soluzione di (*), allora l'insieme delle soluzioni di (*) è costituito dai vettori $\underline{v} + \underline{u}$, ove $\underline{v} \in \mathrm{Ker}\phi$.

5.45 Sia $\phi : R^2 \to R^3$ l'applicazione lineare la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia $\psi : R^3 \to R^2$ l'applicazione lineare la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice dell'applicazione lineare $\psi \circ \phi : R^2 \to R^2$.

[Per determinare la matrice di $\psi \circ \phi$, basta determinare l'immagine mediante $\psi \circ \phi$ di ciascuno dei vettori $\underline{e}_1 = (1,0)$ ed $\underline{e}_2 = (0,1)$ della base canonica di R^2.

Essendo $\phi(\underline{e}_1) = \phi(1,0) = (1,0,2)$, si ha

$$\psi \circ \phi(\underline{e}_1) = \psi(1,0,2) = \psi(1,0,0)+2\psi(0,0,1)=(1,-1)+2(0,1)=(1,1)$$

Analogamente, essendo $\phi(\underline{e}_2) = \phi(0,1) = (1,2,-1)$, si ha

$$\psi \circ \phi(\underline{e}_2)=\psi(1,2,-1)=\psi(1,0,0)+2\psi(0,1,0)-\psi(0,0,1)=(1,-1)+2(4,2)-(0,1) = (9,2)$$

Pertanto, la matrice di $\psi \circ \phi$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$]

5.46 Sia ϕ l'applicazione lineare di R^4 in R^3 la cui matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare $\mathrm{Im}\phi$ e $\mathrm{Ker}\phi$.

[Per ogni elemento $\underline{u} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ si ha $\phi(\underline{u})=(x+y-z+2t,\ x+y+3t,\ -x+z)$. Il vettore $\underline{u}$ appartiene perciò a $\ker\phi$ se e solo se

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ x + y \quad + 3t = 0 \\ -x \quad +z \quad = 0 \end{cases}$$

Per risolvere questo sistema sottraiamo la prima equazione dalla seconda, addizioniamo alla prima la terza equazione e lasciamo inalterata la terza equazione.
Si ottiene così il sistema equivalente

$$\begin{cases} z + t = 0 \\ y + 2t = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}$$

Pertanto $\ker \phi$ è la retta di R^4 generata dal vettore $(-1,-2,-1,1)$.
Determiniamo ora $\mathrm{Im}\phi$. Questo è il sottospazio vettoriale di R^3 generato dalle immagini mediante ϕ dei vettori della base canonica di R^4, cioè dai vettori $(1,1,-1)$, $(1,1,0)$, $(-1,0,1)$, $(2,3,0)$.
Verifichiamo che i vettori $\underline{e}_1 = (1,1,-1)$, $\underline{e}_2 = (1,1,0)$ e $\underline{e}_3 = (-1, 0, 1)$ costituiscono una base di R^3, cioè che essi sono linearmente indipendenti.
Per ogni $(x,y,z) \in R^3$, il vettore $x\underline{e}_1 + y\underline{e}_2 + z\underline{e}_3$ è nullo se e solo se

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

Utilizzando le stesse combinazioni lineari di equazioni che nel sistema precedentemente studiato, si ottiene come unica soluzione il vettore $(0,0,0)$. Allora $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ sono linearmente indipendenti e $\mathrm{Im}\,\phi = R^3$]

5G. Autovalori

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$ ad elementi reali. Si chiama *autovalore* di A ogni soluzione λ dell'equazione

$$(*) \qquad \det (A - \lambda I) = 0$$

ove con I abbiamo indicato la matrice identica $I = (\delta_{ij})$ ove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, cioè $\delta_{ij} = 1$ se $i=j$; $\delta_{ij}=0$ se $i\neq j$. Perciò l'equazione (*) può essere riscritta esplicitamente come

$$(**) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Evidentemente, il determinante a primo membro della (**) genera un polinomio di grado n in λ, per cui(**) è un'equazione algebrica di grado n in λ. Pertanto,a norma del teorema fondamentale dell'algebra,essa ammette n soluzioni nel campo complesso. Se inoltre la matrice A è simmetrica, si dimostra che tali soluzioni sono tutte reali.

Dunque, una matrice simmetrica ha n autovalori reali contati con la dovuta molteplicità.

Il polinomio a primo membro della (**) si chiama *polinomio caratteristico* della matrice A e si verifica che esso ha la forma

$$\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A = 0.$$

Consideriamo ora il sistema lineare

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

ove λ è un autovalore di A. Essendo soddisfatta la (**), tale sistema ammette almeno una soluzione non banale, cioè diversa dal vettore nullo di R^n. Una tale soluzione si chiama *autovettore* di A corrispon -

dente all'autovalore λ.

Se $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un autovettore di A, evidentemente tale è anche $k\underline{x}$ per $k \neq 0$ e corrisponde allo stesso autovalore.

5.47 Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[L'equazione caratteristica è

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

ed ammette le soluzioni $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$.

Separatamente, per ciascun autovalore, determiniamo il corrispondente autovettore: per $\lambda_1 = 6$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

posto $x_2 = k$, si ha $x_1 = 4k$ e perciò l'autovettore corrispondente a $\lambda_1 = 6$ è del tipo $(4k,k)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Analogamente si vede che l'autovettore corrispondente a $\lambda_2 = 1$ è del tipo $(k,-k)$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$]

5.48 Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

[Il polinomio caratteristico è

$$\det(A-\lambda I)= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162$$

perciò l'equazione caratteristica è

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9) = 0$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Separatamente, per ciascun autovalore cerchiamo il corrispondente autovettore: per $\lambda_1 = 3$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

posto $x_3 = -k$, si ha $x_1 = x_2 = 2k$, con $k \in R - \{0\}$; per $\lambda_2 = 6$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

posto $x_1 = -k$, si ha $x_2 = x_3 = 2k$, con $k \in R - \{0\}$; per $\lambda_3 = 9$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

posto $x_2 = -k$, si ha $x_1 = x_3 = 2k$, con $k \in R - \{0\}$. Dunque l'autovettore corrispondente a λ_1 è del tipo $(2k, 2k, -k)$; quello corrispondente a λ_2 è del tipo $(-k, 2k, 2k)$; quello corrispondente a λ_3 è del tipo $(2k, -k, 2k)$ con $k \in R - \{0\}$]

5.49 Determinare autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

[Gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$; corrispondenti autovettori sono (1,2,-1); (-2,1,0); (3,0,1)]

5.50 Determinare gli autovalori (complessi) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} - \{0\}$.

[Si ha $\lambda_1 = a+ib$ e $\lambda_2 = a-ib$]

5.51 Determinare autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} .$$

[Si ha $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $\lambda_3 = a_{33}$; corrispondenti autovettori sono (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)]

Capitolo 6

GEOMETRIA ANALITICA

6A. Coordinate cartesiane nel piano

Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali, la distanza $\overline{P_oP_1}$ di due punti P_o, P_1 di coordinate (x_o,y_o) e (x_1,y_1) si esprime mediante la formula

$$\overline{P_oP_1} = \sqrt{(x_1-x_o)^2 + (y_1-y_o)^2} .$$

In particolare, la distanza del punto $P \equiv (x, y)$ dall'origine 0 è data da

$$\overline{P0} = \sqrt{x^2+y^2} .$$

Le coordinate (x,y) del punto medio P del segmento P_oP_1 di estremi $P_o \equiv (x_o,y_o)$ e $P_1 \equiv (x_1,y_1)$ sono date da $x=(x_o+x_1)/2$ e $y=(y_o+y_1)/2$.

Ricordiamo che il problema del cambiamento di coordinate cartesiane consiste nell'esprimere le coordinate di un punto P rispetto ad un sistema 0xy, mediante le coordinate dello stesso punto in un nuovo sistema 0'x'y'

1° caso: *traslazione degli assi*. Gli assi dei due sistemi di riferimento sono paralleli ed equiversi e siano (a,b) le coordinate di 0' nel sistema di riferimento Oxy (fig. 6.1).

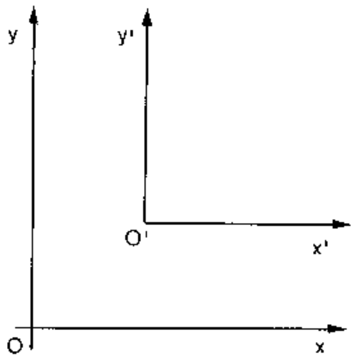


figura 6.1

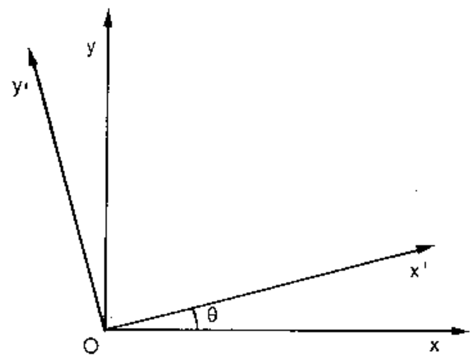


figura 6.2

Dette (x,y) le coordinate del punto P nel sistema di riferimento Oxy e (x',y') le coordinate dello stesso punto nel nuovo sistema di riferimento, le equazioni del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b. \end{cases}$$

2° caso: *rotazione degli assi*. I due sistemi di riferimento hanno la stessa origine O ma il nuovo sistema di assi si ottiene dal primo mediante la rotazione di un angolo ϑ (fig. 6.2).

Dette (x,y) le coordinate del punto P nel sistema Oxy e (x',y') quelle dello stesso punto P nel nuovo sistema Ox'y', le equazioni del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x' = x \cos \vartheta + y \operatorname{sen} \vartheta \\ y' = - x \operatorname{sen} \vartheta + y \cos \vartheta \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x' \cos \vartheta - y' \operatorname{sen} \vartheta \\ y = x' \operatorname{sen} \vartheta + y' \cos \vartheta \end{cases}$$

3° caso : *cambiamento generale di coordinate*. I due sistemi sono arbitrari con origine 0 e 0' rispettivamente; sia ϑ l'angolo $\widehat{xx'}$ e siano (a,b) le coordinate di 0' nel sistema 0xy (fig. 6.3).

Allora le equazioni del cambiamento di coordinate sono

$$\begin{cases} x'=(x-a)\cos\vartheta + (y-b)\,\text{sen}\,\vartheta \\ y'=-(x-a)\,\text{sen}\,\vartheta + (y-b)\cos\vartheta \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x'\cos\vartheta - y'\,\text{sen}\,\vartheta + a \\ y = x'\,\text{sen}\,\vartheta + y'\cos\vartheta + b \end{cases}$$

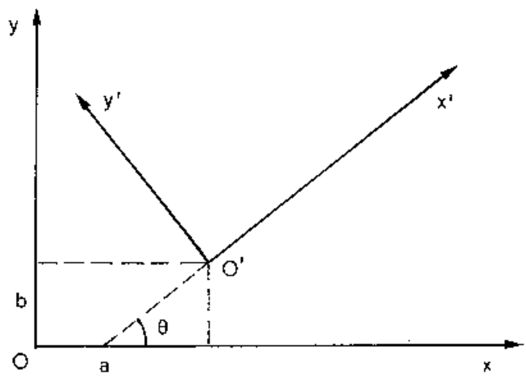


figura 6.3

6.1 Dati i numeri reali positivi $x > 0$ e $y > 0$, dire a quale quadrante appartiene ciascuno dei seguenti punti del piano cartesiano

(x,y); $(-x,-y)$; $(x,-y)$; $(-x,y)$.

[1°;3°;4°;2°]

6.2 Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi A,B.

(a) $A\equiv(1,2)$; $B\equiv(2,1)$ (b) $A\equiv(1,2)$; $B\equiv(3,3)$

(c) $A\equiv(0,-1)$; $B\equiv(-1,-2)$ (d) $A\equiv(0,\sqrt{3})$; $B\equiv(1,\sqrt{2})$

[(a) $(3/2,\ 3/2)$; (b) $(2,\ 5/2)$; (c) $(-1/2,\ -3/2)$;
(d) $(1/2,\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})/2)$]

6.3 Calcolare la distanza delle seguenti coppie di punti A, B del piano cartesiano.

(a) $A\equiv(0,0)$; $B\equiv(1,1)$ (b) $A\equiv(0,0)$; $B\equiv(0,1)$

(c) $A\equiv(2/3,1)$; $B\equiv(1,2/3)$

(d) $A\equiv(1+\sqrt{3},2)$; $B\equiv(\sqrt{3},2+\sqrt{2})$

[(a) $\sqrt{2}$; (b) 1; (c) $\sqrt{2}/3$; (d) $\sqrt{3}$]

6.4 Determinare il perimetro del triangolo i cui vertici hanno le seguenti coordinate nel piano cartesiano: $A\equiv(2,-1)$, $B\equiv(2,4)$, $C\equiv(4,0)$.

[$5+\sqrt{20}+\sqrt{5}$]

6.5 Verificare che il triangolo di vertici $A\equiv(0,0)$, $B\equiv(2,2)$, $C\equiv(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ è equilatero.

6.6 Determinare il numero positivo x tale che il triangolo di vertici $A\equiv(0,0)$, $B\equiv(1,0)$, $C\equiv(1/2,\ x)$ sia equilatero.

[$x=\sqrt{3}/2$]

6.7 Determinare le coordinate del punto equidistante dai tre punti $A\equiv(0,0)$, $B\equiv(-1,1)$, $C\equiv(0,2)$.

[$(0,1)$]

6.8 Quali sono le nuove coordinate dei punti $(-1,4)$, $(3,1)$, $(3,-2)$ se l'origine si sposta nel punto $(2,1)$ ed i nuovi assi sono paralleli ed equiversi ai primi?

[$(-3,3)$; $(1,0)$; $(1,-3)$]

6.9 Quali sono le nuove coordinate del punto $(1,1)$

quando si fanno ruotare gli assi attorno all'origine di un angolo di 60°?

[$(1+\sqrt{3})/2$, $(1-\sqrt{3})/2$]

6B. Equazioni della retta

Ricordiamo che ad ogni retta r di un piano, nel quale si sia fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, si può associare un'equazione di primo grado in due variabili

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

nel senso che le coordinate di tutti (e solo) i punti della retta soddisfano tale equazione. L'equazione (1) prende il nome di *equazione cartesiana* della retta r.

Nel caso particolare che r sia parallela all'asse delle y, l'equazione (1) assume la forma $x - c=0$ mentre se r è parallela all'asse delle x, la (1) assume la forma $y-c = 0$.

Viceversa, ad ogni equazione del tipo (1), con a e b non entrambi nulli, si può associare una retta r di cui essa è l'equazione cartesiana.

Se nell'equazione (1) risulta $a=0$, $b\neq 0$, allora la equazione diviene $by+c=0$, ovvero

$$y = - c/b$$

e rappresenta la retta parallela all'asse delle x, passante per il punto dell'asse delle y di ordinata $-c/b$.

Se invece è $a \neq 0$, $b=0$, allora l'equazione diviene $ax+c=0$, ovvero

$$x = - c/a$$

e rappresenta la retta parallela all'asse delle y, passante per il punto dell'asse delle x di ascissa $-c/a$.

Se infine è $c = 0$, l'equazione rappresenta una retta passante per l'origine.

A seconda del tipo di problema che si vuol studiare l'equazione della retta assume forme particolari:

- L'*equazione esplicita* di una retta r (non parallela all'asse delle y) è

$$y = mx + q$$

  ove m è il coefficiente angolare di r, cioè la tangente trigonometrica dell'angolo ϑ che l'asse delle x forma con r e q è l'ordinata all'origine di r, cioè l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse delle y (fig. 6.4)

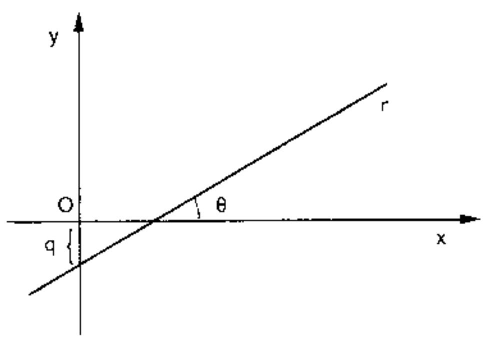


figura 6.4

- L'*equazione della retta passante per i punti* $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ e $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, (non parallela ad alcun asse coordinato) è

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

- L'*equazione segmentaria* di una retta (non passante per l'origine, nè parallela ad alcun asse) è

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

ove p è l'ascissa del punto A di intersezione della retta con l'asse delle x e q è l'ordinata del punto B di intersezione della retta con l'asse delle y (fig. 6.5)

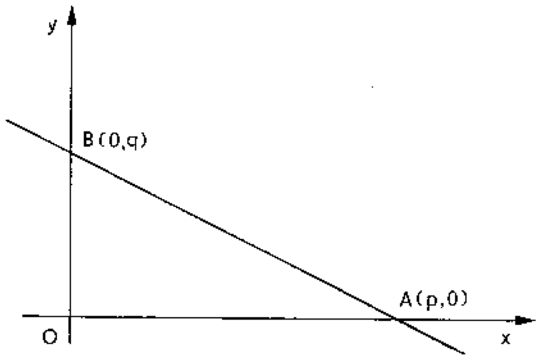


figura 6.5

- *Le equazioni parametriche* di una retta sono del tipo

$$\begin{cases} x = x_o + \lambda t \\ y = y_o + \mu t \end{cases} \qquad t \in R$$

ove (x_o, y_o) sono le coordinate di un punto della retta e λ, μ sono due numeri non entrambi nulli, detti *numeri direttori* della retta.

6.10 Qual'è l'equazione della retta i cui punti hanno ascissa uguale a d?

[$x = d$]

6.11 Qual'è l'equazione della retta i cui punti hanno ordinata uguale a c?

[$y = c$]

6.12 Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie A,B di punti del piano cartesiano

(a) $A\equiv(0,0)$; $B\equiv(3,3)$ (b) $A\equiv(0,1)$; $B\equiv(3,4)$

(c) $A\equiv(2,5)$; $B\equiv(6,3)$ (d) $A\equiv(0,-1)$; $B\equiv(1/3,0)$

(e) $A\equiv(1/5,3)$; $B\equiv(1,2/3)$ (f) $A\equiv(5,1/3)$; $B\equiv(1,3/2)$.

[(a) $y = x$; (b) $y=x+1$; (c) $y=-x/2+6$; (d) $y=3x-1$; (e) $35x+12y-43=0$; (f) $7x+24y-43=0$]

6.13 Determinare il coefficiente angolare della retta passante per i punti A,B indicati

(a) $A\equiv(0,0)$; $B\equiv(1,3)$ (b) $A\equiv(1,3)$; $B\equiv(-2,4)$

(c) $A\equiv(0,0)$; $B\equiv(1,0)$ (d) $A\equiv(0,0)$; $B\equiv(0,1)$.

[(a) 3; (b) $-1/3$; (c) 0; (d) non è definito]

6.14 Scrivere l'equazione segmentaria di ciascuna delle rette di cui è data l'equazione cartesiana

(a) $3x+y-3 = 0$ (b) $x + 3y - 3 = 0$

(c) $\sqrt{2}\,x + \pi y-\pi\sqrt{2}=0$ (d) $\sqrt{2}\,x+ \sqrt{3}\,y- \sqrt{6} =0$.

[(a) $x + \frac{y}{3} = 1$; (b) $\frac{x}{3} + y = 1$; (c) $\frac{x}{\pi} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1$; (d) $\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{2}} =1$]

6.15 Scrivere l'equazione segmentaria della retta che interseca gli assi nei punti $A\equiv(\sqrt{2},0)$ e $B\equiv(0,\sqrt{3})$.

[$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$]

6.16 Scrivere le equazioni parametriche della retta r che congiunge l'origine 0 delle coordinate con il punto $A \equiv (2,3)$.

[$x = 2t$; $y = 3t$ per $t \in \mathbb{R}$]

6C. **Problemi sulle rette**

Siano r e r' due rette di equazioni

$$(*) \qquad \begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a' \neq 0$, $b' \neq 0$. Se le due rette si incontrano in un punto P, le coordinate di questo punto costituiscono una soluzione di entrambe le equazioni e perciò del sistema da esse formato.

Viceversa, se il sistema (*) ammette una soluzione (x,y), allora x,y sono le coordinate di un punto comune alle due rette.

Pertanto, per stabilire se le rette r e r' sono fra loro incidenti o parallele o coincidenti basta risolvere il sistema (*). Se tale sistema ha una sola soluzione, allora le rette r,r' sono *incidenti*. Se il sistema non ha soluzioni, le rette r,r' sono *parallele*. Se il sistema ha infinite soluzioni, le rette sono *coincidenti*.

Supponiamo ora che il determinante $ab' - a'b$ della matrice incompleta del sistema (*) sia diverso da zero, cioè supponiamo che sia

$$a/a' \neq b/b';$$

allora il sistema (*) ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}, \qquad y = \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

e tali sono le coordinate dell'unico punto di intersezione delle due rette r,r'.

Se invece il determinante $ab'-a'b$ è nullo, cioè, se è

$$a/a' = b/b' ,$$

allora, detto k il valore comune dei rapporti a/a', b/b' si ha $a = ka'$, $b=kb'$ e il sistema (*) assume la forma

$$\begin{cases} a'x + b'y = -\dfrac{c}{k} \\ a'x + b'y = -c' \end{cases}$$

da cui si vede che, se è $c/k \neq c'$ il sistema non ha soluzioni e le rette sono parallele; se invece è $c/k = c'$ allora le due equazioni del sistema coincidono e perciò $r = r'$.

Dalle considerazioni precedenti segue, in particolare, che due rette r ed r' di equazioni

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

sono *parallele* se e solo se esiste k tale che $a=ka'$, $b=kb'$.

Ricordiamo, invece, che tali rette sono *perpendicolari* fra loro se e solo se è $aa'+bb'=0$.

Inoltre, l'equazione della retta passante per il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, parallela (risp. perpendicolare) alla retta di equazione $ax+by+c=0$ è $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ (risp. $b(x-x_0)-a(y-y_0) = 0$).

Se le rette r e r' sono espresse mediante la loro equazione esplicita

$$\begin{aligned} y &= mx + q \\ y &= m'x + q', \end{aligned}$$

allora esse sono parallele se $m=m'$, sono perpendicolari tra loro se $mm' = -1$;

Ricordiamo infine che la distanza d del punto $P \equiv (x_0, y_0)$ dalla retta di equazione $ax+by+c = 0$ è data da $d = |ax_0+by_0+c| / \sqrt{a^2+b^2}$.

6.17 Determinare le coordinate del punto P di intersezione di ciascuna delle seguenti coppie di rette del piano

(a) $3x+y-9 = 0; \quad 2x + 5y - 19 = 0$

(b) $2x+3y-5 = 0; \quad 4x + 9y - 12 = 0$

(c) $2x+3y-1 = 0; \quad x - y + 2 = 0.$

[(a) $P \equiv (2,3)$; (b) $P \equiv (3/2, 2/3)$; (c) $P \equiv (-1,1)$]

6.18 Verificare che, condizione necessaria e sufficiente affinchè i tre punti $A \equiv (x_o, y_o)$, $B \equiv (x_1, y_1)$, $C \equiv (x_2, y_2)$ siano allineati su di una medesima retta è che sia

$$\begin{vmatrix} x_o & y_o & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

[Tale è infatti la condizione di compatibilità del sistema nelle incognite a,b,c

$$\begin{cases} ax_o + by_o + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$
]

6.19 Stabilire se i tre punti A,B,C, di cui sono specificate le coordinate, sono o non sono allineati

(a) (0,1); (2,-1); (3,-2) (b) (1,1); (5,5); (13,11)

(c) (1/2,7/4); (0.2,2.2); (1,1) (d) (1,5/3); (1/2,2); (3,1/3)

[(a) si; (b) no; (c) si; (d) si]

6.20 Scrivere l'equazione della retta parallela alla retta data e passante per il punto indicato

(a) $2x+3y-1=0$; $P \equiv (1,1)$ (b) $2x+y-3=0$; $P \equiv (2,1)$

(c) $x+y-1=0$; $P \equiv (1,1)$ (d) $x+8y-3=0$; $P \equiv (5,5)$

(e) $y = mx+q$; $P \equiv (x_1, y_1)$.

[(a) $2x+3y-5=0$; (b) $2x+y-5=0$; (c) $x+y-2=0$; (d) $x+8y-43$ 0;
(e) $y = m(x-x_1)+y_1$]

6.21 Scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto indicato

(a) $y = 3x+1$; $P\equiv(0,0)$ (b) $y=2x+7$; $P\equiv(1,3)$;

(c) $y = x+9$; $P\equiv(3,3)$

(d) $y = mx + q$ (con $m \neq 0$); $P\equiv(x_1,y_1)$.

[(a) $y=-(1/3)x$; (b) $y=-x/2+7/2$; (c) $y=-x+6$; (d) $y=-(x-x_1)/m+y_1$]

6.22 Determinare la distanza del punto $P\equiv(2,2)$ dalla retta di equazione $2x+y-5=0$.

[$1/\sqrt{5}$]

6.23 Determinare la distanza del punto $P\equiv(1,1/3)$ dalla retta di equazione $x-y-2=0$.

[$4/3\sqrt{2}$]

6.24 I lati di un triangolo ABC hanno equazioni $x=0$; $y=0$; $x+y = a$. Determinare le coordinate dei vertici A,B e C.

[(0,0); (a,0); (0,a)]

6.25 Determinare le coordinate dei vertici del triangolo i cui lati hanno equazioni $y=0$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$.

[(a,0); (b,0); (ab/(a+b), ab/(a+b))]

6.26 Scrivere le equazioni delle mediane del triangolo di vertici $A\equiv(2,3)$; $B\equiv(-2,-3)$; $C\equiv(4,-1)$.

[$x+4y=0$; $5x-y-7=0$; $4x-5y-7=0$]

6.27 Determinare il parametro λ in modo tale che la retta r_λ di equazione

$$(\lambda+1)x + (\lambda-1)y + 2\lambda - 1 = 0$$

soddisfi ad una delle seguenti condizioni

(a) passi per il punto (1,2)

(b) sia parallela all'asse delle y
(c) sia perpendicolare alla retta di equazione: $2x - y + 1 = 0$.

[(a) Affinchè la retta r_λ passi per il punto (1,2) occorre che la coppia (1,2) soddisfi l'equazione di r_λ. Deve essere perciò $\lambda+1 + 2(\lambda-1) + 2\lambda - 1 = 0$ e cioè $\lambda = 2/5$. (b) Affinchè la retta r_λ risulti parallela all'asse delle y occorre che nella sua equazione manchi il termine contenente la y; dev'essere perciò $\lambda=1$. (c) Affinchè la retta r_λ sia perpendicolare alla retta $2x-y+1=0$, occorre che il coefficiente angolare di r_λ sia uguale all'opposto del reciproco del coefficiente angolare della retta $2x-y+1=0$. Si ricava $\lambda = -3$]

6D. Equazioni della circonferenza

L'equazione cartesiana della circonferenza di centro (x_o,y_o) e raggio $r > 0$ è

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = r^2 .$$

Sviluppando i calcoli si perviene ad un'equazione del tipo

$$(*) \qquad x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$$

con $\alpha=-2x_o$, $\beta=-2y_o$, $\gamma = x_o^2 + y_o^2 - r^2$.

Viceversa, un'equazione del tipo (*) è l'equazione di una circonferenza, se e solo se è $\alpha^2/4 + \beta^2/4 - \gamma > 0$; in tal caso le coordinate del centro sono : $-\alpha/2$, $-\beta/2$ ed il raggio è dato da $r = \sqrt{\alpha^2/4+\beta^2/4-\gamma}$.

6.28 Scrivere le equazioni delle circonferenze di centro C e raggio r, con C ed r indicati

(a) $C\equiv(0,0)$; $r = 2$ (b) $C \equiv (1,2)$; $r = 3$

(c) $C\equiv(-3,3)$; $r = 4$ (d) $C \equiv (1,0)$; $r = 1/5$.

[(a) $x^2 + y^2-4=0$; (b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$;
(c) $x^2 + y^2+2x-6y-6=0$; (d) $x^2 +y^2-2x+24/25 = 0$]

6.29 Stabilire se le seguenti equazioni rappresentano o meno una circonferenza e, in caso affermativo, determinare le coordinate del centro C ed il raggio r

(a) $x^2+y^2-2x+2y+1=0$;   (b) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$

(c) $x^2+y^2+x+y+1 = 0$;   (d) $9x^2+9y^2-6y-26=0$.

[(a) $C \equiv (1,-1)$; $r=1$; (b) $C \equiv (2,-1)$; $r=2$; (c) no; (d) $C \equiv (0,1/3)$; $r = \sqrt{3}$]

6.30 Sia C la circonferenza di equazione $x^2+y^2=r^2$ e consideriamo la retta di equazione $y=mx+q$. Verificare che tale retta è tangente alla circonferenza C se e solo se l'equazione di secondo grado

$$(1+m^2)x^2+2mqx + q^2-r^2 = 0$$

ha due radici coincidenti.

[Basta imporre che il sistema nelle incognite x,y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

abbia una sola soluzione]

6.31 Verificare che la retta di equazione $y=2$ è tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$.

6.32 Scrivere l'equazione della circonferenza con centro in $(1,1)$ e tangente all'asse delle y.

[$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$]

6.33 Determinare l'equazione della tangente alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ nel suo punto $P \equiv (5,7)$.

[$3x + 4y - 43 = 0$]

6.34 Per quali valori del paramentro $k \in R$ l'equazione $x^2 + y^2 - 2x + ky + k = 0$ rappresenta una circonferenza?

[$k \neq 2$]

6.35 Determinare i punti di intersezione della circonferenza di equazione $x^2+y^2-3x-5y+8=0$ con la retta di equazione $y=2x$.

[(1,2) e (8/5, 16/5)]

6.36 Determinare i punti di intersezione della circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ con la retta di equazione $x-y-2=0$.

[(0,-2) e (1,-1)]

6.37 Determinare l'equazione della circonferenza di centro nell'origine degli assi e passante per il punto (3,4).

[$x^2 + y^2 = 25$]

6.38 Scrivere l'equazione di una generica circonferenza con centro sull'asse x.

[$x^2 + y^2 + \alpha x + \gamma = 0$ con $\gamma < \alpha^2/4$]

6.39 Scrivere l'equazione di una generica circonferenza con centro sull'asse y.

[$x^2 + y^2 + \beta y + \gamma = 0$, con $\gamma < \beta^2/4$]

6.40 Scrivere l'equazione di una generica circonferenza passante per l'origine degli assi.

$[\ x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0,\ \alpha^2+\beta^2 \neq 0\ ]$

6.41 Scrivere l'equazione della circonferenza avente il centro di coordinate (1,1) e passante per la origine degli assi.

$[x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0]$

6.42 Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti non allineati di coordinate (0,0), (1,0), (0,1).

$[\ x^2 + y^2 - x - y = 0\ ]$

6.43 Determinare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti non allineati di coordinate (4,7), (5,0), (-3,6).

$[x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0]$

6.44 Determinare, al variare del parametro k, le coordinate dei punti di intersezione della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ con la retta di equazione $y = kx$.

$[(0,0)$ e $(2(k+1)/(k^2 + 1),\ 2k(k+1)/(k^2 + 1))\ ]$

6E. Luoghi geometrici. Ellisse, iperbole, parabola

Si chiama *luogo geometrico* (piano) l'insieme dei punti del piano verificante una certa proprietà.

Oltre alle rette ed alle circonferenze, che costituiscono gli esempi più semplici di luoghi geometrici, è interessante studiare le ellissi, le iperbole e le parabole.

L'*ellisse* è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2, detti *fuochi*.

Considerando un sistema di assi cartesiani ortogonali, tali che F_1 e F_2 si trovino sull'asse delle x, con coordinate $(-c,0)$, $(c,0)$; detta a una costante positiva, l'ellisse costituita dai punti P tali che $\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$, con $a > c$, ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b = \sqrt{a^2-c^2}$ (fig. 6.6).

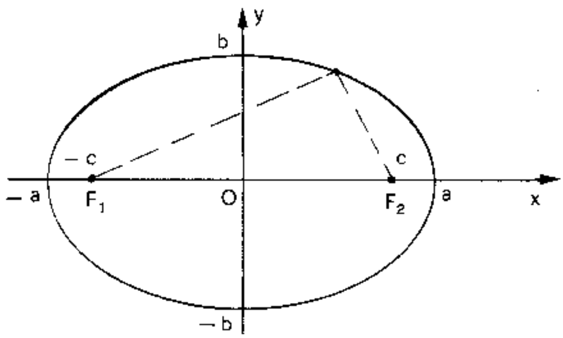


figura 6.6

I due numeri a e b si chiamano *semiassi* dell' ellisse; se risulta $a = b$, allora l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio a.

Il rapporto $e = c/a$ compreso fra 0 e 1 (0 per la circonferenza) si chiama *eccentricità* dell'ellisse e misura di quanto l'ellisse, per la sua forma più o meno allungata, differisce dalla circonferenza.

Ricordiamo, infine, che i quattro punti di intersezione dell'ellisse con gli assi coordinati si chiamano *vertici* dell'ellisse.

L' *iperbole* è il luogo dei punti del piano per cui é costante la differenza in valore assoluto delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2; detti *fuochi*.

Considerando un sistema di assi cartesiani ortogonali, tali che F_1 e F_2 si trovino sull'asse delle x con coordinate $(-c,0)$, $(c,0)$; detta a una costante positiva, l'iperbole costituita dai punti P tali che $|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = 2a$, con $a < c$, ha equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $b = \sqrt{c^2-a^2}$ (fig. 6.7).

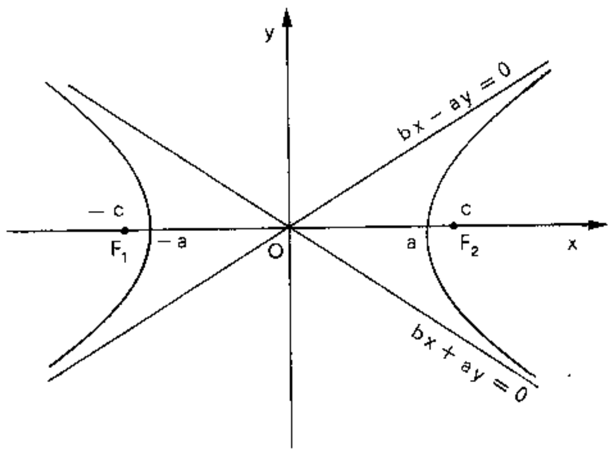


figura 6.7

I due numeri a e b si chiamano *semiassi* dell'iperbole; gli assi delle x e delle y *assi* dell'iperbole, le rette $bx - ay = 0$ e $bx + ay = 0$ *asintoti* dell'iperbole. Se risulta $a = b$ l'iperbole si dice *equilatera*.

Ricordiamo infine che i due punti di intersezione dell'iperbole con l'asse delle x si chiamano *vertici* dell'iperbole.

La *parabola* è il luogo dei punti del piano che sono equidistanti da un punto F (detto *fuoco*) e da una retta d (detta *direttrice*).

Considerando un sistema di assi cartesiani ortogonali tali che F si trovi sul semiasse positivo delle x con coordinate $(c/2,0)$ e la retta d sia parallela all'asse delle y con equazione $x=-c/2$, si vede facilmente che l'equazione della parabola è

$$y^2 = 2cx.$$

Il numero c si chiama *diametro* della parabola, lo asse delle x si chiama *asse* della parabola, il punto di intersezione della parabola col suo asse (in questo caso l'origine) si chiama *vertice* della parabola (fig. 6.8).

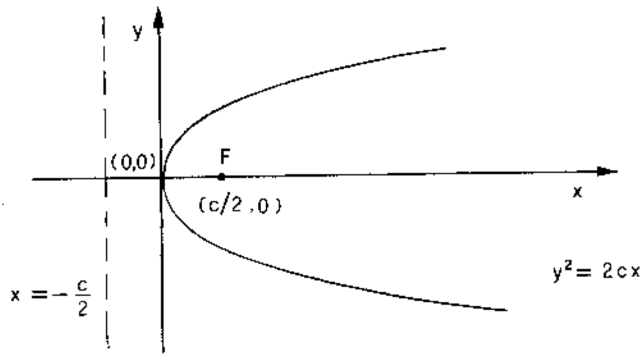
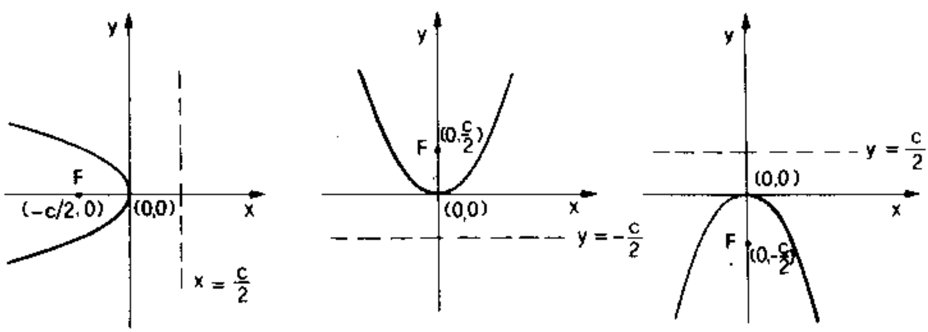


figura 6.8

Se il fuoco e la direttrice di una parabola sono orientati diversamente rispetto agli assi coordinati si ottengono equazioni diverse per la parabola stessa, pur continuando a supporre che il vertice coincida con l'origine degli assi e che il fuoco giaccia su uno degli assi.

Si hanno così altri tre tipi di equazioni, nelle quali il numero c rappresenta sempre la distanza tra il fuoco e la direttrice (fig. 6.9).



$y^2 = -2c\,x$ $\qquad$ $x^2 = 2c\,y$ $\qquad$ $x^2 = -2c\,y$

figura 6.9

L'ellisse, l'iperbole e la parabola hanno dunque in comune la proprietà di esser rappresentate da equazioni algebriche di secondo grado.

Le loro equazioni sono casi particolari della più generale equazione di secondo grado in x e y

(*) $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = 0$.

E' perciò interessante studiare in generale le curve piane rappresentate da un'equazione di tale tipo. Tali curve si dicono *coniche* perchè si dimostra che si possono ottenere come sezioni di un piano con un cono circolare retto.

Per lo studio della conica di equazione (*) si devono esaminare i determinanti

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Si dimostra infatti che se è $A \neq 0$, la conica di equazione (*) è un'ellisse, un'iperbole o una parabola, a seconda che sia $A_{33} > 0$ e $A \cdot a_{11} \leq 0$, oppure $A_{33} < 0$, oppure $A_{33} = 0$. Ciò va inteso nel senso che è allora possibile determinare un sistema cartesiano rispetto al quale l'equazione della curva assuma, a seconda del segno di A_{33}, una delle forme canoniche precedentemente indicate.

6.45 Calcolare i semiassi e le coordinate dei fuochi delle seguenti ellissi

(a) $x^2/25 + y^2/4=1$ (b) $4x^2 + 9y^2 = 27$

(c) $4x^2 + 6y^2 = 36$ (d) $x^2/9 + y^2/5 = 1$.

[(a) $5,2$, $(\pm\sqrt{21},0)$; (b) $3\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$, $(\pm\sqrt{15}/2,0)$;

(c) $6,2\sqrt{6}$, $(\pm\sqrt{3},0)$; (d) 3, $\sqrt{5}$, $(\pm 2,0)$]

6.46 Scrivere l'equazione dell'ellisse passante per i punti $P\equiv(2,2\sqrt{5}/5)$ e $Q\equiv(-1,4\sqrt{5}/5)$ e con i fuochi sull'asse x.

[$x^2/5 + y^2/4 = 1$]

6.47 Scrivere l'equazione dell'ellisse i cui fuochi hanno coordinate $(\pm\sqrt{2},0)$ e il cui semiasse maggiore è 3.

[$x^2/9 + y^2/7 = 1$]

6.48 Determinare l'equazione dell'ellisse il cui semiasse minore è $b = \sqrt{6}$, la cui eccentricità è $e = 1/\sqrt{7}$ e avente i fuochi sull'asse x.

[$x^2/7 + y^2/6 = 1$]

6.49 Determinare l'equazione dell'ellisse che ha due vertici coincidenti con i punti $(\pm 3,0)$ e fuochi nei punti $(\pm 2,0)$.

[$x^2/9 + y^2/5 = 1$]

6.50 Determinare l'equazione dell'ellisse che ha due vertici nei punti $(\pm n,0)$ e fuochi nei punti $(\pm(n-1),0)$ con n intero positivo.

[$x^2/n^2 + y^2/(2n-1) = 1$]

6.51 Scrivere l'equazione dell'ellisse la cui eccentricità è uguale a 1/2 e i cui fuochi sono i punti $(\pm 2,0)$.

[$x^2/16 + y^2/12 = 1$]

6.52 Dimostrare che per ogni $m\in R$ esistono due tangenti all'ellisse di equazione $x^2/a^2 + y^2/b^2=1$ aventi coefficiente angolare uguale a m. Determinare le equazioni delle tangenti.

[I punti di intersezione dell'ellisse con la retta $y = mx + q$ si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Eliminando la y tra le due equazioni, otteniamo l'equazione di secondo grado in x

$$(b^2+a^2m^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2(q^2-b^2) = 0.$$

Imponendo che tale equazione abbia due soluzioni coincidenti, ossia che il suo discriminante sia nullo, otteniamo la condizione $a^2m^2 + b^2 - q^2 = 0$, da cui si ricava $q = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$. Dunque le rette $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ sono le due tangenti all'ellisse aventi coefficiente angolare uguale a m]

6.53 Scrivere le equazioni delle rette, di coefficiente angolare m = 4, tangenti all'ellisse $x^2/4 + y^2/3 = 1$.

[$y = 4x \pm \sqrt{67}$]

6.54 Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha i vertici in($\pm 3,0$) e distanza focale (cioè distanza tra i fuochi) uguale a 8.

[$x^2/9-y^2/7 = 1$]

6.55 Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici ($\pm 3,0$) e fuochi ($\pm\sqrt{13},0$).

[$x^2/9 - y^2/4 = 1$]

6.56 Scrivere l'equazione dell'iperbole di vertici ($\pm 4,0$) e passante per il punto di coordinate (8,2).

[$x^2/16 - 3y^2/4 = 1$]

6.57 Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha per asintoti le rette $y = \pm(1/3)x$ e passa per il punto (3,0).

[$x^2 - 9y^2 = 9$]

6.58 Scrivere l'equazione dell'iperbole passante per $(5,3/2)$, con l'asintoto di equazione $y=x/2$ e fuochi sull'asse x.

[$x^2/16 - y^2/4 = 1$]

6.59 Data l'iperbole di equazione $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, verificare che, per ogni numero reale m tale che $|m| > b/a$, esistono due tangenti all'iperbole aventi coefficiente angolare uguale a m. Determinare le equazioni delle tangenti.

[Si procede in modo analogo a come nel caso dell'esercizio 6.52. Si trova $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$]

6.60 Scrivere le equazioni delle rette, di coefficiente angolare $m = 1$, tangenti all'iperbole di equazione $x^2/9 - y^2/4 = 1$.

[$y = x \pm \sqrt{5}$]

6.61 Sia data l'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = a^2$. Supponendo di far ruotare di 45° il sistema di assi, quale sarà la nuova equazione dell'iperbole riferita al nuovo sistema di assi $0x'y'$?

[Applicando le formule di cambiamento di coordinate per rotazione di un angolo $\vartheta = 45°$ (ved par. 6A) si ha

$$\begin{cases} x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = \sqrt{2}\,(x'-y')/2 \\ y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = \sqrt{2}\,(x'+y')/2 \end{cases}$$

da cui, con facili passaggi, si perviene all'equazione $x'y' = -a^2/2$]

6.62 Scrivere l'equazione della parabola il cui fuoco è in $(2,0)$ e la cui direttrice ha equazione $x=-2$

[$y^2 = 8x$]

6.63 Determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice della parabola $y^2=12x$.

[(3,0); $x = -3$]

6.64 Scrivere l'equazione della parabola il cui fuoco è in (1/3,0) e la cui direttrice ha equazione $x =- 1/3$.

[$y^2 = (4/3)x$]

6.65 Verificare che la retta di equazione $y=x+1$ è tangente alla parabola di equazione $y^2 = 4x$.

6.66 Verificare che la retta di equazione $y=mx+p/2m$ è tangente alla parabola di equazione $y^2=2px$.

6.67 Determinare l'equazione della tangente alla parabola $y^2=3x$ nel punto $P \equiv (3,3)$.

[La retta per P di equazione $y-3=m(x-3)$ è tangente alla parabola se e solo se l'equazione $my^2 - 3y + 9(1-m)=0$ nell'incognita y ha due radici coincidenti, ossia se il suo discriminante è nullo. Si ottiene così la condizione $(2m-1)^2=0$, cioè $m=1/2$. Dunque la tangente cercata ha equazione $y-3 = (1/2)(x-3)$]

6.68 Scrivere l'equazione della parabola con vertice nell'origine e fuoco in (-3,0).

[$y^2 =- 12x$]

6.69 Scrivere l'equazione della parabola con fuoco in (0,1/4) e direttrice $y =- 1/4$.

[$x^2 = y$]

6.70 Determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice della parabola $y=-x^2/12$.

[(0,-3); $y=3$]

6.71 Verificare che la conica di equazione

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a > 0)$$

è una parabola, facendo vedere che, assumendo due nuovi assi x', y' ottenuti da x, y con una rotazione di angolo $\vartheta = \pi/2$ e con l'origine nel punto $O' = (-b/2a,\ c-b^2/4a)$, la conica ha equazione $y'^2 = (1/a)x'$.

[Le formule di cambiamento di coordinate (ved il par. 6A, 3° caso) si scrivono:

$$\begin{cases} x = -\,b/2a - y' \\ y = c - b^2/4a + x' \end{cases}$$

sostituendo tali valori nell'equazione $y=ax^2+bx+c$ si ottiene l'equazione della conica rispetto ai nuovi assi: $y'^2 = (1/a)x'$. Ciò conferma quanto affermato nel presente paragrafo perchè la nostra conica può esser scritta sotto la forma (*) con $A=a/4 \neq 0$ e $A_{33}=0$]

6.72 Verificare che anche nel caso $a < 0$ la conica di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è una parabola.

[Come nell'esercizio precedente, in cui però si scelga $\vartheta = -\pi/4$]

6.73 Verificare che la conica di equazione

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - 2x/a = 0$$

è un'ellisse.

[Si ha $A = -1/a^2b^2$, $A_{33} = 1/a^2b^2$, $a_{11} = 1/a^2$ e in particolare A e a_{11} hanno segni opposti. Per disegnare l'ellisse basta eseguire la traslazione $x = a + x'$, $y = y'$ e osservare che è $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$]

Capitolo 7

LIMITI DI SUCCESSIONI

7A. Uso della definizione

Ricordiamo la definizione di limite (finito o infinito) di una successione. Cominciamo con il caso del limite finito.

Diremo che una successione a_n *tende ad un numero reale* a (a_n *converge ad* a), e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \ , \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to a,$$

se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $|a_n - a| < \varepsilon$, *per ogni* $n > \nu$.

Diremo che una successione a_n *tende a* $+\infty$ (a_n *diverge a* $+\infty$), e scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad \text{oppure} \qquad a_n \to +\infty,$$

se, per ogni numero reale $M > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n > M$, *per ogni* $n > \nu$.

Diremo che una successione a_n *tende a* $-\infty$ (a_n *diverge a* $-\infty$), e scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty, \qquad \text{oppure} \quad a_n \to -\infty,$$

se, per ogni numero reale $M > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n < -M$, *per ogni* $n > \nu$.

Gli esercizi proposti in questo paragrafo hanno lo scopo di far familiarizzare il lettore con la definizione di limite di una successione.

7.1 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} \quad .$$

[Discutiamo la disuguaglianza

$$\left| a_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \text{ , cioè } \left| \frac{n}{2n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \ .$$

Semplifichiamo il primo membro :

$$\left| \frac{2n - (2n+5)}{2(2n+5)} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n+5)} \right| = \frac{5}{4n+10} \quad .$$

Perciò la disuguaglianza iniziale equivale a $5/(4n+10) < \varepsilon$. Interpretiamo tale disuguaglianza come una disequazione nell'incognita n, che è facilmente ricavabile:

$$4n + 10 > \frac{5}{\varepsilon} \ , \quad 4n > \frac{5}{\varepsilon} - 10, \quad n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{5}{2} \ .$$

Ponendo $\nu = 5/(4\varepsilon) - 5/2$ abbiamo verificato ciò che volevamo,e cioè che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste ν per cui $|a_n - 1/2| < \varepsilon$, per ogni $n > \nu$]

E' noto che, se il limite di una successione esiste, esso è unico. Perciò è chiaro che la successione considerata nell'esercizio precedente non può convergere ad un numero reale diverso da 1/2; per esempio, non può convergere ad 1. Verifichiamo ciò direttamente con la definizione.

7.2 Utilizzando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+5} \neq 1 .$$

[Occorre discutere la disequazione $\left| n/(2n+5)-1 \right| < \varepsilon$.

Semplifichiamo:

$$\left| \frac{n}{2n+5} - 1 \right| = \left| \frac{-n-5}{2n+5} \right| = \frac{n+5}{2n+5} < \varepsilon .$$

Ricaviamo n:

$$n + 5 < 2\varepsilon n + 5\varepsilon , \qquad (1-2\varepsilon)n < 5(\varepsilon - 1) .$$

Se ε è abbastanza grande, ad esempio se $\varepsilon > 1$, la disequazione è verificata da ogni $n \in \mathbb{N}$, perchè il primo membro $(1-2\varepsilon)\, n$ è negativo, mentre il secondo membro $5(\varepsilon -1)$ è positivo. Però, se scegliamo ε più piccolo, ad esempio $\varepsilon = 1/4$, si trova la disequazione

$$(1-1/2)n < 5(-3/4), \text{ cioè } n/2 < -15/4,$$

che non è verificata da nessun intero positivo.
Ricordando che la definizione di limite richiede la verifica di disuguaglianze utilizzando un parametro $\varepsilon > 0$ *arbitrario*, possiamo concludere che il limite dato non vale 1]

7.3 Utilizzando la definizione di limite verificare che

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+4}{n} = 1$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-4}{3n+1} = \frac{1}{3}$

[(a) $\nu = 4/\varepsilon$; (b) $\nu = (13/\varepsilon-3)/9$]

7.4 Verificare che la seguente successione converge a zero:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} .$$

[Risulta $|a_n-0| = |(-1)^n/n| = 1/n$. Ponendo $\nu = 1/\varepsilon$, si trova che $|a_n-0| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$]

7.5 Utilizzando la definizione di limite verificare che

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{3n}{n^2-10}} = 0$

[(a) Per $n > \nu = 1/\varepsilon^2 - 1$ risulta $1/\sqrt{n+1} < \varepsilon$;
(b) Semplifichiamo la relazione:

$$\left|\sqrt{\frac{3n}{n^2-10}}\right| < \varepsilon \iff \frac{3n}{n^2-10} < \varepsilon^2 .$$

Per $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$, risulta $n^2 - 10 > 0$. Possiamo quindi moltiplicare per tale valore entrambi i membri dell'ultima disuguaglianza, ottenendo $3n < \varepsilon^2(n^2-10)$, cioè $\varepsilon^2 n^2 - 3n - 10\varepsilon^2 > 0$.
Si tratta di una disequazione di secondo grado in n, che è verificata se n è esterno all'intervallo di estremi $(3 \pm \sqrt{9+40\varepsilon^4})/2\varepsilon^2$. Quindi se

$$n > \nu = \max\{3; (3+\sqrt{9+40\varepsilon^4})/2\varepsilon^2\},$$

allora vale la disuguaglianza di limite da cui siamo partiti]

7.6 Mediante la definizione verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2 .$$

[Fissato $\varepsilon > 0$, occorre risolvere la disequazione nell'incognita n:

$$\left|\sqrt{4+1/n} - 2\right| < \varepsilon .$$

Dato che $4+1/n > 4$, risulta anche $\sqrt{4+1/n} > \sqrt{4} = 2$. Perciò l'argomento del valore assoluto è positivo e basta risolvere

(*) $\sqrt{4+1/n} - 2 < \varepsilon$.

Portando il 2 a secondo membro ed elevando al quadrato si trova
$\nu = [(2+\varepsilon)^2 - 4]^{-1} = 1/(4\varepsilon+\varepsilon^2)$.

Proponiamo un altro metodo: si possono moltiplicare entrambi i membri della (*) per la quantità $\sqrt{4+1/n}+2$, che è positiva ed anzi $\sqrt{4+1/n}+2>\sqrt{4}+2=4$. La disuguaglianza che si ottiene

$$(4+1/n)-4<\varepsilon\,(\sqrt{4+1/n}+2),$$

segue quindi dalla disuguaglianza seguente, che è più semplice da risolvere:

$$(4+1/n)-4<4\varepsilon\ .$$

Semplificando a primo membro si ottiene $n>\nu=1/(4\varepsilon)$.
Naturalmente la stima trovata con il secondo metodo ($n>1/(4\varepsilon)$) è peggiore della stima precedente]

7.7 Utilizzando la definizione di limite verificare che

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2-1)=+\infty.$$

[La relazione $n^2-1>M$ equivale a $n^2>M+1$. Essendo $n>0$, ciò equivale ancora a $n>\sqrt{M+1}$. Perciò, se $n>\nu=\sqrt{M+1}$, risulta $n^2-1>M$]

7.8 Mediante la definizione verificare che le seguenti successioni divergono a $+\infty$.

(a) $a_n=n^2-2n-3$ (b) $a_n=n^2-6n+1$

[(a) Per $n>\nu=1+\sqrt{4+M}$ risulta $n^2-2n-3>M$;
(b) $\nu=3+\sqrt{8+M}$]

7.9 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

(a) $\dfrac{n^2+2n}{n+1}\to+\infty$ (b) $\dfrac{n^2-8n+4}{n-4}\to+\infty$

[(a) $\nu=(M-2+\sqrt{4+M^2})/2$;
(b) $\nu=\max\{4;\ (8+M+\sqrt{48+M^2})/2\}$]

7.10 Mediante la definizione verificare che

$$\lim_{n\to+\infty} (5-n^2) = -\infty .$$

[La relazione $5-n^2 < -M$ equivale a $n^2 > M+5$. Perciò , per $n > \nu = \sqrt{M+5}$ risulta $5-n^2 < -M$]

7.11 Utilizzando la definizione di limite verificare che le seguenti successioni divergono a $-\infty$.

(a) $a_n = 1-4n-n^2$ (b) $a_n = 4n - n^2-4$

[(a) Se $n > \nu = -2 + \sqrt{5+M}$ risulta $a_n < -M$;

(b) Per $n > \nu = 2 + \sqrt{M}$ risulta $-(n-2)^2 = a_n < -M$]

7B. Operazioni sui limiti. Forme indeterminate

Siano a_n, b_n due successioni convergenti e $a,b\in R$ i rispettivi limiti.

Valgono le seguenti proprietà, dette *operazioni sui limiti:*

$$a_n + b_n \to a + b ; \qquad a_n - b_n \to a-b;$$

$$a_n \cdot b_n \to a\cdot b ; \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} , \text{ se } b \neq 0.$$

Valgono inoltre analoghe proprietà per successioni divergenti nei casi specificati di seguito . Indichiamo con a un numero reale.

$a_n \to a$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to a>0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a<0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to a$	$b_n \to \pm\infty$	$\Longrightarrow$	$a_n / b_n \to 0$
$a_n \to a>0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$b_n / a_n \to +\infty$
$a_n \to a<0$	$b_n \to +\infty$	$\Longrightarrow$	$b_n / a_n \to -\infty$
$a_n \to a\neq 0$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n / b_n \rvert \to +\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to 0$	$\Longrightarrow$	$\lvert a_n / b_n \rvert \to +\infty$

Non rientrano nella tabella sopra proposta le seguenti situazioni, che vengono dette *forme indeterminate:*

$$\infty - \infty: \begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \to +\infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n - b_n \to ?$$

$$0\cdot\infty:\ \begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_n\cdot b_n \to\ ?$$

$$\frac{\infty}{\infty}:\ \begin{cases} a_n \to \pm\infty \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to\ ?$$

$$\frac{0}{0}:\ \begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to\ ?$$

Altre *forme indeterminate,* legate alla elevazione ad esponente reale, sono espresse da:

$$1^{\infty}:\ \begin{cases} a_n \to 1 \\ b_n \to \pm\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_n^{\,b_n} \to\ ?$$

$$\infty^{\circ}:\ \begin{cases} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_n^{\,b_n} \to\ ?$$

$$0^{\circ}:\ \begin{cases} a_n \to 0^{+} \\ b_n \to 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad a_n^{\,b_n} \to\ ?$$

Affermare che un dato limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa che esso non è immediatamente calcolabile con una delle regole della tabella precedentemente proposta. Vuol dire inoltre che è necessario semplificare o, comunque, trasformare l'espressione data in modo da togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Si vedano gli esempi seguenti.

7.12 Calcolare il limite: $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+3}$.

[Il limite si presenta sotto la forma indeterminata ∞/∞. Dividendo numeratore e denominatore per n si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3-1/n}{1+3/n} = \frac{3-\lim_{n\to+\infty} 1/n}{1+\lim_{n\to+\infty} 3/n} = 3.$$

Sono state utilizzate le proprietà che il limite del quoziente, della differenza, della somma è uguale rispettivamente al quoziente,alla differenza, alla somma dei limiti]

7.13 Calcolare i limiti per $n\to+\infty$ delle successioni

(a) $\frac{n+1}{n^2+1}$ (b) $\frac{n^4+5}{n^5+7n-1}$

(c) $\frac{n^3+1}{2n-1}$ (d) $\frac{1-n^2}{(n+2)^2}$

[Si divida sia il numeratore che il denominatore per n, oppure per n^2, oppure...
(a) 0; (b) 0; (c) $+\infty$; (d) -1]

7.14 Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$.

[Dividendo il numeratore ed il denominatore per $\sqrt{n}$, si verifica che la successione tende a $-\infty$]

7.15 Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

[1]

7.16 Calcolare $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})$.

[Si tratta di una forma indeterminata $+\infty-\infty$. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma delle radici:

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = \frac{(n+2)-(n-1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1}} \to 0 \;]$$

7.17 Calcolare $\lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})$.

$$[\; \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \frac{(n^2+1)-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1/n-1}{\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt{1/n}} \to +\infty \;]$$

7.18 Calcolare i limiti di successione

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - n$ (b) $\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\frac{1}{n+1}}$

[(a) $-\infty$; (b) $+\infty$]

7.19 Verificare che se una successione a_n è convergente, allora $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.

[Basta scrivere il limite della differenza come differenza di limiti]

7.20 L'enunciato dell'esercizio precedente non è invertibile. Verificare che, ad esempio, la successione $a_n = \log n$ ha la proprietà che $a_{n+1} - a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, ma a_n non è convergente.

[$a_{n+1} - a_n = \log(n+1) - \log n = \log(1+\frac{1}{n}) \to \log 1 = 0$]

7.21 Verificare che se una successione a_n converge ad un numero reale non nullo, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 .$$

[Basta calcolare il limite del rapporto come rapporto di limiti]

7.22 L'enunciato dell'esercizio precedente non è invertibile. Cioè, se il rapporto a_{n+1}/a_n converge

ad 1 per $n \to +\infty$, allora:
(a) non necessariamente a_n converge;
(b) se a_n converge, non necessariamente converge ad un numero reale non nullo.

Trovare degli esempi.

[(a) $a_n = n$, oppure $a_n = n^2$, oppure...
(b) $a_n = 1/n$, oppure...]

7C. Successioni e valore assoluto

7.23 Verificare che a_n converge a zero se e solo se $|a_n|$ converge a zero.

[Basta applicare la definizione di limite alla successione $b_n = |a_n|$: $b_n \to 0$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero ν per cui $|b_n| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. Dato che $|b_n| = |a_n|$, l'asserto è provato]

7.24 L'enunciato dell'esercizio precedente non vale se si sostituisce il valore zero con un valore differente da zero. Trovare un esempio .

[Ad esempio $a_n = (-1)^n$ non ha limite, mentre $b_n = |a_n|$ è la successione costante, uguale ad 1, che quindi converge ad 1]

7.25 Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|+|b_n| = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 0, \ \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

[Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν per cui

$$\big|\,|a_n|+|b_n|\,\big| = |a_n|+|b_n| < \varepsilon , \quad \forall n > \nu.$$

Dato che $|a_n| \le |a_n|+|b_n|$, risulta anche $|a_n| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$. Percio a_n converge a zero. Analogamente per b_n]

7.26 L'enunciato dell'esercizio precedente non vale se, nell'ipotesi, si abolisce il valore assoluto. Esibire un esempio.

[basta porre $b_n = -a_n$, con a_n comunque scelta. In tal caso evidentemente $a_n+b_n \to 0$]

7.27 Siano a_n, b_n due successioni tali che $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, per ogni n. Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n)=0 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n=0, \quad \lim_{n\to+\infty} b_n=0$$

[Come nell'esercizio 7.25; anzi, si tratta di un caso particolare,perchè nelle ipotesi attuali risulta $|a_n| = a_n$, $|b_n| = b_n$]

7.28 Dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n|+|b_n|=0 \implies \lim_{n\to+\infty} |a_n b_n| = 0 .$$

Dimostrare inoltre, con un esempio, che non vale l'implicazione opposta; cioè che, se il prodotto converge a zero, la somma non necessariamente converge a zero.

[Segue dagli esercizi 7.25 e 7.23. Circa il controesempio, basta considerare la successione b_n costante uguale a zero ed a_n comunque scelta]

7.29 Dimostrare che, se a_n converge ad a, allora $b_n = |a_n|$ converge a $|a|$ (notare che questo enunciato non contrasta con quanto affermato nell'esercizio 7.24: se $|a_n| \to |a| \neq 0$, non è detto che $a_n \to a$).

[Si utilizzi la definizione di limite e la disuguaglianza

$$\big|\, |x|-|y| \,\big| \leq |x-y|, \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

Questo esercizio è riproposto, con il linguaggio delle funzioni continue, nel capitolo 9(si vedano gli esercizi 9.6 e 9.7)]

7.30 Verificare che a_n è convergente se e solo se sono convergenti le due successioni b_n, c_n definite da:

$$b_n = a_n + |a_n| \ , \qquad c_n = a_n - |a_n| .$$

[Se $a_n \to a$ allora (esercizio precedente) $|a_n| \to |a|$. Perciò b_n, c_n convergono rispettivamente ai valori $a \pm |a|$. Viceversa, per somma si ha

$$b_n + c_n = 2a_n, \quad \text{cioè} \quad a_n = (b_n + c_n)/2 .$$

Perciò, se b_n e c_n convergono, anche a_n converge]

7.31 Verificare con un esempio che la convergenza della successione $b_n = a_n + |a_n|$ non implica la convergenza della successione a_n.

[Ad esempio $a_n = -1+(-1)^n$ è una successione che non ammette limite per $n \to +\infty$, mentre $b_n = 0$ per ogni n. Più in generale, basta scegliere per a_n una qualsiasi successione non convergente, con $a_n \le 0$ per ogni n]

7D. Elenco dei principali limiti notevoli

Riportiamo un elenco di *limiti notevoli* che sono alla base del calcolo di altri limiti di successione.

Cominciamo con i limiti dell'*esponenziale* a^n e della *potenza* n^b

$$(1) \quad \lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 1 & \text{se} \quad a = 1 \\ 0 & \text{se} \quad -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se} \quad a \le -1 \end{cases} ;$$

$$(2)\quad \lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 1 & \text{se} \quad b = 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0 \end{cases} .$$

Altri limiti notevoli di tipo esponenziale (cioè dove l'esponente dipende dalla variabile n) sono i seguenti:

$$(3)\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 , \qquad \forall a > 0 .$$

$$(4)\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = \lim_{n\to+\infty} n^{b/n} = 1, \qquad \forall b \in R .$$

La successione esponenziale a^n, con $a > 1$, e la successione potenza n^b, con $b > 0$, divergono a$+\infty$. Spesso tali successioni vengono confrontate con log n e con n! (n *fattoriale,* definito da $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$) che pure divergono a $+\infty$. Consideriamole nell'ordine:

$$\log n; \quad n^b; \quad a^n; \quad n! .$$

Nel modo indicato sono *infiniti di ordine crescente,* nel senso che valgono i seguenti limiti notevoli

$$(5)\quad \lim_{n\to+\infty} (\log n)/n^b = 0 \qquad (b > 0);$$

$$(6)\quad \lim_{n\to+\infty} n^b/a^n = 0 \qquad (a>1, b>0);$$

$$(7)\quad \lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0 \qquad (a > 1) .$$

Molto importante è il limite alla base della definizione del *numero di Nepero* e:

$$(8)\quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e ;$$

più generalmente, per ogni numero reale x:

(9) $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$;

(10) $a_n \to \pm\infty \implies (1+\frac{x}{a_n})^{a_n} \to e^x$.

Il seguente limite è fondamentale per trattare successioni trigonometriche

(11) $a_n \to 0 \ (a_n \neq 0, \forall n) \implies \frac{\text{sen } a_n}{a_n} \to 1$.

Infine ricordiamo le proprietà seguenti, che discendono dai teoremi sulle medie aritmetiche e geometriche di una successione:

(12) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n)$,

(13) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

purchè, in entrambi i casi, *esista il limite a secondo membro*. Inoltre in (13) si assume che $a_n > 0$ per ogni n.

7E. **Uso dei limiti notevoli**

Proponiamo una serie di esercizi che si risolvono con i limiti notevoli elencati nel paragrafo precedente. Di seguito facciamo riferimento ai numeri (1), (2),...,(13) di tale paragrafo.

7.32 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} e^n$ (b) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^n$

[Si utilizzi il limite notevole (1) del paragrafo 7D.
(a) $+\infty$, dato che la base e è maggiore di 1;
(b) 0]

7.33 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} (e^n - 2^n)$ (b) $\lim_{n\to+\infty} (3^n + 4^n - 5^n)$

[(a) $e^n - 2^n = e^n\,[1-(2/e)^n] \to +\infty$; (b) $-\infty$]

7.34 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}-4^{n-1}}{3^n}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+1}{3^n+1}$

[(a) $\frac{2^{n+1}-4^{n-1}}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to -\infty$; (b) 0]

7.35 Calcolare i limiti di successione

(a) $\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{2}}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} n^{-e}$

[I risultati seguono direttamente dal limite notevole (2): (a) $+\infty$;
(b) 0]

7.36 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$

[Dal limite notevole (3) si ottiene, in entrambi i casi, il valore limite 1]

7.37 Calcolare i limiti di successione

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}$

[Si utilizzi il limite notevole (4): (a) 1; (b) $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n} \to 1$]

7.38 Calcolare $\lim_{n\to+\infty} (n-\log n)$.

[$n - \log n = n\,[1-(\log n)/n]$ diverge a $+\infty$, utilizzando il limite notevole (5) con $b=1$]

7.39 Calcolare $\lim_{n\to+\infty} (2^n - n^2)$.

[Utilizzando il limite (6) si ottiene:

$$2^n - n^2 = 2^n (1-n^2/2^n) \to +\infty$$]

7.40 Calcolare $\lim_{n\to+\infty} (2^n - n!)$.

[Il limite vale $-\infty$. Infatti, in base alla (7): $2^n - n! = n!\,(2^n/n! - 1) \to -\infty$]

7.41 Calcolare, per $n \to +\infty$, i limiti delle successioni

(a) $\dfrac{\sqrt{n}}{\log n}$ (b) $\dfrac{3^n}{n^3}$ (c) $\dfrac{n}{e^n}$ (d) $\dfrac{n^5}{n!}$

[(a) Il limite vale $+\infty$, per la (5) con $b = 1/2$; (b) $+\infty$; (c) 0; (d) Per le (6), (7), il limite vale 0]

7.42 Calcolare, per $n\to+\infty$, i limiti delle successioni

(a) $\dfrac{2^n - 4^n}{3^n - n!}$ (b) $\dfrac{(n\,3^{n+1} + n^5 + 1)\cdot n!}{(3^n + 2^n)\cdot(n+1)!}$

[(a) Dividendo numeratore e denominatore per $n!$, si verifica che la successione converge a zero; (b) Si noti che $n!/(n+1)! = 1/(n+1)$. Dividendo numeratore e denominatore per 3^n, si verifica che la successione converge a 3]

7.43 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log^2 n}{n}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{1+\log^3 n}$

$\left[(a)\ \frac{\log^2 n}{n} = \left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2 \to 0\ ;\quad (b) +\infty\right]$

7.44 Calcolare i limiti

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - n^5}{4^n + n^6} \qquad (b)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+1)\log n}{n^3}$$

$[(3) +\infty;\ (b)\ 0]$

7.45 Calcolare i limiti, per $n\to+\infty$, delle successioni

$$(a)\ \frac{n! + 2^n}{(n+1)!} \qquad (b)\ \frac{n! - (n+1)!}{n^2 e^n}$$

$\left[(a)\ \frac{n!+2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{2^n}{n!}\right) \to 0\ ;\right.$

$\left.(b)\ \frac{n!-(n+1)!}{n^2 e^n} = \frac{-n!\, n}{n^2 e^n} = -\frac{1}{e}\ \frac{(n-1)!}{e^{n-1}} \to -\infty\right]$

7.46 Calcolare, per $n\to+\infty$, i limiti delle successioni

$$(a)\ 3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2-1}} \qquad (b)\ 2^{n-2} - 2^{\sqrt{n^2-1}}$$

$\left[(a)\ 3^{n+1} - 3^{\sqrt{n^2-1}} = 3^{n+1}\left\{1-3^{\sqrt{n^2-1}-(n+1)}\right\}\right.$.

Calcoliamo separatamente:

$$\sqrt{n^2-1} - (n+1) = \frac{(n^2-1)-(n+1)^2}{\sqrt{n^2-1}+(n+1)} = \frac{-2n-2}{\sqrt{n^2-1}+(n+1)} \to -1.$$

Perciò la quantità in parentesi graffa converge a $1-3^{-1} = 1-1/3=2/3$. Ne segue che la successione data diverge a $+\infty$; (b) $-\infty]$

7.47 Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$.

[Si utilizza il limite notevole (8):

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \to e^2\ ]$$

7.48 Calcolare limiti

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

[Si può utilizzare il limite notevole (9), prima con $x = 1/2$, poi con $x = -1$. (a) $\sqrt{e}$; (b) $1/e$]

7.49 Calcolare i limiti di successione

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}$$

[Si utilizzi il limite notevole (10). (a) e^2; (b) $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1} =$

$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to e \text{]}$$

7.50 Calcolare, per $n\to+\infty$, i limiti delle successioni

$$\text{(a)} \quad \left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n \qquad\qquad \text{(b)} \quad \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$$

[(a) Allo scopo di applicare il limite notevole (10), ricerchiamo x_n per cui:

$$\frac{n^2+n}{n^2-n+2} = 1 + \frac{1}{x_n} .$$

Risulta evidentemente

$$\frac{1}{x_n} = \frac{n^2+n}{n^2-n+2} - 1 = \frac{2n-2}{n^2-n+2} .$$

Invertendo la frazione si vede che $x_n \to +\infty$. Inoltre

$$\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+2}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right]^{n/x_n} .$$

La successione in parentesi quadra converge al numero e, in base al limite notevole (10). Inoltre il rapporto n/x_n converge a 2, per $n\to+\infty$. Perciò la successione data converge a e^2;

(b) con lo stesso metodo proposto nel caso precedente si trova il valore limite 1/e]

7.51 Calcolare, per $n\to+\infty$, i limiti delle successioni

(a) $\left(\frac{n^2+n}{n^2-n+1}\right)^{n^2}$ (b) $\left(\frac{n^2-n}{n^2-n+3}\right)^{n}$

[(a) $+\infty$; (b) 1]

7.52 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}\frac{3}{n}$

(c) $\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\operatorname{sen}(3/n)}$

[Si utilizzi il limite notevole (11), con $a_n = 1/n$, oppure con $a_n=3/n$.
(a) 1; (b) 3; (c) 1; (d) 1/3]

7.53 Calcolare, per $n\to+\infty$, i limiti delle successioni

(a) $n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ (b) $n^2\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$

[(a) $n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = n^2 \; \frac{1-\cos^2(1/n)}{1+\cos(1/n)} = \frac{n^2 \operatorname{sen}^2(1/n)}{1+\cos(1/n)}$.

Dal limite notevole (11) otteniamo $n^2 \operatorname{sen}^2(1/n) \to 1$. Dato che $\cos(1/n) \to 1$ per $n\to+\infty$, la successione data converge a 1/2; (b) osservando che $n^2 \operatorname{sen}^2(2/n) \to 4$, la successione data converge a 2]

7.54 Calcolare, per $n\to+\infty$, i limiti delle successioni

(a) $\frac{\operatorname{tg}^2(1/n)}{1-\cos(1/n)}$ (b) $\frac{1-\cos(3/n)}{\operatorname{sen}(3/n^2)}$

[(a) 2; (b) 3/2]

7.55 Utilizzando la successione $a_n = (-1)^n$, verificare che la formula (12) del paragrafo precedente non vale se non esiste il limite a secondo membro.

[$a_{n+1} - a_n = 2(-1)^{n+1}$ non ha limite, mentre a_n/n converge a zero]

7.56 Con l'aiuto della proprietà (13) del paragrafo precedente, calcolare i limiti

(a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n(n-1)}$ (b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+1}$

[(a) Posto $a_n = n(n-1)$, risulta $a_{n+1}/a_n \to 1$. Per la proprietà (13), la successione data converge ad 1; (b) 2]

7.57 Calcolare il limite della successione $\sqrt[n]{n!}$.

[$+\infty$]

7.58 Calcolare il limite della successione $\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

[Possiamo scrivere la successione data nel modo seguente $\sqrt[n]{a_n}$, con $a_n = n^n/n!$. Applichiamo il criterio (13) del paragrafo precedente; otteniamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Perciò la successione data converge ad e]

7.59 Allo scopo di mostrare che la formula (13) del paragrafo precedente non vale nel caso in cui non esiste il limite a secondo membro, si consideri l'esempio seguente: Siano A,B due numeri positivi distinti e sia a_n la successione tale che $a_n = A$, se n è pari, $a_n = B$ se n è dispari.

Verificare che

$$\sqrt[n]{a_n} \to 1, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ non ammette limite.}$$

7.60 Scegliendo opportunamente la successione a_n, verificare che le formule (3), (4) del paragrafo precedente discendono dalla (13).

[In particolare, per la (4), ponendo $a_n = n^b$, risulta $a_{n+1}/a_n = (1+1/n)^b \to$ $\to 1$]

7.61 Dimostrare che, se a_n è una successione convergente ad un numero positivo, allora $\sqrt[n]{a_n}$ converge ad 1.

[Utilizzare la formula (13)]

7.62 Se A,B sono due numeri reali positivi, verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{A^n + B^n} = \max \{A;B\} .$$

[Utilizzare il limite notevole (13)]

7F. Uso dei teoremi di confronto

Riportiamo di seguito alcuni *teoremi di confronto per successioni* che risultano particolarmente utili nel calcolo di limiti.

(I) *Se esiste un numero* ν *per cui* $a_n \leq b_n$ *per ogni* $n > \nu$, *e se* a_n *diverge a* $+\infty$, *allora anche* b_n *diverge a* $+\infty$.

(II) *Se esiste un numero* ν *per cui* $a_n \leq b_n$ *per ogni* $n > \nu$, *e se* b_n *diverge a* $-\infty$, *allora anche* a_n *diverge a* $-\infty$.

(III) *Se esiste* ν *per cui* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *per ogni* $n>\nu$ *e se le due successioni* a_n, b_n *convergono ad uno stesso limite* a, *allora anche la successione* c_n *converge al valore* a.

Come mostrato nell'esercizio che segue, da (III) si deduce il seguente teorema di confronto.

(IV) *Se* a_n *converge a zero e se* b_n *è limitata, allora il prodotto* $a_n b_n$ *converge a zero* (ricordiamo che una successione b_n si dice *limitata* se esiste una costante M per cui $|b_n| \leq M$ per ogni $n \in N$).

7.63 Dimostrare l'enunciato (IV).

[Per ipotesi esiste un numero M per cui $|b_n| \leq M$ per ogni n. Quindi $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M |a_n|$, cioè (si ricordi la proprietà del valore assoluto dell'esercizio 3.28):

$$-M |a_n| \leq a_n b_n \leq M |a_n|, \qquad \forall n \in N.$$

Se $a_n \to 0$, anche $|a_n| \to 0$ (si veda l'esercizio 7.23). Per il teorema (III) la successione $a_n b_n$ converge a zero]

Proponiamo alcuni esercizi che si risolvono utilizzando i teoremi di confronto (I),(II),(III),(IV).

7.64 Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} (n - \text{sen } n)$.

[Dato che $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ per ogni $x \in R$, in particolare $\text{sen } n \leq 1$, cioè $-1 \leq -\text{sen } n$, per ogni $n \in N$. Perciò $n-1 \leq n - \text{sen } n$. In base al teorema (I) di confronto, il limite vale $+\infty$]

7.65 Calcolare, per $n\to+\infty$, il limite delle successioni

(a) $[\cos(n+1)]^2-(n+1)^2$ (b) $n[2-\mathrm{sen}(n^2+1)]$

[(a) $[\cos(n+1)]^2-(n+1)^2 \le 1-(n+1)^2 \to -\infty$; (b) $n[2-\mathrm{sen}(n^2+1)] \ge$ $\ge n\ [2-1] = n \to +\infty$]

7.66 Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{3+\mathrm{sen}\ n}{n}$

[Risulta $2/n \le (3+\mathrm{sen}\ n)/n \le 4/n$. In base al teorema (III) di confronto, il limite dato vale zero]

7.67 Calcolare i limiti, per $n \to +\infty$, delle successioni

(a) $\frac{2+\cos n}{\mathrm{sen}^2(1/n)}$ (b) $\frac{2n+\mathrm{sen}\ n \log n}{n}$

[(a) $+\infty$; (b) 2]

7.68 Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} \cos n[\log(\sqrt{n}-1)-\log\sqrt{n-1}]$.

[$b_n = \cos n$ è una successione limitata, mentre

$$a_n = \log(\sqrt{n}-1) - \log\sqrt{n-1} = \log \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$$

converge a zero. In base al teorema (IV) il limite dato vale zero]

7.69 Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} [\log n - \frac{1}{2}\log(n^2+1)]\mathrm{sen}\ n$.

[0]

7.70 Calcolare: $\lim_{n\to+\infty} (n^n - 2^n)$.

[$n^n - 2^n = n^n(1-(2/n)^n)$. Tenendo presente che $2/n \le 2/3$ se $n \ge 3$, risulta

$$n^n-2^n \ge n^n\ [1-(2/3)^n], \qquad \forall\, n \ge 3.$$

In base al teorema (I) il limite dato vale $+\infty$]

7.71 Calcolare il limite: $\lim_{n\to+\infty} [3^n - (\sqrt{n})^n]$.

[Il risultato è $-\infty$ e si ottiene dalla disuguaglianza

$$3^n-(\sqrt{n})^n \leq 3^n[1-(\sqrt{n}/3)^n] \leq 3^n \; [1-(4/3)^n],$$

che vale per ogni $n \geq 16$]

7.72 Dopo aver dimostrato per induzione la validità della disuguaglianza

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad , \qquad \forall\, n \in N,$$

verificare che la successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$ converge a zero.

[Per n=1 la disuguaglianza è un'identità. Procediamo per induzione considerando:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!\,(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{n!}{n^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n!}{n^n\,(1+\frac{1}{n})^n} \; .$$

Ricordiamo che la successione $(1+1/n)^n$ è strettamente crescente e che quindi tutti i suoi termini sono maggiori del primo, che vale 2; perciò $(1+1/n)^n \geq 2$. Dall'ipotesi di induzione $n!/n^n \leq 2^{n-1}$ otteniamo $(n+1)!/(n+1)^{n+1} \leq 2^{-n}$. A questo punto, dal teorema (III) e dalle disuguaglianze

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad , \qquad \forall\, n \in N,$$

deduciamo che $n!/n^n$ converge a zero]

7G. Successioni non regolari

Abbiamo detto che una successione si dice convergente se, per $n\to+\infty$, ammette limite finito; si dice divergente se ammette limite $+\infty$, oppure $-\infty$. Se una successione è convergente o divergente si dice *regolare*.

Se una successione non ammette limite si dice *non regolare*.

Proponiamo ora alcuni esempi di successioni non regolari; altri esempi verranno forniti nel paragrafo successivo.

7.73 Verificare che la successione $a_n = (-1)^n$ non è regolare.

[La successione a_n ammette soltanto i valori ± 1; è pertanto limitata e non può divergere a $+\infty$, oppure a $-\infty$. Mostriamo che a_n non può convergere ad un limite $a \geq 0$; infatti, se $a \geq 0$ e se n è dispari, dato che $a_n = -1$, risulta

$$|a_n - a| = |-1-a| = 1+a \geq 1$$

e pertanto non è minore di ε, se scegliamo $\varepsilon < 1$. Analogamente, a_n non può convergere ad un limite $a < 0$, e lo si vede prendendo in considerazione gli indici n pari]

La successione

$$a_n = \text{sen } nx \, ,$$

con x numero reale fissato, costituisce un interessante esempio di successione non regolare. C'è però qualche eccezione, perchè, in corrispondenza a particolari valori di x, sen nx risulta convergente.

Studieremo in dettaglio, nel capitolo 12, la successione sen nx, per ogni valore reale di x. Qui consideriamo i due semplici casi $x = \pi/2$, $x = \pi$, ed anche il caso $x = 1$. Prendiamo in considerazione il caso $x = 1$ anche negli esercizi 7.92, 7.93, nel determinare sottosuccessioni regolari di $a_n = \text{sen } n$.

7.74 Studiare la convergenza delle successioni

(a) sen $\frac{n\pi}{2}$ (b) sen $n\pi$

[(a) la successione a_n = sen $(n\pi/2)$ ammette, per infiniti indici, i valori 0, +1, -1. Come nell'esercizio 7.73 si verifica che non ha limite; (b) si tratta della successione costante $a_n=0$, che ovviamente converge a zero]

7.75 Si consideri la successione a_n = sen n.

(a) Verificare che i termini a_n della successione sono a due a due distinti.
(b) Con l'aiuto del disegno in figura 7.1 verificare che a_n non è regolare.

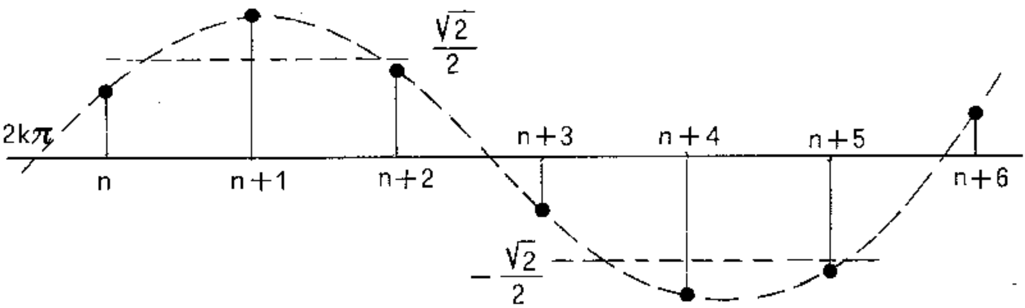


figura 7.1

[(a) Occorre verificare che sen n ≠ sen m, se n, m sono numeri naturali distinti. A tale scopo utilizziamo la formula di prostaferesi

$$\text{sen } n - \text{sen } m = 2 \text{ sen } \frac{n-m}{2} \cos \frac{n+m}{2} .$$

Ricordando le semplici proprietà dell'esercizio 2.6, si deduce che sen n = sen m se e solo se

$$\frac{n-m}{2} = k\pi \qquad \text{oppure} \qquad \frac{n+m}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ,$$

per qualche $k \in Z$; cioè, se e solo se

$$n - m = 2k\pi \qquad \text{oppure} \qquad n+m = (2k+1)\pi \quad .$$

Nella prima delle due relazioni deve essere $k \neq 0$, dato che $n \neq m$. Perciò, in entrambe le relazioni scritte, a primo membro c'è un numero intero, mentre a secondo membro c'è un numero irrazionale (dato che π è irrazionale). Ciò prova che tali relazioni non sono verificate per alcun valore di k, cioè che sen $n \neq$ sen m, se $n \neq m$.

(b) Si consideri la figura 7.1, dove sono rappresentati valori di $a_n =$ = sen n per alcuni valori consecutivi dell'indice n. In figura 7.1 n è scelto in dipendenza da $k \in N$ in modo che

$$[(n-1)/2\pi] < k = [n/2\pi] \quad .$$

Dato che $\pi \cong 3.14$, in ogni intervallo lungo $\pi/2$ cade almeno un numero intero (ed al più due). In particolare, c'è almeno un intero n_k (in figura $n_k = n+1$) nell'intervallo $[2k\pi + \pi/4, 2k\pi + (3/4)\pi]$, per cui

$$a_{n_k} \geq \sqrt{2}/2 \ .$$

Inoltre, c'è almeno un intero m_k (in figura 7.1 può essere $m_k = n+4$, oppure $m_k = n+5$) nell'intervallo $[2k\pi + (5/4)\pi, 2k\pi + (7/4)\pi]$, per cui risulta

$$a_{m_k} \leq -\sqrt{2}/2 \ .$$

Abbiamo quindi verificato che, per ogni $k \in N$, esistono due interi n_k, m_k, entrambi maggiori di $2k\pi$, per cui $a_{n_k} \geq \sqrt{2}/2$, $a_{m_k} \leq -\sqrt{2}/2$.

Se ne conclude che la successione a_n non ammette limite; infatti, se a_n tendesse ad a per $n \to +\infty$, allora anche ogni successione estratta da a_n dovrebbe tendere allo stesso limite a. Ciò contrasta con il fatto che le due successioni estratte a_{n_k}, a_{m_k} non possono tendere allo stesso limite.

Nel capitolo 12 è proposta una diversa dimostrazione del fatto che sen nx, anche per x = 1, non ammette limite quando $n \to +\infty$]

7H. Successioni estratte

In conformità con il fatto che n è uno dei simboli più usati per indicare un numero naturale, si suole indicare una generica successione di numeri naturali con il simbolo n_k. Cioè, n_k è un 'applicazione dall'insieme $N = \{k=1,2,3,...\}$ in se stesso.

Sia a_n una successione reale. Se n_k è una *successione strettamente crescente di numeri naturali,* allora la composizione a_{n_k} si dice *successione estratta* (o *sotto - successione*) della successione a_n data.

Ad esempio, se n_k è la successione dei numeri naturali pari

$$n_1=2, \quad n_2=4, \quad n_3=6,\dots,n_k = 2k,\dots$$

allora, per composizione con a_n, si ottiene la *sottosuccessione dei termini di posto pari* $a_{n_k} = a_{2k}$:

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \quad \dots, \; a_{2k}, \dots$$

Se n_k è la successione dei numeri naturali dispari

$$n_1=1, \quad n_2=3, \quad n_3=5,\dots,n_k = 2k-1,\dots$$

allora, per composizione con a_n, si ottiene la *successione estratta dei termini di posto dispari* $a_{n_k} = a_{2k-1}$:

$$a_1, \quad a_3, \quad a_5,\dots, \; a_{2k-1},\dots$$

Se una successione ammette limite, anche ogni successione da essa estratta ammette lo stesso limite. Viceversa, esistono successioni che non ammettono limite (non regolari), ma tali che opportune sottosuccessioni hanno limite. Ad esempio, $a_n=(-1)^n$ non ha limite per $n\to+\infty$; mentre $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ è la successione costante (uguale ad 1) e quindi converge ad 1;

analogamente $a_{2k-1}=(-1)^{2k-1}=-1$ converge a -1.

7.76 Verificare che una successione a_n converge ad un numero a se e solo se entrambe le successioni estratte a_{2k}, a_{2k-1} convergono allo stesso numero a.

[Se $|a_n-a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, risulta anche

(1) $$|a_{2k}-a| < \varepsilon ,$$

pur di scegliere $2k > \nu$, cioè $k > \nu/2$. Analogamente

(2) $$|a_{2k-1}-a| < \varepsilon ,$$

per ogni $k > (\nu+1)/2$.

Viceversa, se vale la (1) per $k > \nu_1$ e se vale la (2) per $k > \nu_2$, allora risulta $|a_n-a| < \varepsilon$ per ogni $n > \max\{2\nu_1; 2\nu_2-1\}$]

7.77 Supponiamo che a_n sia una successione crescente cioè $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n. Dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

[Dato che a_n è monotòna, essa ammette limite. Sia $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ tale valore limite. Ogni successione estratta da a_n tende ad a. In particolare $a_{2k} \to a$. Per l'unicità del limite $a = 1$]

7.78 Supponendo che a_n sia una successione decrescente, dimostrare che

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k-1} = -\infty \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty .$$

[Come nell'esercizio precedente]

7.79 Dimostrare che due successioni estratte da una stessa successione monotòna ammettono lo stesso limite.

[Basta osservare che la successione data ammette limite, e quindi ogni estratta ammette lo stesso limite]

7.80 Supponiamo che le successioni a_{2k} , a_{2k-1}, dei termini di posto pari e dispari, estratte da una successione a_n , siano entrambe monotòne. Dimostrare che, se

$$(3) \qquad \lim_{k \to +\infty} (a_{2k} - a_{2k-1}) = 0,$$

allora a_n ammette limite.

[Le successioni a_{2k}, a_{2k-1}, essendo monotone, ammettono limite. Siano $a,b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ i rispettivi limiti. Per l'ipotesi (3), $a=b$. In base all'esercizio 7.76 (che vale anche per successioni divergenti) anche a_n è regolare]

7.81 Verificare con un esempio che l'enunciato dello esercizio precedente non è invertibile. Cioè, esistono successioni regolari a_n, tali che a_{2k} , a_{2k-1} sono monotòne, ma

$$\lim_{k \to +\infty} (a_{2k} - a_{2k-1}) \neq 0 .$$

[Ad esempio la successione $a_n = n$ verifica tutte le ipotesi, mentre $a_{2k} - a_{2k-1} = 1$]

7.82 Verificare che, se la successione a_n ammette limite e se $\lim_{k\to +\infty} (a_{2k} - a_{2k-1}) \neq 0$, allora a_n è divergente.

[Se a_n convergesse ad un numero reale a, allora anche a_{2k}, a_{2k-1} sarebbero convergenti ad a; quindi...]

7.83 Supponiamo che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in N$. Supponiamo inoltre che le sottosuccessioni a_{2k}, a_{2k-1} siano entrambe monotòne. Dimostrare che, se

$$(4) \qquad \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = 1,$$

allora a_n ammette limite.

[Le successioni a_{2k}, a_{2k-1}, essendo monotòne, ammettono entrambe limite. Siano $a,b \in R \cup \{\pm\infty\}$ i rispettivi limiti. Per l'ipotesi (4) risulta $a=b$ (ciò vale anche se $a,b=0$, oppure se $a,b=\pm\infty$). Perciò tutta la successione a_n converge ad a]

7.84 Esibire un esempio di successione a_n convergente con $a_n \neq 0$ per ogni n, tale che a_{2k}, a_{2k-1} siano monotòne, ma $\lim_{k \to +\infty} a_{2k}/a_{2k-1} \neq 1$.

[Ad esempio $a_n = (-1)^n/n$. Risulta $a_{2k} = 1/2k$, che è decrescente, mentre $a_{2k-1} = -1/(2k-1)$ è crescente. Inoltre $a_{2k}/a_{2k-1} = -(2k-1)/(2k) \to -1$]

Un risultato fondamentale sulle successioni è il *teorema di Bolzano - Weierstrass*, di cui ricordiamo l'enunciato: *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente*. (Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se è contenuta in un intervallo; cioè, se esistono due numeri reali A,B per cui $A \leq a_n \leq B$, per ogni $n \in N$; equivalentemente, se esiste una costante M per cui $|a_n| \leq M$, per ogni $n \in N$).

Nei due esercizi che seguono proponiamo prima una generalizzazione, poi un raffinamento del teorema di Bolzano - Weierstrass.

7.85 Provare che da ogni successione è possibile estrarre una sottosuccessione regolare.

[Se la successione è limitata si può applicare il teorema di Bolzano-Weierstrass. Nel caso che a_n non sia limitata, supponiamo, per fissare le idee, che a_n non sia limitata superiormente. Ciò significa che, qualunque sia il numero reale M, esiste un indice $\bar{n}$ per cui $a_{\bar{n}} > M$. Poniamo $M = k$ con $k \in N$; per ogni k, esiste un indice n_k tale che $a_{n_k} > k$. Pur di cambiare n_k (per $k = 2,3,\dots$) con $n_k' = \max\{n_{k-1}' + 1, n_k\}$, possiamo supporre n_k strettamente crescente. La successione estratta a_{n_k} così costruita diverge a $+\infty$]

7.86 Provare che da ogni successione è possibile estrarre una sottosuccessione monotòna (strettamente monotòna, se la successione assume infiniti valori).

[In base al teorema di Bolzano-Weierstrass e all'enunciato dell'esercizio precedente, esiste una successione a_{n_k}, estratta da a_n, che ammette limite. Sia $a \in R \cup \{\pm\infty\}$ il limite, per $k \to +\infty$, di a_{n_k}. Supponiamo preliminarmente che $a \in R$. In base alla definizione di limite, almeno uno dei due intervalli

$$(a-1, a] , \qquad [a, a+1)$$

contiene infiniti termini della sottosuccessione a_{n_k}. Per fissare le idee, sia $[a, a+1)$ l'intervallo con la proprietà anzidetta. Allora esiste un primo indice k_1 per cui $a_{n_{k_1}} \in [a, a+1)$. Consideriamo poi l'intervallo $[a, a_{n_{k_1}})$ (occorre considerare l'intervallo *chiuso* $[a, a_{n_{k_1}}] = \{a\}$ nel caso $a = a_{n_{k_1}}$); esiste un primo indice $k_2 > k_1$ per cui $a_{n_{k_2}} \in [a, a_{n_{k_1}})$. Evidentemente $a_{n_{k_2}} < a_{n_{k_1}}$. Iterando il procedimento otteniamo una successione $a_{n_{k_h}}$ strettamente decrescente, che converge ad a.

Se $a = -\infty$, si inizia il procedimento, ad esempio, dall'intervallo $(-\infty, 0)$. Esiste un primo indice k_1 per cui $a_{n_{k_1}} < 0$; esiste poi

$a_{n_{k_2}} < a_{n_{k_1}}$, con $k_2 > k_1$, eccetera. Il caso $a=+\infty$ è analogo]

7.87 Verificare che una successione non è regolare se e soltanto se esistono almeno due successioni estratte che tendono a limiti distinti.

[In base all'esercizio 7.85, esiste una successione a_{n_k}, estratta da a_n, che tende ad $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dato che a_n non è regolare, esistono un intorno I di a ed infiniti termini di a_n che non cadono in I. Da tale insieme di infiniti termini è possibile estrarre una successione a_{m_k} regolare; dato che $a_{m_k} \notin I$ per ogni k, il limite di a_{m_k} non è a. Viceversa, se esistono due sottosuccessioni che tendono a limiti distinti, allora a_n non è regolare, perchè, se lo fosse, tutte le successioni estratte dovrebbero tendere allo stesso limite di a_n]

7I. Ricerca di successioni estratte regolari

Il teorema di Bolzano-Weierstrass non è costruttivo, infatti afferma l'esistenza di una sottosuccessione convergente, ma non precisa il metodo per determinarla; inoltre non precisa quale sia il valore limite.

Negli esercizi che seguono proponiamo la ricerca esplicita di sottosuccessioni convergenti e dei loro limiti. Gli esercizi sono presentati in ordine di difficoltà crescente.

7.88 Estrarre dalla successione

$$a_n = (-1)^n \frac{3n+1}{n}$$

due sottosuccessioni convergenti a limiti distinti.

[a_{2k} converge a 3, mentre a_{2k-1} converge a -3]

7.89 Estrarre dalla successione $a_n = 2^{n(-1)^n}$ due sottosuccessioni aventi limiti distinti.

[a_{2k} diverge a $+\infty$, a_{2k-1} converge a 0]

7.90 Estrarre una sottosuccessione convergente da

$$a_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4} .$$

[Risulta convergente ad esempio $a_{4k} = \operatorname{sen} k\pi = 0$]

7.91 Consideriamo l'insieme di numeri razionali

$$\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in N \right\} .$$

Ordiniamo in successione gli elementi di tale insieme, utilizzando il *procedimento diagonale* illustrato nello schema seguente:

$$\begin{array}{cccccc}
 & m = 1 & m = 2 & m = 3 & m = 4 & \dots \\
n=1 & \frac{1}{1}+\frac{1}{1} & \frac{1}{1}+\frac{1}{2} & \frac{1}{1}+\frac{1}{3} & \frac{1}{1}+\frac{1}{4} & \dots \\
n=2 & \frac{1}{2}+\frac{1}{1} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{3} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \dots \\
n=3 & \frac{1}{3}+\frac{1}{1} & \frac{1}{3}+\frac{1}{2} & \frac{1}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{4} & \dots \\
n=4 & \frac{1}{4}+\frac{1}{1} & \frac{1}{4}+\frac{1}{2} & \dots & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & & &
\end{array}$$

Così ad esempio

$$a_1=2, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = \frac{3}{2}, \quad a_4 = \frac{4}{3}, \quad a_5=1, \quad \dots$$

(a) Determinare una sottosuccessione che converge a zero.
(b) Verificare che è possibile estrarre infinite sottosuccessioni che convergono a limiti fra loro distinti.

[(a) La successione estratta che si ottiene considerando la diagonale principale ($m = n$) della tabella sopraindicata è data da:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}, \quad \dots, \frac{1}{n}+\frac{1}{n}, \dots$$

Si tratta quindi della successione $2/n$, che converge a zero per $n\to+\infty$.
(b) Tutte le sottosuccessioni ottenute considerando una riga, od una colonna, risultano convergenti. Ad esempio, la successione estratta dalla prima riga converge ad 1; quella estratta dalla seconda riga converge ad 1/2; quella estratta dalla n-sima riga converge ad $1/n$]

Allo scopo di studiare la successione

$$a_n = \text{sen } n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

e di determinarne alcune sottosuccessioni convergenti, premettiamo il lemma seguente.

LEMMA. - *Sia* A *un numero reale positivo. Esistono due successioni di numeri naturali* n_k, m_k, *con* n_k *strettamente crescente, per cui*

$$\lim_{k\to+\infty} (n_k - Am_k) = 0 \ .$$

Dimostrazione: Supponiamo preliminarmente $A > 1$. Consideriamo la successione di numeri naturali $a_k = [Ak]$, cioè a_k è la *parte intera* di Ak. Dato che $Ak - 1 < a_k \leq Ak$, risulta anche

$$a_{k+1} - a_k > A(k+1) - 1 - Ak = A-1.$$

Iterando la disuguaglianza precedente, per ogni coppia di numeri naturali k', k'', con k' < k'', abbiamo

(1) $a_{k''} - a_{k'} > (k'' - k')(A-1)$.

Definiamo $x_k = Ak - a_k = Ak - [Ak]$ (x_k si chiama la *parte decimale* di Ak). Chiaramente risulta $0 \le x_k < 1$.

Per $k \ge 2$ consideriamo l'insieme

$$\{x_k, \ x_{2k}, \ x_{3k}, \ \dots, \ x_{(k-1)k}, \ x_{k^2}\} .$$

Si tratta di un insieme composto da k numeri reali appartenenti all'intervallo $[0,1)$.

Dato che l'intervallo è lungo 1 ed i numeri sono k, ne esistono certamente almeno due che distano fra loro non più di $1/(k-1)$. Indichiamo i corrispondenti indici con k', k''; abbiamo

$$|x_{k'} - x_{k''}| \le \frac{1}{k-1} .$$

Dato che $k'' - k' \ge k$, dalla (1) otteniamo

(2) $a_{k''} - a_{k'} > k(A-1)$.

Definiamo le successioni n_k, m_k nel modo seguente:

$$n_k = a_{k''} - a_{k'} , \quad m_k = k'' - k' .$$

Dalla (2) si deduce che n_k diverge a $+\infty$ (ed anche m_k perchè $k'' - k' \ge k$). Pur di passare ad una successione estratta, possiamo supporre n_k strettamente crescente, in base al risultato dell'esercizio 7.86. Inoltre, ricordando la definizione di x_k, abbiamo:

$$n_k = a_{k''} - a_{k'} = x_{k'} - x_{k''} + A(k''-k') = x_{k'} - x_{k''} + Am_k .$$

Perciò $|n_k - Am_k| = |x_{k'} - x_{k''}| \le 1/(k-1)$, da cui la tesi.

Se $0 < A \le 1$, indichiamo con λ un numero naturale per cui $\lambda A > 1$ (abbiamo utilizzato la cosiddetta "proprietà di Archimede"). In base alla dimostrazione sopra proposta, esistono due successioni di interi n_k, m_k tali che

$$\lim_{k\to+\infty} (n_k - \lambda A m_k) = 0.$$

Definiamo $m'_k = \lambda m_k$. La coppia di successioni (n_k, m'_k) verifica la tesi del lemma.

7.92 Facendo uso del lemma precedente con $A=2\pi$, dimostrare che la successione $a_n = \text{sen } n$ ammette una successione estratta che converge a zero.

[Siano n_k, m_k le successioni di numeri naturali del lemma precedente, per cui risulta

$$x_k = n_k - 2\pi m_k \to 0.$$

Risulta anche

$$\text{sen } x_k = \text{sen } (n_k - 2\pi m_k) = \text{sen } n_k .$$

Facendo uso della disuguaglianza $|\text{sen } x| \le |x|$, abbiamo infine

$$|a_{n_k}| = |\text{sen } n_k| = |\text{sen } x_k| \le |x_k| \to 0 \quad]$$

7.93 Facendo uso del lemma precedente, verificare che:
(a) Esiste una successione strettamente crescente di interi n_k per cui valgono contemporaneamente le relazioni di limite

$$\lim_{k\to+\infty} \text{sen } n_k = 0 ; \qquad \lim_{k\to+\infty} \cos n_k = 1 .$$

(b) Qualunque sia $k_0 \in N$, esiste una successione estratta da $a_n = \text{sen } n$, che converge a $\text{sen } k_0$.

(c) Qualunque sia $k_0 \in N$, esiste una successione estratta da $b_n = \cos n$, che converge a $\cos k_0$.

(d) Tenendo presente che π è un numero irrazionale, verificare che le successioni sen n, cos n ammettono infinite sottosuccessioni convergenti a limiti fra loro distinti.

[(a) Si può procedere come nella dimostrazione dell'esercizio precedente, tenendo anche conto che $\cos x_k = \sqrt{1-\text{sen}^2 x_k}$, se $|x_k| \leq$

$\leq \pi/2$.

(b) Si consideri la successione estratta $a_{n'_k}$, con $n'_k = k_o + n_k$, ed

n_k come in (a). Dalle formule di addizione deduciamo

$$\text{sen}\, n'_k = \text{sen}\,(k_o + n_k) = \text{sen}\, k_o \cos n_k + \text{sen}\, n_k \cos k_o .$$

Per la parte (a), $\text{sen}\, n'_k \to \text{sen}\, k_o$ per $k \to +\infty$.

(c) Analogo a (b).

(d) Limitiamoci alla successione sen n. Abbiamo già verificato in (b) che, per ogni $k_o \in N$, esiste una successione estratta che converge a sen k_o. Per provare l'asserto basta verificare che $\text{sen}\, k_o \neq \text{sen}\, k_1$ se k_o e k_1 sono numeri naturali distinti. Ciò si verifica come nella parte (a) dell'esercizio 7.75]

Capitolo 8

LIMITI DI FUNZIONI

8A. Definizioni

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un insieme X di numeri reali e sia x_0 un *punto di accumulazione* per X, cioè un punto tale che in ogni suo intorno cadono punti di X distinti da x_0. Se il lettore non ha familiarità con i punti di accumulazione, può limitarsi a considerare il caso semplice in cui X è l'intervallo chiuso $[a,b]$, oppure l'intervallo aperto (a,b), e $x_0 \in [a,b]$.

Ricordiamo le definizioni di limite di funzione. Cominciamo con il caso in cui x tende ad x_0 ed il limite è finito.

Diremo che $f(x)$ *tende* (o *converge*) *ad* ℓ *per* x *che tende ad* x_0, e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* $\delta > 0$ *tale che* $|f(x)-\ell| < \varepsilon$, *per ogni* $x \in X$, *con* $0 < |x-x_0| < \delta$.

Schematizziamo la definizione precedente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0: \ |f(x)-\ell| < \varepsilon, \\ \forall x \in X: \ \ 0 < |x-x_0| < \delta. \end{cases}$$

Analogamente si definiscono i limiti $\pm\infty$ di $f(x)$ per x che tende ad x_o; ricordiamo le definizioni in simboli:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=+\infty \iff \begin{cases} \forall M>0,\ \exists\,\delta>0:\ f(x)>M, \\ \forall x\in X:\ 0<|x-x_o|<\delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_o} f(x)=-\infty \iff \begin{cases} \forall M>0,\ \exists\,\delta>0:\ f(x)<-M, \\ \forall x\in X:\ 0<|x-x_o|<\delta. \end{cases}$$

Nelle definizioni precedenti la limitazione $M>0$ non è necessaria; così pure, se M è un numero reale di segno arbitrario, è equivalente scrivere M oppure $-M$.

Si definiscono anche il *limite destro* $(x\to x_o^+)$ ed il *limite sinistro* $(x\to x_o^-)$:

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x)=\ell \iff \begin{cases} \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0:\ |f(x)-\ell|<\varepsilon, \\ \forall x\in X:\ 0<x-x_o<\delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\ell \iff \begin{cases} \forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0:\ |f(x)-\ell|<\varepsilon, \\ \forall x\in X:\ -\delta<x-x_o<0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x)=+\infty \iff \begin{cases} \forall M>0,\ \exists\,\delta>0:\ f(x)>M, \\ \forall x\in X:\ 0<x-x_o<\delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=+\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists \delta>0:\ f(x)>M, \\ \forall x\in X:\ \ -\delta<x-x_o<0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_o^+} f(x)=-\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists \delta>0:\ f(x)<-M, \\ \forall x\in X:\ \ 0<x-x_o<\delta. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=-\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists \delta>0:\ f(x)<-M, \\ \forall x\in X:\ \ -\delta<x-x_o<0. \end{cases}$$

Supponiamo ora che l'insieme X, di definizione della funzione f(x), sia *illimitato superiormente*, cioè, per ogni $k > 0$, esiste almeno un numero $x\in X$ più grande di k. In tal caso si danno le definizioni di limite per x che tende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \varepsilon>0,\ \exists k>0:\ |f(x)-\ell|<\varepsilon, \\ \forall x\in X:\ x>k. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =+\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists k>0:\ f(x)>M, \\ \forall x\in X:\ x>k. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) =-\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists k>0:\ f(x)<-M, \\ \forall x\in X:\ \ x>k. \end{cases}$$

Se l'insieme X, di definizione della funzione f(x), è *illimitato inferiormente* (per ogni $k>0$ esiste almeno un numero $x\in X$ minore di $-k$), si danno le definizioni di limite per x che tende a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall \varepsilon>0,\ \exists k>0:\ |f(x)-\ell|<\varepsilon, \\ \forall x\in X:\ \ x<-k \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists k>0:\ f(x)>M, \\ \forall x\in X:\ \ x<-k. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall M>0,\ \exists k>0:\ f(x)<-M, \\ \forall x\in X:\ \ x<-k. \end{cases}$$

Tutte le definizioni di limite date sopra rientrano in uno schema generale. Ricordiamo preliminarmente che un *intorno* di un punto $x_o\in R$ è un insieme del tipo $\{x\in R:\ |x-x_o|<\delta\}$, con $\delta>0$; mentre intorni di $\pm\infty$ sono rispettivamente insiemi del tipo $\{x\in R:\ x>M\}$, $\{x\in R:\ x<-M\}$, con $M>0$.

Sia $x_o\in R\cup\{\pm\infty\}$. Se $x_o\in R$ supporremo che x_o è un punto di accumulazione per l'insieme X di definizione della funzione f(x); mentre, se $x_o=\pm\infty$, supporremo che X è illimitato, superiormente se $x_o=+\infty$, inferiormente se $x_o=-\infty$. Infine sia $\ell\in R\cup\{\pm\infty\}$.

Si dice che f(x) *tende ad* ℓ *per* $x\to x_o$ *se per ogni intorno* U *di* ℓ *, esiste un intorno* V *di* x_o *tale che*

$$x\in X\cap V-\{x_o\} \quad \Longrightarrow \quad f(x)\in U\,.$$

Il lettore controlli che le definizioni di limite date in precedenza con i simboli ε,δ,M,k, sono esemplificazioni della definizione con gli intorni U, V.

8.1 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{5}\,.$$

[Abbiamo $\left|\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{5}\right| = \frac{2}{5}\left|\frac{3-x}{2x-1}\right|$. Limitatamente ai numeri reali x per cui $2 < x < 4$ risulta $3 < 2x - 1 < 7$. Abbiamo quindi

$$\left|\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{5}\right| < \frac{2}{15}\,|x-3| ,$$

se $2<x<4$, cioè se $|x-3| < 1$. Perciò, ponendo $\delta = \min\{1;(15/2)\varepsilon\}$ se $|x-3| < \delta$ risulta anche $|1/(2x-1)-1/5|<\varepsilon$]

8.2 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

[Utilizziamo la formula di prostaferesi:

$$\cos x - 1 = \cos x - \cos 0 = -2\,\text{sen}^2\frac{x}{2},$$

e la disuguaglianza $|\text{sen}\, t| \le |t|$, con $t = x/2$:

$$|\cos x-1| = 2\,\text{sen}^2\frac{x}{2} \le 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

Fissato $\varepsilon>0$, risulta $x^2/2<\varepsilon$ se $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Ponendo $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ si verifica la definizione di limite, cioè: $|x| < \delta$ implica $|\cos x-1|<\varepsilon$]

8.3 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

[Risulta $1/x^2 > M$ se $|x| < 1/\sqrt{M}$. La definizione di limite è soddisfatta scegliendo $\delta = 1/\sqrt{M}$]

8.4 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 2$ (b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x+|x|}{x} = 0$

[Limitiamoci al caso (a): Per $x > 0$ risulta $|x| = x$; perciò la funzione data vale $(x^2+2x)/x=x+2$. Si verifica facilmente che la definizione di limite è soddisfatta scegliendo $\delta = \varepsilon$]

8.5 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

$$\lim_{x\to+\infty} (x-2\sqrt{x}) = +\infty$$

[Fissato $M>0$, risolviamo la disequazione $x-2\sqrt{x} > M$; con la sostituzione $t=\sqrt{x}$ otteniamo la disequazione di secondo grado $t^2-2t-M > 0$, che ha per soluzioni $t < 1-\sqrt{1+M}$ e $t > 1+\sqrt{1+M}$. Il caso $t <1-\sqrt{1+M}$ è da scartare, essendo t negativo. Quindi, se

$$x = t^2 > k = (1+\sqrt{1+M})^2 ,$$

risulta $x - 2\sqrt{x} > M$, che è quanto si voleva verificare]

8.6 Utilizzando la definizione di limite, verificare che

(a) $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ (b) $\lim_{x\to0^+} \log x = -\infty$

[(a) Per ogni $M > 0$, se $x > k = e^M$, risulta $\log x>M$; (b) Fissato $M > 0$ la disequazione $\log x <-M$ è soddisfatta da $0 < x < e^{-M}$. Perciò , posto $\delta =e^{-M}$, se $0 < x < \delta$, risulta $\log x < - M$]

8B. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

I limiti di funzioni sono strettamente collegati ai limiti di successioni. Ad esempio, relativamente al limite finito di $f(x)$ per $x\to x_0$, vale il seguente teorema:

Sia $f(x)$ *una funzione definita nell'insieme* X *e sia* x_0 *un punto di accumulazione per* X. *Allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

se e soltanto se, per ogni successione x_n *convergente ad* $x_\circ$, *con* $x_n \in X - \{x_\circ\}$ *per ogni* n, *risulta*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell .$$

Il teorema precedente in simboli si scrive

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, \quad x_n \neq x_\circ \ \forall n, \\ x_n \to x_\circ \implies f(x_n) \to \ell . \end{cases}$$

Analogamente valgono le seguenti caratterizzazioni

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, \ x_n \neq x_\circ \quad \forall n, \\ x_n \to x_\circ \implies f(x_n) \to \pm\infty . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_\circ^{\pm}} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, x_n \gtrless x_\circ \ \forall n, \\ x_n \to x_\circ \implies f(x_n) \to \ell . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_\circ^{+}} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, \ x_n > x_\circ \quad \forall n, \\ x_n \to x_\circ \implies f(x_n) \to \pm\infty . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to x_\circ^{-}} f(x) = \pm\infty \qquad \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, \ x_n < x_\circ \quad \forall n, \\ x_n \to x_\circ \implies f(x_n) \to \pm\infty . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, \\ x_n \to \pm\infty \implies f(x_n) \to \ell . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \forall \{x_n\}\subset X, \\ x_n \to +\infty \implies f(x_n) \to \pm\infty . \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \forall \{x_n\} \subset X, \\ x_n \to -\infty \implies f(x_n) \to \pm\infty. \end{cases}$$

8.7 Utilizzare la proprietà (11) del paragrafo 7D per dedurre che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

8.8 Utilizzare la proprietà (10) del paragrafo 7D per dedurre che

(a) $\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ (b) $\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$

8.9 Verificare che vale l'implicazione

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} f(\tfrac{1}{n}) = \ell$$

[Basta osservare che la successione $x_n=1/n$ converge a zero]

8.10 Verificare che non vale il viceversa dell'implicazione precedente; cioè, trovare una funzione $f(x)$ per cui $f(1/n)$ converge per $n\to+\infty$, ma $f(x)$ non ammette limite per $x\to 0$.

[Ad esempio $f(x) = \text{sen}\,(2\pi/x)$; si veda l'esercizio 8.13]

8.11 Verificare che vale l'implicazione

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \implies \lim_{n\to+\infty} f(n) = \ell$$

[Basta considerare $x_n = n$, con $n\in N$, che è una successione che diverge a $+\infty$]

Nell'esercizio 8.58 proporremo un'applicazione dell'implicazione precedente al calcolo di limiti di successioni.

Le caratterizzazioni presentate all'inizio di questo paragrafo possono essere utilizzate anche per dimostrare che un dato limite di funzione non esiste. Infatti, se è possibile determinare due successioni x_n, y_n, entrambe convergenti ad x_0, con $x_n \neq x_0$, $y_n \neq x_0$ per ogni n, e tali che $f(x_n)$, $f(y_n)$ convergono a limiti distinti, allora si può affermare che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$.

8.12 Verificare che non esiste il limite, per $x \to 0$, della funzione $f(x) = x/|x|$.

[Posto $x_n = 1/n$, $y_n = -1/n$, risulta $f(x_n) = 1$ e $f(y_n) = -1$]

8.13 Verificare che non esiste il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{x}$$

[Posto $x_n = 1/n$ risulta sen $(2\pi/x_n)$ = sen $(2n\pi) = 0$. Determiniamo poi una successione y_n tale che, ad esempio, $\operatorname{sen}(2\pi/y_n) = 1$. Possiamo porre $2\pi/y_n = \pi/2 + 2n\pi$, cioè $y_n = 4/(4n+1)$. Dato che y_n converge a zero, vale lo schema:

$$x_n > 0, \quad x_n \to 0, \quad f(x_n) \to 0;$$

$$y_n > 0, \quad y_n \to 0, \quad f(y_n) \to 1;$$

dove $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi/x)$. In base alla caratterizzazione del limite di funzioni mediante il limite di successioni, possiamo affermare che il limite dato non esiste]

8.14 Verificare che il seguente limite non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$$

[Considerare $x_n = \alpha+2n\pi$, essendo α un numero reale fissato]

8C. Limiti notevoli

Diamo un elenco di *limiti notevoli*, che sono alla base del calcolo di altri limiti di funzione.

(1) $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1; \end{cases}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 ; \end{cases}$

(3) $\lim_{x\to+\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad b > 0 \\ 0 & \text{se} \quad b < 0 ; \end{cases}$

(4) $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$;

(5) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$;

(6) $\lim_{x\to 0^+} x^b \log x = 0 \qquad (b>0)$;

(7) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \qquad (b>0)$;

(8) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \qquad (a>1, b>0)$;

(9) $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$;

(10) $\lim_{x\to-\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$;

(11) $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$.

Inoltre possono essere considerati limiti notevoli anche i seguenti, che sono proposti nuovamente anche più avanti, nel capitolo 9 sulle *funzioni continue*

(12) $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ $(a > 0)$;

(13) $\lim_{x\to x_0} x^b = x_0^b$ $(x_0 > 0)$;

(14) $\lim_{x\to x_0} \log x = \log x_0$ $(x_0 > 0)$;

(15) $\lim_{x\to x_0} \text{sen } x = \text{sen } x_0$;

(16) $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Dai limiti notevoli fin qui elencati si deducono i limiti che seguono, che sono non meno importanti dei precedenti.

8.15 Verificare che $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{a^x} = 0$ $(a > 1)$.

[Segue da (7), (8)]

8.16 Verificare che, qualunque sia il numero reale b si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = e^b .$$

[Il risultato è immediato se b=0. Altrimenti, con la sostituzione y= = x/b, otteniamo

$$\left(1 + \frac{b}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{by} = \left[\left(1+ \frac{1}{y}\right)^y \right]^b .$$

Se $b > 0$, y tende a $+\infty$ quando $x \to +\infty$; perciò il risultato segue dai limiti (9) e (13). Se $b < 0$, y tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$; in questo caso il risultato segue da (10), (13)]

8.17 Verificare che, per ogni numero reale b, risulta

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1+ \frac{b}{x}\right)^x = e^b .$$

[Come nell'esercizio precedente]

8.18 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\lim_{x \to +\infty} x \log \left(1+ \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x \log\left(1+ \frac{1}{x}\right) = 1$$

[Per le proprietà dei logaritmi risulta

$$x \log \left(1+ \frac{1}{x}\right) = \log \left(1+ \frac{1}{x}\right)^x \to \log e = 1;$$

abbiamo utilizzato i limiti notevoli (9), (10), (14)]

8.19 Verificare la relazione di limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = 1 .$$

[Con la sostituzione $y=1/x$, ci si riconduce ai casi considerati nell'e esercizio precedente]

8.20 Verificare la validità della relazione

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

[Con la sostituzione $y = e^x - 1$ otteniamo

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\log (1+y)} .$$

Se $x\to 0$, per (12) anche $y\to 0$. Perciò il risultato segue dall'esercizio precedente]

8.21 Generalizzando i risultati dei due esercizi precedenti, verificare che, per ogni numero reale a positivo e diverso da 1, valgono le relazioni

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a.$$

8.22 Verificare che valgono le relazioni di limite

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

[Moltiplicare numeratore e denominatore per $1+\cos x$ ed utilizzare i limiti notevoli (11) e (16)]

Ulteriori limiti notevoli sono i seguenti

(17) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg}x = -\infty;\qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}x = +\infty$

(18) $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\ ;\quad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$

(19) $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty\ ;\quad \lim_{x\to \pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$

(20) $\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi\ ;\quad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$

che si utilizzano assai spesso nella pratica.

8D. Limiti di funzioni composte

In questo paragrafo proponiamo il calcolo di limiti utilizzando il seguente *teorema sul limite di funzioni composte:*

Siano $g: X\to Y$ e $f: Y\to R$ due funzioni tali che:

(1) $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$; (2) $\lim_{y\to y_0} f(y) = \ell$, *ed esista* $\delta>0$ *tale che* $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow g(x) \neq y_0$. *Allora è anche:*

(3) $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \ell$.

Una semplice dimostrazione di tale teorema si ottiene invocando il teorema del paragrafo 8B. (Sia $x_n \to x_0$ tale che $x_n \neq x_0$, $\forall n\in N$; allora $\exists \nu$ tale che $0< |x_n-x_0|< \delta$, $\forall n > \nu$ e perciò, per la (1), si ha $g(x_n)\to y_0$ con $g(x_n) \neq y_0$ $\forall n > \nu$. Dalla (2) segue allora $f(g(x_n)) \to \ell$ e perciò vale la (3)).

Dal teorema precedente segue in particolare la formula

$$(*) \qquad \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to y_0} f(y)$$

e perciò, quando si calcola il limite a primo membro della (*) mediante tale teorema, si suol dire che esso si calcola *ponendo* $g(x)=y$ (o, *mediante la sostituzione* $g(x) = y$).

Osserviamo che la condizione: $\exists\,\delta>0$ tale che $0 < |x-x_0|< \delta \Rightarrow g(x) \neq y_0$, è essenziale per la validità del teorema. Infatti se $g(x)$ e $f(y)$ sono definite da

$$g(x)=y_0 \quad \forall x \quad ; \quad f(y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad y \neq y_0 \\ 0 & \text{se} \quad y = y_0 \end{cases}$$

allora $f(g(x))=f(y_0)=0$ $\forall x$, e perciò risulta $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=0$, mentre si ha $\lim_{y\to y_0} f(y) =1$.

Osserviamo inoltre che già in qualcuno degli esercizi precedenti abbiamo calcolato dei limiti eseguendo semplici sostituzioni.

Si vede subito che se, più in generale, abbiamo due funzioni $g: X \to R$, $f: Y \to R$, allora il teorema precedente continua a sussistere purchè abbia significato la funzione $f \circ g$ e x_0 sia di accumulazione per il suo dominio.

8.23 Calcolare il limite di funzione composta

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 .$$

[Posto $g(x) = |x+1| / |x-1|$, $f(y)=y^2$ il limite dato coincide con $\lim_{x \to 1} f(g(x))$ e si può calcolare ponendo $y = |x+1| / |x-1|$. Poichè, per $x \to 1$ si ha $y = |x+1| / |x-1| \to +\infty$ e per $y \to +\infty$ si ha $y^2 \to +\infty$, allora risulta

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 = \lim_{y \to +\infty} y^2 = +\infty .$$

Si osservi che la condizione $g(x) \neq y_0 = +\infty$ per $0 < |x-1| < \delta$ è certamente verificata]

8.24 Calcolare il limite di funzione composta

$$\lim_{x \to 0^+} (\log x)^2 .$$

[Posto $y = \log x$, per $x \to 0^+$ si ha $y = \log x \to -\infty$ e per $y \to -\infty$ si ha $y^2 \to +\infty$. Pertanto $\lim_{x \to 0^+} (\log x)^2 = \lim_{y \to -\infty} y^2 = +\infty$]

Il teorema sul limite di funzioni composte si può applicare anche nel caso di funzioni composte mediante più di due funzioni, come si vede nel seguente esercizio.

8.25 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}^4 \frac{1}{x}$$

[Il limite per $x \to 0$ di $1/x$ non esiste e tuttavia esistono i limiti destro e sinistro. Pertanto possiamo applicare il teorema sul limite delle funzioni composte, calcolando i limiti destro e sinistro in 0 per la funzione data.

Per $x \to 0^+$ si ha $y=1/x \to +\infty$; per $y \to +\infty$ si ha $t=\text{arctg } y \to \pi/2$ (in base alla (18) del paragrafo precedente); per $t \to \pi/2$ si ha $t^4 \to (\pi/2)^4$.

Perciò $\lim_{x\to 0^+} \text{arctg}^4 \frac{1}{x} = (\pi/2)^4$. Analogamente si vede che

$\lim_{x\to 0^-} \text{arctg}^4 \frac{1}{x} = (-\pi/2)^4$ e perciò il limite proposto è uguale a $(\pi/2)^4$]

8.26 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$$

[Essendo $x^{1/x} = e^{(\log x)/x}$, eseguendo la sostituzione $y=(\log x)/x$ ed applicando le (7), (12) del paragrafo precedente si trova che il limite dato è uguale a 1]

8.27 Verificare l'uguaglianza

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg} \log^3 x = \frac{\pi}{2} \quad .$$

8E. Calcolo di limiti

In questo paragrafo proponiamo il calcolo di limite di funzione utilizzando i teoremi fondamentali, quali i teoremi di confronto ed i teoremi relativi alle operazioni di somma, prodotto e quoziente di limiti. Faremo uso anche dei limiti notevoli elencati nel paragrafo 8C.

8.28 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to+\infty} 2^x - x^2$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \log x - \sqrt{x}$

[(a) Si tratta di una forma indeterminata $\infty-\infty$. Con la rappresentazione

$$2^x-x^2 = 2^x\left(1-\frac{x^2}{2^x}\right),$$

si ottiene una forma del tipo $+\infty\cdot 1$ (in base al limite notevole (8) del paragrafo 8C); quindi il limite dato vale $+\infty$; (b) con la fattorizzazione

$$\log x - \sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} - 1\right),$$

si vede che la funzione data tende a $-\infty$, per $x\to+\infty$, in base al limite (7) del paragrafo 8C, con $b = 1/2$]

8.29 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log\sqrt{x+1}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log(x^3+1)}{x}$

[Si utilizzi in entrambi i casi il limite notevole (7) del paragrafo 8C

(a) $\dfrac{\log\sqrt{x+1}}{x} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\log(x+1)}{x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x}\to 0;$

(b) $\dfrac{\log(x^3+1)}{x} = 3\,\dfrac{\log\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}\to 0$]

8.30 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\sqrt{x+1}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(x^3+1)}{x}$

[Si utilizzi il limite dell'esercizio 8.19: (a) 1/2; (b) 0]

8.31 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log(x^2+1)}{2^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-e^{2x}}$

[Si utilizzino i limiti notevoli (7),(8). Il risultato in entrambi i casi è 0]

8.32 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x^2+1)}{2^x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-e^{2x}}$

[(a) E' un limite immediato, uguale a 0; (b) Utilizzando il limite dell'esercizio 8.20, si trova

$$\frac{x}{1-e^{2x}} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{1-e^{2x}} \to -\frac{1}{2}$$]

8.33 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x}\right)^{1-x}$

[(a) Utilizzando il limite dell'esercizio 8.16, con b=-1, si determina il valore limite e^{-2}; (b) $e^{-3/2}$]

8.34 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$

[(a) Il risultato segue dal limite notevole (9), con la scomposizione:

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}} \to e;$$

(b) con la sostituzione $2/(x-1)=y$ ed utilizzando i limiti degli esercizi 8.16, 8.17, si trova il risultato e^2]

8.35 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\log x}$

[Si utilizzi la relazione (che è immediata conseguenza della definizione del logaritmo):

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\log f(x)}\ .$$

(a) $x^x = e^{x\log x} \to e^0 = 1$, per i limiti notevoli (6), (12);

(b) $x^{\log x} = e^{(\log x)^2} \to +\infty$]

8.36 Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} x \log\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

[Analogamente all'esercizio 8.18, si trova il valore limite -1]

8.37 Calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x\to+\infty} x^2[\log(x^2+2)-2\log x]$$

[Utilizzando il limite dell'esercizio 8.18, si ottiene

$$x^2[\log(x^2+2)-2\log x] = x^2 \log\frac{x^2+2}{x^2} = 2\left[\frac{x^2}{2}\log\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\right] \to 2 \ ]$$

8.38 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x}-1}{x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} x\log_{10}\left(1+\frac{2}{x}\right)$

[Si veda l'esercizio 8.21. (a) 3 log 2; (b) 2 $\log_{10} e$]

8.39 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$ (b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$

[(a) Il risultato è 1; si ottiene effettuando la sostituzione y=x-1 e utilizzando il limite dell'esercizio 8.19; (b) E' utile la scomposizione del denominatore: $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$. Il risultato è $1/\sqrt{2}$]

8.40 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)+\log(1-x)}{x^2}$$

[Dato che la somma di logaritmi è uguale a... il risultato è -1]

8.41 Calcolare i limiti di funzioni trigonometriche

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{tg } x}$

[Si utilizzi il limite notevole (11).

(a) $\dfrac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 2x} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot \dfrac{2x}{\text{sen } 2x} \to \dfrac{3}{2}$;

(b) $\dfrac{\text{sen } 4x}{\text{tg } x} = \cos x \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{sen} x} \to 4$]

8.42 Calcolare i limiti di funzione

(a) $\lim_{x\to +\infty} x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$ (b) $\lim_{x\to -\infty} (2-x)\text{sen } \dfrac{1}{x}$

[(a) $x \text{ sen } \dfrac{1}{x} = \dfrac{\text{sen } (1/x)}{1/x} \to 1$; (b) -1]

8.43 Calcolare i limiti di funzioni trigonometriche

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\text{sen}^2 x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}^2 x}{1-\cos x}$

[Si moltiplichi e divida per $1 + \cos x$. (a) $1/2$; (b) 2]

8.44 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log 2x}{\log 3x}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log (x+x^2)}{\log x}$

[(a) $\dfrac{\log 2x}{\log 3x} = \dfrac{\log 2+\log x}{\log 3+\log x} = \dfrac{1+\log 2/\log x}{1+\log 3/\log x} \to 1$;

(b) $\dfrac{\log(x+x^2)}{\log x} = \dfrac{\log x+\log(x+1)}{\log x} = 1+ \dfrac{\log(x+1)}{\log x} \to 1$

Si ricordi che la forma $0/\infty$ non è indeterminata, ma vale 0]

8.45 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log (1-x+x^2)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log \cos x}{x^2}$

[Si utilizzi il limite notevole dell'esercizio 8.19.

(a) $\dfrac{\log(1-x+x^2)}{x} = \dfrac{\log(1-x+x^2)}{-x+x^2}(x-1) \to -1$;

(b) $\dfrac{\log\cos x}{x^2} = \dfrac{\log[1+(\cos x-1)]}{\cos x-1} \cdot \dfrac{\cos x-1}{x^2} \to -\dfrac{1}{2}$]

8.46 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+|\mathrm{sen}x|)^{\frac{1}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+|\mathrm{sen}\, x|)^{\frac{1}{x}}$

[Rappresentare la funzione data nel modo seguente:

$$(1+|\mathrm{sen}\, x|)^{\frac{1}{x}} = \left[\left(1+\frac{1}{1/|\mathrm{sen}\, x|}\right)^{\frac{1}{|\mathrm{sen}\, x|}}\right]^{\frac{|\mathrm{sen}\, x|}{x}} .$$

(a) e; (b) 1/e]

8.47 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\mathrm{sen}\, x)^{-\frac{1}{|x|}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1+\mathrm{sen}2x)^{-\frac{1}{|x|}}$

[Rappresentare la funzione data in modo analogo a quanto indicato nello esercizio precedente (a) e^{-1}; (b) e^2]

8.48 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{\log x}\right)^x$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{\log|x|}\right)^x$

[Moltiplicare e dividere l'esponente per la funzione... (a) $+\infty$; (b) 0]

8.49 Calcolare i limiti di funzioni esponenziali

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^x)^x$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^x)^{-x}$

[(a) 1; (b) Si tratta di un limite immediato, uguale a 0]

8.50 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (b) $\lim_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$

[(a) Ricordando il limite dell'esercizio 8.45 (b), si ottiene

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log \cos x} \to e^{-\frac{1}{2}} ;$$

(b) e^{-2}]

8.51 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \log x\right)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log \operatorname{sen} x\right)$

[(a) $\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \log x = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} + x \log x\right) \to +\infty$.

Abbiamo utilizzato i limiti notevoli (11) e (6); (b) $+\infty$]

8.52 Calcolare il limite: $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}}\right)$.

[Utilizziamo la scomposizione

$$e^{\sqrt{x^2+x}} - e^{\sqrt{x^2-1}} = e^{\sqrt{x^2+x}} \left(1-e^{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x}}\right)$$

e consideriamo separatamente l'esponente:

$$\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x} = \frac{-1-x}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+x}} = \frac{-1/x-1}{\sqrt{1-1/x^2} + \sqrt{1+1/x}} .$$

Per $x \to +\infty$, l'esponente converge a $-1/2$. Perciò l'espressione in parentesi converge a $(1-e^{-1/2}) = (1-1/\sqrt{e})$, che è un numero reale positivo. Ne segue che il limite richiesto vale $+\infty$]

8.53 Calcolare il limite: $\lim_{x \to +\infty} \left(e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x^2-1}}\right)$.

[Con il metodo proposto nell'esercizio precedente si trova che il limite vale $-\infty$]

8.54 Utilizzando i *teoremi di confronto* per i limiti di funzione, calcolare:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x}{x}$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2 \cos x}{3x}$

[(a) Dato che, per ogni $x \in R$, valgono le disuguaglianze $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, allora, per $x > 0$, risulta anche

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x} .$$

Per $x \to +\infty$, il primo e l'ultimo membro convergono a zero; perciò il limite dato vale 0; (b) Dato che $(\cos x)/x \to 0$ per $x \to +\infty$, il risultato è 1/3]

8.55 Facendo uso dei teoremi di confronto per i limiti di funzione, calcolare:

$$\lim_{x \to +\infty} \text{sen } x[\log(\sqrt{x} + 1) - \log \sqrt{x+1}\ ]$$

[Calcoliamo preliminarmente il limite, per $x \to +\infty$, della funzione in parentesi quadra:

$$\log(\sqrt{x} + 1) - \log \sqrt{x+1} = \log \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x+1}} \to \log 1 = 0.$$

Essendo $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$ per ogni $x \in R$, il limite dato vale 0]

8.56 Calcolare: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(\sqrt{x}-1) - [\log(x-1)]/2}{5 - 2 \cos x}$.

[Osservando che $3 \leq 5 - 2 \cos x \leq 7$, si verifica che il limite dato vale 0]

8.57 Utilizzando i teoremi di confronto per i limiti di funzione, calcolare:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x + \cos x}}$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\text{sen } x - x}{\cos x + \sqrt{1+x^2}}$

[(a) Utilizzando le disuguaglianze $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $\cos x \geq -1$, otteniamo

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x+\cos x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}} .$$

Il secondo membro converge a zero per $x \to +\infty$; perciò il limite dato vale 0; (b) Dividendo numeratore e denominatore per x, si trova che il limite vale -1]

8.58 Calcolare i seguenti limiti di successione facendo uso della proprietà dell'esercizio 8.11, in cui il calcolo di limiti di successione è ricondotto al calcolo di corrispondenti limiti di funzione.

(a) $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\operatorname{sen} \frac{2}{n}\right)^n$ (b) $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

(c) $\lim_{n \to +\infty} \left(1-\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)^n$ (d) $\lim_{n \to +\infty} \left(1+\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}\right)^n$

[Alla variabile discreta n si sostituisca la variabile reale x. (a) e^2; (b) $+\infty$; (c) $1/e$; (d) 1]

8F. Infinitesimi

Sia f(x) una funzione definita in un insieme X e sia x_0 un punto di accumulazione per X. Si dice che la funzione f(x) è *infinitesima* in x_0 (o per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Siano f(x), g(x) due funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Supporremo d'ora in avanti che f(x) e g(x) non si annullano quando x è in un opportuno intorno di x_0, con $x \neq x_0$.

Si dice che f(x) è un *infinitesimo di ordine superio-*

re a g(x) se

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 .$$

In tal caso si dice anche che f(x) è un " *o piccolo*" di g(x), e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \qquad\qquad (\text{per } x\to x_o) .$$

8.59 Verificare che per il simbolo " *o piccolo* " valgono le relazioni seguenti:

(a) $o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$

(b) $o(g(x))\cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$

[(a) Siano $f_1(x)=o(g(x))$, $f_2(x) = o(g(x))$, due funzioni infinitesime di ordine superiore rispetto a g(x) (per $x \to x_o$), cioè

$$(*) \quad \lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_o} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0 .$$

Allora $[f_1(x)+f_2(x)]/g(x)\to 0$ per $x\to x_o$, cioè $f_1(x)+f_2(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a g(x), cioè ancora $f_1(x)+f_2(x)=o(g(x))$;
(b) Come in precedenza, se vale (*), allora

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{g^2(x)} = 0 ,$$

cioè $f_1(x)\cdot f_2(x) = o(g^2(x))$]

8.60 Verificare che, per il simbolo "o piccolo" vale la proprietà seguente: Se $g_1(x) > 0$, $g_2(x) > 0$, per ogni $x \neq x_o$, allora

$$o(g_1(x))+o(g_2(x))=o(g_1(x)+g_2(x)) \qquad (x\to x_o).$$

[Poniamo $f_1(x)=o(g_1(x))$, $f_2(x)=o(g_2(x))$. Risulta quindi:

$$\lim_{x\to x_o} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to x_o} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = 0.$$

Tenendo presente che g_1 e g_2 sono funzioni positive, per $x \to x_o$ ottenìamo

$$\left| \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} \right| = \frac{|f_1(x)+f_2(x)|}{g_1(x)+g_2(x)} \leq$$

$$\leq \frac{|f_1(x)|}{g_1(x)+g_2(x)} + \frac{|f_2(x)|}{g_1(x)+g_2(x)} \leq \frac{|f_1(x)|}{g_1(x)} + \frac{|f_2(x)|}{g_2(x)} \to 0$$

Perciò $f_1(x)+f_2(x) = o(g_1(x)+g_2(x))$]

8.61 Confrontando la formula (a) dell'esercizio 8.59 e la formula dell'esercizio 8.60, si ottiene

$$o(g(x)) = o(2g(x)).$$

Tale formula non è contraddittoria. Verificarlo con degli esempi.

[Ad esempio la funzione x^2 è allo stesso tempo $o(x)$ e $o(2x)$]

Si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesimi dello stesso ordine* se

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad ,$$

essendo ℓ un numero reale diverso da zero. Se $\ell=1$ si dice anche che $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesimi equivalenti*.

Si dice infine che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine inferiore* a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_o} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \ .$$

Si danno analoghe definizioni per $x \to x_o^{\pm}$, oppure per $x \to \pm\infty$.

8.62 Verificare che, per $x\to 0^+$, $f(x)=x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)=1/\log x$

[$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$]

8.63 Verificare che, per $x\to 0$, $f(x) = 1-\cos x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x) = \text{sen } x$.

[$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1-\cos^2 x}{\text{sen } x(1+\cos x)} = \frac{\text{sen } x}{1+\cos x} \to 0$]

8.64 Verificare che, per $x\to 0$, $f(x)=1-\cos x$ e $g(x)=x^2$ sono infinitesimi dello stesso ordine.

[$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)/x^2 = 1/2$]

Spesso si confronta una data funzione $f(x)$, infinitesima per $x\to x_0$, con l'infinitesimo $g(x)=x-x_0$, oppure con una potenza di $x-x_0$.

Molto utilizzata è l'espressione

$$f(x)=g(x)+o(x-x_0) \qquad (x\to x_0);$$

secondo la definizione data, con la relazione precedente si intende che la differenza $f(x)-g(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x-x_0$, cioè

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} = 0 \, .$$

8.65 Utilizzando i limiti notevoli del paragrafo 8C, verificare la validità delle formule seguenti:

(a) $\text{sen } x = x + o(x)$

(b) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

(c) $\log (1+x) = x + o(x)$

(d) $e^x = 1 + x + o(x)$

Si dice che $f(x)$ è una funzione *infinitesima di or-*

dine α in $x_\circ$ se $|f(x)|$ e $|x-x_\circ|^\alpha$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to x_\circ$.

8.66 Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x\to 0$, delle seguenti funzioni:

(a) sen $2x$ (b) $1 - \cos x$

[(a) 1; (b) 2]

8.67 Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x\to 0^+$, delle seguenti funzioni:

(a) sen x - tg x (b) tg $x \sqrt{\text{sen } x}$

[(a) E' un infinitesimo del terzo ordine, come si riconosce facilmente dall'identità

$$\text{sen } x - \text{tg } x = \frac{\text{sen } x\,(\cos x - 1)}{\cos x} \quad ;$$

(b) E' un infinitesimo di ordine 3/2]

8.68 Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x\to 0$, delle seguenti funzioni:

(a) $\sqrt{1+x^5} - \sqrt{1-x^5}$ (b) $\log (1+x)^x$

[(a) 5; (b) 2]

8.69 Verificare che, per il simbolo " *o piccolo* ", vale la proprietà per $x\to 0^+$ $(\alpha,\beta > 0)$:

$o(x^\alpha)+o(x^\beta)=o(x^\gamma)$, dove $\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$.

[Siano $f_1(x)=o(x^\alpha)$, $f_2(x)=o(x^\beta)$; ciò significa che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f_1(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f_2(x)}{x^\beta} = 0 .$$

Se, ad esempio $\alpha=\gamma=\min\{\alpha;\beta\}$, cioè se $\alpha \le \beta$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f_1(x)+f_2(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f_1(x)}{x^\alpha} + \lim_{x\to 0^+}\frac{f_2(x)}{x^\beta}\, x^{\beta-\alpha} = 0.$$

Quindi $f_1(x)+f_2(x)=o(x^{\alpha})$]

Utile si rivela il *principio di sostituzione degli infinitesimi,* che si può enunciare nel modo seguente: Consideriamo funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, infinitesime per $x \to x_0$. Se $g_1(x)$ è infinitesima di ordine superiore rispetto a $f_1(x)$ e se $g_2(x)$ è infinitesima di ordine superiore rispetto a $f_2(x)$, allora i limiti seguenti sono uguali, purchè uno di essi esista:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} .$$

Con il simbolo "o piccolo" tale relazione si scrive:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+ o(f_1(x))}{f_2(x)+ o(f_2(x))} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} .$$

La dimostrazione è immediata e segue dall'identità:

$$\frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \cdot \frac{1+g_1(x)/f_1(x)}{1+g_2(x)/f_2(x)} .$$

Il principio di sostituzione degli infinitesimi sarà ampiamente utilizzato nel capitolo 11, nel calcolo di limiti di funzioni con l'ausilio della formula di Taylor.

8.70 Utilizzando le formule (a), (c) dell' esercizio 8.65 ed il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{\log (1+x)}$$

[1]

8.71 Utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\log(1-x^3)} \quad .$$

[In base alle formule (c), (d) dell'esercizio 8.65, abbiamo

$$e^t = 1+t+o(t) \quad \Longrightarrow \quad e^{\operatorname{sen}^3 x} = 1+\operatorname{sen}^3 x + o(\operatorname{sen}^3 x);$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad \Longrightarrow \quad \log(1-x^3) = -x^3 + o(-x^3).$$

Dal principio di sostituzione degli infinitesimi otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\log(1-x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{-x^3} = -1 \quad]$$

8.72 Facendo uso del principio di sostituzione degli infinitesimi, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\log(1-x)+\log(1+x)}$$

[Si utilizzino le formule (b), (c) dell'esercizio 8.65 e la proprietà dei logaritmi

$$\log(1-x) + \log(1+x) = \log(1-x^2).$$

Il limite vale -2]

8G. Infiniti

Considerazioni analoghe a quelle fatte nel paragrafo precedente valgono per limiti infiniti.

Precisamente, $f(x)$ si dice *infinita* in x_0 (o per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty .$$

Siano f(x), g(x) due funzioni infinite per $x \to x_0$. Si dice che f(x) è un *infinito di ordine superiore* a g(x) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \ .$$

Si dice che f(x), g(x) sono *infiniti dello stesso ordine* se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \ ,$$

con ℓ numero reale diverso da zero. Se $\ell=1$ si dice che f(x) e g(x) sono *infiniti equivalenti.*

Si dice che f(x) è un *infinito di ordine inferiore* a g(x) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ .$$

Si danno analoghe definizioni per $x \to x_0^{\pm}$, oppure per $x \to \pm\infty$.

8.73 Verificare che, per $x \to +\infty$, logx è un infinito di ordine inferiore alla potenza x^b, qualunque sia $b > 0$.

[Si ricordi il limite notevole (7) del paragrafo 8C]

8.74 Verificare che, per $x \to 0^+$, log x è un infinito di ordine inferiore alla potenza x^b, qualunque sia $b < 0$.

[Si ricordi il limite notevole (6) del paragrafo 8C]

8.75 Verificare che, per $x \to +\infty$, la potenza x^b $(b>0)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto all'esponenziale a^x $(a > 1)$.

[Si ricordi il limite notevole (8) del paragrafo 8C]

Analogamente agli infinitesimi, vale il *principio di sostituzione degli infiniti* : Consideriamo funzioni $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, infinite per $x\to x_0$. Se $f_1(x)$ è infinito di ordine superiore rispetto a $g_1(x)$ e se $f_2(x)$ è infinito di ordine superiore rispetto a $g_2(x)$, allora i limiti seguenti sono uguali

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)+g_1(x)}{f_2(x)+g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} .$$

La dimostrazione si ottiene come nel caso degli infinitesimi.

8.76 Utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti, calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6 + x^4(2+\mathrm{sen}\ x) + \log x}{1+3x^3+6x^6} .$$

[$f_1(x) = x^6$ è un infinito di ordine superiore a $g_1(x)=x^4(2+\mathrm{sen}x) + \log x$; inoltre $f_2(x) = 6x^6$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g_2(x)=1+3x^3$. In base al principio di sostituzione degli infiniti il limite vale 1/6]

8.77 Utilizzando il principio di sostituzione degli infiniti, calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x\log x - x^2\log^2 x + \cos x}{\sqrt{1 + x^4\log^4 x}}$$

[Il numeratore è un infinito equivalente a $-x^2\log^2 x$, mentre il denominatore è un infinito equivalente a $x^2\log^2 x$. In base al principio di sostituzione degli infiniti il limite vale -1]

Capitolo 9

FUNZIONI CONTINUE

9A. Continuità e discontinuità

Sia f(x) una funzione definita nell'intervallo I di R e sia $x_o \in I$.

Si dice che f(x) è *continua in x_o* se

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

o, ciò che è lo stesso, se, per ogni successione $x_n \to x_o$, si ha $f(x_n) \to f(x_o)$.

Si dice che f(x) è *continua da sinistra* (risp. *da destra*) *in x_o* se

$$\lim_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o) \qquad \text{(risp. } \lim_{x \to x_o^+} f(x)=f(x_o)\text{).}$$

Evidentemente, se I = [a,b] con $a,b \in R$, la continuità di f in $x_o= a$ (risp. in $x_o=b$) va intesa come continuità da destra (risp. da sinistra).

Si dice che f(x) è *continua in I* se essa è continua in ogni punto di I. In particolare f(x) è continua in [a,b] se e solo se f(x) è continua in (a,b) ed è continua da destra in a e da sinistra in b.

Se f(x) è una funzione definita nell' intervallo

I di R ed essa non è continua nel punto x_0 di I, si dice che *x_0 è un punto di discontinuità per f.*

Vi sono *tre tipi* di discontinuità per una funzione in un punto:

a) x_0 è un punto di *discontinuità eliminabile* se esiste il limite di f in x_0 e risulta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) .$$

In questo caso, posto $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$, la funzione $\bar{f}(x)$ definita da

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \neq x_0 \\ \ell & \text{se} \quad x = x_0 \end{cases}$$

è evidentemente continua in x_0. Per tale ragione si parla di discontinuità eliminabile.

b) x_0 è un punto di *discontinuità di prima specie* se esistono finiti i limiti destro e sinistro di f(x) in x_0, e si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) .$$

c) x_0 è un punto di *discontinuità di seconda specie* se uno almeno dei due limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

non esiste oppure è infinito.

Ricordiamo che *una funzione monotòna può ammettere al più discontinuità di prima specie.*

Sia $x_0 \in I$ e sia f(x) una funzione definita nell'insieme $I-\{x_0\}$. Se esiste il limite

$$\ell = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

allora, la funzione $\bar{f}(x)$ definita in I da

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x \neq x_o \\ \ell & \text{per} \quad x = x_o \end{cases}$$

si chiama *prolungamento per continuità* di $f(x)$ in x_o ed è una funzione continua in x_o. In particolare, se $f(x)$ era già continua in $I-\{x_o\}$, si dice che $\bar{f}(x)$ è il prolungamento per continuità di f su I.

Ricordiamo che *una funzione composta mediante funzioni continue è anch'essa continua.*

9.1 Dire se la funzione $f: x \in R-\{2\} \to \dfrac{1}{x-2}$ è continua in $x_o = 2$.

[No, perchè non è definita in $x_o=2$]

9.2 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0,2)$ da

$$f(x) =\begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme X dei punti di discontinuità di $f(x)$.

[$X = \emptyset$]

9.3 Sia $f(x)$ la funzione definita in $(0,2)$ da

$$f(x) =\begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \,. \end{cases}$$

Determinare l'insieme X dei punti di discontinuità di $f(x)$.

[$X = \{1\}$]

9.4 Sia x_o un numero reale e sia $f(x)$ la funzione definita in R da

$$f(x)=\begin{cases} ax + b & \text{se} \quad x \leq x_o \\ c & \text{se} \quad x > x_o \end{cases}$$

Sotto quali condizioni su a,b e c la funzione f(x) è continua?

[Dev'essere $ax_o+b = c$]

9.5 Studiare la continuità della funzione definita in R da

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

[E' continua in $R-\{0\}$. Nel punto 0 ammette una discontinuità di prima specie, essendo $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$]

9.6 Dedurre dalla disuguaglianza triangolare del valore assoluto: $|a+b| \leq |a|+|b|$ per ogni $a,b\in R$, la seguente disuguaglianza:

$$||x|-|x_o|| \leq |x-x_o|$$

per ogni $x,x_o\in R$.

[Dimostriamo dapprima che $|x|-|x_o| \leq |x-x_o|$. A tale scopo basta osservare che, per la disuguaglianza triangolare, si ha $|x| = |(x-x_o) + x_o| \leq |x-x_o|+|x_o|$. Analogamente si ottiene l'altra disuguaglianza $|x_o|-|x| \leq |x_o-x| = |x-x_o|$. Ne segue l'asserto, in quanto il valore assoluto di $|x|-|x_o|$ è uguale a $|x|-|x_o|$ oppure a $|x_o|-|x|$]

9.7 Tenendo presente l'esercizio precedente, dimostrare che la funzione $f(x) = |x|$ è continua in R.

.8 Verificare che la funzione $f(x)$ definita in R da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in Q \\ 1 & \text{se} \quad x \in R-Q \end{cases}$$

non è continua in alcun punto. Che tipo di discontinuità ammette tale funzione?

[Di seconda specie. Infatti, verifichiamo che, $\forall x_o \in R$ non esiste $\lim_{x \to x_o^+} f(x)$. Se, per assurdo, fosse $\ell = \lim_{x \to x_o^+} f(x)$, con $\ell \geq 0$, per fissare le idee, numero reale, esisterebbe un numero $\delta > 0$ tale che

(*) $$x_o < x < x_o + \delta \implies |f(x) - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Scegliendo in (*) $x \in Q$, la disuguaglianza a destra implica $\ell < \frac{1}{2}$; scegliendo invece $x \in R-Q$, si trova $|1-\ell| < \frac{1}{2}$. Poichè queste due disuguaglianze su ℓ non possono coesistere, abbiamo ottenuto un assurdo]

.9 Verificare che la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in Q \\ 0 & \text{se} \quad x \in R-Q \end{cases}$$

è continua solo in $x_o = 0$.

9.10 Sia $f: R \to R$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in Q \\ -x^2 & \text{se} \quad x \in R-Q. \end{cases}$$

Verificare che f è continua solo in $x_o = 0$.

[Dato che per ogni $x \in R$ risulta $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$, dal teorema dei carabinieri si deduce che $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Per verificare che f non è continua in alcun punto $x_o \neq 0$, procedere come nell'esercizio 9.8]

9.11 Tenendo conto dell'esercizio precedente, verificare che il seguente enunciato è falso: "Se $f(x)$

è continua in x_0, allora essa è continua anche in un intorno di x_0". Proponiamo di seguito una dimostrazione sbagliata. Trovare l'errore.
Per ipotesi f(x) è continua in x_0. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

(*) $|x-x_0|< \delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$

Se indichiamo con $I = \{x\in R : |x-x_0|<\delta\}$ l'intorno di x_0 di raggio δ, allora f è continua in I. Infatti, per ogni $x_1 \in I$ risulta

$$|f(x)-f(x_1)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_1)| \le$$
$$\le |f(x)-f(x_0)|+|f(x_1)-f(x_0)| < 2\varepsilon .$$

L'ultimo passaggio segue dall'ipotesi (*), dato che sia x che x_1 distano da x_0 per meno di δ. La disuguaglianza sopra scritta prova che f(x) è continua per $x = x_1$, che è un generico punto dell'intorno I.

[L'intorno I non è stato ben definito, essendo dipendente da ε. Avremmo avuto una buona definizione di I, utilizzando un raggio diverso, ad esempio ε_0 con ε_0 numero positivo fissato. Così facendo, però, naturalmente, non si riesce a provare la disuguaglianza di continuità per ogni ε]

9.12 Sia f(x) la funzione definita in R da

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ sen } (1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Che tipo di discontinuità ammette tale funzione?

[Una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$]

9.13 Sia f(x) = x sen (1/x) per $x\in R-\{0\}$. Dimostrare che f(x) ammette un (unico) prolungamento per continuità su R.

9.14 Dire se la funzione definita in R-{0}da $f(x) = x/|x|$ può essere prolungata per continuità su R.

[No]

9.15 Dire se le seguenti funzioni f_i, continue in ogni punto di R-{0}, possono essere prolungate per continuità su R e, in caso affermativo, determinare il prolungamento $\bar{f}_i$:

$$f_1(x) = e^{-1/x^2} \quad ; \quad f_2(x)=(\text{sen } x)/x \quad ;$$

$$f_3(x)=[\log(1+x)]/x; \quad f_4(x)= (e^x-1)/x \, .$$

[Essendo $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, basta porre $\bar{f}_1(0) = 0$.

Essendo $\lim_{x\to 0} (\text{sen } x)/x = 1$, basta porre $\bar{f}_2(0) = 1$.

Essendo $\lim_{x\to 0} [\log(1+x)]/x = 1$, basta porre $\bar{f}_3(0) = 1$.

Essendo $\lim_{x\to 0} (e^x-1)/x = 1$, basta porre $\bar{f}_4(0) = 1$]

9.16 Studiare le discontinuità della funzione

$$f(x)=\begin{cases} \text{sen } x\cdot 2^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

[La funzione è continua in $R - \{0\}$. Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \text{sen } x\cdot 2^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{2^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{y\to +\infty} \frac{2^y}{y} = +\infty \, ,$$

lo zero è un punto di discontinuità di seconda specie per f(x)]

9.17 Determinare a e b in modo che la funzione f(x) definita in R da

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{se } \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \text{ sen } x + b & \text{se } \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{se } \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in R.

[Essendo $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, deve risultare $b-a=-1$ e $a+b=0$. Da cui $a = \frac{1}{2}$ e $b=-\frac{1}{2}$]

9.18 Dimostrare che la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} [\log(1+x)]/x & \text{se } \quad x \in (-1,0) \\ (e^x - 1)/x & \text{se } \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

è continua in $(-1,1) - \{0\}$, ammette prolungamento continuo su $(-1,1)$, ma non su $[-1,1]$.

[Basta osservare che $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$]

9.19 Determinare α e β in modo che la funzione $f(x)$ definita in $(-1,1)$ da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \text{ sen}^2 x & \text{se } \quad 0<x<1 \\ 0 & \text{se } \quad x=0 \\ |x|^\beta \cos^2(1/x) & \text{se } \quad -1<x<0 \end{cases}$$

sia continua.

[Dovendo essere $\lim_{x \to 0^+} f(x)=0$, deve risultare $\alpha > -2$. Dovendo essere $\lim_{x \to 0^-} f(x)=0$, deve risultare $\beta > 0$]

9.20 Sia $f: x \in R \to [x]$, ove $[x]$ rappresenta il più grande intero minore o uguale a x. Verificare che f è discontinua in ogni $n \in Z$, con discontinuità di prima specie.

[Risulta $\lim_{x \to n^-} [x] = n-1$; $\lim_{x \to n^+} [x] = [n] = n$]

9B. **Funzioni continue in un intervallo**

Per le funzioni continue in un intervallo valgono i seguenti fondamentali teoremi:

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. *Sia* $f: I \to R$ *una funzione continua nell'intervallo I di R. Allora f assume un qualunque valore compreso fra il suo estremo inferiore ed il suo estremo superiore su I.*

COROLLARIO (TEOREMA DEGLI ZERI). *Sia* $f:[a,b] \to R$ *una funzione continua tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste* $x_0 \in (a,b)$ *tale che $f(x_0) = 0$.*

TEOREMA DI WEIERSTRASS. *Sia* $f:[a,b] \to R$ *una funzione continua nell'intervallo chiuso* $[a,b]$. *Allora esistono* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tali che*

$$f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad , \quad f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ricordiamo inoltre che una funzione $f:[a,b] \to R$ è continua se e solo se per ogni $x_0 \in [a,b]$ e per ogni successione (x_n) con $x_n \in [a,b]$, si ha

$$\lim_n x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_n f(x_n) = f(x_0).$$

9.21 Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio a coefficienti reali, avente grado dispari. Verificare che esso ammette almeno una radice reale, ossia che $\exists x_0 \in R$ tale che $P(x_0) = 0$.

[Essendo

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_o}{x^n}\right)$$

si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Dunque:

$$\inf_{x \in R} P(x) = -\infty \quad ; \qquad \sup_{x \in R} P(x) = +\infty \ .$$

Poichè $P(x)$ è una funzione continua in R, essa assume un qualsiasi valore compreso fra il suo estremo inferiore ed il suo estremo superiore. Pertanto esiste almeno un $x_o \in R$ tale che $P(x_o)=0$]

9.22 Sia $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio a coefficienti reali, avente grado pari. Se $a_o < 0$, $a_n > 0$, $P(x)$ ammette almeno una radice positiva ed una negativa.

[Essendo $\lim_{x\to -\infty} P(x)=+\infty$, $P(0) = a_o < 0$, $\lim_{x\to +\infty} P(x)=+\infty$, la funzione continua $P(x)$ si annulla almeno una volta nell'intervallo $(-\infty, 0]$ ed almeno una volta nell'intervallo $[0, +\infty)$]

9.23 Sia $f: [a,b] \to [a,b]$ una funzione continua. Verificare che esiste almeno un punto unito, cioè un punto $x_o \in [a,b]$ tale che $f(x_o)=x_o$.

[Considerata la funzione $g(x) = f(x)-x$, essa è continua in $[a,b]$ ed inoltre risulta $g(a)=f(a)-a \geq 0$, $g(b)=f(b)-b \leq 0$. Se $g(a)=0$ oppure $g(b)=0$, abbiamo trovato un punto unito per f. Altrimenti, se $g(a)>0$ e

$g(b) < 0$, a norma del teorema degli zeri, esiste almeno un $x_o \in (a,b)$ tale che $g(x_o) = 0$, cioè tale che $f(x_o) = x_o$]

9.24 Mostrare con esempi che esistono funzioni continue in intervalli non chiusi oppure non limitati prive di massimo o di minimo

[Sia $f(x) = x$ per $x \in (0,1)$ oppure per $x \in [0,+\infty)$...]

9.25 Calcolare gli estremi inferiore e superiore della funzione definita in R da $f(x)=1/(1+4x^2)$. Verificare che $f(x)$ è dotata di massimo, ma è priva di minimo in R.

[La funzione è limitata, in quanto è $0 < f(x) \le 1$ per ogni $x \in R$. Essendo $f(0)=1$ si ha $f(0) = \max_{x\in R} f(x)$. Per verificare che è $0 = \inf_{x\in R} f(x)$, basta osservare che per $0 < \varepsilon < 1$ la disuguaglianza $1/(1+4x^2) < \varepsilon$ è verificata dagli x tali che $|x| > \sqrt{(1-\varepsilon)/4\varepsilon}$]

9.26 Calcolare gli estremi inferiore e superiore della funzione definita in R da $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

[Essendo $-1 < \dfrac{e^x-1}{e^x+1} < 1$ per ogni $x \in R$, la funzione $f(x)$ è limitata. Lo estremo superiore è 1, in quanto per $0 < \varepsilon < 2$ la disuguaglianza $(e^x-1)/(e^x+1) > 1-\varepsilon$ è certamente verificata per $x > \log[(2-\varepsilon)/\varepsilon]$. Analogamente si verifica che l'estremo inferiore è -1. Evidentemente non esistono nè il minimo nè il massimo di f su R]

9.27 Sia I un intervallo di R non necessariamente chiuso nè limitato. Sia f(x) continua in I. Se f(x) tende a $+\infty$ per x tendente agli estremi dell'intervallo I, allora esiste il minimo di f(x) su I.

[Per fissare le idee sia $I=(a,b)$ con $a,b \in R$. Sia $M > f((a+b)/2)$. Essendo $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ esiste $\delta = \delta(M)$ tale che:

$$x \in (a,a+\delta) \cup (b-\delta,b) \Rightarrow f(x) > M.$$

Per il teorema di Weierstrass $\exists x_o \in [a+\delta, b-\delta]$ tale che $f(x_o) \le f(x)$, $\forall x \in [a+\delta, b-\delta]$. In particolare è $f(x_o) \le f((a+b)/2)$, e perciò si ha

$$f(x_o) \le f((a+b)/2) < M < f(x) \quad \forall x \in (a,a+\delta) \cup (b-\delta,b),$$

cioè $f(x_o) \le f(x)$ $\forall x \in I$]

9.28 Una funzione $f:(a,b) \to R$ si dice *convessa* se per $x,y \in (a,b)$ e per $\lambda \in (0,1)$ si ha

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Verificare che una funzione convessa in (a,b) è ivi continua.

[Siano $x_o \in (a,b)$ e $\delta>0$ tali che $x_o-\delta \in (a,b)$ e $x_o+\delta \in (a,b)$. Per ogni $\vartheta \in (0,1)$ si ha $x_o=(x_o-\delta)\vartheta/(1+\vartheta)+(x_o+\vartheta\delta)/(1+\vartheta)$ e, per la convessità di f:

(1) $f(x_o) \le \vartheta f(x_o-\delta)/(1+\vartheta)+f(x_o+\vartheta\delta)/(1+\vartheta)$.

D'altra parte è $x_o+\vartheta\delta = \vartheta(x_o+\delta)+(1-\vartheta)x_o$ e, per la convessità di f:

(2) $\qquad f(x_o+\vartheta\delta) \le \vartheta f(x_o+\delta)+(1-\vartheta)f(x_o)$.

Da (1) e (2) si ha, in definitiva, $\forall \vartheta \in (0,1)$

$$(1+\vartheta)f(x_o) - \vartheta f(x_o-\delta) \le f(x_o+\vartheta\delta) \le \vartheta f(x_o+\delta)+(1-\vartheta)f(x_o)$$

e allora è $\lim_{\vartheta\to 0^+} f(x_o+\vartheta\delta)=f(x_o)$, cioè f è continua da destra in x_o.
Analogamente si vede che f è continua da sinistra in x_o]

9C. Funzioni uniformemente continue

Sia $f: I \to R$ una funzione continua nell'intervallo I di R. Si dice che f è *uniformemente continua* se $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ tale che risulti $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ per ogni coppia x,y di punti di I tali che $|x-y|<\delta$.

Notevole è il seguente

TEOREMA DI CANTOR. *Se f è continua nell'intervallo chiuso e limitato* $[a,b]$, *allora essa è uniformemente continua.*

9.29 Verificare che la funzione $f: x\in[1,+\infty) \to \sqrt{x}$ è uniformemente continua.

[Per ogni coppia $x,y\in [1,+\infty)$ si ha

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \le \frac{1}{2} |x-y| .$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, posto $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon$ si ha $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| < \varepsilon$ per ogni coppia di punti $x,y\in[1,+\infty)$, tali che $|x-y| < \delta_\varepsilon$]

9.30 Sia $b\in R$. Verificare che la funzione $f: x\in(-\infty,b] \to e^x$ è uniformemente continua.

[Essendo $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, esiste $\eta > 0$ tale che $|t| < \eta \implies$ $\implies |e^t-1| < \frac{3}{2} |t|$. Allora, per $x,y \in(-\infty,b]$ tali che $|x-y| < \eta$, si ha

$$|e^x - e^y| = e^y |e^{x-y}-1| < \frac{3}{2} e^b |x-y| .$$

Pertanto, fissato $\varepsilon > 0$, posto

$$\delta = \min \{\eta, \frac{2\varepsilon}{3e^b}\} ,$$

si ha $|x-y| < \delta \implies |e^x - e^y| < \varepsilon$]

9.31 Sia $f: I \to R$ una funzione continua nell'intervallo I di R. Verificare che f è uniformemente continua se e solo se per ogni coppia (x_n), (y_n) di successioni di punti di I tali che $\lim_n |x_n-y_n| = 0$, si ha $\lim_n |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

[Sia f uniformemente continua e siano (x_n), (y_n) due successioni di punti di I tali che $\lim_n |x_n-y_n| = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$ sia $\delta > 0$ tale che $|x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Per ipotesi esiste $\nu\in N$

tale che, $\forall n \geq \nu$, $|x_n - y_n| < \delta$; allora, per l'implicazione precedente è $|f(x_n)-f(y_n)| < \varepsilon$, $\forall n \geq \nu$ cioè $\lim_n |f(x_n)-f(y_n)| = 0$.

Viceversa, se è verificata la condizione indicata, la f è necessariamente uniformemente continua. Supponiamo per assurdo che $\exists \varepsilon > 0$ e $\exists (x_n), (y_n)$ tali che $|x_n-y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon$. Allora è $\lim_n |x_n-y_n| = 0$ mentre non può essere $\lim_n |f(x_n)-f(y_n)| = 0$]

9.32 Tenendo presente l'esercizio precedente, mostrare che la funzione $f: x \in (0,+\infty) \to \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua.

[Posto $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{2}{n}$, si ha $\lim_n |y_n-x_n| = \lim_n \left|\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right| = 0$, mentre si ha $\lim_n |f(y_n)-f(x_n)| = \lim_n |f(\frac{2}{n}) - f(\frac{1}{n})| = \lim_n \frac{n}{2} = +\infty$]

9.33 Sia $\alpha > 0$ e sia $f: x \in [0,+\infty) \to x^\alpha \in [0,+\infty)$. Verificare che f è uniformemente continua se e solo se è $0 < \alpha \leq 1$.

[Poichè, a norma del teorema di Cantor, f è uniformemente continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,1]$, basta verificare la tesi nell'intervallo $[1,+\infty)$.
Se è $\alpha \leq 1$, per $y \geq x \geq 1$ si ha $\frac{y}{x} \geq 1$ e quindi $(\frac{y}{x})^\alpha \leq \frac{y}{x}$. Allora:

$$y^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left[(\frac{y}{x})^\alpha - 1\right] \leq x^\alpha \left[\frac{y}{x} - 1\right]$$

cioè, risulta

$$y^\alpha - x^\alpha \leq x^{\alpha-1}(y-x).$$

Essendo $\alpha \leq 1$, $x \geq 1$, allora è anche $x^{\alpha-1} \leq 1$ e perciò

$$y^\alpha - x^\alpha \leq y - x .$$

Da ciò segue facilmente che f è uniformemente continua.

Se invece è $\alpha > 1$, $y \geq x \geq 1$, allora si ha $(\frac{y}{x})^{\alpha} \geq \frac{y}{x}$ e quindi

$$y^{\alpha}-x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[(\frac{y}{x})^{\alpha}-1\right] \geq x^{\alpha}\left[\frac{y}{x}-1\right]$$

cioè, risulta per $y \geq x \geq 1$

$$y^{\alpha}-x^{\alpha} \geq x^{\alpha-1}(y-x).$$

Allora, posto $x_n = n$, $y_n = n + 1/n^{\alpha-1}$, si ha

$$y_n^{\alpha}-x_n^{\alpha} \geq x_n^{\alpha-1}(y_n-x_n) = n^{\alpha-1}/n^{\alpha-1} = 1$$

e dunque, pur essendo $\lim_n |y_n - x_n| = 0$, non si ha $\lim_n |y_n^{\alpha}-x_n^{\alpha}| = 0$. Ciò a norma dell'esercizio 9.31, implica che $f(x)=x^{\alpha}$ per $\alpha > 1$ non è uniformemente continua]

9.34 Una funzione $f: I \to R$ definita nell'intervallo I di R si dice *lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\, x,y\in I.$$

Verificare che una funzione lipschitziana è anche uniformemente continua.

[Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\delta_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{L}$; allora risulta $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ per ogni coppia x,y di punti di I tali che $|x-y| < \delta_{\varepsilon}$]

9.35 Tenendo presente l'esercizio precedente, dimostrare che le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sono uniformemente continue in R.

[Tenendo presente le formule di prostaferesi, si ha:

$$|\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y| = 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \leq |x-y|$$

in quanto $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$, $\forall\, t \in R$. Analogamente si prova che $|\cos x-\cos y| \leq |x-y|$. Da cui, grazie all'esercizio precedente, segue l'asserto]

9.36 Sia $f:(a,b)\to R$ una funzione continua nell'intervallo limitato (a,b) e supponiamo che esistano finiti i limiti di f in a ed in b. Verificare che f è uniformemente continua.

[Posto $\ell' = \lim_{x\to a^+} f(x)$, $\ell'' = \lim_{x\to b^-} f(x)$, la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \ell' & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{se } x\in (a,b) \\ \ell'' & \text{se } x = b \end{cases}$$

è continua nell'intervallo chiuso $[a,b]$ ed allora è uniformemente continua, a norma del teorema di Cantor. Di conseguenza, anche f è uniformemente continua]

9.37 Verificare che la funzione $f(x)=x^2$ è lipschitziana nell'intervallo $[-1,1]$.

[Per ogni coppia x,y di numeri reali si ha $|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x+y)(x-y)| = |x+y|\,|x-y|$. Inoltre $x,y\in[-1,1] \Rightarrow -1\le x\le 1$ e $-1\le y\le 1 \Rightarrow -2\le x+y\le 2 \Rightarrow |x+y| \le 2$. Abbiamo così dimostrato che per $x,y \in[-1,1]$, $|f(x)-f(y)| \le 2\,|x-y|$]

9.38 Verificare che la funzione $f(x) = x^2$ non è lipschitziana in R.

[Se f fosse lipschitziana, esisterebbe $k > 0$ tale che, per ogni $x,y \in R$

$|x^2-y^2| \le k\,|x-y|$. In particolare, per $y=0$, si avrebbe

$|x|^2 \le k\,|x|$ per ogni $x \in R$ e dunque $x^2 \le kx$, $\forall x > 0$. Da ciò

seguirebbe $x \le k$ per ogni $x > 0$, il che è assurdo]

9.39 Verificare che la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana nell'intervallo $[0,1]$.

[Se $f(x)$ fosse lipschitziana, esisterebbe $L > 0$ tale che $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le$

$\le L\,|x-y|$ per ogni coppia x,y di punti di $[0,1]$. In particolare

lare, scegliendo $y = 0$, si avrebbe $\sqrt{x} \leq L\, x$, $\forall x \in [0,1]$ e cioè $1/\sqrt{x} \leq L$ per ogni $x \in (0,1]$. Ciò è assurdo, in quanto $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$]

9.40 Sia f(x) una funzione continua su R e periodica di periodo T(>0), cioè tale che f(x+T)=f(x) per ogni x∈R. Verificare che f(x) è uniformemente continua su R.

[In base al teorema di Cantor, $f(x)$ è uniformemente continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,2T]$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x,y \in [0,2T], \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon .$$

Pur di cambiare δ con $\delta' = \min\{\delta; T\}$, possiamo supporre che sia $\delta \leq T$.
Consideriamo ora due numeri reali x', y' tali che $|x'-y'| < \delta$.
Se, ad esempio, è $x' \leq y'$, allora risulta $x' \leq y' < x' + \delta$. Indichiamo con $k(= [x'/T])$ la parte intera di x'/T, cioè l'intero tale che

$$k \leq \frac{x'}{T} < k+1 .$$

Risulta $kT \leq x' < (k+1)T$. Essendo $\delta \leq T$, risulta anche

$$kT \leq x' \leq y' < x' + \delta < (k+1)T + T = (k+2)T.$$

Posto $x=x'-kT$, $y=y'-kT$, si ha

$$0 \leq x < T; \; 0 \leq y < 2T; \quad |x-y| = |x'-y'| < \delta .$$

Dato che $f(x)=f(x+kT)=f(x')$, $f(y)=f(y+kT)=f(y')$, la tesi segue dalla uniforme continuità di $f(x)$ nell'intervallo $[0,2T]$:

$$|f(x')-f(y')| = |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$]

Capitolo 10

DERIVATE

10A. Derivate delle funzioni elementari

Sia $f: X \subseteq R \to R$ e sia $x \in X$ un punto di accumulazione per X. Ricordiamo che f si dice *derivabile* in x se esiste ed è finito il limite

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

Tale limite si indica con $f'(x)$ o con $Df(x)$ e prende il nome di *derivata* di f in x.

Se nella (*) si considera, in luogo del limite per $h\to 0$, soltanto il limite destro per $h\to 0^+$ oppure il limite sinistro per $h\to 0^-$ si parla di derivabilità (o di derivata) destra oppure sinistra in x.

Assai utile è la seguente *tabella delle derivate* di funzioni elementari

$$D\, x^{\alpha}=\alpha x^{\alpha-1}; \quad D\log_a x = \frac{1}{x\log a}\ ; \ Da^x=a^x\log a;$$

$$D\mathrm{sen}x=\cos x;\ D\cos x=-\mathrm{sen}x;$$

$$D\mathrm{tg}x= \frac{1}{\cos^2 x}\ ;\ D\mathrm{cotg}x =- \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$$

$$\mathrm{Darcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ; \ \mathrm{Darccos}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ ;$$

$$\mathrm{Darctg}x = \frac{1}{1+x^2}$$

In particolare:

$$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad ; \quad D\log x = \frac{1}{x} \ ; \quad De^x = e^x \ .$$

Ricordiamo inoltre le *regole di derivazione* della somma del prodotto e del quoziente

(1) $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$

(2) $D(f\cdot g)(x) = Df(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot Dg(x)$

(3) $D\,\dfrac{f}{g}\,(x) = \dfrac{Df(x)\cdot g(x)-f(x)\,Dg(x)}{(g(x))^2}$

10.1 Applicando le regole di derivazione, dimostrare che

$D\,(\sqrt[4]{x} + x) = 1/4\sqrt[4]{x^3} + 1$

$D\,(3x^2+5x+4) = 6x+5$

$D\,(x^3-2x+\cos x) = 3x^2 - 2 - \mathrm{sen}\,x$

$D\,(x\cos x + \mathrm{sen}\,x)=2\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$

$D\,(x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x) = x\cos x$

$D\,(\mathrm{sen}\,x\cos x + x)=2\cos^2 x$

$D\,\dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} \ ; \quad D\,\dfrac{x^3}{1-x} = \dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$

$D\,\mathrm{sen}^2 x = \mathrm{sen}2x \ ; \quad D\mathrm{tg}^2 x = 2\mathrm{tg}x/\cos^2 x$

$D\,(\mathrm{tg}x + 1/\cos x)=(1+\mathrm{sen}\,x)/\cos^2 x$

$D\,(x\log x - x) = \log x; \quad D(1/x^2)=-2/x^3$

$D(x^2 \cdot 2^x) = x2^x(2+x\log 2)$

$D(2^x \log_2 x) = 2^x(\log 2 \log_2 x+1/x\log 2)$

$D(1/\text{sen } x) = -\cos x/\text{sen}^2 x$

$D(1/\log_2 x) = -1/(x\log 2 \log_2^2 x)$

$D[(a-x)/(a+x)] = -2a/(a+x)^2$

$D[(ax+b)/(cx+d)]=(ad-bc)/(cx+d)^2$

$D[(x+\sqrt{x})/\sqrt{x}] = 1/(2\sqrt{x})$

$D[(1+\sqrt[4]{x^3})/(1-\sqrt[4]{x^3})]=3/[2\sqrt[4]{x}(1-\sqrt[4]{x^3})^2]$

$D[\cos x (\text{tg}x - 1)] = \text{sen } x + \cos x$

$D[(\log x)/x^n] = (1-n \log x)/x^{n+1}$

$D(x^n\log x) = x^{n-1}(n \log x + 1)$

$D(e^x/x^2)= e^x(x-2)/x^3$

$D(e^x/\text{sen}x)=e^x(\text{sen}x-\cos x)/\text{sen}^2 x$

$D[(1+e^x)/(1-e^x)] = 2e^x/(1-e^x)^2$

$D[\log x/(1+x^2)]=[1+x^2(1-2\log x)]/x(1+x^2)^2$

$D(x \text{ arcsen } x + \sqrt{1-x^2}) = \text{arcsen } x$

$D[e^x \text{tg}(x/2)] = (1+\text{sen } x)e^x/(1+\cos x)$

$D(x-\text{sen } x \cos x)/2 = \text{sen}^2 x$

$D(x+\text{sen } x \cos x)/2 = \cos^2 x$

$D(e^x \cos x) = e^x(\cos x-\text{sen } x)$

$D(\cos x/e^x)=-(\text{sen } x+\cos x)/e^x$

$D[(1-e^x)/(1+e^x)]=-2e^x/(1+e^x)^2$

$D(e^x/\text{sen } x)= e^x(\text{sen}x-\cos x)/\text{sen}^2 x$

$D[(1-\text{tg } x)/(1+\text{tg } x)] =-2/(\text{sen } x+\cos x)^2$

$D(x \cos x \log x)=\log x(\cos x-x \text{ sen } x)+\cos x$

$D[(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x})] =1/[\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2]$

$$D[(1+\cos x)/\cos x] = \operatorname{sen}x/\cos^2 x$$

10.2 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D(1/x)$.

[Si ha $D(1/x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{hx(x+h)} =$

$= \lim_{h\to 0} - \dfrac{1}{x(x+h)} = -1/x^2$]

10.3 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D\sqrt{x}$.

[Si ha $D\sqrt{x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$]

10.4 Calcolare, in base alla definizione, la derivata $D\operatorname{tg}x$.

[$D\operatorname{tg}x = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}h}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}h} - \operatorname{tg}x}{h} =$

$=(1+\operatorname{tg}^2 x) \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{1-\operatorname{tg}x \operatorname{tg}h} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$ per $x \neq (2k+1)\pi/2$, infatti $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}h}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}h}{h} \cdot \dfrac{1}{\cos h} = 1$]

10.5 Calcolare, in base alla definizione, la derivata Dx^n, con n intero positivo.

$$[\ Dx^n = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n+nx^{n-1}h+n(n-1)x^{n-2}h^2/2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n-x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} [nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}h/2 +\ldots+ nxh^{n-2} + h^{n-1}] = nx^{n-1}\ ]$$

Ricordiamo che le *funzioni iperboliche* sono definite per $x\in R$ da

$$\text{senh}x=(e^x-e^{-x})/2;\ \cosh x=(e^x+e^{-x})/2;$$

$$\text{tgh}x = (e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$$

Determiniamo le loro inverse. Ad esempio, nel caso della funzione seno iperbolico, se è $y = \text{sen}\,h\,x= = (e^x-e^{-x})/2$, posto $e^x = \alpha$, si trova $\alpha^2-2y\alpha-1=0$ e quindi, essendo $\alpha > 0$, si ha

$$\alpha=y+\sqrt{1+y^2}\quad,\qquad x=\log\,(y+\sqrt{1+y^2})\ .$$

Perciò la funzione inversa del seno iperbolico, che prende il nome di *settore seno iperbolico*, è definita per $y\in R$ da settsenhy = $\log\,(y+\sqrt{1+y^2})$.

Analogamente, da

$$y=\cosh x=(e^x+e^{-x})/2,\quad y=\text{tgh}x=(e^x-e^{-x})/(e^x+e^{-x})$$

si ricava rispettivamente

$$x=\log\,(y\pm\sqrt{y^2-1}\,),\qquad x=[\log(1+y)/(1-y)]/2$$

per cui le funzioni inverse di $y=\cosh x$ e $y=\text{tgh}x$ sono definite, rispettivamente per $y \geq 1$ e per $|y| < 1$ da

$$\text{settcosh}y=\log(y+\sqrt{y^2-1}\,),\ \text{setttgh}y=[\log(1+y)/(1-y)]/2$$

stabilendo di assumere il segno + dinanzi al radicale che figura nell'espressione di settcoshy.

10.6 Verificare che

$D\operatorname{senh}x = \cos hx$; $\quad D\,\operatorname{settsenh}y = 1/\sqrt{1+y^2}$

$D\cosh x = \operatorname{sen} hx$; $\quad D\,\operatorname{settcosh}y = 1/\sqrt{y^2-1}$ (per $y \neq 1$)

$D\operatorname{tgh}x = 1/\cosh^2 x$; $\quad D\operatorname{sett}\operatorname{tgh}y = 1/(1-y^2)$

$D[(1-\operatorname{setttgh}x)/(1+\operatorname{setttgh}x)] =$

$= 2/(x^2-1)(1+\operatorname{setttgh}x)^2$

10B. Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Ricordiamo le *regole di derivazione* delle funzioni composte e delle funzioni inverse:

(4) $D\, f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

(5) $D\, f^{-1}(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$

Dalla (4), tenendo presente le derivate delle funzioni elementari, si ricava l'ulteriore *tabella di derivate*

$D[g(x)]^{\alpha} = \alpha[g(x)]^{\alpha-1}\, Dg(x)$

$D\sqrt{g(x)} = Dg(x)/2\sqrt{g(x)}$; $\quad D[1/g(x)] = -Dg(x)/g^2(x)$;

$D\log g(x) = \dfrac{Dg(x)}{g(x)}$; $\quad D\, e^{g(x)} = e^{g(x)}\, Dg(x)$;

$D\log_a g(x) = \dfrac{Dg(x)}{g(x)\log a}$; $\quad D\, a^{g(x)} = a^{g(x)}\log a \cdot Dg(x)$;

$D\operatorname{sen} g(x) = \cos g(x)\cdot Dg(x)$; $\quad D\cos g(x) = -\operatorname{sen} g(x)\cdot Dg(x)$;

$D\operatorname{tg} g(x) = \dfrac{Dg(x)}{\cos^2 g(x)}$; $\quad D\operatorname{cotg} g(x) = -\dfrac{Dg(x)}{\operatorname{sen}^2 g(x)}$;

$D\arcsen g(x) = \dfrac{Dg(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$; $\quad D\arccos g(x) = -\dfrac{Dg(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$;

$$D \operatorname{arctg} g(x) = \frac{Dg(x)}{1+g^2(x)} \quad .$$

Ricordiamo che le funzioni elementari sono derivabili in ogni punto del loro dominio, ad eccezione della funzione $y=x^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ che non è derivabile per $x = 0$, delle funzioni $y=\operatorname{arcsen}x$, $y=\arccos x$ che non sono derivabili per $x=-1$ e per $x=1$ e della funzione $y=\operatorname{settcosh}x$ che non è derivabile per $x=1$.

Pertanto, se f è una di tali funzioni, detto X l'insieme di definizione della funzione $h(x)=f(g(x))$ non è detto che tale funzione sia derivabile in ogni punto di X.

Ad esempio, nel caso della funzione $h(x)=\operatorname{arcsen}g(x)$, il teorema di derivazione delle funzioni composte non si potrà applicare nei punti $x_0 \in X$ tali che $g(x_0)=\pm 1$. Per stabilire l'eventuale derivabilità della funzione $h(x)=\operatorname{arcsen} g(x)$ in tali punti, si potrà studiare direttamente il limite del rapporto incrementale, oppure, se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0} h'(x) = \ell ,$$

si potrà utilizzare un teorema (ved. esercizio 10.36) in base al quale, se $\ell \in R$, allora h è derivabile in x_0 e risulta $h'(x_0)=\ell$; se $\ell=\pm\infty$ allora h non è derivabile in x_0.

10.7 Verificare che la funzione $h(x)=\operatorname{arcsen}\sqrt{1-x^2}$, definita in $[-1,1]$, è derivabile in $(-1,0)\cup(0,1)$, ma non è derivabile in $-1,0$ e 1.

[Essendo $\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$ $h'(x)=-x/(|x|\sqrt{1-x^2})$, ne segue $\lim_{x\to -1^+} h'(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-} h'(x)=1$, $\lim_{x\to 0^+} h'(x)=-1$, $\lim_{x\to 1^-} h'(x)=-\infty$]

10.8 Verificare, mediante le regole di derivazione, che le seguenti funzioni sono derivabili in un sottoinsieme proprio X' del loro dominio X. Verificare poi che, per ciascuna di esse, il limite del rapporto incrementale relativo ad $x_0 \in X-X'$ (x_0 di accumulazione per X) è $+\infty$.

(a) $f(x)= e^{\sqrt{x}}$ (b) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$

(c) $f(x)=\log \text{arcsen} x$ (d) $f(x)= \sqrt{\log x}$

10.9 Utilizzando la regola (4) di derivazione delle funzioni composte, verificare che

$D\, \text{sen}\alpha x=\alpha\cos\alpha x;\quad D\cos\alpha x = -\alpha\, \text{sen}\, \alpha x$

$D \log\log x = 1/x \log x$

$D \log\log\log x =1/[x \log x \log\log x]$

$D\, 3^{\text{sen } x}= 3^{\text{sen } x} \log 3 \cos x$

$D\, 9^{\text{arctg } x}= 9^{\text{arctg } x} \log 9/(1+x^2)$

$D\, e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} /2\sqrt{x}$

$D \cos 3^x =- \text{sen } 3^x \cdot 3^x \log 3$

$D \log\cos x =- \text{tg } x$

$D\, (x\text{tg}x+\log\cos x-x^2/2)= x\text{tg}^2x$

$D \sqrt{x^2+x+1} = (2x+1)/2\sqrt{x^2+x+1}$

$D\, \text{arcsen}^5x = (5\, \text{arcsen}^4x)/\sqrt{1-x^2}$

$D\, (\log_2x)^3 = 3(\log_2x)^2/ (x \log 2)$

$D\, 5^{x^3+x+1} = 5^{x^3+x+1} \log 5\, (3x^2+1)$

$D \log (\sqrt{1+x} / \sqrt{1-x}) = 1/(1-x^2)$

$D\, 4^{\text{arcsen } x}= (4^{\text{arcsen } x}\log 4)/\sqrt{1-x^2}$

$D\, 7^{\text{arctg } x} = (7^{\text{arctg } x}\log 7)/(1+x^2)$

$D\, 3^{\text{tg}x} = (3^{\text{tg } x} \log 3)/ \cos^2x$

$D \log \text{sen}x = \cos x/\text{sen } x$

$D\, \text{sen} \log x = (\cos\log x)/x$

$D \operatorname{sen} 3^x = (\cos 3^x) 3^x \log 3$

$D \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) = [\cos(\operatorname{arctg} x)]/(1+x^2) =$
$= 1/[(1+x^2)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}] = 1/[(1+x^2)\sqrt{1+x^2}]$

$D\, e^{1/\log x} = -e^{1/\log x}/x \log^2 x$

$D\, 2^{x/\log x} = 2^{x/\log x} \log 2 (\log x - 1)/\log^2 x$

$D \log [e^x/(e^x+1)] = 1/(1+e^x)$

$D(x^n e^{\operatorname{sen} x}) = x^{n-1} e^{\operatorname{sen} x} (n + x \cos x)$

$D \log \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} = \dfrac{1}{\cos x}$

$D \operatorname{arcsen} [(x^2-1)/x^2] = 2/(x\sqrt{2x^2-1})$

$D \operatorname{arcsen} (x/\sqrt{1+x^2}) = 1/(1+x^2)$

$D[\operatorname{arctg}(\log x) + \log(\operatorname{arctg} x)] = 1/[x(1+\log^2 x)] +$
$+ 1/[(1+x^2)\operatorname{arctg} x]$

$D \operatorname{arctg} (1/x) = -1/(1+x^2)$

$D \cos\cos\cos x = -(\operatorname{sen}\cos\cos x)(\operatorname{sen}\cos x)(\operatorname{sen} x)$

$D \sqrt[3]{x+\sqrt{x}} = (1+2\sqrt{x})/[6\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}]$

$D \log\cos [(x-1)/x] = (-1/x^2)\operatorname{tg}[(x-1)/x]$

$D \operatorname{arctg} [(\log x+1)/(\log x-1)] = -1/[x(\log^2 x+1)]$

10.10 Verificare che $D|x| = x/|x|$ per $x \neq 0$.

[Basta verificare che $D|x| = 1$ per $x > 0$ e $D|x| = -1$ per $x<0$]

10.11 Verificare che $D \log |x| = 1/x$ per $x \neq 0$.

[Essendo $D|x| = x/|x|$ per $x \neq 0$, allora, per il teorema di derivazione delle funzioni composte, è $D\log|x| = \dfrac{1}{|x|}\cdot\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{1}{x}$]

10.12 Sia $f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo I di R. Dimostrare che per ogni $x \in I$ tale che

$f(x) \neq 0$:

$$D \log |f(x)| = f'(x)/f(x)$$

[Se è $f(x) > 0$, allora f è positiva in un intorno di x e dunque:

$$D \log |f(x)| = D \log f(x) = f'(x)/f(x);.$$

Se è $f(x) < 0$, allora f è negativa in un intorno di x e perciò:

$$D \log |f(x)| = D \log (-f(x)) = (-1/f(x)) \cdot D(-f(x)) =$$
$$= (-1/f(x))(-f'(x)) = f'(x)/f(x) \;]$$

10.13 Utilizzando l'esercizio precedente, verificare che

$D \log |\cos x| = -\mathrm{tg}\, x$

$D \log |\log |x|| = 1/(x \log |x|)$

$D \log_2 |\mathrm{sen}\, x| = \mathrm{cotg}\, x/\log 2$

$D \log |\mathrm{tg}(x/2)| = 1/\mathrm{sen}\, x$

$D (x - 2\log |x+1|) = (x-1)/(x+1)$

$D \log |\mathrm{tg}\, x| = 1/(\mathrm{sen}\, x \cos x)$

$D \log |\mathrm{cotg} x| = - 2/\mathrm{sen}\, 2x$

10.14 Siano f e g due funzioni derivabili nell'intervallo $[a,b]$ e sia $f(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. Calcolare la derivata

$$D\,[f(x)]^{g(x)}$$

[Essendo $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha:

$$D\,[f(x)]^{g(x)} = D\, e^{g(x)\log f(x)} = e^{g(x)\log f(x)} \cdot D(g(x)\log f(x)) =$$

$$= [f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \;]$$

10.15 Utilizzando l'esercizio precedente, provare che:

$Dx^x = x^x(1+\log x)$

$D(\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x}\ )^{\sqrt{x}}\ [(\log x)/4\sqrt{x} + 1/2\sqrt{x}\ ]$

$Dx^{1/x} = x^{(1/x)-2}\ (1 - \log x)$

$Dx^{\arccos x} = x^{\arccos x}\ [(-\log x)/\sqrt{1-x^2}+(\arccos x)/x]$

$D\ x^{x^x} = x^{x^x}\cdot\ x^x\ (\log^2 x + \log x + 1/x)$

$D\ (\mathrm{sen} x)^x = (\mathrm{sen}\ x)^x\ (\log \mathrm{sen}\ x + x/\mathrm{tg}\ x)$

$D(\mathrm{sen}\ x)^{\cos x} = (\mathrm{sen}\ x)^{\cos x}(\cos^2 x/\mathrm{sen} x-$
$-\mathrm{sen}\ x \log \mathrm{sen}\ x)$

$D(\cos\ x)^{\mathrm{sen}\ x} = (\cos x)^{\mathrm{sen} x}(\cos\ x \log \cos x-\mathrm{sen} x \mathrm{tg} x)$

$D\ x^{\log x} = 2x^{\log x-1}\cdot\log\ x$

$D\ (\log x)^x = (\log\ x)^x\ (1/\log x + \log \log x)$

$D\ e^{x^x} = e^{x^x}\ (1+ \log\ x)\ x^x$

$D\ \mathrm{sen}\ (x^{\log x}) = 2(\log\ x)x^{\log x}\cos(x^{\log x})/\ x$

$D\ (\cos x)^{1/x} = -(\cos\ x)^{1/x}\ [(\log \cos\ x)/x + \mathrm{tg}\ x]/x$

10.16 Dire se la funzione $f(x)= x|x-2|$ è derivabile nel punto $x = 2$.

[Essendo $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x-2} = 2$, e $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x(2-x)}{x-2} = -2$, la funzione non è derivabile nel punto $x=2$]

10.17 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \le c \\ ax+b & \text{se} \quad x > c \end{cases} \qquad a,b,c \in R$$

determinare a e b in funzione di c, in modo che esista $f'(c)$.

[Deve risultare $c^2 = ac + b$ e $2c = a$. Da cui $a=2c$, $b=-c^2$]

10.18 Scrivere l'equazione della tangente al grafico della funzione $y=x^n$, n intero positivo, nel punto $(1,1)$.

[Ricordando che se f è derivabile in x_o la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_o,f(x_o))$ ha equazione

$$y=f(x_o)+f'(x_o)(x-x_o);$$

la tangente cercata ha equazione $y=nx+1-n$]

10.19 Scrivere l'equazione della retta perpendicolare al grafico della funzione $y=\log x$ nel punto di ascissa 1.

[Se f è derivabile in x_o, la retta perpendicolare al grafico di f nel punto $(x_o,f(x_o))$ è la retta passante per il punto e perpendicolare alla tangente. Perciò, se è $f'(x_o) \neq 0$ la perpendicolare ha equazione

$$y = f(x_o) - \frac{1}{f'(x_o)}(x-x_o) .$$

Nel nostro caso, allora, la perpendicolare ha equazione $y=1-x$]

10C. Derivate di ordine superiore

Sia $y=f(x)$ una funzione derivabile nell'intervallo (a,b), cioè derivabile in ogni punto di (a,b). Se la funzione $x\in(a,b)\to f'(x)$ è derivabile in un punto x, allora la sua derivata in x si chiama *derivata seconda* di f in x e si indica con $f''(x)$. Analogamente si definisce la derivata terza $f'''(x),\ldots$, la derivata n-sima $f^{(n)}(x)$ di f in x.

Spesso la derivata n-sima di f in x si indica con il simbolo $D^n f(x)$.

Ricordiamo la formula di Leibnitz per il calcolo della derivata n-sima di un prodotto $f\cdot g$:

$$D^n(f\cdot g)=g\cdot D^n f+\binom{n}{1} Dg\cdot D^{n-1}f+\ldots+\binom{n}{n-1} D^{n-1}g\cdot Df+fD^n g$$

ove

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad .$$

10.20 Calcolare la derivata seconda della funzione

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$

[Si ha $y'=[\,(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)\,]/(a'x^2+b'x+c')^2$.

Inoltre è $y''=[\,-2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\,]/(a'x^2+b'x+c')^3$ con

$A = a'(ab'-a'b)$; $B= 3a'(ac'-a'c)$; $C = 3a'(bc'-b'c)$; $D=b'(bc'-b'c)+$

$+ c'(a'c-ac')$]

10.21 Posto, per $x > 0$, $f(x)= 1/x$, verificare, per in duzione, che per ogni $n\in N$ e per $x > 0$ si ha

(*) $f^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, x^{-(n+1)}$

[La (*) è evidente per n=1. Supponiamola vera per n=m e dimostriamola per n=m+1; in tal modo, per il principio di induzione, la (*) sarà vera per ogni n. Sia dunque $f^{(m)}(x) = (-1)^m\, m!\, x^{-(m+1)}$ per $x > 0$. Derivando si ha $f^{(m+1)}(x) = f^{(m)\prime}(x)=(-1)^m m!\ [\,-(m+1)\,]\, x^{-(m+1)-1} =$
$= (-1)^{m+1}(m+1)!\, x^{-(m+2)}$. Da cui l'asserto]

10.22 Verificare che, per $\alpha\in R$, si ha:

$$D^n x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \qquad \forall\, x > 0.$$

10.23 Sia $p(x)$ il polinomio $p(x) = a_n x^n+\ldots+a_1x+a_0$; verificare che è

$$D^n p(x) = n!\, a_n, \qquad D^k p(x) = 0 \qquad \text{per } k > n.$$

10.24 Calcolare le derivate n-sime delle seguenti fun zioni

(a) $y = e^x$ (b) $y = 3^x$ (c) $y=e^{-x}$

(d) $y = \log x$

[(a) e^x, (b) $3^x(\log 3)^n$, (c) $(-1)^n e^{-x}$, (d) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$]

10.25 Verificare che

D^n sen x = sen $(x+n\pi/2)$; $D^n \cos x=\cos (x+n\pi/2)$.

10.26 Calcolare la derivata

$$D^n \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad-bc\neq 0).$$

[$(-1)^{n-1} c^{n-1} n!(ad-bc)/(cx+d)^{n+1}$]

10.27 Calcolare la derivata $D^n(x^2\log x)$.

[Per la formula di Leibnitz si ha $D^n(x^2 \log x) =$

$= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k}(D^k x^2)(D^{n-k}\log x)=(-1)^{n-1}(n-1)!/(n-2) +$

$+ (-1)^{n-2}\, 2n(n-2)!/x^{n-2}+(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!/x^{n-2}=(-1)^{n-3}2(n-3)!/x^{n-2}$]

10.28 Calcolare la derivata

$$D^n \operatorname{arctg} x$$

per $x=0$.

[Posto $f(x)=\operatorname{arctg}x$, si ha $f'(x)=1/(1+x^2)$, $f''(x)=-2x/(1+x^2)^2$,... . Per ottenere una formula relativa alla derivata n-sima si procede nel modo seguente: derivando n-1 volte ambo i membri dell'uguaglianza $(1+x^2)f'(x) = 1$, con la formula di Leibnitz, si ha:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-1)xf^{(n-1)}(x)+(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(x) = 0$$

da cui $f^{(n)}(x)=-(n-1)[2xf^{(n-1)}(x)+(n-2)f^{(n-2)}(x)]/(1+x^2)$. Per $x=0$ si ha $f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0)$. Essendo $f^{(0)}(0)=f(0)=0$ ne segue $f^{(2n)}(0) = 0$. Essendo $f'(0)=1$, ne segue $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!$]

10D. Applicazioni delle derivate

Ricordiamo alcune conseguenze del teorema di Lagrange:

- Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) allora f è crescente in $[a,b]$ se e solo se risulta $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a,b)$.
- Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$ ed è $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) per ogni $x \in (a,b)$, allora f è strettamente crescente (risp. decrescente) in $[a,b]$.

Ricordiamo le definizioni di punto di massimo o di minimo relativo per una funzione f, definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$.

Si dice che $x_0 \in X$ è di massimo (risp. minimo) relativo per f se esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$) per ogni $x \in I \cap X$.

Notevole, per la ricerca dei punti di massimo o minimo relativo per una funzione derivabile è il seguente

TEOREMA DI FERMAT. *Sia $x_0 \in (a,b)$ e sia f derivabile in x_0. Allora, se x_0 è massimo o minimo relativo per f, si ha $f'(x_0) = 0$.*

Osserviamo che l'annullarsi della derivata prima $f'(x_0)$ in un punto x_0 interno all'intervallo $[a,b]$ è condizione *necessaria*, ma *non sufficiente*, affinchè x_0 sia di massimo o di minimo relativo.

Ad esempio, sia $f(x)=x^3$ per $x \in [-1,1]$. Allora è $f'(0) = 0$, ma 0 non è nè punto di minimo nè di massimo relativo per f.

Una condizione sufficiente è fornita dal seguente teorema:

Sia $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0)=0$. Sia f derivabile due volte in (a,b). Allora

$$f''(x_0) > 0 \Longrightarrow x_0 \text{ minimo relativo};$$

$$f''(x_0) < 0 \Longrightarrow x_0 \text{ massimo relativo}.$$

10.29 Determinare gli insiemi in cui le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti:

(a) $f_1(x)=x^2-3x+5$ (b) $f_2(x)=x^3-3x-4$

(c) $f_3(x)=x^3-3x^2+3x+4$ (d) $f_4(x)=x+1/x$ per $x>0$

(e) $f_5(x)=\sqrt{x}-2\sqrt{x+2}$

[(a) decrescente in $(-\infty, 3/2]$, (b) decrescente in $[-1,1]$ (c) crescente in R, (d) decrescente in $(0,1]$, (e) decrescente in $-[2/\bar{3}, +\infty)$]

10.30 Per ciascuna delle seguenti funzioni, determinare i punti di massimo o minimo relativo:

(a) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x-4$ per $x\in[0,2]$

(b) $f_2(x) = 3x+1/x$ per $x\in(0,3]$

(c) $f_3(x) = x^{2/3}(x-5)$ per $x\in[0,4]$

(d) $f_4(x) = x^2/\sqrt{x^2+1}$ per $x\in[-4,3]$

(e) $f_5(x) = x^2/\sqrt{x^2+a^2}$ per $x\in R$ $(a\neq 0)$

[(a) $x=0$ minimo relativo, $x=2$ massimo relativo; (b) $x=1/\sqrt{3}$ min.rel. $x=3$ mass.rel.; (c) $x=0$ e $x=4$ mass.rel., $x=2$ min.rel.; (d) $x=-4$ e $x=3$ mass.rel., $x=0$ min.rel.; (e) $x=0$ min.rel.]

10.31 Determinare i punti di minimo o massimo relativo in $[0,1]$ per la funzione ivi definita da $f(x) = x^2 - x^4$.

[Poichè $0=f(0)=f(1) \leq f(x)$ per ogni $x\in[0,1]$, i punti 0 e 1 sono di minimo assoluto e perciò anche di minimo relativo per f. D'altra parte l'unico punto x di $[0,1]$ in cui $f'(x)=0$ è $x=1/\sqrt{2}$. Tale punto, grazie al teorema di Weierstrass, è di massimo assoluto per f e perciò anche di massimo relativo. Non vi sono altri punti di massimo o minimo relativo per f]

10.32 Determinare due numeri positivi aventi somma assegnata uguale a s e tali che il loro prodotto sia massimo.

[Detto x uno dei due numeri ed s-x l'altro, dobbiamo trovare il massimo della funzione $f:x\in[0,s]\to x(s-x)$. Poichè $f(0)=f(s)=0$ ed $f(x)>0$ $\forall x\in(0,s)$, la funzione f ha un massimo positivo assunto in un punto di $(0,s)$. Essendo $f'(x)=s-2x$, si ha $f'(x)=0$ se e solo se $x=s/2$. Essendo inoltre $f''(x)=-2<0$, il punto $x=s/2$ è di massimo per f]

10.33 Dimostrare la seguente versione del teorema di Rolle: Sia f(x) continua in $[a,+\infty)$ e derivabile in $(a,+\infty)$; se $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)$, allora esiste $\xi\in(a,+\infty)$ tale che $f'(\xi)=0$.

[Se f(x) è costante il risultato è ovvio. Altrimenti, esiste $b>a$ con $f(b)\neq f(a)$. Supponiamo che $f(b)>f(a)$; allora esiste $k=k(b)$ tale che $x\geq k \Longrightarrow f(x)<f(b)$; pertanto, in $[a,k]$, f(x) ha un massimo assoluto ξ diverso da a e da k. Ne segue $f'(\xi)=0$]

10.34 Sia f(x) continua in [a,b] e derivabile due volte in (a,b) ed esista $c\in(a,b)$ tale che $f(a)=f(b)=f(c)$. Dimostrare che esiste $\xi\in(a,b)$ tale che $f''(\xi)=0$.

[Per il teorema di Rolle, esistono $\xi_1\in(a,c)$, $\xi_2\in(c,b)$ tali che $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$. Poichè f' verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[\xi_1,\xi_2]$, esiste $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ tale che $f''(\xi)=0$]

10.35 Sia f(x) una funzione derivabile nell'intervallo I di R. Verificare che, se il prodotto $f(x)\cdot f'(x)$ ha segno costante, allora sia f(x) che f'(x) hanno segno costante in I.

[Per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha $D[f^2(x)]=2f(x)f'(x)$. Poichè per ipotesi tale derivata ha segno costante, allora la funzione $g(x)=f^2(x)$ è monotòna in I. Da ciò segue che f(x) non cambia di segno in I. Infatti, se per assurdo esistessero $x_1,x_2\in I$ con $x_1<x_2$, tali che $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, a norma del teorema degli zeri esisterebbe $x_o\in(x_1,x_2)$ tale che $f(x_o)=0$. Si avrebbe quindi $x_1<x_o<x_2$ e $g(x_1)>0$, $g(x_o)=0$, $g(x_2)>0$; perciò $g(x)=f^2(x)$ non sarebbe monotòna.

Da quanto appena dimostrato e dall'ipotesi che $f(x)\cdot f'(x)$ ha segno costante segue che anche $f'(x)$ ha segno costante]

10.36 Sia f una funzione continua nell'intervallo I di R e derivabile in $I-\{x_0\}$. Verificare che, se esiste finito il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\ell$, allora esiste anche $f'(x_0)$ e si ha $f'(x_0)=\ell$.

[Sia $h \neq 0$ tale che $x_0+h \in I$. Per il teorema di Lagrange esiste ξ nell'intervallo di estremi x_0, x_0+h tale che $[f(x_0+h)-f(x_0)]/h=f'(\xi)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $0<|x-x_0|<\delta$, $x \in I \Rightarrow$ $\Rightarrow |f'(x)-\ell|<\varepsilon$. Per ogni h tale che $0< h < \delta$, $x_0+h\in I$, si ha, essendo $0<|\xi-x_0|<\delta$, $|[f(x_0+h)-f(x_0)]/h-\ell|=|f'(\xi)-\ell|<\varepsilon$ Da cui l'asserto]

10.37 Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ per $x\in[1,2]$, dedurre la stima $13/12 < \sqrt[3]{2} < 4/3$.

[Per il teorema di Lagrange esiste $c \in (1,2)$ tale che $\sqrt[3]{2} - 1=1/3c^{2/3}$. Poichè $1 < c < 2 \Rightarrow 1 < c^{1/3} < 2$ ne segue $1/12 < 1/3c^{2/3} < 1/3$, da cui segue subito l'asserto]

10.38 Sia f(x) una funzione derivabile nell'intervallo I di R ed esista $k > 0$ tale che $|f'(x)| \leq k$ per ogni $x\in I$. Dimostrare che f è lipschitziana di costante k e perciò uniformemente continua in I.

[Siano $a,b\in I$ con $a < b$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in(a,b)$ tale che $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Ne segue $|f(b)-f(a)|=|f'(c)(b-a)| \leq$ $\leq k|b-a|$]

10.39 Sia f(x) una funzione continua con la sua derivata prima nell'intervallo $[a,+\infty)$. Se esiste ed è finito il limite $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\ell$, allora f è uniformemente continua.

[Sia $\delta > a$ tale che $|f'(x)-\ell| < 1$ per $x > \delta$. Allora è $|f'(x)| < 1 + |\ell|$ per $x > \delta$. Posto $k = \max\{\sup_{[a,\delta]} |f'|, 1+|\ell|\}$, risulta $|f'(x)| \le k$ per ogni $x \in [a,+\infty)$. Dall'esercizio precedente segue l'asserto]

10.40 Dimostrare la disuguaglianza

$$\log x \le x-1 \qquad \forall x > 0.$$

Dedurre da questa l'altra disuguaglianza (per n intero positivo):

$$\log x \le n\,(x^{1/n} - 1) \qquad \forall x > 0.$$

[Posto $f(x) = \log x - x+1$, si ha $f'(x) = 1/x - 1$ e dunque il punto $x=1$, è di massimo per f. Ne segue $f(x) \le f(1) = 0$, $\forall x > 0$. Per ottenere la seconda disuguaglianza basta porre $x^{1/n}$ al posto di x nella prima]

10.41 Sia $p > 1$. Dimostrare che per $x \ge 0$, $y \ge 0$ risulta

$$x^p + y^p \le (x+y)^p \le 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

[Se $y=0$, le disuguaglianze sono ovviamente verificate. Se $y > 0$, dividendo i tre termini per y^p otteniamo le disuguaglianze equivalenti a quelle date

$$(x/y)^p + 1 \le (x/y + 1)^p \le 2^{p-1}\,[(x/y)^p + 1].$$

Posto $t = x/y$, le disuguaglianze da dimostrare diventano

(*) $$t^p + 1 \le (t+1)^p \le 2^{p-1}(t^p+1) \qquad \forall t \ge 0.$$

Consideriamo la funzione $g(t)=(t+1)^p-t^p-1$ e dimostriamo che $g(t) \ge 0$, $\forall t \in [0,+\infty)$. Essendo $g'(t) = p\,[(t+1)^{p-1} - t^{p-1}] > 0$, la funzione g è crescente; essendo $g(0)=0$, ne segue la prima disuguaglianza (*).

Consideriamo la funzione $f(t) = 2^{p-1}(t^p+1)-(t+1)^p$ e dimostriamo che

$f(t) \geq 0$, $\forall t \in [0,+\infty)$. Essendo $f'(t)=p\left[(2t)^{p-1}-(t+1)^{p-1}\right]$, si ha $f'(t)=0$ per $t=1$; $f'(t) > 0$ per $t > 1$; $f'(t) < 0$ per $0 \leq t < 1$. Allora il punto $t=1$ è di minimo per f ed essendo $f(1) = 0$, ne segue la seconda disuguaglianza (*)]

10.42 Se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è ivi costante. Utilizzare tale proprietà per provare le identità:

(a) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, $\qquad \forall x > 0$

(b) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\qquad \forall x < 0$

(c) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} x$, $\qquad \forall x < 1$

(d) $\operatorname{arctg} x=\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\qquad \forall x \in R$

(e) $\operatorname{arcsen} x=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\qquad \forall x\in(-1,1)$

(f) $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} -\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad \forall x\in(-1,1)$

[Verifichiamo, ad esempio, le identità (a) e (b). Posto $f(x)=\operatorname{arctg} x+ \operatorname{arctg}(1/x)$, risulta $f'(x)=0$ per ogni $x \neq 0$. Perciò $f(x)$ è costante in $(0,+\infty)$ ed è anche costante (eventualmente un diverso valore della costante) in $(-\infty,0)$. Le costanti si determinano calcolando $f(x)$ ad esempio per $x = \pm 1$, oppure calcolando il limite di $f(x)$ per $x\to \pm\infty$ o per $x \to 0^{\pm}$; in particolare per $x > 0$ risulta

$$f(x)=f(1)= \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \pi/2.$$

Notiamo che le identità (e), (f) sono utili programmando con il computer, per calcolare rispettivamente le funzioni arcoseno ed arcocoseno in termini dell'arcotangente, che in genere è una funzione di libreria già predefinita nel linguaggio di programmazione]

Capitolo 11

CALCOLO DI LIMITI CON L'USO DELLE DERIVATE

11A. Il teorema di L'Hôpital

Consideriamo un limite della forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad ,$$

essendo $f(x)$, $g(x)$ funzioni infinitesime per $x \to x_0$. Si dice che il limite dato si presenta sotto la forma indeterminata $0/0$. Se invece $f(x), g(x)$ sono infinite per $x \to x_0$, allora il limite si presenta sotto la forma indeterminata ∞/∞.

Abbiamo già visto nei capitoli 7 e 8 che, se un limite si presenta sotto forma indeterminata, è necessario operare su di esso fino a trasformarlo, se possibile, in un limite calcolabile elementarmente. Il teorema di L'Hôpital è un ausilio a tale scopo.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. - *Sia* I *un intorno di* x_0 *e siano* $f(x)$, $g(x)$ *funzioni derivabili in* $I-\{x_0\}$. *Supponiamo che*

(I) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, *oppure* $= \pm\infty$;

(II) $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I-\{x_0\}$;

(III) *esista (finito o infinito) il limite*

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)/g'(x).$$

Allora anche il rapporto $f(x)/g(x)$ *ammette limite per* $x \to x_0$ *e si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Il teorema di L'Hôpital vale anche per limiti destri e sinistri ($x \to x_0 \pm$) e per $x \to \pm\infty$.

Prima di applicare il teorema di L'Hôpital al calcolo di un limite, è opportuno accertarsi che valgono le ipotesi (I), (II), (III). Negli esercizi che seguono mettiamo in luce l'importanza di tale verifica.

11.1 La regola di L'Hôpital può non valere se applicata ad un rapporto $f(x)/g(x)$ della forma ℓ_1/ℓ_2, con ℓ_1, ℓ_2 numeri reali non nulli. Verificare ciò ponendo $f(x)=x$, $g(x)=x-1$ ed x_0 generico in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

[I seguenti limiti sono immediati:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x}{x-1} = \frac{x_0}{x_0 - 1}, \text{ se } x_0 \neq 1; \quad \lim_{x \to 1\pm} \frac{x}{x-1} = \pm\infty .$$

Il rapporto delle derivate delle funzioni $f(x)=x, g(x)=x-1$ è $f'(x)/g'(x)=1$ per ogni x. Evidentemente, per $x \to x_0$, il rapporto delle derivate converge ad 1, ed 1 è diverso dai limiti trovati, qualunque sia $x_0 \in \mathbb{R}$ (infatti $x_0/(x_0-1) \neq 1$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$).

Infine $f(x)/g(x)=x/(x-1) \to 1$ per $x \to \pm\infty$. Quindi la regola di L'Hôpital vale per il rapporto delle funzioni $f(x)=x$, $g(x)=x-1$ nel caso in cui $x \to \pm\infty$. Ciò non meraviglia perchè, per $x \to \pm\infty$, il rapporto $f(x)/g(x)$ è una forma indeterminata ∞/∞]

11.2 Verificare che $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

nel caso in cui $f(x)=\log x$ e $g(x)=x$. Spiegarne il motivo.

[Per $x \to 0^+$ il rapporto $f(x)/g(x) = \log x/x$ tende a $-\infty$, mentre $f'(x)/g'(x)=1/x$ tende a $+\infty$. Non sono verificate le ipotesi del teorema di L'Hôpital, perchè il rapporto $f(x)/g(x)$, per $x\to 0^+$, non è una forma indeterminata, ma è del tipo $-\infty/0^+ = -\infty$]

11.3 L'ipotesi (II) del teorema di L'Hôpital garantisce che il rapporto $f'(x)/g'(x)$ sia ben definito. Anche il rapporto $f(x)/g(x)$ è ben definito, dato che $g(x)$ è diversa da zero in un intorno di x_0, escluso al più il punto x_0. Verificare ciò separando i due casi:

(a) $\lim_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (b) $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

[(a) Se $g(x)$ diverge a $+\infty$ per $x\to x_0$, allora esiste un numero δ per cui $g(x) > 1$ se $0 < |x-x_0| < \delta$; (b) Supponiamo per assurdo che esista un numero $x_1 \in I-\{x_0\}$ per cui $g(x_1)=0$. Definiamo in I la funzione $\tilde{g}(x)$ nel modo seguente:

$$\tilde{g}(x)=g(x) \quad \text{se} \quad x \in I-\{x_0\}, \quad \tilde{g}(x_0) = 0.$$

La funzione $\tilde{g}(x)$ è continua in I; dato che coincide con $g(x)$ se $x\neq x_0$, risulta $\tilde{g}(x_1)=g(x_1) = 0$. Applichiamo il teorema di Rolle alla funzione $\tilde{g}(x)$ nell'intervallo $[x_0,x_1]$. Le ipotesi del teorema di Rolle sono soddisfatte perchè $\tilde{g}(x)$ è continua nell'intervallo chiuso $[x_0,x_1]$ ed è derivabile nell'intervallo aperto (x_0,x_1). Inoltre $\tilde{g}(x_0)=\tilde{g}(x_1)=0$. Perciò esiste un punto $\xi\in(x_0,x_1)$ per cui $\tilde{g}'(\xi)=0$. Ciò contrasta con l'ipotesi che $\tilde{g}'(x)=g'(x)\neq 0$ per ogni $x \in I-\{x_0\}$]

11.4 L'ipotesi (III) del teorema di L'Hôpital è importante perchè, anche se il limite del rapporto delle derivate non esiste, può esistere il limite del rapporto delle funzioni. Verificare ciò nei casi seguenti:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\text{sen}\, x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\,\text{sen}(1/x)}{\text{sen}\, x}$

[(a) Poniamo $f(x) = x+\text{sen } x$, $g(x)=x$. Si tratta di funzioni che divergono a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Inoltre $g'(x)=1\neq 0$ per ogni x. Dato che $\text{sen } x / x$ converge a 0 per $x\to +\infty$, il rapporto $f(x)/g(x)=1+\text{sen}x/x$ converge ad 1 per $x \to +\infty$. Invece il limite del rapporto delle derivate $f'(x)/g'(x)= =1 + \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

(b) Poniamo $f(x) = x^2 \text{ sen } (1/x)$, $g(x)=\text{sen}x$. Per $x \to 0$ entrambe le funzioni convergono a 0. Inoltre $g'(x)=\cos x \neq 0$ per $x \in (-\pi/2,\pi/2)$. Il rapporto $f(x)/g(x)$ converge a 0 per $x \to 0$, perchè

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x} = 0.$$

Al contrario, verifichiamo che il limite del rapporto delle derivate non esiste:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \text{ sen } (1/x)}{\cos x} - \frac{\cos (1/x)}{\cos x} .$$

Per $x \to 0$ il primo addendo converge a 0 (il numeratore converge a zero ed il denominatore converge ad 1), mentre il secondo addendo non ammette limite]

Supponiamo che le funzioni $f(x)$, $g(x)$ verifichino le ipotesi del teorema di L'Hôpital per $x\to x_0$. Allora il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ è ricondotto al limite del rapporto delle derivate $f'(x)/g'(x)$. Se tale rapporto è ancora una forma indeterminata per $x \to x_0$, si può iterare il procedimento e calcolare il limite del rapporto delle derivate seconde $f''(x)/g''(x)$ e così via. Ad esempio, si voglia calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3} .$$

Tale limite si presenta sotto la forma indeterminata ∞/∞. Si vede subito che anche il rapporto delle derivate è una forma indeterminata ∞/∞. Applichiamo tre volte la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6x} \overset{(3)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{6} \overset{(4)}{=} +\infty.$$

L'uguaglianza (4) è immediata, mentre le uguaglianze (1), (2), (3) vanno "interpretate". Infatti tali uguaglianze valgono, in base al teorema di L'Hôpital, solo se il limite a secondo membro esiste. E' allora opportuno considerare preliminarmente la (3). La (3) vale perchè il limite a secondo membro (della funzione $e^x/6$) esiste. Quindi, a ritroso, vale anche la (2), perchè il limite a secondo membro (di $e^x/6x$) esiste, e, per lo stesso motivo, vale anche la (1).

Nel seguito sottointenderemo questo argomento a ritroso. Però ricordiamo ancora che, se non esiste il limite finale ottenuto iterando la regola di L'Hôpital, non è lecito dedurne che anche il limite iniziale non esiste.

Un consiglio importante: prima di applicare la regola di L'Hôpital è opportuno semplificare, se possibile, l'espressione di cui si vuole calcolare il limite. Consideriamo l'esempio seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}x\cos x}{x^3} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{3x^2}.$$

Dopo aver applicato la regola di L'Hôpital abbiamo ottenuto una nuova forma indeterminata 0/0. Invece di applicare nuovamente la regola di L'Hôpital, è più semplice porre $1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$. Ricordando che $\operatorname{sen}x/x\to 1$ per $x\to 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{sen}x\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

Terminiamo il paragrafo facendo notare un errore concettuale in cui è possibile cadere applicando la regola di L'Hôpital in modo acritico come ad esempio per studiare il limite

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

E' vero che la regola di L'Hôpital stabilisce che il risultato è uguale al limite di $\cos x$ per $x\to 0$, cioè cos 0 = 1. Però, per affermare ciò, è necessario sapere a priori che la derivata della funzione sen x è la funzione cos x. A tal proposito il lettore ricorderà (se non lo ricorda è bene che lo vada a controllare) che il calcolo della derivata della funzione sen x presuppone la conoscenza del limite notevole (*).

Questo è il motivo per cui si dimostra la formula (*) normalmente per mezzo dei teoremi di confronto sui limiti, senza l'ausilio del teorema di L'Hôpital.

11B. **Uso del teorema di L'Hôpital**

11.5 Per mezzo della formula di L'Hôpital calcolare i limiti ($b > 0$, $\alpha \in R$):

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b}$ (b) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

[(a) 0; (b) α]

11.6 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^3}{x}$

[(a) $+\infty$; (b) Il limite vale 0 e si ottiene applicando tre volte la formula di L'Hôpital, oppure verificando che il limite per $x \to +\infty$ della radice cubica della funzione data tende a zero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to +\infty} 3\,\frac{1/x}{x^{-2/3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$]

11.7 Con il teorema di L'Hôpital calcolare i limiti

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x}$ (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$

[(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(2x+1)}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x+1} = 1$;

(b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(1+\sqrt{x})\cdot 2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$]

11.8 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)}$

[(a), 2; (b) 5/3]

11.9 Calcolare il limite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log[x(x+1)(x+2)(x+3)]}{\log x}$

[Invece di applicare la formula di L'Hôpital al rapporto così come scritto, è opportuno utilizzare le proprietà dei logaritmi. Il numeratore si può scomporre nella somma:

$\log[x(x+1)(x+2)(x+3)] = \log x + \log(x+1) + \log(x+2) + \log(x+3)$.

In base al teorema di L'Hôpital, da tale espressione otteniamo il limite equivalente:

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) x = 4$]

11.10 Con il teorema di L'Hôpital calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\log \operatorname{sen} x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log|\operatorname{sen} 2x|}{\log|\operatorname{sen} 3x|}$

[(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\log \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$;

(b) E' opportuno calcolare separatamente i limiti destro e sinistro, oppure, più rapidamente, utilizzare la formula di derivazione:

$$\frac{d}{dx} \log|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

Otteniamo il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3\cos 3x} = 1$]

11.11 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen } x}{\cos x}$ (b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen } x}{\cos^2 x}$

[Si giunge al risultato finale sia con la regola di L'Hôpital, che moltiplicando numeratore e denominatore per 1+senx. (a) 0; (b) 1/2]

11.12 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{\cos 2x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x}{\cos(x+\frac{\pi}{2})}$

[(a) Non si può applicare la regola di L'Hôpital! Si tratta di un limite immediato uguale a 0; (b) Il limite vale -1 anche in base alla regola di L'Hôpital ma, a maggior ragione, dato che $\cos(x+\pi/2) = -\text{sen}x$]

11.13 Facendo uso del teorema di L'Hôpital, calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\log \text{sen } x}{\cos x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log \cos x}{\text{sen}^2 x}$

[(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\log \text{sen } x}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{-\text{sen}^2 x} = 0$; (b) $-\dfrac{1}{2}$]

11.14 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x}$

[(a) -2; (b) Prima di applicare la regola di L'Hôpital è opportuno semplificare il numeratore ponendo $\log\sqrt{1+x^2} = (1/2)\log(1+x^2)$. Il risultato del limite è 1]

11.15 Il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$ si presenta sotto la forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Calcolarlo con la regola di L'Hôpital, dopo averlo trasformato in una forma ∞/∞.

$$\left[\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0\right]$$

11.16 Il limite $\lim_{x\to 0^+} x \log x$ si presenta sotto la forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$. Calcolarlo con la regola di L'Hôpital, dopo averlo trasformato in una forma ∞/∞.

$$\left[\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0\right]$$

11.17 Il limite $\lim_{x\to+\infty} x\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right)$ si presenta nella forma indeterminata $\infty\cdot 0$. Calcolarlo con la regola di L'Hôpital, dopo averlo trasformato in una forma $0/0$.

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x - \pi/2}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/(1+x^2)}{-1/x^2} = -1\right]$$

11.18 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$.

[Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Dopo aver ridotto a denominatore comune abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x\log(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{\log(x+1)+x/(x+1)}.$$

Si può derivare ulteriormente, oppure è possibile dividere numeratore e denominatore per $\log(x+1)$, ottenendo

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\log(x+1)}\cdot\frac{1}{x+1}\right)^{-1} = \frac{1}{2},$$

avendo tenuto in conto che $x/\log(x+1)\to 1$ per $x\to 0$]

11.19 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$ (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$

[(a) 0; (b) 0]

11.20 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\text{sen } x}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x}\right)$

[Si applichi due volte L'Hopital e poi si divida numeratore e denominatore per x^2. Si trova $-1/3$]

11.21 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0} [\log \text{sen } x^2 - \log (1-\cos x)]$.

[Per le proprietà dei logaritmi il limite dato si può esprimere nella forma

$$\lim_{x\to 0} \log \frac{\text{sen } x^2}{1-\cos x} .$$

Calcolando separatamente il limite per $x\to 0$ della funzione $\text{sen} x^2 / (1-\cos x)$ si trova il valore 2. Quindi il limite dato vale $\log 2$]

11.22 Proponiamo una generalizzazione dell'esercizio precedente. Siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni derivabili in un intorno di x_0 e tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0; \; f(x), g(x) > 0 \text{ se } x \neq x_0 .$$

Se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x) = \ell \in (0,+\infty)$ allora

$$\lim_{x\to x_0} [\log f(x) - \log g(x)] = \log \ell .$$

[In base alla regola di L'Hôpital e alla continuità della funzione logaritmo abbiamo

$$\log f(x) - \log g(x) = \log \frac{f(x)}{g(x)} \to \log \ell \;]$$

11.23 Calcolare i limiti seguenti, che si presentano nella forma indeterminata $\infty - \infty$.

(a) $\lim_{x\to +\infty} (x - \log x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log x\right)$

[(a) Dato che $\log x/x \to 0$ per $x \to +\infty$ otteniamo

$$x - \log x = x(1-\log x/x) \to +\infty \ .$$

(b) Poniamo $1/x + \log x = (1+x \log x)/x$. Dato che, in base alla regola di L'Hôpital, $x \log x \to 0$ per $x \to 0^+$ (si veda l'esercizio 11.16) il limite dato vale $+\infty$]

11.24 Calcolare i limiti

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x} - \cos x}{2x}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(x \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

[(a) $-1/4$; (b) Il risultato è $-1/2$ e si ottiene così:

$$x \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = x^2 \left(\frac{1}{x} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) ;$$

con la sostituzione $y=1/x$ ci riconduciamo al calcolo del limite

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y \cos\sqrt{y} - \operatorname{sen} y}{y^2} \ .$$

In base al teorema di L'Hôpital il limite è anche uguale a

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{y} - y \operatorname{sen}\sqrt{y}/(2\sqrt{y}) - \cos y}{2y} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{y} - \cos y}{2y} - \frac{1}{4} \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \ .$$

Il risultato è stato ottenuto utilizzando il limite in (a)]

11.25 Verificare che $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{arcsen} x} - \frac{1}{x}\right) = 0$.

11.26 Calcolare i limiti

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(\operatorname{sen}(1/x))^{-1}}}{e^x}$$ (b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(\operatorname{sen}(1/x))^{-2}}}{e^{x^2}}$$

[(a) La funzione data si scrive nella forma equivalente

$$e^{\frac{1}{\mathrm{sen}(1/x)} - x}\ ;$$

Calcoliamo separatamente il limite dell'esponente con la sostituzione $y=1/x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{sen}(1/x)} - x = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{sen}\, y} - \frac{1}{y} = 0$$

L'ultimo risultato si ottiene, ad esempio, riducendo a comune denominatore ed applicando la regola di L'Hôpital. Perciò il limite dato vale $e^0=1$; (b) $e^{1/3}$]

11.27 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/\sqrt{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\mathrm{sen}\, x}$

[E' utile la relazione $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$ $(f(x) > 0)$.
(a) $x^{1/\sqrt{x}} = e^{\log x/\sqrt{x}}$ converge ad 1 per $x\to+\infty$, perchè $\log x/\sqrt{x}$ tende a zero; (b) $x^{\mathrm{sen} x} = e^{\mathrm{sen}\, x \log x} \to e^0 = 1$, dato che $\mathrm{sen} x \log x$ converge a zero per $x\to 0^+$]

11.28 Calcolare i limiti

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{tg}\, x}$ (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2\cos^2 x)^{\mathrm{tg}^2 x}$

[(a) 1; (b) e^2. Indichiamo il metodo nel caso (a):

$$(\mathrm{sen}\, x)^{\mathrm{tg}\, x} = e^{\mathrm{tg}\, x \log \mathrm{sen}\, x} = e^{\mathrm{sen}\, x \frac{\log \mathrm{sen}\, x}{\cos x}}\ ;$$

come nell'esercizio 11.13 (a) si verifica che $(\log \mathrm{sen} x)/\cos x$ converge a zero per $x\to\pi/2$. Perciò l'esponente converge a zero e quindi la funzione data converge a $e^0 = 1$]

11C. La formula di Taylor

La *formula di Taylor con il resto di Peano* è utile per il calcolo di limiti di funzioni e di successioni; ricordiamola: *Se* $f(x)$ *è una funzione derivabile* n *volte in un punto* x_0 *, risulta*

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\ o((x-x_0)^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

Come nel paragrafo 8F, "*o piccolo*" di $(x-x_0)^n$ significa che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=0\ .$$

Si utilizza spesso la formula di Taylor con centro $x_0=0$ (ed in tal caso si chiama anche *formula di Mac Laurin*):

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Esplicitiamo tale formula per alcune funzioni elementari:

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

(2) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$;

(3) $\operatorname{sen}x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$;

(4) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

(5) $\operatorname{arctg}x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})$;

(6) $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$;

(7) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$.

Le formule precedenti sono sviluppi in formula di Taylor *di ordine* n (oppure 2n+1, 2n+2, a seconda dei casi). Ad esempio, gli sviluppi delle funzioni senx, cosx, con centro $x_o=0$, di ordine rispettivamente 2 e 3 sono dati da

$$\operatorname{sen} x = x+o(x^2); \quad \cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3).$$

Nell'elenco che segue ricordiamo gli sviluppi ai primi ordini di altre funzioni elementari. Cominciamo con la potenza ad esponente reale α:

(8) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$,

che, nei casi particolari $\alpha=-1$, $\alpha=1/2$, diventa

(9) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$,

(10) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

Valgono inoltre:

(11) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$;

(12) $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$;

(13) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

Per scrivere la formula di Taylor di somme, prodotti, composizioni di funzioni elementari, sono utili le proprietà del simbolo "o piccolo" elencate nel seguente esercizio.

11.29 Verificare che, per il simbolo "o piccolo", valgono le proprietà ($m,n \in N$):

$$(a) \quad o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$$

$$(b) \quad a \cdot o(x^n) = o(ax^n) = o(x^n), \quad a = \text{costante} \neq 0$$

$$(c) \quad o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$$

$$(d) \quad x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

$$(e) \quad o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

$$(f) \quad o(o(x^n)) = o(x^n)$$

$$(g) \quad o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$$

[Per (a),(b),(c),(d),(e) si può procedere come nell'esercizio 8.59. Dimostriamo (f): Posto $g(x) = o(o(x^n))$, occorre provare che $g(x) = o(x^n)$, cioè che $g(x)/x^n \to 0$ per $x \to 0$; infatti:

$$\frac{g(x)}{x^n} = \frac{o(o(x^n))}{x^n} = \frac{o(o(x^n))}{o(x^n)} \cdot \frac{o(x^n)}{x^n} \to 0 ;$$

(g) si dimostra in modo analogo]

11.30 Utilizzando le proprietà dell'esercizio precedente e la formula di Taylor di centro $x_0=0$ delle funzioni sen x, cos x, verificare che

$$(a) \quad \text{sen}^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$(b) \quad \cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

[(a) Utilizziamo la formula di Taylor al secondo ordine della funzione sen x :

$$\text{sen}^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 =$$

$$= x^2 + \frac{x^6}{36} + [o(x^4)]^2 - \frac{x^4}{3} + 2x\, o(x^4) - \frac{x^3}{3}\, o(x^4) .$$

Valutiamo separatamente ogni singolo addendo. Si vede che, per $x \to 0$, sono infinitesimi di ordine superiore a x^5, cioè sono $o(x^5)$, i seguenti addendi:

$$\frac{x^6}{36}, \quad [o(x^4)]^2, \quad 2x\, o(x^4), \quad -\frac{x^3}{3}\, o(x^4).$$

Perciò $\text{sen}^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^5)$; (b) Si può procedere in modo analogo (il lettore esegua i conti), oppure, più velocemente, si può utilizzare la formula (a) ed il fatto che $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$]

11.31 Verificare che $\cos 2x = 1 - 2x^2 + (2/3)x^4 + o(x^5)$, sia direttamente dalla formula di Taylor, che per differenza dalle formule (b),(a) dell'esercizio precedente.

11.32 Utilizzando la (9) e gli sviluppi in formula di Taylor delle funzioni senx, cosx, dimostrare la formula (11) relativa alla tangente.

[Cominciamo con lo scrivere lo sviluppo di $1/\cos x$ in base alla (9):

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-x^2/2+o(x^3)} =$$

$$= 1 - [-x^2/2+o(x^3)] + [\ \dots\ ]^2 + o(x^4) = 1+x^2/2+o(x^3).$$

Perciò otteniamo

$$\text{tg}\, x = \text{sen}\, x \cdot \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\cdot\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \ ]$$

11.33 Verificare che, per $x \to 0$, vale lo sviluppo

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2) .$$

[Si può procedere direttamente calcolando la funzione e la derivata prima per x=0, oppure si possono utilizzare lo sviluppo di e^x e la formula (9):

$$(1+e^x)^{-1} = \{1+1+x+\frac{x^2}{2} + o(x^2)\}^{-1} = \frac{1}{2}\{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2)\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\{1-(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o(x^2))+(\frac{x}{2}+\ldots)^2+o(x^2)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{1-\frac{x}{2}+o(x^2)\}$$]

11.34 Verificare che, per $x \to 0$, valgono gli sviluppi

(a) $\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$

(b) $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

[Verifichiamo (a) (la verifica di (b) è analoga). Partiamo da:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2).$$

Ponendo $y = -x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)$, otteniamo

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\ldots)^2 + o(x^4)$$]

11D. Uso della formula di Taylor nel calcolo di limiti

Gli esercizi che proponiamo di seguito si risolvono utilizzando la formula di Taylor con il resto di Peano e le altre proprietà descritte nel paragrafo precedente. Avvertiamo il lettore che alcuni tra gli esercizi proposti in questo paragrafo sono particolarmente complessi e che in genere non si risolvono agevolmente senza gli sviluppi asintotici in formula di Taylor.

11.35 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + \log \cos x}{x^4}$$

[Utilizzando la formula di Taylor, di centro $x_o=0$, della funzione $\cos x$ e della funzione $\log \cos x$ (si veda l'esercizio 11.34(a)) otteniamo il limite equivalente

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5))-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{8} \quad]$$

11.36 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x^2} \right) .$$

$$[\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} x} =$$

$$= \frac{x(1-x^2/2+o(x^3)) - (x-x^3/6+o(x^4))}{x^2 (x+o(x))} \to -\frac{1}{3} \quad]$$

11.37 Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^5}{(\operatorname{sen} x - x \cos \frac{x}{\sqrt{3}})^2}$.

[Il risultato è $270^2/2$ e si ottiene con gli sviluppi:

$$1-\cos x^5 = 1-\left(1-\frac{1}{2}x^{10}+o(x^{10})\right) = \frac{1}{2}x^{10}+o(x^{10});$$

$$\operatorname{sen} x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) - x\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^4 + o(x^5)\right] = x^5\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{4!9}\right)+o(x^5) = \frac{x^5}{270}+o(x^5).$$

Perciò il limite del rapporto, per $x\to 0$, è $270^2/2 = 36\,450$]

11.38 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2 x-1-x^2}{x^4}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{senh}^2 x-3x^2-x^4}{x^6}$

[(a) 1/3; (b) 2/15]

11.39 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x - \cos x)^3}{(\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x)^2}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3(e^x-\cos x)}{x^2-\operatorname{sen}^2 x}$

[(a) 9; (b) 3]

11.40 Verificare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(3+x^2)\operatorname{senh} x-3x\cosh x} = 15 .$$

11.41 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0} x^2 \frac{\operatorname{sen} x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2 - \operatorname{tg} x^2}$

[(a) - 1/3; (b) - 2/3]

11.42 Calcolare il limite di successione

$$\lim_{n\to +\infty} n^2 \left[(1+e^{1/n})^{-1} - \frac{2n-1}{4n}\right]$$

[Il risultato è 0 e si ottiene con lo sviluppo in formula di Taylor pro posto nell'esercizio 11.33 :

$$(1+e^{1/n})^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2n-1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad]$$

11.43 Calcolare i limiti di successione

$$\text{(a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}-1}{\log \sqrt[n]{n}} \qquad \text{(b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{1/n}-1}{\log \sqrt[n]{n}}$$

[(a) Scriviamo la successione in forma esponenziale

$$\frac{\sqrt[n]{n^2}-1}{\log \sqrt[n]{n}} = \frac{e^{\frac{2}{n}\log n}-1}{\frac{1}{n}\log n} .$$

Poniamo $y = \frac{2}{n}\log n \to 0$ nello sviluppo $e^y = 1+y+o(y)$. L'espressione precedente risulta uguale a

$$\frac{e^y - 1}{y/2} = 2\,\frac{y+o(y)}{y} \to 2 \; ; \quad \text{(b)}\ -1]$$

11.44 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x-\operatorname{sen}^2\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2 x}{x^2}$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x + 3\,(x-\operatorname{sen}^2\sqrt{x}\,)}{x^2}$$

[(a) - 2/3; (b) 2]

11.45 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{tg^2 x}\right)$ (b) $\lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{1}{sen\ x}\right)^2 - \left(\frac{cos\ x}{x}\right)^2\right]$

[(a) Porre tg x=sen x/cos x e poi ridurre ad un unico denominatore. Il risultato è 2/3; (b) 4/3]

11.46 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \log(1+x\ arctg\ x)}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{(e^{x^2} - \cos x)} - \cosh 3x}{x(x - arcsen\ x)}$

[(a) 4/3; (b) $+\infty$]

11.47 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x\ (5^x - 2^x)}{sen\ x + \log(1-x)}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ (x4^x - 2^x + 1)^2}{x - arctg\ x}$

[(a) 2 log (2/5); (b) 3 $(1-\log 2)^2$]

11.48 Calcolare i limiti di successione

(a) $\lim_{n\to +\infty} (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$

(b) $\lim_{n\to +\infty} (\sqrt[4]{n^4+n^3+1} - n)$

[(a) 0; (b) 1/4. Indichiamo il metodo nel caso (a): Ricordando lo sviluppo (8) della potenza con esponente $\alpha=1/3$, otteniamo

$$\sqrt[3]{n^3+1} - n = n\,(\sqrt[3]{1+1/n^3} - 1) =$$

$$= n\,(1+\frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\,(\frac{1}{n^3}) - 1) = \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \to 0\ ]$$

11.49 Calcolare il limite seguente con la formula di Taylor

$$\lim_{x\to+\infty} \{2x(x-1) - x^3 \log(1+ \operatorname{sen}\frac{2}{x})\}\ .$$

[Il risultato è -4/3. Si inizi con lo sviluppo:

$$\log\,(1+\operatorname{sen} y) = \log\,(1+y-\frac{y^3}{6} + o(y^3)) =$$

$$= y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) - \frac{1}{2}\,(y-\ldots)^2 + \frac{1}{3}\,(y-\ldots)^3 + o(y^3)$$

$$= y - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^3).$$

Poniamo $y=2/x$, osservando che $y\to 0^+$ per $x\to+\infty$:

$$\log\,(1+\operatorname{sen}\frac{2}{x}) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{x^3} + o\,(\frac{1}{x^3})\ .$$

Poi, con semplici passaggi, si ottiene il risultato finale]

11.50 Con il metodo dell'esercizio precedente, calcolare i limiti di successione

(a) $\lim_{n\to+\infty} \{n^3 \log(1+\operatorname{sen}\frac{3}{n}) - 3n^2 + \frac{9}{2}\,n\}$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \{n^2 + \frac{n}{2} + n^3 \log\,(1-\operatorname{sen}\frac{1}{n})\}$

[(a) 9/2; (b) -1/6]

11.51 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{[(1-x)^{-1} + e^x]^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x^3}\ .$$

[Utilizzare lo sviluppo $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+o(x^3)$. Eseguendo i conti si trova

$$[(1-x)^{-1}+e^x]^2 = 4+8x+10x^2+\frac{32}{3}x^3+o(x^3).$$

Il risultato finale è 16/3]

11.52 Calcolare i limiti di funzioni esponenziali:

(a) $\lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{x^2 \operatorname{sen} 2x}}$ (b) $\lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{x-\operatorname{sen} x}}$

(c) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ (d) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$

[(a) Il risultato è $\sqrt{e}$ e si ottiene scrivendo la funzione data in forma esponenziale con base fissa uguale ad e:

$$(1+x^3)^{\frac{1}{x^2 \operatorname{sen} 2x}} = e^{\frac{\log(1+x^3)}{x^2 \operatorname{sen} 2x}}$$

e calcolando separatamente il limite dell'esponente:

$$\frac{\log(1+x^3)}{x^2 \operatorname{sen} 2x} = \frac{x^3+o(x^3)}{x^2(2x+o(x))} \to \frac{1}{2} \ ;$$

(b) e^6 ; (c) $e^{-1/2}$; (d) $e^{-1/4}$]

11.53 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2}$ (b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x}$

[(a) $e^{-1/6}$; (b) 1. Il metodo, ad esempio nel caso (a), è il seguente:

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{x-x^3/6+o(x^3)}{x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{x^2}\log(1-x^2/6+o(x^2))} = e^{\frac{-x^2/6+o(x^2)}{x^2}} \to e^{-\frac{1}{6}}\ ]$$

11.54 Calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x\cdot(x \operatorname{sen}\frac{1}{x})^x$.

[Il risultato è 0. Si utilizzino i teoremi di confronto per i limiti e le relazioni:

$$\left|\operatorname{sen} x\,(x\operatorname{sen}\frac{1}{x})^x\right| \le (x\operatorname{sen}\frac{1}{x})^x \underset{y=1/x}{=} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^{1/y} .$$

Il risultato si ottiene come nella parte (b) dell'esercizio precedente]

11.55 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right)^{1/x^2}$ (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)^{1/x^2}$

[(a) $e^{-2/3}$; (b) $e^{-3/2}$]

11.56 Calcolare il limite $\lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{1-x}} - e^{-x}}{x-1}$.

[Si può eseguire la sostituzione $y=1-x$. Il risultato è $3/(2e)$]

11.57 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\log x}$.

[$(\cos x)^{\log x} = e^{\log x \log(\cos x)}$. Calcoliamo separatamente il limite, per $x\to 0^+$, dell'esponente con la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{(\log\cos x)^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\log\cos x)^2}{x\operatorname{sen} x}\cos x .$$

Mediante la formula di Taylor si verifica che

$$\frac{(\log \cos x)^2}{x \operatorname{sen} x} = \frac{(\log(1-x^2/2+o(x^2)))^2}{x(x+o(x))} = \frac{x^4/4+o(x^4)}{x^2+o(x^2)} \to 0.$$

Quindi il limite dato vale $e^0 = 1$]

11.58 Dopo aver verificato che $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{1/x^2} - 1/\sqrt{e}}{x^2}$$

[Il risultato è $-1/(12\sqrt{e})$. Partiamo da

$$(\cos x)^{1/x^2} = e^{(\log \cos x)/x^2} .$$

Utilizzando lo sviluppo in formula di Taylor di centro $x_o = 0$ della funzione log cos x (si veda l'esercizio 11.34 (a)) otteniamo

$$\frac{\log \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12}x^2 + o(x^2) .$$

Risulta quindi $(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} \cdot e^{-x^2/12+o(x^2)}$.

Infine si conclude:

$$\frac{(\cos x)^{1/x^2} - e^{-1/2}}{x^2} = e^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{-x^2/12+o(x^2)} - 1}{x^2} \to -\frac{e^{-1/2}}{12}$$]

11.59 Calcolare i limiti di successione

(a) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left[(\cos \frac{1}{n})^{n^2} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

(b) $\lim_{n\to+\infty} n^2 \left[(1+\frac{1}{n})^n - e(1-\frac{1}{2n})\right]$

[(a) E' lo stesso limite dell'esercizio precedente, quando si ponga $x = 1/n$. Naturalmente il risultato è $-1/(12\sqrt{e})$; (b) $(11/24)e$]

11.60 Calcolare i limiti seguenti con la formula di Taylor

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x+x^2/2)^{1/x} - e}{x}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x-x^2/2)^{1/x} - e}{x}$$

[(a) 0; (b) - e]

11.61 Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x-1-x\log x}{x^{3/2}}$

[Il risultato è 0 e si ottiene con lo sviluppo

$$x^x = e^{x\log x} = 1+x\log x + \frac{1}{2}x^2\log^2 x + o(x^2\log^2 x)$$]

11.62 Utilizzando la formula di Taylor, calcolare i limiti

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(7x^3)-(1+x^2)^x-(1+x^2)^{-x}}{x^6}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^x+(1+x^3)^{-x}-2\cos(5x^4)}{x^8}$$

[(a) -50; (b) 26]

11.63 Verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-(\cos x)^{\log x}}{x^2\log x} = \frac{1}{2} .$$

11.64 Calcolare il limite seguente con la formula di Taylor

$$\lim_{x\to 0^+} [(1- \frac{1}{\log x})^{-\log x} - (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}] \log \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

[Il risultato è $\frac{e}{2}$. Utilizziamo la rappresentazione esponenziale:

$$\left(1- \frac{1}{\log x}\right)^{-\log x} = e^{-\log x \log (1- \frac{1}{\log x})}; \quad (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x}} .$$

Valgono gli sviluppi:

$$-\log x \log (1- \frac{1}{\log x}) = -\log x \left(\frac{-1}{\log x} - \frac{1}{2 \log^2 x} + o\left(\frac{1}{\log^2 x}\right)\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right) ;$$

$$e^{-\log x \log(1- \frac{1}{\log x})} = e \cdot e^{\frac{1}{2\log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right)} = e\left(1+ \frac{1}{2 \log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

$$\frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x} = \frac{x-x^2/2 +o(x^2)}{x + o(x^2)} = \frac{1-x/2 + o(x)}{1 + o(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x);$$

$$e^{\frac{\log(1+x)}{\operatorname{sen} x}} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + o(x)} = e\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right).$$

Quindi, dato che $-x/2 + o(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $1/\log x$, otteniamo

$$\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)^{-\log x} - (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \frac{e}{2 \log x} + o\left(\frac{1}{\log x}\right) .$$

Il risultato finale è conseguenza del limite seguente, che calcoliamo con la regola di L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \quad]$$

Capitolo 12

SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA

12A. Uso del principio di induzione

Consideriamo successioni a_n *definite per ricorrenza*, o *per induzione*, nel modo seguente

$$a_1 \text{ assegnato}, \qquad a_{n+1} = f(a_n),$$

essendo $f(x)$ una funzione continua.

Per studiare il comportamento di una successione definita per ricorrenza si esaminano i seguenti aspetti:

Si calcolano i possibili valori del limite. Più precisamente, si suppone che la successione a_n sia regolare, e sia $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ il limite della successione. Perciò $a_n \to a$ e quindi anche $a_{n+1} \to a$. Essendo $f(x)$ continua, risulta $a=f(a)$.

Si verifica preliminarmente se $a=\pm\infty$ può soddisfare tale equazione. Poi si risolve $a=f(a)$, supponendo $a \in \mathbb{R}$. Si vengono così a determinare i possibili valori del limite.

Si cerca di stabilire se la successione è regolare, cioè se essa ammette limite (finito o infinito). Ciò accade, ad esempio, se a_n è una successione mono tòna; in questa fase può essere utile il principio di induzione.

Se il limite esiste, si cercano delle relazioni atte a stabilire quale, tra i possibili valori trovati, è il limite effettivo. Anche in questa fase può essere utile il principio di induzione.

Ad esempio, se i possibili limiti di una successione a_n sono $a=0$ oppure $a=+\infty$, e se si riconosce che a_n è una successione crescente a termini positivi, allora necessariamente il limite è $+\infty$; viceversa, se a_n è decrescente, allora il limite è zero. Un esempio in cui si verifica questa situazione è quello proposto nell'esercizio seguente.

12.1 Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = a_n^2 .$$

[Se $a_n \to a \in R \cup \{\pm\infty\}$, anche $a_{n+1} \to a$; quindi, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione $a_{n+1} = a_n^2$, si ottiene $a=a^2$. Il valore $a=+\infty$ è una possibile soluzione; invece $-\infty$ non è un possibile limite, perchè la relazione $-\infty=(-\infty)^2 = +\infty$ non è soddisfatta. Se $a \in R$, l'equazione di secondo grado $a=a^2$ ha per soluzioni $a=0$ e $a=1$.

Dimostriamo che a_n è strettamente crescente, verificando per induzione che

$$a_n < a_{n+1}, \qquad \forall n \in N.$$

Osserviamo preliminarmente che tutti i termini sono positivi. Per $n=1$ la relazione è vera, infatti $a_1 =2 < a_2 = 4$. Supponiamo $a_n < a_{n+1}$; da $0 < a_n < a_{n+1}$ segue $0 < a_n^2 < a_{n+1}^2$, cioè $a_{n+1} < a_{n+2}$. Perciò a_n è strettamente crescente e quindi, come tutte le successioni monotòne, ammette limite.

Abbiamo già visto che i possibili limiti sono $0, 1, +\infty$. Dato che tutti i termini a_n sono maggiori del primo termine $a_1 =2$, il limite non può essere nè 0, nè 1. Perciò a_n diverge a $+\infty$]

12.2 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = 1/2 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$$

[(a) Come nell'esercizio precedente si verifica che i possibili limiti sono $0,1,+\infty$. Si verifica poi che la successione è strettamente decrescente: Infatti $a_1 = 1/2 > a_2 = 1/4$; dall'ipotesi di induzione $0 < a_{n+1} < a_n$ si deduce che $0 < a_{n+1}^2 < a_n^2$, cioè $a_{n+2} < a_{n+1}$.

Dato che il primo termine della successione è 1/2, il limite non può essere nè 1, nè $+\infty$. Perciò il limite è zero.
(b) Si tratta della successione costante, uguale ad 1]

12.3 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_{n+1} = \sqrt{12+a_n} \end{cases}$$

[(a) Per induzione si verifica che tutti i termini sono positivi, perciò la successione è ben definita. Se $a_n \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, anche $a_{n+1} \to a$ e quindi $a = \sqrt{6+a}$. Il valore $a=+\infty$ è un possibile limite; inoltre, se a è reale, l'equazione di secondo grado $a^2 - a - 6 = 0$ ammette $a=3$ come unica soluzione positiva.

Verifichiamo che a_n è una successione strettamente crescente; proviamo cioè, per induzione, che $a_n < a_{n+1}$ per ogni n: Per $n=1$ risulta $a_1 = 1 < a_2 = \sqrt{7}$; supponendo che $a_n < a_{n+1}$, otteniamo $6+a_n < 6+a_{n+1}$, da cui $\sqrt{6+a_n} < \sqrt{6+a_{n+1}}$, cioè $a_{n+1} < a_{n+2}$.

Dato che a_n è strettamente crescente, essa è regolare. I limiti possibili sono $a=3$, e $a=+\infty$, che, con gli elementi che abbiamo fino ad ora, sono entrambi possibili.

Proviamo per induzione che $a_n < 3$ per ogni n: Risulta $a_1 = 1 < 3$;

se $a_n < 3$ allora $6+a_n < 9$ e quindi $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} < \sqrt{9} = 3$.

Riassumendo, a_n è una successione a termini positivi e minori di 3 ed è strettamente crescente; perciò, per $n \to +\infty$, a_n converge a 3.

(b) La successione converge decrescendo a 4]

12.4 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$\text{(a)} \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2\,(a_n - 1) \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2(a_n - 1) \end{cases}$$

[(a) Se a è il limite della successione, risulta $a=2(a-1)$. Perciò $a=\pm\infty$, oppure $a=2$. Da verifica diretta risulta $a_2=4$, $a_3=6$, $a_4=10, \ldots$ Si può perciò congetturare che la successione diverge a $+\infty$ crescendo.

Proviamo per induzione che $a_n < a_{n+1}$ per ogni n: Già sappiamo che $a_1 < a_2$; supponendo $a_n < a_{n+1}$, otteniamo $a_n - 1 < a_{n+1} - 1$ da cui $2(a_n-1) < 2(a_{n+1} - 1)$, cioè $a_{n+1} < a_{n+2}$. Quindi la successione è strettamente crescente. Il limite, che esiste, deve essere maggiore del primo termine. Perciò il limite è $+\infty$.

(b) La successione è strettamente decrescente e diverge a $-\infty$]

12.5 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$\text{(a)} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+4}{5} \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+4}{5} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente crescente e converge ad 1; (b) la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$]

12.6 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{4}{4-a_n} \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{8}{6-a_n} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente crescente e converge a 2; (b) la successione è strettamente decrescente e converge a 2]

12.7 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \dfrac{5}{6-a_n} \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{5}{6-a_n} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente decrescente e converge ad 1, (b) la successione è strettamente crescente e converge ad 1]

12.8 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n} \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente decrescente e converge ad 1; (b) è strettamente crescente e converge a 9]

12.9 Studiare le successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 6}{5} \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 6}{5} \end{cases}$$

[(a) La successione è strettamente crescente e converge a 2; (b) la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$]

12.10 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$(a)\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = 4-a_n \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{3-a_n^2} \end{cases}$$

[(a) La successione non ammette limite. Infatti, se $a_n = -1$, allora $a_{n+1} = 4-a_n = 5$ e quindi $a_{n+2} = 4-a_{n+1} = 4-5=-1$. Perciò, per induzione, risulta

$$a_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 5 & \text{se } n \text{ è pari.} \end{cases}$$

(b) La successione non ammette limite perchè risulta $a_{2k-1} = 1$, $a_{2k} = \sqrt{2}$]

12.11 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

(a) $a_1 = e, \quad a_{n+1} = a_n \log^2 a_n$

(b) $a_1 = 1/e, \quad a_{n+1} = a_n \log^2 a_n$

(c) $a_1 = e, \quad a_{n+1} = (\log a_n)^2/a_n$

[(a) Si verifica per induzione che a_n è la successione costante,uguale ad e; (b) $a_n = 1/e$ per ogni n; (c) si verifica per induzione che $a_n = e$ se n è dispari, mentre $a_n = 1/e$ se n è pari. Perciò la successione non ammette limite]

12.12 Studiare le successioni definite per ricorrenza

(a) $a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{2}{a_n}$

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{2}{a_n}$

[(a) Si verifica per induzione che $a_n > 0$ per ogni n. Da un calcolo diretto dei primi termini si può congetturare che la successione è strettamente decrescente, cioè che

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} < a_n , \qquad \forall\, n \in N.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $2a_n$ (che è una quantità positiva) si ottiene la disequazione di secondo grado in a_n:

$$a_n^2 - 4 > 0 .$$

Limitatamente ad $a_n > 0$, tale disequazione è soddisfatta purchè risulti $a_n > 2$.

Proviamo per induzione che $a_n > 2$ per ogni n: Per $n=1, a_1 = 4 > 2$; risulta poi

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_n^2 - 4a_n + 4 = (a_n-2)^2 > 0.$$

Quindi a_n è strettamente decrescente e converge a 2.

(b) In (*) abbiamo verificato che $a_{n+1} \geq 2$ indipendentemente da a_n. Perciò tutti i termini della successione, tranne il primo, sono maggiori di 2. Quindi la successione è definitivamente decrescente e converge a 2]

12.13 Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n} .$$

[La successione a_n non ammette limite. Infatti, se a_n convergesse ad un numero reale a, avremmo $a=(a-1)/a$; $a=0$ non è soluzione; se $a \neq 0$, otteniamo l'equazione di secondo grado $a^2-a+1=0$, che non ha soluzioni reali. Infine, se supponiamo $a=\pm\infty$, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} \qquad ,$$

otteniamo $a=1-1/a$, cioè l'assurdo $\pm\infty = 1-0$]

12B. Successioni definite tramite funzioni monotòne

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $I \subseteq R$ in sè, cioè $f: I \to I$.

Un numero $x_0 \in I$ si dice *punto unito*, o *punto fisso*, per la funzione $f(x)$ se

$$x_0 = f(x_0) \ .$$

Ricordiamo (si veda l'esercizio 9.23) che, se $f(x)$ è continua in I e se I è un intervallo chiuso e limitato, allora $f(x)$ ha almeno un punto unito in I.

Se $f: I \to I$, è ben definita la successione

$$a_1 \in I, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \ .$$

In questo paragrafo supponiamo $f(x)$ monotòna in I. Cominciamo col caso in cui $f(x)$ è crescente in I.

TEOREMA. - *Sia* $f: I \to I$ *una funzione crescente. Allora la successione* a_n *definita da*

$$a_1 \in I, \qquad a_{n+1} = f(a_n),$$

è monotòna. In particolare, se $a_1 \leq a_2$ *allora* a_n *è crescente, mentre se* $a_1 \geq a_2$ *allora* a_n *è decrescente (quindi* a_n *è costante se* $a_1 = a_2$*).*

Circa il limite di a_n *(che esiste), se* $f(x)$ *è crescente e continua in* I *ed* I *è un intervallo chiuso, vale il seguente schema:*

1) *Se* $a_1 < a_2$ *allora* a_n *converge (crescendo) al punto unito* x_0 *più vicino ad* a_1 *e maggiore di* a_1*, se esiste*

un tale punto unito. Altrimenti a_n *diverge a* $+\infty$.

2) *Se* $a_1 > a_2$ *allora* a_n *converge (decrescendo) al punto unito* x_o *più vicino ad* a_1 *e minore di* a_1 *se esiste un tale punto unito. Altrimenti* a_n *diverge a* $-\infty$.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo che $a_1 \leq a_2$ e proviamo per induzione che $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n:

Per n=1 la relazione è vera per ipotesi. Se $a_n \leq a_{n+1}$ dato che f(x) è crescente in I, si ottiene $f(a_n) \leq$ $\leq f(a_{n+1})$, cioè $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

Se $a_1 \geq a_2$ si procede in modo analogo utilizzando la relazione: $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$

Supponiamo ora che f: I→I sia una funzione crescente e continua e che $a_1 < a_2$, come in figura 12.1.

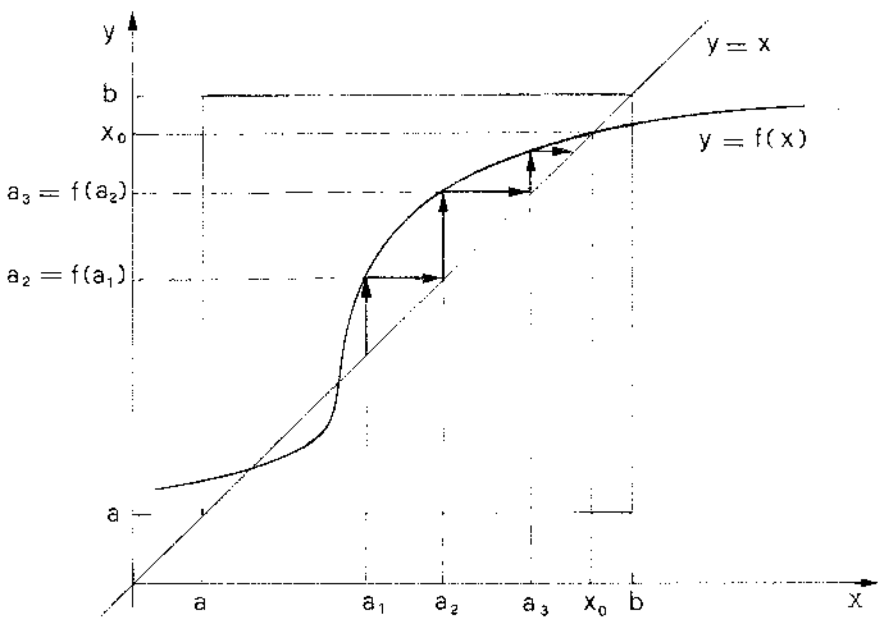


figura 12.1

Ricordiamo che I è un intervallo chiuso. Perciò, o I è illimitato superiormente, oppure esso ammette un numero reale b come massimo. Proviamo preliminarmente che, se I è limitato superiormente, allora f(x) ammette almeno un punto unito nell'intervallo $(a_1,b]$.

Infatti, la funzione $g(x) = f(x)-x$ assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[a_1,b]$ perchè:

$$g(a_1) = f(a_1)-a_1 = a_2 - a_1 > 0;$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0, \quad \text{essendo } f(b)\in I.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $x_0\in$ $\in(a_1,b]$ per cui $g(x_0) = 0$, cioè $x_0=f(x_0)$.

Indichiamo con x_0 il più piccolo tra i punti uniti di f(x) nell'intervallo $(a_1,b]$ (utilizzando la continuità di f(x) il lettore verifichi che esiste il minimo dei punti uniti) e verifichiamo per induzione che $a_n \leq x_0$ per ogni n:

La relazione è vera per n=1 perchè $x_0\in(a_1,b]$; se $a_n \leq x_0$, dato che f(x) è crescente, risulta anche $a_{n+1} = f(a_n) \leq f(x_0) = x_0$.

Essendo a_n crescente e limitata superiormente da x_0, essa converge ad un limite $a \leq x_0$. Passando al limite per $n\to+\infty$ nella relazione $a_{n+1} = f(a_n)$ ed utilizzando la continuità di f(x) si trova che a è un punto unito per f(x) nell'intervallo $(a_1,b]$. Ciò implica che $a=x_0$, perchè altrimenti x_0 non sarebbe il più piccolo punto unito per f(x) in $(a_1,b]$.

Se poi l'intervallo I è illimitato e f(x) non ha punti fissi maggiori di a_1, allora la successione a_n diverge a $+\infty$ perchè, se fosse una successione limitata, dovrebbe convergere ad un punto fisso maggiore di a_1 che, come detto, non esiste.

Si procede in modo analogo se $a_1 < a_2$

12.14 Utilizzando il teorema precedente studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = \pi/2, \qquad a_{n+1} = \text{sen } a_n$$

[Scriviamo la successione nel modo equivalente :

$$a_1 = \pi/2, \quad a_{n+1}=f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \text{sen } x.$$

La funzione f(x) applica l'intervallo $[0, \pi/2]$ in sè, perchè $0 \le \le \text{sen } x \le 1 < \pi/2$ se $x \in [0, \pi/2]$. Inoltre f(x) è continua e crescente in $[0, \pi/2]$. Dato che $a_2 = \text{sen}(\pi/2)=1 < \pi/2 = a_1$, in base alla parte 2) del teorema precedente si può affermare che a_n converge a $x_0=0$, unico punto unito della funzione sen x]

12.15 Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1=2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} \log (1+a_n) .$$

[La funzione $f(x) = (1/2) \log (1+x)$ è continua e crescente per $x>-1$. E' opportuno restringere l'insieme di definizione; scegliendo come dominio l'intervallo $I = [0,+\infty)$, risulta $f:I \to I$.

Si verifica che l'equazione $x=f(x)$ ammette, per $x \ge 0$, solo la soluzione $x_0=0$: infatti, la funzione $g(x) = x - f(x)$ è tale che

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1+2x}{2(1+x)} > 0 \qquad \forall x \ge 0;$$

perciò g(x) è strettamente crescente in I. Essendo $g(0)=0$, risulta $g(x) > 0$ per ogni $x > 0$; cioè $x > f(x)$ per ogni $x > 0$.

Essendo $x > f(x)$ è anche $a_1 > f(a_1) = a_2$. In base alla parte 2) del teorema precedente la successione a_n converge a zero]

12.16 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

(a) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \log (1+a_n)/\log 2$

(b) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2\log (1+a_n)/\log 3$

[(a) Si proceda in modo analogo a quanto indicato nell'esercizio precedente, tenendo conto che la funzione $f(x)=\log(1+x)/\log 2$ ha due punti uniti, per $x_o=0$ e per $x_o=1$. Si trova che la successione a_n converge decrescendo ad 1; (b) la successione converge crescendo a $x_o = 2$, che è un punto unito per la funzione $f(x) = 2 \log (1+x)/\log 3$]

12.17 Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza

$$\text{(a)}\ a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = e^{a_n} - 1$$
$$\text{(b)}\ a_1 = -1, \qquad a_{n+1} = e^{a_n} - 1$$

[La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x - 1$ è continua e crescente ed ha l'unico punto unito $x_o=0$. Risulta anche $f(x) > x$ se $x \neq 0$ (si confronti $f(x)$ con la sua retta tangente nel punto $x_o = 0$). Perciò $a_2 = f(a_1) > a_1$ se $a_1 \neq 0$. In base al teorema precedente si ottengono i seguenti risultati: (a) la successione diverge a $+\infty$; (b) la successione converge a 0]

12.18 Studiare le successioni definite per ricorrenza da

$$\text{(a)} \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

dove $f(x) = x+1-\log x$.

[La funzione $f(x)$ applica l'intervallo $[1,+\infty)$ in sè. Più precisamente, $f: [1,+\infty) \to [2,+\infty)$, perchè $f(1)=2$ e perchè $f(x)$ è crescente, essendo $f'(x) = 1-1/x \geq 0$ per ogni $x \geq 1$. Inoltre $f(x)$ ha $x_o=e$ come unico punto unito. Si ottengono i risultati: (a) a_n converge crescendo ad e; (b) a_n converge decrescendo ad e]

12.19 Studiare le successioni definite per ricorrenza tramite la funzione $f(x)=3x+\cos x-1$

$$(a)\begin{cases} a_1 = \pi \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} a_1 = -\pi \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

[La funzione $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale ed è strettamente crescente, dato che $f'(x) = 3 - \operatorname{sen} x \geq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. In modo simile si verifica che $x_o = 0$ è l'unico punto unito di $f(x)$ e che $f(x) \gtrless x$ se $x \gtrless 0$. In base al teorema precedente si ottengono i risultati: (a) a_n diverge a $+\infty$; (b) a_n diverge a $-\infty$]

12.20 Studiare la successione definita per ricorrenza

$$a_1 \geq 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{x^2+8}{6} \, .$$

al variare del primo termine $a_1 \in [0, +\infty)$.

[La funzione $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$ ed ammette in $[0, +\infty)$ punti uniti $x=2$ e $x=4$. Inoltre :

$$f(x) > x \quad \text{se} \quad x < 2 \quad \text{oppure} \quad x > 4;$$

$$f(x) < x \quad \text{se} \quad 2 < x < 4 \, .$$

In base al teorema precedente si ottengono i risultati:

$0 \leq a_1 \leq 2 \implies a_n$ converge crescendo a 2

$2 < a_1 < 4 \implies a_n$ converge decrescendo a 2

$a_1 = 4 \implies a_n$ è costante $= 4$

$a_1 > 4 \implies a_n$ diverge a $+\infty$]

Consideriamo ora il caso in cui $f(x)$ è decrescente.

TEOREMA . - *Sia* $f: I \to I$ *una funzione decrescente. Allora la successione* a_n *definita da*

$$a_1 \in I, \qquad a_{n+1} = f(a_n) \; ,$$

ha le sottosuccessioni a_{2k} , a_{2k-1} *monotòne. In particolare, se* $a_1 \leq a_3$ *allora* a_{2k-1} *è crescente e* a_{2k} *è decrescente; mentre, se* $a_1 \geq a_3$ *allora* a_{2k-1} *è decrescente e* a_{2k} *è crescente.*

Inoltre, se $a_1 \leq a_2$ *allora* $a_{2k-1} \leq a_{2k}$ *per ogni* k *; se invece* $a_1 \geq a_2$ *allora* $a_{2k-1} \geq a_{2k}$ *per ogni* k.

Infine, una condizione necessaria affinchè la successione a_n *abbia limite è che* a_3 *sia compreso tra* a_1 *e* a_2.

Dimostrazione: La funzione $g(x) = f(f(x))$ è crescente; infatti.

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)).$$

Inoltre, dato che $a_{2k} = f(a_{2k-1})$, risulta

$$a_{2k+1} = f(a_{2k})=f(f(a_{2k-1}))=g(a_{2k-1}).$$

Perciò la successione a_{2k-1} dei termini di posto dispari è definita per ricorrenza tramite la funzione crescente $g(x)$. In base al teorema precedente a_{2k-1} è una successione monotòna, crescente se $a_1 \leq a_3$ e decrescente se $a_1 \geq a_3$.

Si procede in modo analogo per la successione a_{2k} dei termini di posto pari, dopo aver osservato che $a_2 \gtrless a_4$ se $a_1 \lessgtr a_3$.

Supponendo $a_1 \leq a_2$, proviamo per induzione su k che $a_{2k-1} \leq a_{2k}$: Per $k = 1$ la relazione è vera per ipotesi; supponendo che $a_{2k-1} \leq a_{2k}$ otteniamo

$$a_{2k+1} = g(a_{2k-1}) \leq g(a_{2k}) = a_{2k+2} .$$

In figura 12.2 schematizziamo due diverse situazioni a seconda che a_3 sia interno od esterno all'intervallo di estremi a_1 e a_2.

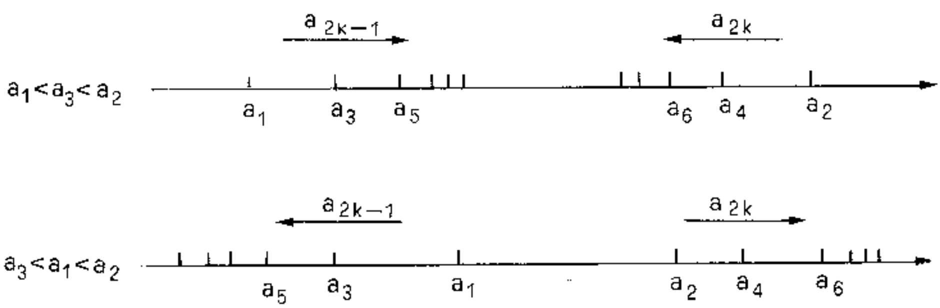


figura 12.2

Se a_3 è esterno all'intervallo di estremi a_1, a_2, ad esempio se, come in figura 12.2, $a_3 \leq a_1 < a_2$, allora a_{2k-1} è decrescente e a_{2k} è crescente. Perciò, essendo

$$a_{2k-1} \leq a_1 < a_2 \leq a_{2k} ,$$

il limite per $k\to+\infty$ di a_{2k-1} è diverso dal limite di a_{2k}; quindi il limite per $n\to+\infty$ di a_n non esiste.

12.21 Verificare che la seguente successione soddisfa le ipotesi del teorema precedente (ed ovviamente anche la tesi) ma non è convergente:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = 1/a_n .$$

[La funzione $f(x)=1/x$ è un'applicazione decrescente dell'intervallo $I=(0,+\infty)$ in sè e risulta $a_{2k-1}=2$, $a_{2k} = 1/2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$]

12.22 Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2/a_n^2 .$$

[La successione non ammette limite. Ciò segue dal teorema precedente. Infatti la funzione $f(x)=2/x^2$ è un'applicazione dell'intervallo $(0,+\infty)$ in sè ed è decrescente. Dato che $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1/2$, non è verificata la condizione necessaria (a_3 compreso fra a_1 ed a_2) affinchè la successione abbia limite]

12.23 Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x)= \frac{x+2}{2x+1} .$$

[La funzione $f(x)$ è positiva e decrescente (dato che $f'(x)< 0$) per $x \geq 0$. Perciò

$$0 < f(x) \leq f(0) = 2 \quad , \qquad \forall x \geq 0.$$

Quindi $f: I \to I$, dove I è l'intervallo $[0,2]$. Risulta $a_1=0$, $a_2=2$ $a_3=4/5$. Perciò a_{2k-1} è crescente, a_{2k} è decrescente e $a_{2k-1} \leq a_{2k}$. La condizione necessaria $a_1 < a_3 < a_2$ è verificata. In figura 12.3 sono rappresentati alcuni termini della successione.

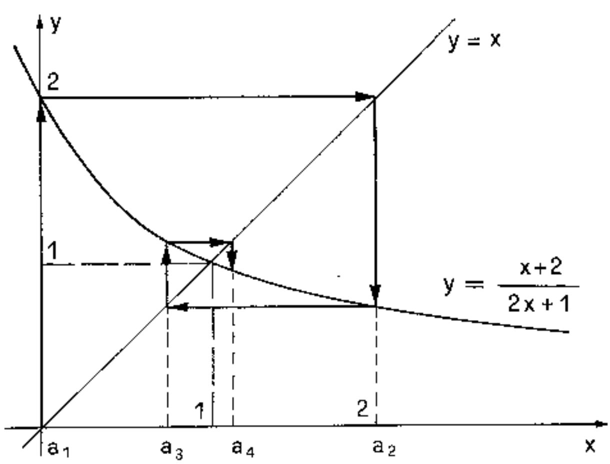


figura 12.3

Osservando la figura 12.3 si può congetturare che la successione a_n converge ad 1. Per dimostrarlo è opportuno studiare separatamente le successioni a_{2k-1}, a_{2k}. Per a_{2k-1} risulta $a_1 = 0$ e $a_{2k+1}=g(a_{2k-1})$, dove

$$g(x)=f(f(x)) = \frac{\frac{x+2}{2x+1}+2}{2\,\frac{x+2}{2x+1}+1} = \frac{5x+4}{4x+5} \quad .$$

La funzione $g(x)$ è crescente nell'intervallo $[0,2]$ ed ha in tale intervallo un unico punto unito, uguale ad 1. Perciò, per $k\to+\infty$, la successione a_{2k-1} converge ad 1. Analogamente $a_{2k} \to 1$. Quindi tutta la successione a_n converge ad 1 per $n\to+\infty$]

12.24 Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{4}{a_n+2} \quad .$$

[La funzione $f(x)=1+4/(x+2)$ è un'applicazione decrescente dell'intervallo $[1,+\infty)$ in sè. Con lo stesso metodo dell'esercizio precedente si verifica che per $n\to+\infty$ la successione a_n converge a 2, unico punto unito di $f(x)$ in tale intervallo]

12C. Contrazioni

Una funzione $f(x)$ è *lipschitziana* in un insieme I se esiste una costante L (*costante di Lipschitz*) tale che

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le L\,|x_1-x_2|, \qquad \forall x_1,x_2\in I.$$

Se $f(x)$ è un'applicazione da I in sè ed è lipschitziana con costante $L<1$ allora si dice che essa è una *contrazione* nell'insieme I.

Alcuni esercizi sulle funzioni lipschitziane sono proposti nel paragrafo 9C. Qui proponiamo il seguente:

12.25 Verificare che:

(a) $f(x)=|x|$ è lipschitziana su R

(b) $f(x)=|x-1|/2$ è una contrazione su R

[Utilizzare la disuguaglianza proposta nell'esercizio 9.6]

TEOREMA DELLE CONTRAZIONI. - *Sia* I *un intervallo chiuso (non necessariamente limitato) e sia* $f : I \to I$ *una contrazione con costante* $L < 1$. *Allora esiste in* I *un unico punto unito* x_0 *per* $f(x)$, *cioè tale che* $x_0 = f(x_0)$. *Inoltre, comunque si scelga* $a_1 \in I$, *la successione* a_n, *definita per ricorrenza da* $a_{n+1} = f(a_n)$, *è convergente ad* x_0 *e vale la stima dell'errore:*

$$(*) \qquad |a_{n+1} - x_0| \le L^n |a_1 - x_0|, \qquad \forall n \ge 0.$$

Dimostrazione: Proviamo preliminarmente l' unicità del punto unito: Se per assurdo supponiamo che x_1 e x_2 siano due punti uniti distinti per $f(x)$ in I, cioè tali che $x_1=f(x_1)$ e $x_2=f(x_2)$, allora, dato che $L<1$, otteniamo la contraddizione

$$|x_1-x_2|=|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|<|x_1-x_2| .$$

Proviamo ora l'esistenza del punto unito. Osserviamo preliminarmente che ogni funzione lipschitziana è continua (anzi uniformemente continua) in I.

Se $I=[a,b]$ è un intervallo chiuso e limitato allora il risultato segue, come nell'esercizio 9.23, dal teorema dell'esistenza degli zeri applicato alla funzione $g(x) = f(x) - x$ nell'intervallo $[a,b]$ (infatti $g(a)=f(a)-a \ge 0$, $g(b)=f(b)-b \le 0$ e quindi esiste $x_0 \in I$ per cui $g(x_0)=f(x_0)-x_0 = 0$).

Supponiamo ora che I sia un intervallo illimitato del tipo $[a,+\infty)$ (i casi $(-\infty,b]$, oppure $(-\infty,+\infty)$ si trattano in modo analogo).

Dato che $f: I\to I$, risulta $f(a) \ge a$. Inoltre, dalla disuguaglianza $|f(x)-f(a)| \leq L|x-a|=L(x-a)$ valida per $x\in[a,+\infty)$, otteniamo $f(x) \leq f(a) + L(x-a)$ e quindi

$$f(x)-x \leq f(a) - La + x(L-1), \qquad \forall x\in[a,+\infty).$$

Dato che $L < 1$, il secondo membro tende a $-\infty$ per $x\to+\infty$. Perciò

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty .$$

Esiste quindi un numero $b > a$ per cui $f(b)-b < 0$. Per il teorema dell'esistenza degli zeri, esiste $x_o\in[a,b)$ per cui $f(x_o)-x_o = 0$.

Proviamo ora per induzione che vale la stima dell'errore (*): Tale relazione è vera (con il segno =) per n=0. Assumendo che (*) sia vera per n, dato che $x_o = f(x_o)$, risulta anche

$$|a_{n+2} - x_o| = |f(a_{n+1})-f(x_o)| \leq$$

$$\leq L\, |a_{n+1} - x_o| \leq L^{n+1}\, |a_1-x_o| .$$

Perciò la (*) è dimostrata. Da essa deduciamo che, per $n\to+\infty$, a_n converge ad x_o, perchè $L^n \to 0$, essendo $0 \leq L < 1$.

12.26 Mostrare con un esempio che il teorema precedente non vale in generale se I è un intervallo aperto.

[Ad esempio la funzione $f(x)=x/2$ è una contrazione nell'intervallo aperto $(0,1)$, ma non ammette alcun punto unito in tale intervallo. Evidentemente $x_o=0$ è un punto unito per la funzione $x/2$ nell'intervallo chiuso $[0,1]$]

Un criterio per verificare se una funzione è lipschitziana, o se è una contrazione, è il seguente

TEOREMA. - *Sia* $f(x)$ *una funzione derivabile in un in* *tervallo* I. $f(x)$ *è lipschitziana in* I *con costante* L *se e solo se*

$$|f'(x)| \le L, \qquad \forall x \in I.$$

Dimostrazione: Dati x_1, $x_2 \in I$, applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)$ nell'intervallo $[x_1,x_2]$. Esiste un punto $\xi \in (x_1,x_2)$ per cui $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1-x_2)$. Essendo $|f'(x)| \le L$ per ogni $x \in I$, in particolare $|f'(\xi)| \le L$; perciò

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1-x_2| \le L|x_1-x_2| .$$

Viceversa, se $f(x)$ è lipschitiziana, allora se x_0, $x_0 + h \in I$, risulta

$$|f(x+h)-f(x)| \le L\ |h| .$$

Dividendo per $|h|$ ($\ne 0$) e passando al limite per $h \to 0$ otteniamo la tesi.

12.27 Verificare che la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x+5}$ è un'applicazione dell'intervallo $[1,3]$ in sè ed è una contrazione in tale intervallo.

[La funzione $f(x)$ è crescente su R. Dato che $f(1) = \sqrt[3]{6} > 1$ e $f(3) = \sqrt[3]{8} = 2$, risulta

$$f\colon [1,3] \to [\sqrt[3]{6},2] \subset [1,3] .$$

La derivata $f'(x)=(1/3)(x+5)^{-2/3}$ è decrescente nell'intervallo $[1,3]$, perciò

$$0 \le f'(x) \le f'(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^{2/3}} < 1, \qquad \forall x \in [1,3] .$$

Quindi $f(x)$ è una contrazione in $[1,3]$, con costante $3^{-1} \cdot 6^{-2/3}$]

12.28 Verificare che la funzione $f(x) = x+1-\log x$

(a) è lipschitziana nell'intervallo $[1,+\infty)$;

(b) è un'applicazione dell'intervallo $[1,b]$ in sè, per ogni $b \geq e$;
(c) è una contrazione con costante $1-b^{-1}$ nello intervallo $[1,b]$, per ogni $b \geq e$.

[(a) La funzione $f(x)$ è lipschitziana in $[1,+\infty)$ con costante di Lipschitz uguale ad 1, dato che $0 \leq f'(x)=1-1/x \leq 1$, $\forall x \geq 1$; (b) Essendo $f'(x) \geq 0$, la funzione è crescente per $x \geq 1$; perciò se $b > 1$

$$2=f(1) \leq f(x) \leq f(b) = b + 1 - \log b .$$

Dato che $\log b \geq 1$ se $b \geq e$, risulta $[2,b+1-\log b] \subset [1,b]$; (c) Dato che $f'(x)$ è crescente, risulta $0 \leq f'(x) \leq f'(b)=1-1/b$]

12.29 Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 \geq 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 1 - \log a_n$$

[Poniamo $b = \max \{a_1, e\}$. In base all'esercizio precedente la funzione $f(x) = x+1-\log x$ è una contrazione nell'intervallo $[1,b]$. Perciò, per $n \to +\infty$, a_n converge all'unico punto unito di $f(x)$, che è $x_0 = e$.]

12.30 Verificare che la funzione $f(x) = (2x-x^2+2)/3$ è un'applicazione dell'intervallo $[0,2]$ in sè e che è una contrazione in tale intervallo.

[Dal segno della derivata $f'(x)$ si verifica che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $[0,1]$ ed è decrescente in $[1,2]$. Essendo $f(0)=f(2)=2/3$, $f(1)=1$, risulta $2/3 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in [0,2]$. Perciò $f(x)$ applica l'intervallo $[0,2]$ in $[2/3,1] \subset [0,2]$. Dato che la derivata è decrescente, si ha

$$-\frac{2}{3} = f'(2) \leq f'(x) = \frac{2-2x}{3} \leq f'(0) = \frac{2}{3} .$$

Perciò $f(x)$ è una contrazione in $[0,2]$ con costante $2/3$]

12.31 Studiare la successione

$$a_1 = 2, \ a_{n+1} = (2a_n - a_n^2 + 2)/3$$

[In base all'esercizio precedente la funzione $f(x) = (2x-x^2+2)/3$ è una contrazione nell'intervallo $[0,2]$. Inoltre $x_o=1$ è il punto unito di $f(x)$ in tale intervallo. Perciò, per $n\to+\infty$, a_n converge ad 1]

12.32 Studiare la successione: $a_1=-7$, $a_{n+1} = \dfrac{|a_n+1|}{2}$.

[Si verifichi che la funzione $f(x) = |x+1|/2$ è una contrazione su R. La successione a_n, per $n\to+\infty$, converge ad 1, punto unito di $f(x)$]

12.33 Studiare la successione: $a_1=0$, $a_{n+1} = \cos(1-a_n)$

[La funzione $f(x) = \cos(1-x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[0,1]$ in sè ed in tale intervallo è una contrazione con costante L=sen 1. La successione a_n converge ad 1, punto fisso di $f(x)$]

12.34 Si studi la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_{n+1}=f(a_n) \quad \text{con } f(x)=\begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

[La funzione $f(x)$ applica l'intervallo $[-1/3, 1/3]$ in sè; infatti, se $|x|\leq 1/3$, risulta

$$|f(x)| \leq |x^3| \leq 1/27 < 1/3.$$

Inoltre $f(x)$ è una contrazione in tale intervallo, perchè, se $|x|< 1/3$, si ha $f'(0) = 0$ e se $x\neq 0$:

$$|f'(x)| = |3x^2\operatorname{sen}(1/x)-x\cos(1/x)| \leq$$

$$\leq |x|(3|x|\cdot|\operatorname{sen}(1/x)|+|\cos(1/x)|)$$

$$\leq |x|(|\operatorname{sen}(1/x)|+|\cos(1/x)|) \leq 2|x| \leq 2/3.$$

Il punto fisso di $f(x)$ in $[-1/3,1/3]$ è $x_o=0$. Perciò $a_n\to 0$]

12D. Le successioni sen nx, cos nx

Con l'ausilio del metodo di induzione riprendiamo in questa sede le successioni sen nx, cos nx già considerate nei paragrafi 7G e 7I.

PROPOSIZIONE. - *La successione* a_n = sen nx *è convergente se e solo se* $x = k\pi$, *con* $k\in\mathbb{Z}$. *La successione* b_n=cos nx *è convergente se e solo se* $x=2k\pi$, *con* $k\in\mathbb{Z}$.

Dimostrazione: Le successioni a_n = sen nx per $x=k\pi$ e b_n = cos nx per $x=2k\pi$, sono costanti (rispettivamente uguali a 0 ed 1); è quindi ovvio che sono convergenti.

Studiamo la successione a_n = sen nx con $x\neq k\pi$. In base alle formule di addizione abbiamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \text{sen}\,[(n+1)x] = \text{sen}\,(nx+x) \\ &= \text{sen}\,nx\cdot\cos x + \cos nx\cdot\text{sen}\,x = \\ &= a_n \cos x + b_n \,\text{sen}\,x; \\ a_{n-1} &= \text{sen}\,[(n-1)x] = \text{sen}\,(nx-x) \\ &= \text{sen}\,nx\cdot\cos x - \cos nx\cdot\text{sen}\,x = \\ &= a_n \cos x - b_n\,\text{sen}\,x. \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo otteniamo

$$(1) \qquad a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n \cos x\ ;$$

$$(2) \qquad a_{n+1} - a_{n-1} = 2b_n\,\text{sen}\,x\ .$$

Supponiamo ora, per assurdo, che a_n converga ad un numero a. In tal caso dalla (2), dato che sen $x\neq 0$ (essendo $x\neq k\pi$), segue che $b_n\to 0$. Dalla (1) segue poi che 2a=2acos x, cioè

$$2a(1-\cos x) = 0.$$

Essendo $\cos x \neq 1$, deve essere a = 0. Perciò, se

a_n è convergente, allora necessariamente $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$. Ciò contrasta con la relazione fondamentale $a_n^2 + b_n^2 = 1$.

Procediamo in modo analogo per la successione $b_n = \cos nx$, con $x \neq 2k\pi$, $\forall k \in Z$. Dalle formule di addizione si ottiene

$$b_{n+1} = b_n \cos x - a_n \operatorname{sen} x \; ;$$

$$b_{n-1} = b_n \cos x + a_n \operatorname{sen} x \; .$$

Per somma e sottrazione otteniamo

$$(3) \qquad b_{n+1} + b_{n-1} = 2b_n \cos x \; ;$$

$$(4) \qquad b_{n+1} - b_{n-1} = -2a_n \operatorname{sen} x \; .$$

Se, per assurdo, supponiamo che b_n converga ad un numero reale b, dalla (3) otteniamo

$$2b\,(1-\cos x)=0.$$

Dato che $x \neq 2k\pi$, risulta $\cos x \neq 1$ e quindi $b=0$.

Prima di procedere oltre è opportuno osservare che, se $x = k\pi$ con k dispari, allora si verifica direttamente che $b_n = (-1)^n$. Perciò in tal caso la successione b_n non è convergente. Nel seguito ci limitiamo a considerare $b_n = \cos nx$ con $x \neq k\pi$.

Se $x \neq k\pi$ risulta $\operatorname{sen} x \neq 0$ e quindi dalla (4) deduciamo che $a_n \to 0$. Le relazioni di limite $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ contraddicono di nuovo il fatto che $a_n^2 + b_n^2 = 1$.

12E. **Successioni dipendenti da un parametro. Comportamento caotico**

In questo paragrafo esaminiamo una successione de finita per ricorrenza e dipendente da un parametro reale λ. Vedremo che il comportamento della successione è fortemente influenzato dalla scelta del parametro. Infatti, mentre per alcuni valori di λ la successione risulta convergente, per altri valori di λ non è regolare e, in quest'ultimo caso, può essere fortemente influenzata dalla scelta del dato iniziale a_1, nel senso che dati iniziali fra loro vicini possono dar luogo a successioni molto diverse fra loro. In presenza di tali instabilità si parla di *caos* e di *successioni caotiche*.

Esponiamo preliminarmente alcuni risultati teorici e chiudiamo il paragrafo con due elaborazioni numeriche. Consigliamo il lettore che può far uso di un computer di "verificare sperimentalmente" i risultai esposti in questo paragrafo.

La successione che prendiamo in considerazione è definita per ricorrenza da

$$a_1 \in [0,1], \qquad a_{n+1} = \lambda a_n (1-a_n) \ .$$

Come già detto λ è un parametro reale. Possiamo riscrivere la legge di induzione nel modo seguente

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{con} \quad f(x) = \lambda x(1-x)$$

Con un rapido calcolo si verifica che $f(x)$ è positiva in $[0,1]$ se $\lambda \geq 0$, che il massimo di $f(x)$ si ottiene per $x = 1/2$ e che il valore di massimo è $f(1/2) = \lambda/4$. Perciò $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[0,1]$ in sè se $0 \leq \lambda \leq 4$.

Discutiamo quindi il comportamento della successione a_n per $\lambda \in [0,4]$. Cominciamo con l'osservare che i criteri del paragrafo 12B non sono applicabili globalmente in $[0,1]$ perchè $f(x)$ non è monotòna in tale intervallo. Vedremo però fra poco che saranno applicabili ad un sottointervallo per alcuni valori del parametro λ.

12.35 Verificare che la successione a_n risulta con - vergente (qualunque sia λ) se per a_1 si sceglie uno dei valori sottoindicati:

(a) $a_1 = 0$ (b) $a_1 = 1$

[(a) $a_n = 0 \ \forall n \in N$; (b) $a_n = 0 \ \forall n \geq 2$]

12.36 Determinare per $\lambda \geq 0$ i punti uniti della funzione $f(x) = \lambda x(1-x)$ nell'intervallo $[0,1]$.

[Se $0 \leq \lambda \leq 1$, $f(x)$ ammette in $[0,1]$ l'unico punto unito $x_o = 0$. Se invece $\lambda > 1$, $f(x)$ ha due punti uniti: $x_o=0$ e $x_o=1-1/\lambda$]

12.37 Supponendo che a_n sia convergente, determinare i possibili valori del limite per $\lambda\in[0,4]$.

[Dato che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni n, il limite di a_n, se esiste, è un punto unito di $f(x)$ nell'intervallo $[0,1]$. Perciò i possibili valori del limite sono: 0 se $0 \leq \lambda \leq 1$; 0 oppure $1-1/\lambda$ se $\lambda > 1$]

12.38 Sia $0 \leq \lambda < 1$. Verificare che

(a) $f(x)$ è una contrazione nell'intervallo $[0,1]$

(b) la successione a_n converge a zero qualunque sia il valore iniziale $a_1\in[0,1]$.

[(a) La derivata $f'(x)=\lambda(1-2x)$ è una funzione decrescente. Perciò il suo massimo nell'intervallo $[0,1]$ è assunto per $x=0$, e vale $f'(0)==\lambda$, mentre il minimo si ottiene per $x=1$ e vale $f'(1)=-\lambda$. Quindi $|f'(x)| \leq \lambda$ per ogni $x\in[0,1]$. Dato che $\lambda< 1$, $f(x)$ è una contrazione in $[0,1]$ con costante λ; (b) $f(x)$ è una contrazione in $[0,1]$. Perciò, in base all'analisi fatta nel paragrafo 12C, la successione a_n converge all'unico punto unito di $f(x)$, che è lo zero]

12.39 Sia $1 \leq \lambda \leq 2$. Verificare che

(a) $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo

$[0,1/2]$ in sè;

(b) $f(x)$ è crescente in $[0,1/2]$;

(c) $f(x) > x$ se $x\in(0,1-1/\lambda)$;
$f(x) < x$ se $x\in(1-1/\lambda,\ 1/2)$;

(d) qualunque sia $a_1\in(0,1)$, la successione a_n è convergente ed il limite vale $1-1/\lambda$.

[(a) Abbiamo già verificato che il massimo di $f(x)$ è $f(1/2)=\lambda/4$. Perciò, se $\lambda \le 2$, risulta $0 \le f(x) \le 2$ per ogni $x\in[0,1]$ e quindi, a maggior ragione, per ogni $x\in[0,1/2]$; (b) $f'(x)=\lambda(1-2x) \ge 0$ per $x\in[0,1/2]$; (c) l'enunciato si vede chiaramente rappresentando in uno stesso sistema di assi cartesiani le funzioni $y = f(x)$ e $y = x$. Lasciamo al lettore la verifica analitica, che consiste nel risolvere una disequazione di secondo grado; (d) consideriamo preliminarmente $a_1\in(0,1/2]$. In base all'analisi fatta nel paragrafo 12B la successione a_n è monotòna e converge (crescendo se $a_1< 1-1/\lambda$, decrescendo se $a_1> 1-1/\lambda$) ad $1-1/\lambda$. Se invece $a_1 > 1/2$, dato che $f(x)\le 1/2$ per ogni $x\in[0,1]$, risulta $a_2=f(a_1) < 1/2$. Quindi $a_2\in(0,1/2)$ se $a_1\in(1/2,1)$. Si procede poi come in precedenza per la successione $a_2, a_3, a_4,\dots$]

12.40 Sia $\lambda > 2$. Verificare che:

(a) $a_n \le \lambda/4$ per ogni $n \ge 2$;

(b) esiste un indice ν per cui $a_\nu > 1/2$.

[(a) Dato che $f(x) \le \lambda/4$ per ogni x, risulta anche $a_{n+1} = f(a_n)\le \lambda/4$ per ogni $n \ge 1$; (b) supponiamo per assurdo che $a_n \le 1/2$ per ogni n. Dato che $f(x)$ è crescente in $[0,1/2]$, per l'analisi fatta nel paragrafo 12B, a_n sarebbe una successione monotòna, convergente ad $1-1/\lambda$. Però $1-1/\lambda > 1/2$ perchè $\lambda > 2$. Ciò contrasta con l'ipotesi $a_n \le 1/2$ per ogni n]

12.41 Sia $2 \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{5} = 3.2\ldots$ Verificare che $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[1/2, \lambda/4]$ in sè.

[Abbiamo provato in precedenza che $f(x) \leq \lambda/4$ per ogni x. Dato che $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $[1/2, 1]$, rimane da verificare che $f(\lambda/4) \geq 1/2$, cioè che

$$\lambda \frac{\lambda}{4} \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right) \geq \frac{1}{2} \iff \lambda^3 - 4\lambda^2 + 8 \leq 0.$$

Dopo aver osservato che il polinomio di terzo grado in λ si annulla per $\lambda=2$, possiamo scomporlo nel modo seguente:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 4) \leq 0 \quad .$$

E' facile verificare che tale disequazione è soddisfatta se $2 \leq \lambda \leq 1 + \sqrt{5}$]

12.42 Sia $2 \leq \lambda < 1 + \sqrt{3} = 2.7\ldots$ Verificare che

(a) $f(x)$ è una contrazione nell'intervallo $[1/2, \lambda/4]$;

(b) qualunque sia il valore iniziale $a_1 \in (0,1)$, la successione a_n converge a $1 - 1/\lambda$.

[(a) In base all'esercizio precedente, $f(x)$ è un'applicazione dell'intervallo $[1/2, \lambda/4]$ in sè. La derivata $f'(x) = \lambda(1-2x)$ è decrescente, perciò:

$$f'(\lambda/4) = \lambda(1 - \lambda/2) \leq f'(x) \leq f'(1/2) = 0.$$

Ne segue che $f(x)$ è una contrazione se

$$|f'(x)| \leq \left|\lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\right| = \lambda\left(\frac{\lambda}{2} - 1\right) < 1 ,$$

cioè se $\lambda^2 - 2\lambda - 2 < 0$, e ciò è verificato nel nostro caso; (b) in base alla parte (b) dell'esercizio 12.40 esiste un indice ν per cui $a_\nu > 1/2$. Il risultato discende dal teorema delle contrazioni, applicato alla successione a_n, con $n \geq \nu$]

12.43 Sia $1 < \lambda < 3$. Verificare che esiste un intorno I del punto $x_o = 1-1/\lambda$ con le proprietà:

(a) $f(x)$ è un'applicazione di I in sè;
(b) $f(x)$ è una contrazione su I;
(c) se $a_1 \in I$, allora a_n converge ad $1-1/\lambda$.

[Posto $x_o = 1-1/\lambda$, risulta $f'(x_o) = 2-\lambda$. Perciò, se $1 < \lambda < 3$, risulta $|f'(x_o)| < 1$. Per il teorema della permanenza del segno esiste un intervallo $I = [x_o - \delta, x_o + \delta]$, con $\delta > 0$, per cui $|f'(x)| < 1$ per $x \in I$. Dato che $f(x_o) = x_o$, per il teorema di Lagrange applicato all'intervallo di estremi x_o, $x \in I$, otteniamo

$$|f(x)-x_o| = |f(x)-f(x_o)| = |f'(\xi)(x-x_o)| \le |x-x_o| \le \delta$$

Perciò $x_o - \delta \le f(x) \le x_o + \delta$, cioè $f(x) \in I$. Ciò prova (a) e (b). Infine (c) è conseguenza del teorema delle contrazioni]

Dall'analisi fatta fino ad ora si deduce che la successione a_n è convergente se $\lambda < 3$.

Più complicato è lo studio per $\lambda \ge 3$. Ci limitiamo pertanto ad elencare alcuni valori numerici trovati per a_n in corrispondenza a due diversi valori del parametro λ.

Cominciamo col considerare $\lambda=7/2$. Nella tabella che segue riportiamo alcuni valori di a_n in corrispondenza a due diverse scelte del primo termine a_1.

$\lambda = 3.5$		
n	a_n $(a_1 = 0.5)$	$a_n(a_1 = 0.3)$
1	0.5	0.3
2	0.875	0.735
3	0.3828125	0.6817125
4	0.8269348	0.7594319
5	0.5008976	0.6394326
6	0.8749971	0.8069548
7	0.3828199	0.5452254
8	0.8269408	0.8678412
9	0.5008837	0.4014247
10	0.8749972	0.8409902
...	...	...
30	0.8749972	0.8269407
31	0.3828196	0.5008840
32	0.8269407	0.8749972
33	0.5008842	0.3828196
34	0.8749972	0.8269407
...	...	...

Dalla tabella si può intuire che in nessuno dei due casi la successione a_n è convergente. Però siamo in presenza di un *comportamento periodico*: in entrambi i casi si ripetono in sequenza i quattro valori (approssimati) 0.87..., 0.38..., 0.82..., 0.50...; in questo caso si dice che la successione ha un *ciclo di periodo 4*. Abbiamo schematizzato questo ciclo in figura 12.4.

Consideriamo ora il caso $\lambda = 3.98$, partendo da due valori iniziali vicini fra loro ($a_1 = 0.3$ oppure $a_1 = 0.301$).

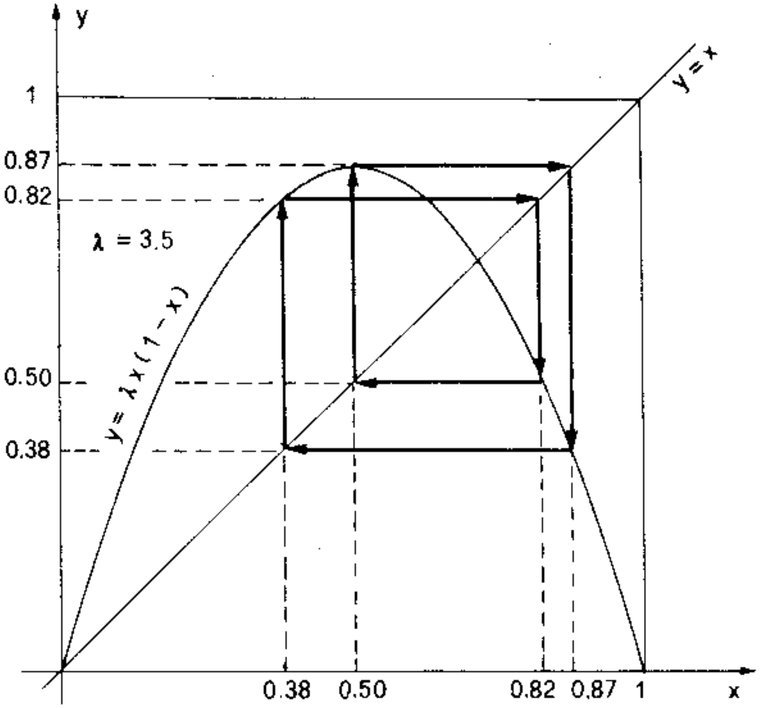


figura 12.4

$\lambda = 3.98$		
n	$a_n(a_1=0.3)$	$a_n(a_1 = 0.301)$
1	0.3	0.301
2	0.8358	0.8373880
3	0.5462086	0.5419539
4	0.9865017	0.9879946
5	0.5299791	0.4720754
6	0.1997527	0.1790163
7	0.6362093	0.5849386
8	0.9211591	0.9662859
9	0.2890473	0.1296580
10	0.8178859	0.4491303
11	0.5928150	0.9847008
12	0.9607137	0.0599589
...	...	...

Come si vede la differenza iniziale su a_1 si amplifica ad ogni passo e dopo poche iterazioni genera numeri molto distanti fra loro. In questo caso si può forse intuire che la successione non è convergente; però è opportuno diffidare dei risultati numerici indicati in quest'ultima tabella perchè,se le piccole differenze iniziali si amplificano, allo stesso modo ad ogni iterazione si amplificano gli errori di troncamento che ogni computer necessariamente fa. Questa viene normalmente chiamata *situazione caotica*.

I risultati indicati sopra sono stati ottenuti con un computer che operava con 16 cifre decimali. Il lettore non si meravigli se, facendo girare un proprio programma su un diverso computer, ottiene per $\lambda = 3.98$ risultati anche molto diversi da quelli indicati. Viceversa, per $\lambda = 3.5$, dovrebbe ottenere sostanzialmente i risultati indicati nella tabella precedente perchè, come è possibile dimostrare, in quel caso l'algoritmo di ricorrenza è stabile.

La parte seconda del 1° volume

di esercizi contiene i seguenti capitoli:

- APPLICAZIONI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE
- GRAFICI DI FUNZIONI
- EQUAZIONI ALGEBRICHE E TRASCENDENTI
- INTEGRALI INDEFINITI
- INTEGRALI DEFINITI
- SERIE NUMERICHE