

Michiel Bertsch  
Roberta Dal Passo  
Lorenzo Giacomelli

# Analisi matematica

Seconda edizione

**McGraw-Hill**

---

**Milano** • New York • San Francisco • Washington D.C. • Auckland  
Bogotá • Lisboa • London • Madrid • Mexico City • Montreal  
New Delhi • San Juan • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

# Indice breve

## PARTE I Elementi di base

Capitolo 1	Introduzione	1
Capitolo 2	Funzioni	34

## PARTE II Funzioni di una variabile

Capitolo 3	Introduzione alle proprietà locali e al concetto di limite	73
Capitolo 4	Successioni e serie	109
Capitolo 5	Ulteriori elementi della teoria dei limiti	145
Capitolo 6	Funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$	163
Capitolo 7	Calcolo differenziale: funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$	179
Capitolo 8	Integrali	231
Capitolo 9	Complementi su successioni e serie	277

## PARTE III Funzioni di più variabili e funzioni vettoriali

Capitolo 10	Limiti e continuità	302
Capitolo 11	Calcolo differenziale per funzioni di più variabili	327
Capitolo 12	Curve e integrali curvilinei	357
Capitolo 13	Funzioni implicite ed estremi vincolati	383
Capitolo 14	Integrali multipli	412
Capitolo 15	Superfici e integrali di superficie	452
Capitolo 16	I teoremi della divergenza e del rotore	468

## PARTE IV Equazioni differenziali

Capitolo 17	Equazioni differenziali ordinarie	482
-------------	-----------------------------------	-----

## PARTE V Funzioni olomorfe e trasformate

Capitolo 18	Funzioni olomorfe	525
Capitolo 19	Trasformata di Laplace	555
Capitolo 20	Serie e trasformata di Fourier	579



Copyright © 2011, 2007 The McGraw-Hill Companies, S.r.l.  
Publishing Group Italia  
Via Ripamonti, 89 – 20139 Milano

**McGraw-Hill**



*A Division of The McGraw-Hill Companies*

Le fotocopie *per uso personale* del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque *per uso diverso da quello personale* possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail [segreteria@aidro.org](mailto:segreteria@aidro.org) e sito web [www.aidro.org](http://www.aidro.org).

Date le caratteristiche intrinseche di Internet, l'Editore non è responsabile per eventuali variazioni negli indirizzi e nei contenuti dei siti Internet riportati.

L'Editore ha fatto tutto il possibile per contattare gli aventi diritto delle immagini che compaiono nel testo e resta a disposizione di chi non è stato possibile contattare.

La sezione dei crediti che inizia a pagina 603 è da considerarsi estensione del colophon.

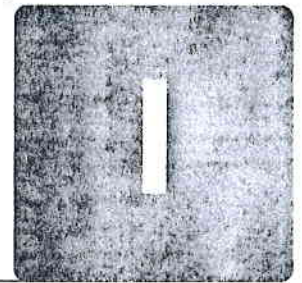
I diritti di traduzione, di riproduzione, di memorizzazione elettronica e di adattamento totale e parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i Paesi.

Nomi e marchi citati nel testo sono generalmente depositati o registrati dalle rispettive case produttrici.

Publisher: Paolo Roncoroni  
Development Editor: Filippo Aroffo  
Produzione: Donatella Giuliani  
Sviluppo web: Daniela Cipollone  
Impaginazione: La Pulce s.n.c.  
Grafica di copertina: Editta Gelsomini  
Immagine di copertina: *Math exercise* © 2009 Ofiplus  
Stampa: Vincenzo Bona, Torino

ISBN 978-88-386-6281-2  
Printed in Italy  
123456789VIBVIB4321

# Indice generale



Prefazione	XIII
Ringraziamenti dell'Editore	XV
Guida alla lettura	XVI

## PARTE I Elementi di base

<b>Capitolo 1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Richiami di insiemistica	2
1.2 Insiemi numerici	6
1.3 Numeri reali	8
1.3.1 Valore assoluto	10
1.3.2 Estremo superiore, inferiore - la proprietà di completezza	12
1.3.3 Radici, potenze e logaritmi	15
1.4 Numeri complessi	19
1.4.1 Radici complesse	24
1.5 Principio di induzione	28
Appendice 1.A Grandezze trigonometriche	30
Appendice 1.B Coefficienti binomiali	32
<b>Capitolo 2 Funzioni</b>	<b>34</b>
2.1 Funzione, dominio, immagine, grafico	35
2.2 Funzioni reali di una variabile reale	39
2.2.1 Funzioni monotone	39
2.2.2 Funzioni simmetriche, funzioni periodiche	41
2.2.3 Funzioni elementari	42
2.3 Funzione limitata, estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo	46
2.4 Funzione iniettiva, suriettiva	50
2.5 Funzione composta	51
2.6 Funzione inversa	55
2.6.1 Le funzioni arcoseno, arcocoseno, arcotangente	58
2.6.2 Invertibilità e monotonia	60
2.7 Operando con le funzioni	61
2.8 Equazioni e disequazioni: metodo grafico	68
Appendice 2.A Funzioni lineari e funzioni quadratiche	71

## PARTE II Funzioni di una variabile

<b>Capitolo 3 Introduzione alle proprietà locali e al concetto di limite</b>	<b>73</b>
3.1 Intorni	75
3.1.1 Insiemi aperti e chiusi	80

3.2	Limite	82
3.3	Proprietà elementari dei limiti	87
3.4	Funzioni infinitesime e infinite; il simbolo $o(1)$	97
3.5	Limiti notevoli di funzioni trigonometriche	100
3.6	Infiniti, infinitesimi e confronti	103
<b>Capitolo 4 Successioni e serie</b>		<b>109</b>
4.1	Successioni a valori in $\mathbb{R}$	110
4.2	Il numero $e$	113
4.3	Sottosuccessioni	115
4.4	Criterio di Cauchy	116
4.5	Successioni ricorsive	117
4.6	Sommatorie	119
4.7	Serie numeriche: definizione e proprietà elementari	121
4.8	Serie numeriche a termini positivi	125
4.8.1	Criterio del confronto	126
4.8.2	Criterio della condensazione	128
4.8.3	Criterio del rapporto, criterio della radice	130
4.9	Serie a termini di segno variabile	132
4.9.1	Convergenza assoluta, criterio di convergenza assoluta, criterio di Cauchy	132
4.9.2	Serie a termini di segno alterno	135
4.10	Riordinamenti	141
4.11	Prodotto di Cauchy di due serie	143
<b>Capitolo 5 Ulteriori elementi della teoria dei limiti</b>		<b>145</b>
5.1	Ulteriori limiti notevoli	146
5.1.1	Funzioni iperboliche e loro inverse	150
5.2	Asintoto orizzontale, obliquo, verticale	151
5.3	I simboli di Landau	153
5.4	Ordini di infinitesimo e infinito	156
5.5	Non esistenza di limiti	160
5.6	Insiemi compatti	161
<b>Capitolo 6 Funzioni continue da <math>\mathbb{R}</math> in <math>\mathbb{R}</math></b>		<b>163</b>
6.1	Continuità: definizione e proprietà elementari	164
6.2	Punti di discontinuità	167
6.3	Teorema degli zeri	169
6.4	Continuità delle funzioni inverse	172
6.5	Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato	174
6.6	Continuità lipschitziana, continuità uniforme	175
<b>Capitolo 7 Calcolo differenziale: funzioni da <math>\mathbb{R}</math> in <math>\mathbb{R}</math></b>		<b>179</b>
7.1	Retta tangente, derivata	180
7.2	Derivata destra e sinistra, punto angoloso, cuspide	186
7.3	Proprietà elementari della derivata	187
7.4	Derivate delle funzioni elementari	191
7.5	Calcolo delle derivate	192
7.6	Estremi locali e derivate	195
7.7	Teorema del valor medio e applicazioni	197
7.7.1	Monotonia e derivata	198
7.7.2	Teorema di de l'Hôpital	200
7.8	Derivate successive	205

7.9	Funzioni convesse e concave	207
7.10	Studio di funzione	209
7.11	Polinomio di Taylor	215
7.12	Applicazioni del teorema di Peano	222
7.12.1	Limiti e ordini di infinitesimo/infinito	222
7.13	Approssimazione di funzioni con polinomi di Taylor	227
<b>Capitolo 8 Integrali</b>		<b>231</b>
8.1	Definizione di integrale di Riemann	233
8.2	Un criterio di integrabilità e classi di funzioni integrabili	237
8.3	Proprietà dell'integrale	239
8.4	Funzioni integrali. Il teorema fondamentale del calcolo integrale	241
8.4.1	Studio di funzioni integrali	244
8.5	Funzioni primitive - integrale indefinito	246
8.6	Calcolo degli integrali	249
8.6.1	Integrazione per parti	249
8.6.2	Integrazione per sostituzione	251
8.6.3	Integrazione delle funzioni razionali	255
8.6.4	Alcune sostituzioni di base	261
8.6.5	Alcune formule ricorsive e altre primitive	266
8.7	Integrabilità in senso improprio	267
8.7.1	Criteri di convergenza: criterio del confronto	270
8.7.2	Absoluta integrabilità in senso improprio	274
<b>Capitolo 9 Complementi su successioni e serie</b>		<b>277</b>
9.1	Serie numeriche e integrali impropri	278
9.2	Successioni e serie a valori complessi	280
9.3	Serie di potenze	284
9.4	Serie di Taylor	290
9.5	Successioni e serie di funzioni	294
9.5.1	Successioni di funzioni	294
9.5.2	Convergenza uniforme	296
9.5.3	Serie di funzioni	299

## Parte III Funzioni di più variabili e funzioni vettoriali

<b>Capitolo 10 Limiti e continuità</b>		<b>302</b>
10.1	Introduzione	303
10.2	Concetti di base	305
10.2.1	Dominio naturale	305
10.2.2	Distanza, intorno, insiemi aperti e chiusi	306
10.2.3	L'elemento $\infty$	310
10.2.4	Alcune disuguaglianze notevoli	311
10.3	Limiti e continuità di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$	312
10.3.1	Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$ ; insiemi compatti	314
10.3.2	Funzioni continue su un compatto	316
10.3.3	Curve parametrizzate	316
10.4	Limiti e continuità di funzioni a valori scalari	318
10.4.1	Uso dei teoremi di carattere generale	319
10.4.2	Funzioni discontinue: alcuni esempi	320
10.4.3	Calcolo dei limiti	323



<b>Capitolo 11 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili</b>	<b>327</b>
11.1 Derivate direzionali e parziali di funzioni a valori scalari	328
11.2 Differenziabilità di funzioni a valori scalari	332
11.2.1 Il teorema del valor medio sui segmenti	338
11.2.2 Integrali dipendenti da un parametro	339
11.3 Derivate di ordine superiore	341
11.4 Polinomio di Taylor	343
11.5 Insiemi convessi e funzioni convesse	346
11.6 Estremi liberi di funzioni a valori scalari	350
11.7 Derivabilità e differenziabilità di funzioni a valori vettoriali	354
<b>Capitolo 12 Curve e integrali curvilinei</b>	<b>357</b>
12.1 Curve in $\mathbb{R}^n$	358
12.1.1 Cambiamento di parametro	361
12.1.2 Integrabilità di funzioni vettoriali	362
12.2 Curve rettificabili, lunghezza	363
12.3 Integrali curvilinei di 1 <sup>a</sup> specie	367
12.4 Integrali curvilinei di 2 <sup>a</sup> specie. Forme differenziali	368
12.4.1 Forme differenziali esatte e chiuse	371
12.4.2 Insiemi semplicemente connessi	377
12.5 Normale, curvatura, binormale, torsione	380
<b>Capitolo 13 Funzioni implicite ed estremi vincolati</b>	<b>383</b>
13.1 Sistemi lineari e non lineari	384
13.1.1 Introduzione	384
13.1.2 $m = n$ : il teorema di inversione locale	386
13.1.3 $m < n$ : il teorema delle funzioni implicite	387
13.1.4 $m = 1, n = 2$ : curve di livello	388
13.1.5 $m = 1, n = 3$ : l'equazione $f(x, y, z) = c$	392
13.1.6 $m = 2, n = 3$ : 2 equazioni in 3 incognite	394
13.2 Estremi vincolati di funzioni di due variabili	396
13.2.1 Nozione di estremo vincolato	396
13.2.2 Estremi vincolati: metodo diretto	396
13.2.3 Punti critici vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange	398
13.3 Estremi di funzioni di due variabili	401
13.3.1 Estremi assoluti di funzioni continue su un compatto	401
13.3.2 Estremi relativi su insiemi chiusi con interno non vuoto	403
13.4 Estremi vincolati di funzioni di tre variabili	406
13.5 Il caso di funzioni di tre variabili con due vincoli	408
13.6 Estremi vincolati di funzioni di $n$ variabili: il caso di $m$ vincoli ( $m < n$ )	410
<b>Capitolo 14 Integrali multipli</b>	<b>412</b>
14.1 Integrali doppi su rettangoli	414
14.2 Integrali doppi: il caso generale	418
14.2.1 Domini semplici e formule di riduzione	420
14.3 Cambiamento delle variabili di integrazione per gli integrali doppi	426
14.3.1 Coordinate polari	428
14.3.2 Altri cambiamenti di variabili	432
14.4 Integrali doppi impropri	435
14.4.1 Misura di insiemi non limitati	435
14.4.2 Integrabilità in senso improprio: funzioni non negative	436
14.4.3 Integrabilità in senso improprio: il caso generale	439
14.5 Integrali tripli	440
14.5.1 Formule di riduzione	442

14.5.2 Cambiamento di variabili. Coordinate cilindriche e sferiche	446
<b>Capitolo 15 Superfici e integrali di superficie</b>	<b>452</b>
15.1 Superfici in $\mathbb{R}^3$	453
15.2 Integrali di superficie	458
15.3 Superfici elementari orientabili	461
15.4 Orientazione del bordo di superfici elementari	463
15.5 Superfici composte	465
<b>Capitolo 16 I teoremi della divergenza e del rotore</b>	<b>468</b>
16.1 Divergenza e rotore	469
16.2 Il teorema della divergenza nel piano	471
16.3 Il teorema della divergenza nello spazio	476
16.4 Il teorema del rotore	480

## PARTE VI Equazioni differenziali

<b>Capitolo 17 Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>482</b>
17.1 Equazioni lineari del primo ordine	485
17.2 Equazioni e sistemi in forma normale	490
17.2.1 Equazioni del primo ordine a variabili separabili	490
17.2.2 Risultati di esistenza e unicità per il problema di Cauchy	492
17.2.3 Sistemi di equazioni del primo ordine ed equazioni di ordine $n$	496
17.3 Equazioni lineari del secondo ordine	498
17.3.1 Equazioni omogenee a coefficienti costanti	500
17.3.2 Equazioni non omogenee a coefficienti costanti	502
17.4 Equazioni lineari di ordine $n$	506
17.5 Cenno ad alcune altre equazioni e metodi risolutivi	508
17.5.1 Riduzioni dell'ordine, equazioni di Legendre	508
17.5.2 Cambiamenti di variabile, equazioni di Eulero	509
17.5.3 Equazioni autonome del secondo ordine	510
17.5.4 Metodo di Frobenius, equazioni di Bessel	511
17.6 Sistemi di equazioni lineari del primo ordine	514
17.6.1 Sistemi di equazioni lineari omogenee del primo ordine a coefficienti costanti	516
17.7 Cenno al concetto di stabilità	519

## PARTE V Funzioni olomorfe e trasformate

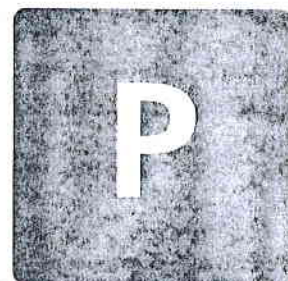
<b>Capitolo 18 Funzioni olomorfe</b>	<b>525</b>
18.1 Derivata complessa; funzione olomorfa	526
18.2 Significato geometrico della derivata complessa	531
18.3 Integrali curvilinei di funzioni complesse	533
18.4 Teorema e formula integrale di Cauchy	536
18.5 Derivate di ordine superiore di funzioni olomorfe	540
18.6 Funzioni primitive	541
18.7 Serie di potenze e funzioni olomorfe	542
18.7.1 Serie di potenze complesse	542
18.7.2 Sviluppabilità in serie di potenze di funzioni olomorfe	544
18.8 Singolarità isolate: le serie di Laurent	545
18.9 Singolarità isolate: il teorema dei residui	548



<b>Capitolo 19 Trasformata di Laplace</b>	<b>555</b>
19.1 Definizione di trasformata di Laplace (unilatera)	557
19.2 Trasformata inversa	558
19.3 Prime proprietà; trasformate di funzioni elementari	562
19.4 Applicazioni	566
19.4.1 Equazioni differenziali ordinarie lineari	566
19.4.2 Serie di Laurent e trasformata di Laplace	570
19.4.3 Prodotto di convoluzione; equazioni integro-differenziali	571
19.4.4 Delta di Dirac; fenomeni impulsivi	573
19.5 La trasformata bilatera	576
<b>Capitolo 20 Serie e trasformata di Fourier</b>	<b>579</b>
20.1 Serie di Fourier	581
20.2 Un'applicazione delle serie di Fourier	587
20.3 Trasformata di Fourier	593
20.3.1 Introduzione e definizione	593
20.3.2 Proprietà elementari della trasformata di Fourier	596
20.4 Trasformata di Fourier e serie di Fourier	597
20.5 Teorema di campionamento	598
20.5.1 Delta di Dirac e altre funzioni singolari	600
<b>Crediti</b>	<b>603</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>605</b>

[www.ateneonline.it/bertsch2e](http://www.ateneonline.it/bertsch2e)

**Appendice Elementi di algebra lineare**



Il testo si propone di offrire una gamma completa degli argomenti classici dei corsi di base di Analisi matematica e, accogliendo le esigenze degli ordinamenti didattici, un'introduzione alle funzioni olomorfe, alle serie di Fourier, alle trasformate di Laplace e di Fourier e al concetto di stabilità per soluzioni di equazioni differenziali ordinarie. Il testo nasce con l'ambizione di raccogliere una così vasta area di competenze in un singolo volume che

- sia scritto in modo accessibile per lo studente, ma senza rinunciare al rigore matematico
- lasci un alto grado di libertà al docente nell'impostazione delle lezioni.

Per raggiungere il primo obiettivo è necessario selezionare con attenzione i contenuti e calibrarne il taglio e la presentazione. Riteniamo sia utile descrivere anzitutto i principali criteri che abbiamo adottato sin dalla prima edizione del 2007; subito dopo illustreremo brevemente le modifiche apportate in questa.

Anzitutto il testo è ricco di esempi e controesempi (ovvero esempi che fanno capire perché una certa ipotesi sia essenziale per la validità di un risultato, o più in generale perché una certa affermazione sia falsa). L'aspetto fenomenologico ci pare essenziale per far capire allo studente a che cosa serva o come si usi un enunciato, per approfondire un concetto importante ecc. Il libro contiene una vasta selezione di dimostrazioni degli enunciati, indispensabili sia per acquisire familiarità con il linguaggio e le tecniche del ragionamento logico-deduttivo, sia per apprezzare i fondamenti del calcolo differenziale e integrale. Altre volte abbiamo preferito dare l'idea principale di una dimostrazione: si tratta di casi in cui, a nostro avviso, l'aspetto intuitivo o quello "formale" prevalgono su quello "tecnico". Infine, in altri casi abbiamo scelto di ometterla del tutto, spesso rimandando lo studente interessato al sito internet [www.ateneonline.it/bertsch2e](http://www.ateneonline.it/bertsch2e), creato come sostegno all'utilizzo del libro. Il libro contiene un'ampia gamma di esercizi alla fine di ogni paragrafo: soluzioni e svolgimenti sono disponibili sul sito internet dedicato al libro. Per venire incontro alle esigenze di alcuni corsi di studio, in rete si trova anche una sintetica appendice contenente elementi di algebra lineare. La gran parte dei concetti sono introdotti in modo rigoroso attraverso una *Definizione* e sono tutti segnalati dal grassetto. Il corsivo è riservato ai concetti di cui si fornisce (spesso solo temporaneamente) una descrizione intuitiva. Allo stesso modo, alcune osservazioni non sono introdotte da un enunciato, ma sono segnalate dal colore o dal segnale di "pericolo".

Rispetto alla prima edizione, siamo intervenuti solo marginalmente sulla selezione dei contenuti, includendo per esempio la convergenza (uniforme) di successioni e serie di funzioni, gli integrali doppi impropri e le equazioni differenziali lineari di ordine superiore al secondo. Per quanto riguarda la presentazione abbiamo invece operato molte modifiche puntuali, sia rimodulando il testo sulla base delle esperienze accumulate (fra l'altro abbiamo aggiunto vari esempi più semplici e ne abbiamo modifica-

ti altri per renderli più chiari), sia riorganizzandolo, cercando ove possibile di non anticipare argomenti che vengono poi ripresi successivamente (per esempio abbiamo posticipato l'introduzione di successioni e serie complesse e di serie di potenze). Abbiamo inoltre aggiunto o semplificato gli esercizi (ove necessario) mettendo a disposizione sul sito internet non solo le soluzioni, ma anche gli svolgimenti (di tutti gli esercizi dei Capitoli 1-9 e, per ora, di alcuni esercizi dei capitoli successivi).

Come è ovvio, la versatilità del testo rispetto alle esigenze del singolo docente è l'obiettivo più difficile da soddisfare. Per esempio, alla domanda "È meglio introdurre il concetto di limite prima per le successioni numeriche o prima per le funzioni di una variabile?" non esiste una risposta che soddisfi tutti i docenti (nel caso specifico abbiamo scelto la seconda opzione, dedicando però un intero capitolo a successioni e serie numeriche prima di sviluppare ulteriormente la teoria dei limiti e il calcolo differenziale). In questa seconda edizione abbiamo curato tale aspetto con particolare attenzione.

Anzitutto abbiamo riorganizzato alcune parti del testo in modo da permettere al docente di saltare certi argomenti o scambiare l'ordine della loro presentazione. Inoltre, pur mantenendo il taglio didattico (che privilegia i concetti di intorno, di o-piccolo e di successione come funzione definita in  $\mathbb{N}$ ), abbiamo cercato di strutturare anche un "percorso breve" su limiti e continuità, che in sostanza coincide con la parte "non guidata" dei primi sei capitoli e conduce più speditamente agli sviluppi del calcolo differenziale e integrale: subito dopo il Capitolo 3 (intorni e limiti, proprietà elementari, il simbolo di o-piccolo e primi limiti notevoli), si richiamano le principali proprietà dei limiti di successioni (Paragrafo 4.1), si introducono il numero di Nepero e le sottosuccessioni (Paragrafi 4.2 e 4.3), i limiti notevoli che ne conseguono (Paragrafo 5.1), gli asintoti (Paragrafo 5.2), i simboli di Landau (Paragrafo 5.3) e i concetti di base sulla continuità (Paragrafi 6.1-6.5). Ciò è sufficiente ad affrontare il calcolo differenziale e integrale fino ai polinomi di Taylor inclusi. In questo percorso possono essere differiti o, al limite, non affrontati affatto sia le serie numeriche sia l'approfondimento di nozioni quali frontiera di un insieme, ordine di infinito/infinitesimo, compattezza per successioni, funzioni uniformemente continue ecc.

È molto probabile che il percorso adottato dal singolo docente si trovi a metà strada tra il "percorso breve" e il "percorso completo": per questa ragione abbiamo introdotto una *Guida* che, attraverso note a margine, fornisce indicazioni puntuali su come organizzare la lettura, su alcuni collegamenti interni al testo e sulla possibilità di porre o eliminare un certo argomento.

Un corso ideale di Analisi matematica dovrebbe anche inquadrare gli argomenti sia storicamente sia nel contesto della matematica e delle altre scienze (le cosiddette applicazioni). D'altra parte, approfondire compiutamente questi aspetti richiederebbe uno spazio enorme, anche perché la scelta del singolo docente sul "cosa" e sul "come" è molto varia e soggettiva. Per dare almeno qualche spunto di riflessione, all'inizio di ciascun capitolo abbiamo introdotto un *Filo rosso*, indipendente dal resto del libro, il cui obiettivo è quello di suscitare nello studente curiosità e interesse rispetto allo sviluppo e alle applicazioni dell'analisi matematica.

In conclusione desideriamo ricordare Roberta (sicuramente questa seconda edizione sarebbe stata migliore con il suo contributo) e ringraziare studenti e colleghi per tutti i suggerimenti che ci hanno fornito.

Michiel Bertsch e Lorenzo Giacomelli  
Roma, gennaio 2011

## Ringraziamenti dell'Editore



R

L'Editore ringrazia i docenti che hanno partecipato alla review del testo e che, con le loro preziose indicazioni, hanno contribuito alla realizzazione della seconda edizione di *Analisi matematica*:

Martino Bardi, *Università degli Studi di Padova*  
Andrea Orazio Caruso, *Università degli Studi di Catania*  
Pietro d'Avenia, *Politecnico di Bari*  
Marco Franciosi, *Università di Pisa*  
Stefano Galatolo, *Università di Pisa*  
Francisco James León Trujillo, *Sapienza Università di Roma*  
Paola Magnaghi, *Politecnico di Milano*  
Piero Montecchiari, *Università Politecnica delle Marche*  
Enrico Obrecht, *Alma Mater Studiorum Università di Bologna*  
Gianna Stefani, *Università degli Studi di Firenze*

L'Editore ringrazia inoltre i docenti che parteciparono alla review della prima edizione di *Analisi matematica*:

Marina Di Natale, *Università degli Studi di Milano-Bicocca*  
Vania Sordoni, *Alma Mater Studiorum Università di Bologna*  
Roberto Tauraso, *Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"*



# Guida alla lettura

Le schede *Filo rosso* forniscono allo studente alcuni spunti di riflessione sullo sviluppo storico e le applicazioni di un argomento trattato nel capitolo.

## FILO ROSSO

Le funzioni di più valore sono di uso frequente in analisi matematica. E le "classiche" all'incirca su un ponte sono di tipi diversi.

Limiti e continuità

10

... sono artefatti matematici...  
... come all'isola Alexander Selkirk, nell'Oceano Pacifico). Anzi, per la stessa natura della turbolenza e del moto stocastico, la velocità media della sua componente stocastica ("casuale") che ne rappresenta le forti fluttuazioni, in tal caso la velocità non può essere descritta da una semplice funzione.  
... Un altro motivo per studiare funzioni anche non continue sono i fenomeni di salto. In agricoltura un'ondata di vento è una azione senza di fatto variazioni dei tempi di percezione, temperatura, densità e velocità dell'aria. Tali variazioni possono dall'ordine di  $10^{-4}$  cm, viene modellata matematicamente come una discontinuità. Calcolando non è un'azione matematica: un'azione d'istante viene percepita come una discontinuità (basta pensare alle code sempre prelevate da una dattiloscrittura). Nella foto, l'onda d'urto circola nel volo supersonico di un jet in motorizzazione il motore scoppia, compressa dall'onda d'urto, il combustibile in pressione che formano una nuvola colica.

Alcune di esse che l'analisi del continuo non può spiegare. Nel caso specifico della velocità di un fluido in moto a un solido, la velocità può essere discontinua a causa di fenomeni di natura molecolare. Nel caso di un "vortice" di von Karman in un



Le funzioni reali di più variabili

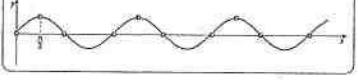
$$z = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

... i così "denari naturali" (ma, 0) (il semipiano superiore) e delle funzioni sono naturali oggetti (la latitudine e la longitudine)  $(x, y)$  e spaziale e un'ave, per esempio il livello del punto  $(x, y) \in X$ . Il grafico  $Z(x, y)$  può rappresentare in un'immagine tridimensionale delle due dette isogre, cioè insieme di una costante (si veda anche nel punto (x, y), allora due curve di livello sono detti valori generici di n, ma negli

I box *Guida* rappresentano un importante strumento di orientamento alla lettura, aiutando lo studente e il docente a sviluppare un percorso mirato in base alle proprie esigenze.

Nel Paragrafo 3.2 abbiamo dimostrato che  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$  non esiste. Il teorema pone come la dimostrazione particolarmente facile: scegliere  $a_n = n\pi - \frac{1}{2}$  e  $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty$ , si ottiene (si veda Figure 5.6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin a_n = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right)$$



### ESEMPIO 5.10.1

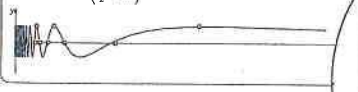
Figura 5.6 I punti  $(a_n, \sin a_n)$  e  $(b_n, \sin b_n)$  con  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ .

Se  $a \leq 0$ , non esiste  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \sin \frac{1}{x}$ . Infatti, posto  $f(x) = x^a \sin \frac{1}{x}$ , scegliendo  $a_n = 1/(n\pi) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$f(a_n) = \left( \frac{1}{n\pi} \right)^a \sin(n\pi) = 0 \quad \forall n > 0$$

mentre scegliendo  $b_n = 1/(n\pi + 2\pi) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$f(b_n) = \left( \frac{1}{n\pi + 2\pi} \right)^a \sin \left( \frac{\pi}{n\pi + 2\pi} \right) \rightarrow \left( \frac{1}{2} \right)^a \neq 0 \quad \forall n > 0.$$



### 5.6 Insiemi compatti

**DEFINIZIONE 5.6.1**  
 $K \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **insieme compatto** per successioni o **regionalmente compatto** se ogni successione  $\{x_n\}$  in  $K$  ha una sottosuccessione convergente a un elemento di  $K$ .

Ritornando a un insieme "compatto per successioni", quasi sempre diremo semplicemente "insieme compatto". In effetti, la matematica adotta altre possibili definizioni di insieme compatto; tuttavia, esse sono tutte equivalenti nel caso dello spazio  $\mathbb{R}^n$  (e anche di  $\mathbb{R}^m$ ). Non si soffermeremo, perciò, su questo argomento.

Il concetto di compattezza per successioni è molto naturale se si pensa alle applicazioni. Spesso è troppo difficile dimostrare esplicitamente la verifica di un certo problema, e si usano per esempio i calcolatori per trovare delle "approssimazioni",  $x_n$ , di una eventuale soluzione (che non si conosce e forse neanche esiste...). Si vorrebbe capire se si tratta veramente di una approssimazione. Se tutti gli elementi  $x_n$  appartengono a un insieme compatto,  $K$ , si può estrarre una sottosuccessione  $\{x_{n_k}\}$  convergente a un elemento  $x \in K$ . Allora  $x$  è un candidato naturale per essere soluzione del problema in esame; se lo è, le  $x_n$  sono effettivamente approssimazioni di

### Guida

Per funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , il concetto di insieme compatto (per successioni) è utilizzato per dimostrare il Teorema di Weierstrass su insiemi compatti (Paragrafo 6.6). Nel Capitolo 6.6 si trovano sia la defi-

- a)  $\sin x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$ ;
- b)  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ per } x \rightarrow 0$ ;
- c)  $\tan x \sim x \text{ per } x \rightarrow 0$ ;
- d)  $x \sin(1/x) = O(x) \text{ per } x \rightarrow 0$ , infatti sia  $f(x)$  è limitata (anche se non si tratta di limite per  $x \rightarrow 0$ ).

### ESEMPIO 5.3.1

Si osservi che se  $f$  e  $g$  sono tali che  $f/g \rightarrow l \in \mathbb{R}$  o  $l \neq 0$ , allora sono asintotiche a meno della costante moltiplicativa  $l$ , ovvero

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{l \cdot g(x)} = 1 \iff f(x) \sim l \cdot g(x) \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

Si osservi anche che scrivere  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow \infty$  è del tutto equivalente a  $f(x) = g(x)(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow \infty$ :

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow \infty \iff f(x) = g(x)(1 + o(1))$$

Tuttavia c'è una differenza essenziale: il simbolo " $\sim$ " non coinvolge il concetto di "o(1)" e perciò non si può in generale utilizzare per svolgere i calcoli. Si eviti, "a ogni costo", l'uso di questo simbolo. Concretamente a questa semplice notazione ad alcuni, come mostra il seguente esempio.

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x/2} = \frac{1}{2}$$

Infatti, utilizzando la (5.12),

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x/2} = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2} (1 + o(1)) \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

Tuttavia, poiché  $\sqrt{x+2} \sim \sqrt{x}$  per  $x \rightarrow \infty$ , si potrebbe pensare di utilizzare questa informazione durante i calcoli: ma

$$\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x/2} \sim \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x/2} = 0 \text{ per } x \rightarrow \infty$$

è falso che  $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x/2} \sim 0$  per  $x \rightarrow \infty$  e ovviamente cadrebbe a non risposta errata: il limite non è 0 ma  $1/2$ .

- Dato se le seguenti uguaglianze sono vere o false:
- a)  $\log(1+x) \sim \frac{1}{x} \text{ per } x \rightarrow 0$ ;
  - b)  $\log(1+x) \sim e^{1/x} + x = 2x + o(x) \text{ per } x \rightarrow 0$ ;
  - c)  $\cos(x^2) \sim \sqrt{1-x^2} = o(x^2) \text{ per } x \rightarrow 0$ ;
  - d)  $e^{x+1} \sim 6 - 6x = o(x) \text{ per } x \rightarrow \frac{1}{2}$ .



I segnali di "pericolo" richiamano l'attenzione dello studente sui concetti abitualmente più delicati.



$$\iint_{\Omega} (\text{rot } v, n) d\sigma = \int_{\partial\Omega} (v, T^*) ds = \int_{\partial\Omega} v_1 dx + v_2 dy.$$

Le uguaglianze tra integrali curvilinei di prima e seconda specie, che abbiamo scritto esplicitamente nei due enunciati precedenti, sono sintetizzate in modo formale dalle uguaglianze

$$n_x dx = (dy, -dx), \quad T^* ds = (dx, dy) \quad (16.8)$$

(si veda Figura 16.7). Nei prossimi paragrafi motiveremo la nomenclatura normalmente utilizzata per i due integrali curvilinei che compaiono nei teoremi della divergenza e del rotore:

$$\int_{\partial\Omega} (v, n_x) ds = \text{flusso di } v \text{ uscente da } \Omega$$

$$\int_{\partial\Omega} (v, T^*) ds = \text{circolazione di } v \text{ lungo } \partial\Omega.$$

$\partial\Omega(0, 1)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Si vogliono calcolare il flusso uscente da  $\Omega$  e la circolazione lungo

$$\int_{\partial\Omega} (v, n_x) ds = \iint_{\Omega} ((vy)_x + (x^2)_y) dx dy = \iint_{\Omega} 3y dx dy = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} (v, T^*) ds = \iint_{\Omega} ((x^2)_x - (xy)_y) dx dy = \iint_{\Omega} -x dy = 0.$$

Calcolare l'integrale di  $u$  su  $\partial\Omega^*$  nei seguenti casi:

- a)  $u = (x + \text{arctg}(x^2)) dx$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, -x \leq y \leq 1\}$ ;  
 b)  $u = (x - y^2) dx + (y^3 + x^2) dy$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

#### ESERCIZIO 16.3

Calcolare l'area della regione  $\Omega$  delimitata dalle seguenti curve:

- a)  $\gamma(t) = (1 + \sin t) \cos t, -1 + \sin t \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;  
 b)  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

#### ESERCIZIO 16.4

Calcolare il flusso di  $v$  uscente da  $\Omega$  nei seguenti casi:

- a)  $v = (y^2 + x^2, y^3 - x^2)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$ ;  
 b)  $v = (x + y^2 - 3, y + x^2 - 6)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0\}$ .

### 16.3 Il teorema della divergenza nello spazio

Per generalizzare il teorema della divergenza agli integrali tripli, è necessario precisare la nozione di *normale esterna* a un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $\partial\Omega$  consista di superfici (elementari o composte) orientabili e senza bordo a due e due disgiunte (si pensi per esempio alla corona sferica  $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq |x| \leq 3\}$  la cui frontiera è formata dalle due sfere di raggio 2 e 3). Sia  $\Sigma$  una di esse; allora su  $\Sigma$  è ben definita

Oltre 250 box *Esercizio*, per un totale di oltre 1000 esercizi, rappresentano uno strumento fondamentale per la preparazione dell'esame.

Più di 450 *Esempi* completano la spiegazione presentando applicazioni pratiche dei concetti teorici.

$$\iint_{\Omega} (\text{rot } v, n_x) d\sigma = \int_{\partial\Omega} (v, T^*) ds = \int_{\partial\Omega} v_1 dx + v_2 dy.$$

Le uguaglianze tra integrali curvilinei di prima e seconda specie, che abbiamo scritto esplicitamente nei due enunciati precedenti, sono sintetizzate in modo formale dalle uguaglianze

$$n_x dx = (dy, -dx), \quad T^* ds = (dx, dy) \quad (16.8)$$

(si veda Figura 16.7). Nei prossimi paragrafi motiveremo la nomenclatura normalmente utilizzata per i due integrali curvilinei che compaiono nei teoremi della divergenza e del rotore:

$$\int_{\partial\Omega} (v, n_x) ds = \text{flusso di } v \text{ uscente da } \Omega$$

$$\int_{\partial\Omega} (v, T^*) ds = \text{circolazione di } v \text{ lungo } \partial\Omega.$$

Figura 16.7

#### ESERCIZIO 16.3

Sia  $\Omega = \partial\Omega(0, 1)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Si vogliono calcolare il flusso uscente da  $\Omega$  e la circolazione lungo  $\partial\Omega$  del campo vettoriale  $v = (xy, y^2)$ . Applicando i teoremi della divergenza e del rotore, si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} (v, n_x) ds = \iint_{\Omega} ((xy)_x + (y^2)_y) dx dy = \iint_{\Omega} 3y dx dy = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} (v, T^*) ds = \iint_{\Omega} ((y^2)_x - (xy)_y) dx dy = \iint_{\Omega} -x dy = 0.$$

Calcolare l'integrale di  $u$  su  $\partial\Omega^*$  nei seguenti casi:

- a)  $u = (x + \text{arctg}(x^2)) dx$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, -x \leq y \leq 1\}$ ;  
 b)  $u = (x - y^2) dx + (y^3 + x^2) dy$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

Calcolare l'area della regione  $\Omega$  delimitata dalle seguenti curve:

- a)  $\gamma(t) = (1 + \sin t) \cos t, -1 + \sin t \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;  
 b)  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Calcolare il flusso di  $v$  uscente da  $\Omega$  nei seguenti casi:

- a)  $v = (y^2 + x^2, y^3 - x^2)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$ ;  
 b)  $v = (x + y^2 - 3, y + x^2 - 6)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0\}$ .

#### ESERCIZIO 16.3

#### ESERCIZIO 16.4

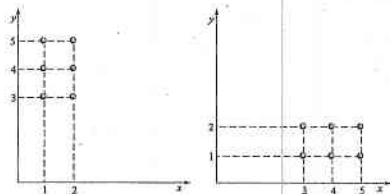
### 16.3 Il teorema della divergenza nello spazio

Per generalizzare il teorema della divergenza agli integrali tripli, è necessario precisare la nozione di *normale esterna* a un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $\partial\Omega$  consista di superfici (elementari o composte) orientabili e senza bordo a due e due disgiunte (si pensi per esempio alla corona sferica  $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq |x| \leq 3\}$  la cui frontiera è formata dalle due sfere di raggio 2 e 3). Sia  $\Sigma$  una di esse; allora su  $\Sigma$  è ben definita

## Soluzioni

## S

1.1



1.2

- a)  $\exists$  soluzione;  
 b)  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{4}{3}) \cup (6, +\infty)$ ;  
 c)  $\exists$  soluzione;  
 d)  $x \in (0, 2)$ ;  
 e)  $x \in (-\infty, -4) \cup [-\frac{13}{2}, 2) \cup (4, \frac{13}{2}]$

1.3

- a) limitato;  $\max = \sup = 3$ ,  $\min = \inf = -3$ ;  
 b) limitato;  $\sup = 3$ ,  $\inf = -3$ ;  
 c) limitato;  $\max = \sup = \frac{1}{2}$ ,  $\inf = 0$ ;  
 d) limitato inferiormente;  $\min = \inf = 0$ ;  
 f) limitato;  $\sup = 1$ ,  $\min = \inf = -\frac{1}{2}$ .

1.4

- a) 2; b) 2; c) -2; d) -10.

1.5

Si veda lo svolgimento.

1.6

- a)  $x > \frac{1}{2}$ ; b)  $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) \cup [\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty)$ ; c)  $1 < x \leq 1024$ ; d)  $1 < x \leq 2$ ;  
 e)  $x \in [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$ .

1.7

Si veda lo svolgimento.

1.8

- a) 3; b) -2; c)  $-\frac{1}{2}$ ; d) 6; e) -5; f) 2.

1.9

- a)  $\frac{1}{2} < x < 4$ ; b)  $x < 2 + \log_3 2$ ; c)  $2 \leq x < 3$ ; d) non ammette soluzione; e)  $x > 3$ ;  
 f)  $x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 3$ .

1.10

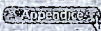
- a)  $x^2$ ; b)  $\sqrt{x}$ ; c)  $-5x$ ; d)  $\frac{1}{2} + \log_{10} |x|$ ; e)  $\frac{1}{2} \log_8 (x + 1)$ .

1.11

- a)  $0 \leq x \leq 1$ ;  
 b)  $x \neq 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$ ;  
 c)  $x \in (-5, -2) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ ;  
 d)  $x \in (-5, -1) \cup (3, 4)$ ;

Sul sito internet [www.ateneonline.it/bertsch2e](http://www.ateneonline.it/bertsch2e) sono disponibili le soluzioni di tutti gli esercizi del testo. Lo studente ha inoltre a disposizione lo svolgimento di tutti gli esercizi dei Capitoli 1-9 e di parte di quelli dei capitoli successivi.



I rimandi all'Appendice di algebra lineare  disponibile sul sito internet [www.ateneonline.it/bertsch2e](http://www.ateneonline.it/bertsch2e) rendono flessibile la trattazione di questo argomento.

**Dimostrazione**

(f) Per il Teorema 17.6, per ogni  $i = 1, \dots, n$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y & \text{per } x \in I \\ y(x_0) = e_i \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in  $I$ ,  $y_i$ . Per il Lemma 17.12 e per l'indipendenza lineare di  $e_1, \dots, e_n$ , le soluzioni  $y_1, \dots, y_n$  sono linearmente indipendenti.

(g) Per la struttura lineare del problema, ogni combinazione lineare di  $y_1, \dots, y_n$  è soluzione di  $y' = A(x)y$  in  $I$ . Viceversa, preso  $x_0 \in I$ , per l'indipendenza lineare di  $y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)$  esistono costanti  $a_1, \dots, a_n$  tali che  $\bar{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i y_i(x_0)$ . Quindi, per il Lemma 17.12,  $\bar{y}(x)$  e  $\sum_{i=1}^n a_i y_i(x)$  coincidono.

**Sistemi non omogenei**

Anche nel caso dei sistemi di equazioni lineari non omogenee i risultati nel caso  $n = 1$  si generalizzano facilmente. Siano  $a_{ij} \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$ , sia  $A$  definita dalla (17.55) e sia  $b(x)$  il vettore in  $\mathbb{R}^n$  di componenti  $b_i \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$ ; allora la soluzione generale dell'insieme di equazioni lineari non omogenee

$$y' = A(x)y(x) + b(x) \quad \text{in } I$$

è del tipo  $y(x) = \bar{y}(x)$ , dove  $y(x)$  è la soluzione generale del sistema lineare omogeneo associato,  $y' = A(x)y(x)$  in  $I$ , e  $\bar{y}(x)$  è una soluzione (detta "soluzione particolare") del sistema lineare non omogeneo.

**17.6.1 Sistemi di equazioni lineari omogenee del primo ordine a coefficienti costanti**

Se la matrice  $A(x)$  non dipende da  $x$ ,  $A(x) = A$ , è possibile determinare esplicitamente  $n$  soluzioni linearmente indipendenti di  $y' = Ay$ . L'idea generale è di cercare  $n$  soluzioni del tipo  $y_j(x) = e^{\lambda_j x} v_j$ , con  $\lambda_j$  e  $v_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  scelti opportunamente. Sostituendo nel sistema  $y' = Ay$  e dividendo per  $e^{\lambda_j x}$  si ottiene

$$\lambda_j v_j = Av_j \iff (A - \lambda_j Id)v_j = 0$$

dove  $Id$  è la matrice identità, con 1 sulla diagonale e 0 altimenti:

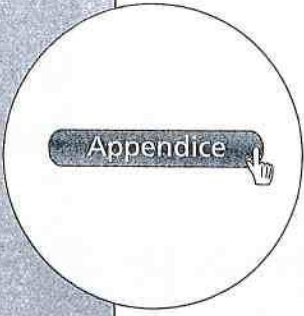
$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Quindi  $\lambda_j$  è un autovalore della matrice  $A$  e  $v_j$  un autovettore associato (si veda l'Appendice di Algebra lineare in rete). Ma un autovalore (ovvero una soluzione dell'equazione caratteristica  $\det(A - \lambda Id) = 0$ , un'equazione polinomiale di grado  $n$ ) non è necessariamente un numero reale; è quindi da vedere come utilizzare eventuali autovalori complessi.

Per semplicità di esposizione ci limitiamo al caso di due equazioni:

$$\begin{cases} u' = au + bv & \text{per } x \in \mathbb{R}, \text{ ovvero } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ v' = cu + dv \end{cases} \quad (17.57)$$

In questo caso l'equazione caratteristica è quadratica:



di rettangoli  $Q_i, i = 1, \dots, N$ , tali che

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^N Q_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N |Q_i| < \varepsilon.$$

Ad esempio, un segmento di retta o un poligono di  $k$  lati sono insiemi di misura nulla. Lo sono anche i grafici di funzione, sotto ipotesi opportune:

**TEOREMA 14.11**  
Sia  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $[a, b]$ . Allora  $\text{graf } g$  è di misura nulla.

**Dimostrazione**  
 $g \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\mathcal{D}$ , suddivisione di  $[a, b]$ , tale che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, g) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, g) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \quad (14.7)$$

dove  $M_i$  e  $m_i$  sono, rispettivamente, l'estremo superiore e inferiore di  $g$  in  $[x_{i-1}, x_i]$ . Posto  $Q_i := [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i], i = 1, \dots, n$ , è chiaro che il grafico di  $f$  è contenuto in  $\bigcup_{i=1}^n Q_i$  (si veda Figura 8.2) e, per la (14.7), che  $\sum_{i=1}^n |Q_i| < \varepsilon$ .

Non è difficile provare che anche il sostegno di una curva regolare a tratti  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è di misura nulla. Non si deve tuttavia confondere la misura (secondo Peano-Jordan) del sostegno con la lunghezza della curva: la prima misura "bidimensionale", la seconda è "unidimensionale". Per esempio, le circonferenze nel piano di raggio 1 hanno lunghezza  $2\pi$ , mentre la loro misura è zero. I criteri forniti nei Teoremi 14.3 e 14.10 hanno varie implicazioni.

**TEOREMA 14.12**  
(i) Se  $\Gamma \in \mathbb{R}^2$  è di misura nulla e  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , allora  $\Gamma_0$  è di misura nulla.  
(ii) L'unione e l'intersezione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile.  
(iii) Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato,  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $\Omega_0 \subseteq \Omega$  misurabile. Allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_0)$ .

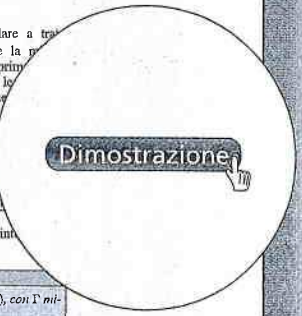
Risulta che l'integrabilità della funzione caratteristica  $\mathbf{1}_\Omega$  in  $\Omega$  implica l'integrabilità di tutte le funzioni continue e limitate in  $\Omega$ .

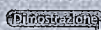
**TEOREMA 14.13**  
Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se  $\Omega$  è misurabile e  $f \in C(\Omega \setminus \Gamma)$ , con  $\Gamma$  misurabile e  $|\Gamma| = 0$ , allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ .

In particolare una funzione continua in un insieme misurabile e chiuso (quindi compatto) è integrabile (poiché è limitata).

Il Teorema 14.13 segue dall'osservazione che l'insieme dei punti di discontinuità dell'estensione  $\tilde{f}$  di  $f$  con 0 a un rettangolo contenente  $\Omega$  è sottoinsieme di  $\partial\Omega$ , quindi, per i Teoremi 14.9 e 14.12(i), è di misura nulla. Dunque il Teorema 14.13 è conseguenza immediata del seguente risultato.

**TEOREMA 14.14**  
Sia  $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se l'insieme di punti di discontinuità di  $f$  ha misura nulla, allora  $f \in \mathcal{R}([a, b] \times [c, d])$ .



I rimandi alle dimostrazioni di alcuni teoremi e lemmi  disponibili sul sito internet [www.ateneonline.it/bertsch2e](http://www.ateneonline.it/bertsch2e) consentono di scegliere il livello di approfondimento della trattazione.



## FILO ROSSO Completezza e approssimazione

Il classico esempio di  $\sqrt{2}$  aiuta a chiarire il concetto di completezza. Come tutti sanno, se il lato del quadrato è lungo 1 la sua diagonale  $d$  è lunga  $\sqrt{2}$ . Questo numero è irrazionale (ossia formato da una sequenza infinita e non periodica di cifre decimali): se quindi lo strumento utilizzato per misurarne la lunghezza contenesse solo numeri razionali, esso sarebbe *incompleto*, cioè vuoto in corrispondenza della lunghezza di  $d$ .

La proprietà di *completezza* che caratterizza  $\mathbb{R}$  e lo distingue da  $\mathbb{Q}$  (ovvero il fatto che  $\mathbb{R}$  rappresenti bene uno strumento di misura *continuo*, senza vuoti) si formalizza dicendo che ogni sottoinsieme limitato e non vuoto ha, in  $\mathbb{R}$ , *estremo superiore e inferiore*. Quest'idea è intimamente legata a quella di *approssimazione*. Per esempio,  $\sqrt{2}$  può essere visto come estremo superiore dell'insieme delle sue approssimazioni razionali per difetto,

$$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356, \dots\},$$

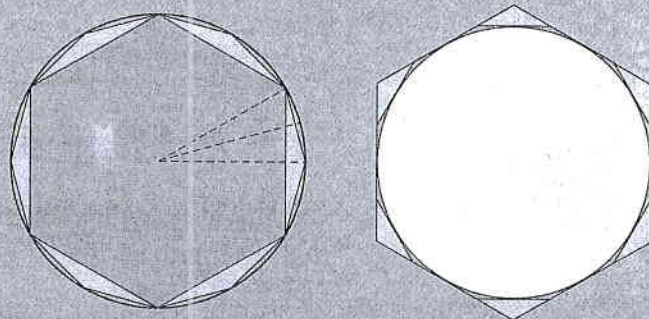
o come estremo inferiore delle sue approssimazioni razionali per eccesso,

$$\{2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, 1.4142136, 1.41421357, \dots\}$$

(anzi si potrebbe usare un simile approccio per definire i numeri reali).

La scoperta (della scuola pitagorica, nel VI secolo a.C.) che  $\sqrt{2}$  fosse un numero irrazionale ( $\alpha\rho\rho\eta\omicron\zeta$ , indicibile) fu sconvolgente al punto da, si dice, tenerla segreta, e contribuì a mantenere per molto tempo il concetto algebrico di numero in posizione secondaria rispetto a quello geometrico di grandezza. Ciononostante, già poco più tardi risultano chiare (Eudosso, IV secolo a.C., Archimede, II

secolo a.C.) l'importanza dell'approssimazione e il suo legame con il concetto – completamente intuitivo – di estremo superiore e inferiore. Ne è un esempio il *metodo di esaustione*:



*“inscrivere e circoscrivere poligoni attorno ad una figura geometrica piana e continuare a moltiplicare indefinitamente il numero dei lati del poligono fino ad approssimare il più possibile la linea curva”*,

un procedimento che ritroveremo nel Capitolo 8 per introdurre il concetto di integrale. Certo, bisogna tener conto che su tutto questo pesava la mancanza di un sistema di numerazione efficiente: ma anche dopo l'introduzione in Europa delle cifre indo-arabe (attorno al 1200), la sistemazione assiomatica dei numeri reali avverrà solo nella seconda metà del 1800 (Dedekind, ma non solo).

In conclusione, cos'è  $\pi$ ? Se  $p_n$  e  $P_n$  indicano rispettivamente i poligoni regolari di  $6 \cdot 2^n$  lati inscritti e circoscritti alla circonferenza, possiamo definire

$$\pi = \sup\{\text{area}(p_n), n \in \mathbb{N}\} = \inf\{\text{area}(P_n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Per il calcolo delle aree di  $p_n$  e  $P_n$  sono sufficienti il teorema di Pitagora e concetto di radice quadrata di un numero reale:



Numero di lati	Area del poligono inscritto	Area del poligono circoscritto
6	2.598076	3.464102
12	3.000000	3.215390
24	3.105829	3.159660
48	3.132629	3.146086
96	3.139350	3.142715
180	3.140955	3.141912
360	3.141433	3.141672
720	3.141553	3.141672
1440	3.141583	3.141598
2880	3.141590	3.141594
5760	3.141592	3.141593

← Archimede  
si fermò qui

Il cuore del capitolo è la proprietà di *completezza* dei numeri reali: da essa discendono anzitutto le nozioni di radice e di logaritmo, ma (come vedremo in

seguito) essa è in effetti alla base di tutto il calcolo differenziale. In questo capitolo si riassumono brevemente molti dei prerequisiti che dovrebbero essere già ben noti allo studente: insiemi e insiemi numerici, relazioni d'ordine (quindi equazioni e disequazioni), potenze, esponenziali, logaritmi e, in appendice, grandezze trigonometriche. Inoltre si introducono anche i numeri complessi e il Principio di induzione. Nati come formalismo per rappresentare radici di polinomi che non appartengono ai numeri reali (per esempio,  $\pm i$  rappresentano le radici di  $p(x) = x^2 + 1$ ) e unificare il trattamento algebrico dei polinomi (si veda il Teorema fondamentale dell'algebra), i numeri complessi trovano attualmente una quantità di utilizzi, dalla meccanica quantistica alla teoria dei segnali: vedremo alcune prime, semplici applicazioni dal Capitolo 17 in poi (equazioni differenziali, trasformate).

## 1.1 Richiami di insiemistica

Al fine di poter introdurre rapidamente alcuni concetti e problemi fondamentali che saranno trattati nel corso, richiamiamo brevemente alcuni elementi della teoria degli insiemi.

Assumiamo come primitivo il concetto di **insieme**, ovvero una collezione (classe, famiglia) di oggetti detti **elementi** dell'insieme. Di solito gli insiemi vengono indicati con lettere maiuscole:  $A, B, C, \dots$  e gli elementi con lettere minuscole:  $a, b, x, y, \dots$ . Se  $x$  è elemento dell'insieme  $A$ , si scrive  $x \in A$  e si legge "x appartiene ad A".

Per rappresentare un insieme può essere conveniente elencare esplicitamente gli elementi che lo compongono. La notazione che si usa è quella che indica gli elementi entro parentesi graffe. Per esempio  $\{4, 2, 3\}$  denota l'insieme i cui elementi sono i numeri 2, 3, 4;  $\{3\}$  è l'insieme che ha come unico elemento il numero 3. Se un insieme contiene un numero infinito di elementi non è possibile elencarne gli elementi. Per esempio, per l'insieme dei **numeri naturali**  $0, 1, 2, \dots$  che si indica con  $\mathbb{N}$ , si usa anche la notazione  $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Un altro modo per definire un insieme è attraverso i **predicati**. I predicati sono *proposizioni* (o affermazioni) dipendenti da una o più variabili. Per esempio, l'affermazione  $p(x)$ :  $x$  è divisibile per 3, è un predicato in una variabile;  $p(x, y)$ :  $x > y$ , è un predicato in due variabili. Sia ora  $A$  un insieme e  $p(x)$  un predicato che ha senso per gli elementi di  $A$ ; allora  $\{x \in A : p(x)\}$  indica l'insieme degli elementi di  $A$  per i quali l'affermazione  $p(x)$  è valida. Per esempio

$$D := \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\}$$

indica l'insieme dei numeri naturali dispari (si legge "D è l'insieme dei numeri naturali  $n$  tale che  $n$  è dispari"); una definizione più sintetica è in questo caso  $D \stackrel{\text{def}}{=} \{2m + 1 : m \in \mathbb{N}\}$  (si usano i simboli  $:=$  oppure  $\stackrel{\text{def}}{=}$  per definire un insieme o altri oggetti).

Riportiamo alcuni dei simboli e delle notazioni di cui faremo uso nel seguito:

$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste (esistono)
$\nexists$	non esiste (non esistono)
$\exists!$	esiste uno e uno solo
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	se e solo se
$\notin$	non appartiene a
$\emptyset$	l'insieme vuoto (l'insieme privo di elementi)

$A = B$  gli insiemi  $A$  e  $B$  sono uguali, cioè contengono gli stessi elementi

$A \neq B$  gli insiemi  $A$  e  $B$  non sono uguali

Siano  $x, y \in A$ ; l'espressione  $x = y$  si legge "x è uguale a y" (ovvero  $x$  e  $y$  denotano lo stesso elemento di  $A$ ); se  $x$  e  $y$  sono distinti si usa la notazione  $x \neq y$ .

I simboli appena introdotti permettono di formulare definizioni e tesi matematiche in modo preciso e sintetico.

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice che  $A$  è **sottoinsieme** di  $B$ , in simboli  $A \subseteq B$  (o  $B \supseteq A$ ), se ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$ , ovvero:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in B \quad \forall x \in A.$$

Questa relazione fra insiemi è detta **inclusione**. Se  $A \subseteq B$  e  $A \neq B$  si scrive  $A \subset B$  ( $B \supset A$ ); inoltre, se  $A \subset B$  e  $A \neq \emptyset$  si dice che  $A$  è **sottoinsieme proprio** di  $B$ . L'insieme  $\emptyset$  è sottoinsieme di qualsiasi insieme.

Dati  $A, B \subseteq U$ , possiamo costruire nuovi insiemi applicando alcune **operazioni insiemistiche fondamentali**, di seguito definite.

L'**unione** di due insiemi  $A$  e  $B$  è l'insieme, indicato con  $A \cup B$ , formato da tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi  $A, B$ :

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Evidenziamo che, in tale contesto, la congiunzione "o" esprime un'alternativa e non un'esclusione.

L'**intersezione** di due insiemi  $A, B$  è l'insieme indicato con  $A \cap B$ , formato da tutti gli elementi che appartengono sia ad  $A$  che a  $B$ ; ovvero:

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Gli insiemi  $A$  e  $B$  si dicono **disgiunti** se  $A \cap B = \emptyset$ .

La **differenza** di  $A$  da  $B$  è l'insieme, indicato con  $B \setminus A$ , formato da tutti gli elementi di  $B$  che non appartengono ad  $A$ ; ovvero:

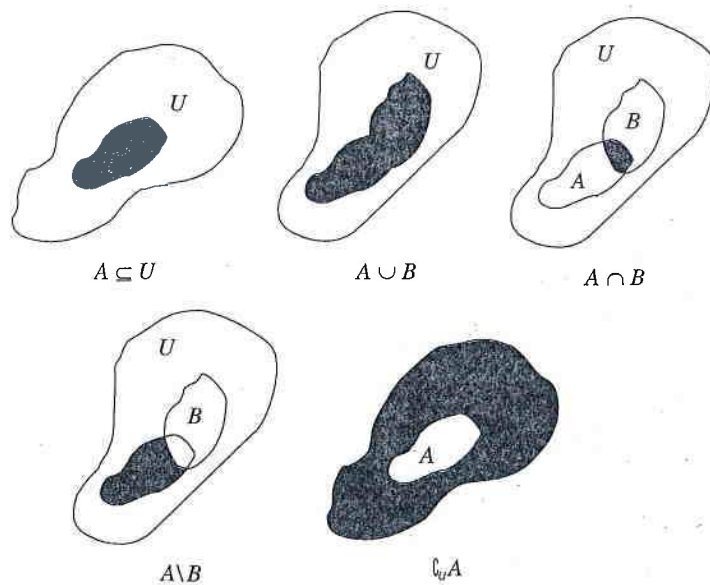
$$B \setminus A := \{x \in B : x \notin A\}.$$

Se  $A \subseteq B$ , la differenza  $B \setminus A$  si dice anche **complementare** di  $A$  rispetto a  $B$  e si indica con  $\complement_B A$  (oppure  $\complement A$ , se  $B = UB$ ):

$$\complement_B A := B \setminus A \quad \text{se } A \subseteq B.$$

Tali operazioni sono illustrate in Figura 1.1 utilizzando i **diagrammi di Venn**.

**Figura 1.1** Diagrammi di Venn.



**ESEMPIO 1.1**

Consideriamo i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{N}$ :  $A = \{5, 8, 9, 12, 16\}$ ,  $B = \{5, 8, 24\}$ ,  $P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$ ,  $D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è dispari}\}$ . Allora si ha:

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A, & A \cap \emptyset &= \emptyset, \\ A \cup B &= \{5, 8, 9, 12, 16, 24\}, & A \cap B &= \{5, 8\}, & A \setminus B &= \{9, 12, 16\}, \\ A \cap P &= \{8, 12, 16\}, & A \cap D &= \{5, 9\}, & A \setminus P &= \{5, 9\}, \\ C D &= P, & P \cap D &= \emptyset, & P \cup D &= \mathbb{N}. \end{aligned}$$

È facile dimostrare che l'unione e l'intersezione godono delle seguenti proprietà. Dati tre insiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$ , si ha:

Unione	Proprietà	Intersezione
$A \cup A = A$	di idempotenza	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	commutativa	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (A \cap B) = A$	di assorbimento	$A \cap (A \cup B) = A$

Se  $A, B \subseteq U$  e se  $C$  indica il complementare in  $U$ , allora si ha:

$$C(CA) = A; \quad A \cup CA = U; \quad A \cap CA = \emptyset$$

$$C(A \cup B) = CA \cap CB; \quad C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

Le ultime due proprietà, note come le leggi di De Morgan, affermano che l'operazione di complementazione "scambia" l'unione con l'intersezione. Illustriamo, per esempio, la prima delle leggi di De Morgan utilizzando i diagrammi di Venn (Figura 1.2).

Sono fondamentali i concetti di *coppia ordinata* e di *insieme prodotto cartesiano*. Siano  $A$  e  $B$  due insiemi (non necessariamente distinti). Indichiamo con  $(a, b)$  l'oggetto formato da un elemento  $a \in A$  e un elemento  $b \in B$ , presi in tale ordine. Tale oggetto prende il nome di coppia ordinata. Non bisogna confondere la coppia ordinata  $(a, b)$  con l'insieme  $\{a, b\} = \{b, a\}$ . Sottolineiamo che se  $(a, b)$  e  $(a', b')$  sono due coppie ordinate



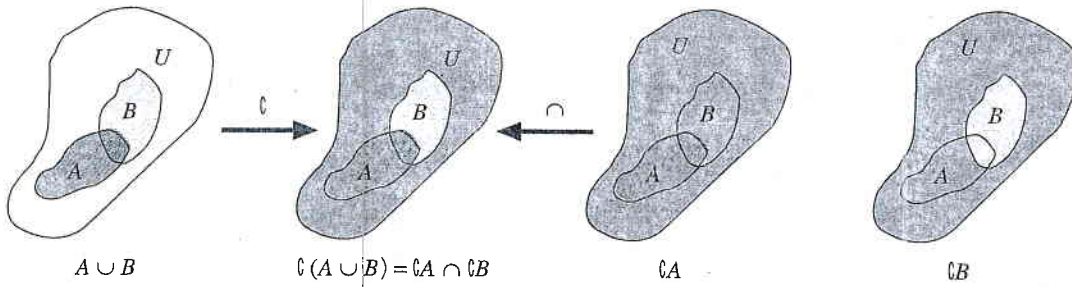


Figura 1.2 Leggi di De Morgan.

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ e } b = b'.$$

Si definisce insieme prodotto cartesiano di  $A$  per  $B$ , e si indica con  $A \times B$ , l'insieme formato da tutte le coppie ordinate  $(a, b)$  con  $a \in A$  e  $b \in B$ :

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Si noti che se  $A \neq B$  allora  $A \times B \neq B \times A$ ; in altre parole, questo prodotto non è commutativo. Se  $A = B$  si può indicare  $A \times A$  con  $A^2$ .

Siano  $A = \{3, 4, 7, 10\}$  e  $B = \{0, 1\}$ . Allora

$$A \times B = \{(3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (7, 0), (7, 1), (10, 0), (10, 1)\};$$

$$B \times A = \{(0, 3), (1, 3), (0, 4), (1, 4), (0, 7), (1, 7), (0, 10), (1, 10)\};$$

$$B \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

**ESEMPIO 1.2**

Quanto appena introdotto ha un importante significato geometrico. Consideriamo per esempio  $\mathbb{N}^2 (= \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ . I numeri naturali si possono rappresentare geometricamente su una retta riferita a un'origine  $O$  e fissata un'unità di misura come in Figura 1.3a. Analogamente si possono usare le coppie ordinate per indicare punti nel piano come in Figura 1.3b.

La definizione di prodotto cartesiano si estende al caso di un numero finito di insiemi: siano  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  insiemi, allora  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  è l'insieme delle  $n$ -ple ordinate  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  con  $a_i \in A_i \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Se gli  $n$  insiemi sono uguali tra loro, scriviamo

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}}.$$

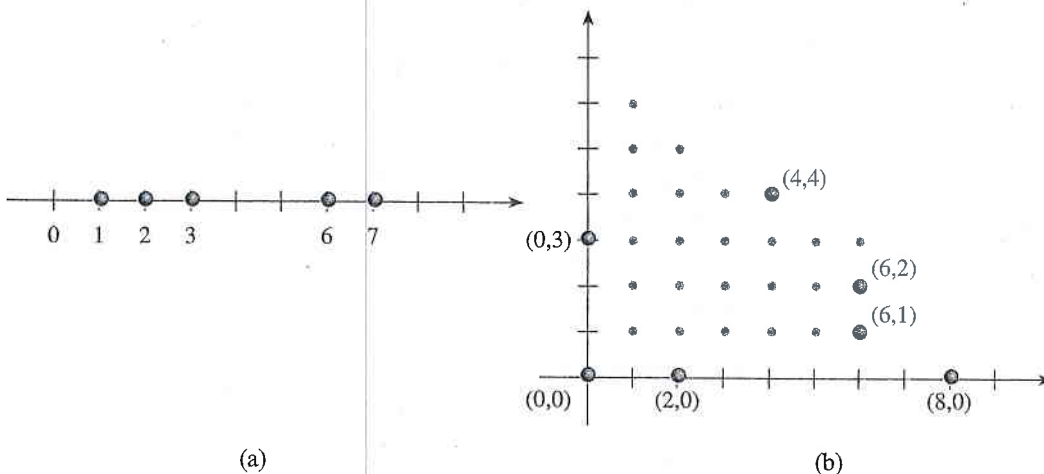


Figura 1.3 Rappresentazione geometrica di  $\mathbb{N}$  (a); rappresentazione geometrica di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (b).



**ESEMPIO 1.3**

Sia  $B = \{0, 1\}$ . Allora:

$$B^3 = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

e

$$B^4 = \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}.$$

**ESERCIZIO 1.1**

Utilizzare la rappresentazione geometrica di  $\mathbb{N}^2$  (si veda Figura 1.3b) per visualizzare gli insiemi  $\{1, 2\} \times \{3, 4, 5\}$  e  $\{3, 4, 5\} \times \{1, 2\}$ .

## 1.2 Insiemi numerici

Oltre all'insieme dei numeri naturali, sono ben noti l'insieme dei **numeri interi**,  $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , e l'insieme dei **numeri razionali** (o fratti),  $\mathbb{Q}$ , cioè quei numeri nella forma

$$\frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq 0, \quad (1.1)$$

intendendo di identificare  $p_1/q_1$  e  $p_2/q_2$  se  $p_1q_2 = p_2q_1$  (in altre parole, sotto questa condizione  $p_1/q_1$  e  $p_2/q_2$  indicano lo stesso numero razionale, per esempio  $6/8 = 3/4$ ). Perciò possiamo scegliere di rappresentare i numeri razionali mediante le espressioni:  $0/1, \pm p/q$  con  $p$  e  $q$  interi positivi primi tra loro (cioè  $p$  e  $q$  non sono divisibili per uno stesso intero maggiore di 1). Osserviamo che  $\mathbb{N}$  può essere pensato come l'insieme  $\{z \in \mathbb{Z} : z \geq 0\}$ , ovvero  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . A sua volta l'insieme  $\mathbb{Z}$  può essere pensato come sottoinsieme di  $\mathbb{Q}$  (richiedendo  $q = 1$  nella rappresentazione (1.1)).

Tali insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  sono esempi di *insiemi numerici* e i loro elementi sono chiamati *numeri*. Prima di formalizzare il concetto di insieme numerico introduciamo il concetto di *operazione* in un insieme.

Dato un insieme  $X$ , un'**operazione** in  $X$  associa a ogni coppia ordinata  $(x, y) \in X \times X$  uno ed uno solo elemento  $z \in X$ .

Un insieme  $X$  è detto **numerico** se in esso sono definite due operazioni: una detta **addizione** che si indica con il segno “+” (ovvero a ogni  $(x, y) \in X \times X$  corrisponde un unico elemento di  $X$ , detto **somma** di  $x$  e  $y$ , che si denota con “ $x + y$ ”), l'altra detta **moltiplicazione** che si indica con il segno “ $\cdot$ ” (ovvero a ogni  $(x, y) \in X \times X$  corrisponde un unico elemento di  $X$ , detto **prodotto** di  $x$  e  $y$ , che si denota con “ $x \cdot y$ ” o con “ $xy$ ”). Per non entrare nei dettagli di una trattazione generale, diremo semplicemente che tali operazioni devono godere di certe proprietà alcune delle quali dipendono dall'insieme  $X$  che si considera.

Esaminiamo il caso dell'insieme dei numeri razionali, con le operazioni usuali di somma e prodotto.

**Proprietà di  $\mathbb{Q}$** 

In  $\mathbb{Q}$  l'*addizione* soddisfa le seguenti proprietà:

- 1)  $\forall x, y : x + y = y + x$  (proprietà commutativa);
- 2)  $\forall x, y, z : (x + y) + z = x + (y + z)$  (proprietà associativa);
- 3)  $\exists!$  elemento, detto **zero** e indicato con 0, tale che  $\forall x : x + 0 = x$ ;
- 4)  $\forall x \exists!$  elemento, detto **opposto** e indicato con  $-x$ , tale che  $x + (-x) = 0$ .

Poiché vale la proprietà associativa, si scrive anche  $x + y + z$ , ovvero si omettono le parentesi. Si usa anche la scrittura  $x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y)$  (nota come “sottrazione”).

In  $\mathbb{Q}$  la *moltiplicazione* soddisfa le seguenti proprietà:

- 5)  $\forall x, y : x \cdot y = y \cdot x$  (proprietà commutativa);
- 6)  $\forall x, y, z : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  (proprietà associativa);
- 7)  $\exists!$  elemento  $\neq 0$ , detto **unità** e indicato con 1, tale che  $\forall x : x \cdot 1 = x$ ;
- 8)  $\forall x \neq 0 \exists!$  elemento, detto **reciproco** e indicato con  $x^{-1}$  oppure  $1/x$ , tale che  $x \cdot x^{-1} = 1$ .

Si usano anche le seguenti scritture:  $x/y \stackrel{\text{def}}{=} xy^{-1}$  (nota come “divisione”,  $y \neq 0$ ) e  $x^2 \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot x$ .

L’addizione e la moltiplicazione sono legate fra loro dalla seguente proprietà:

- 9)  $\forall x, y, z : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  (proprietà distributiva).

Un insieme numerico per il quale valgono le proprietà (1)-(9) si dice **campo** o **corpo commutativo**. Gli insiemi  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Z}$  non sono campi, infatti in  $\mathbb{N}$  non valgono (4) e (8) e in  $\mathbb{Z}$  non vale (8).

È ben noto allo studente il significato dei simboli “ $\leq$ ” e “ $\geq$ ” negli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ . In particolare valgono:

- 10)  $\forall x, y, z : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ ;
- 11)  $\forall x, y, z : x \leq y$  e  $z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ .

Un insieme numerico per il quale valgono le proprietà (1)-(11) si dice **campo ordinato**. Inoltre l’*ordinamento*  $\leq$  si dice *totale*: presi due numeri razionali  $x$  e  $y$ , è  $x \leq y$  oppure  $y \leq x$ . È utile introdurre il simbolo  $<$  ( $>$ ) di “disuguaglianza stretta”: si scrive

$$x < y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \text{ e } x \neq y$$

(analogamente per  $>$ ).

Dalle precedenti proprietà di un campo ordinato, se ne possono dedurre facilmente altre; in particolare:

- 12)  $\forall x, y : x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$ ;  $x \geq y \Rightarrow -x \leq -y$ ;
- 13)  $\forall x, y : x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$ ;  $x \geq y > 0 \Rightarrow x^{-1} \leq y^{-1}$ ;
- 14)  $\forall x, y, z : x \leq y$  e  $z \leq 0 \Rightarrow xz \geq yz$ ;
- 15)  $\forall x \neq 0 : x^2 > 0$ ; in particolare  $1^2 = 1 > 0$ ;
- 16) L’equazione:  $x^2 + 1 = 0$  non ha soluzione.

Un’altra proprietà che può essere dedotta è:

- 17) **Proprietà di densità:**  $\forall x, y, x < y, \exists$  infiniti elementi  $z$  tali che  $x < z < y$ . Si veda Figura 1.4.

Basta infatti prendere  $z_1 = (x + y)/2$  (ovvero la “media” di  $x$  e  $y$ :  $z_1 - x = (y - x)/2 = y - z_1$ ),  $z_2 = (x + z_1)/2$  (la media di  $x$  e  $z_1$ ), ... ovvero  $z_{n+1} = (x + z_n)/2 \forall n \in \mathbb{N}$ .

In  $\mathbb{Q}$  vale inoltre la seguente proprietà, che lo rende un corpo ordinato archimedeo:

- 18) **Proprietà di Archimede:**  $\forall x, y > 0 \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $nx \geq y$ .

Per dimostrare tale proprietà, basta osservare che se  $x = p/q$  e  $y = r/s$  con  $p, q, r, s$  interi positivi, allora posto  $n = rq$  risulta  $nx = rp \geq r \geq r/s = y$ .

Dalla proprietà di Archimede segue che:

Ordinamento totale

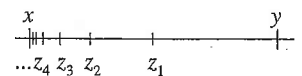


Figura 1.4 Proprietà di densità in  $\mathbb{Q}$ .

19)  $\forall x > 0 \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $x > 10^{-n}$ .

Infatti, preso  $y = 1$  nella (18), esiste  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $nx \geq 1$  ed essendo  $n < 10^n$  (si veda l'Esercizio 1.17) risulta  $10^n x > 1$ .

Ricordiamo che i numeri razionali possono essere rappresentati in vari modi. La rappresentazione più nota è quella **decimale** (o in base 10). Un numero razionale  $x$  può essere rappresentato da una espressione della forma  $\pm p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$ , con  $p, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \dots$  numeri naturali tali che  $0 \leq \alpha_n \leq 9$  per ogni  $n = 1, 2, \dots$ , che viene detta **allineamento decimale (con segno)**:

$$x = \pm p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$$

Chiaramente si *identificano* gli allineamenti  $+0, -0$  cioè  $+0 = -0 = 0$ . Se  $x > 0$ , il segno  $+$  è spesso omesso.

I numeri  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ , (ovvero le **cifre decimali** di  $x$ ) soddisfano la condizione:

$$\text{se } x > 0 \quad +p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \leq x < +p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n + \frac{1}{10^n},$$

ovvero,

$$\text{se } x < 0 \quad -p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n - \frac{1}{10^n} < x \leq -p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n \quad (1.2)$$

(lo studente osservi la differenza tra il numero razionale rappresentato dall'allineamento decimale  $p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$  e il numero decimale  $p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ ; la differenza tra i due numeri è  $0.0\dots0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\dots$ ).

È ben noto, e comunque la dimostrazione non è difficile, che dalla divisione fra due numeri interi si ottengono solo **allineamenti decimali limitati** (cioè: da un certo  $\bar{n}$  in poi tutte le cifre decimali sono nulle), oppure **periodici** (cioè: un blocco di un numero finito di cifre, detto periodo, è ripetuto indefinitamente) ma di periodo diverso da 9<sup>(1)</sup> (un allineamento decimale che non è periodico di periodo 9 si dice **proprio**). Viceversa, un allineamento decimale limitato o periodico proprio individua un unico numero razionale. Per concludere, l'insieme  $\mathbb{Q}$  dei numeri razionali può essere identificato con l'insieme degli allineamenti decimali propri limitati o periodici.

### 1.3 Numeri reali

Se si rappresentassero geometricamente tutti i numeri razionali su una retta (riferita a un'origine, fissata un'unità di misura) non tutti i punti della retta corrisponderebbero a un numero di tale tipo. Di fatto il seguente risultato afferma che non esiste un numero razionale corrispondente alla lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 ovvero  $\sqrt{2}$  non è un numero razionale (si veda Figura 1.5).

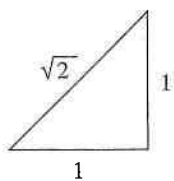


Figura 1.5

#### LEMMA 1.1

Non esiste  $x \in \mathbb{Q}$  tale che  $x^2 = 2$ .

#### Dimostrazione

Si ragiona per assurdo; cioè si assume che la tesi sia falsa e si procede per arrivare a una contraddizione. Supponiamo quindi che esista  $x \in \mathbb{Q}, x > 0$  tale che  $x^2 = 2$ . Allora  $x$  può essere scritto nella forma  $x = p/q$ , con  $p$  e  $q$  interi positivi primi fra

<sup>(1)</sup> Si noti che  $\pm p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\bar{9} = \pm p.\alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n + 1)$ , per esempio  $0.\bar{9} = 1$ . Infatti, se fosse  $1 - 0.\bar{9} > 0$ , ty 15+

<sup>(1)</sup> per la (19) esisterebbe  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $1/10^m < 1 - 0.\bar{9}$ . D'altra parte  $1 - 0.\bar{9} < 1/10^n \forall n \in \mathbb{N}$ , in particolare, scegliendo  $n = m$ , risulta  $1 - 0.\bar{9} < 1/10^m$ , e si è giunti a una contraddizione.



loro. Risulta  $p^2 = 2q^2$ , da cui segue che  $p^2$  è divisibile per 2 e quindi  $p$  è pari, perciò si può porre  $p = 2m$ . Risulta allora  $q^2 = p^2/2 = 2m^2$ , ovvero  $q^2$  (e perciò  $q$ ) è pari. Quindi  $p$  e  $q$  risultano entrambi pari contro l'ipotesi che  $p$  e  $q$  fossero primi fra loro. Resta così provata la tesi.

Osservando che  $(1.4)^2 = 1.96 \leq 2$  e  $(1.5)^2 = 2.25 > 2$  e che  $(1.41)^2 = 1.9881 \leq 2$  e  $(1.42)^2 = 2.0164 > 2$ , risulta che 1.4 e 1.41 sono approssimazioni per difetto di  $\sqrt{2}$  a meno di, rispettivamente,  $1/10$  e  $1/10^2$ . Così procedendo si determina un allineamento decimale,  $1.414213562\dots$ , che vorremmo chiamare  $\sqrt{2}$ . Più precisamente (si veda Figura 1.6), si definisce  $\sqrt{2}$  l'unico allineamento decimale  $1.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n\dots$  che verifica la seguente proprietà:

$$(1.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n)^2 \leq 2 < \left(1.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\dots\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

Questo esempio suggerisce la seguente definizione.

#### DEFINIZIONE 1.2

Un **numero reale** è un allineamento decimale proprio. L'insieme dei numeri reali si indica con  $\mathbb{R}$ .

Gli allineamenti che non sono limitati o periodici si dicono **numeri (reali) irrazionali**. In particolare  $x = \sqrt{2}$  è un numero irrazionale e segue facilmente dalla (1.3) che è la **soluzione positiva** di  $x^2 = 2$  (si veda anche il Teorema 1.11).

Partendo da questa definizione è possibile, anche se non daremo i dettagli, estendere a  $\mathbb{R}$  la struttura algebrica (addizione e moltiplicazione) e l'ordinamento totale  $\leq$  che abbiamo considerato nel caso particolare dei numeri razionali<sup>(2)</sup>. In tal modo  $\mathbb{R}$  risulta un corpo ordinato, ovvero valgono le proprietà (1)-(17) del paragrafo precedente. Si può dimostrare inoltre che anche la proprietà di Archimede e la sua conseguenza (19) continuano a essere valide. In particolare la proprietà (17) può essere generalizzata come segue:

#### TEOREMA 1.3 Proprietà di densità

Siano  $x, y \in \mathbb{R}$  tali che  $x < y$ . Allora:

$$\exists \text{ infiniti numeri razionali } z : x < z < y, \quad (1.4)$$

$$\exists \text{ infiniti numeri irrazionali } z : x < z < y. \quad (1.5)$$

Proprietà di densità in  $\mathbb{R}$

Dimostrazione

Intervalli

**Notazioni.** Dati due numeri reali  $a, b$  tali che  $a < b$  si pone:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

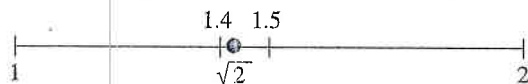


Figura 1.6

$$(1.4)^2 \leq 2 < (1.5)^2.$$

<sup>(2)</sup> Per esempio, il prodotto di due numeri reali  $x = p.\alpha_1\alpha_2\dots$  e  $y = q.\beta_1\beta_2\dots$  può essere definito considerando i prodotti  $q_n$  dei rispettivi troncamenti, ovvero  $q_n = (p.\alpha_1\dots\alpha_n) \cdot (q.\beta_1\dots\beta_n)$ , e mostrando che le cifre decimali di  $q_n$  "si stabilizzano", nel senso che le prime  $m$  cifre decimali di  $q_n$  restano le stesse a partire da un certo  $n$  in poi; l'unica accortezza sarà quella di ridefinire opportunamente i casi in cui si ottenga un allineamento decimale non proprio.

Tali insiemi sono detti **intervalli limitati**. In questo contesto, i simboli “(”, “)”, “[” e “]” si leggono rispettivamente “aperto a sinistra”, “aperto a destra”, “chiuso a destra”: ad esempio,  $(3, 5]$  è un intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra,  $[0, 1]$  è un intervallo chiuso. Sono detti **intervalli illimitati** i seguenti insiemi ( $a \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned}(-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R}, \\(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\[a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\(a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.\end{aligned}$$

In particolare indicheremo con  $\mathbb{R}^+$  e  $\mathbb{R}^-$  rispettivamente gli intervalli  $(0, +\infty)$  e  $(-\infty, 0)$ .

### 1.3.1 Valore assoluto

Prima di procedere con l'illustrazione delle proprietà dei numeri reali, richiamiamo un concetto fondamentale (che dovrebbe essere già noto allo studente).

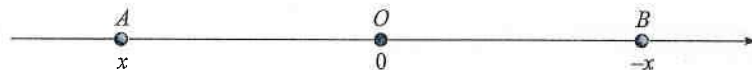
#### DEFINIZIONE 1.4

Si dice **modulo** o **valore assoluto** di un numero reale  $x$ , e si indica con il simbolo  $|x|$ , il numero così definito:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

In altri termini, il valore assoluto lascia invariato un numero reale non negativo, mentre cambia il segno a un numero reale negativo: per esempio,  $|4| = 4$  e  $|-4| = 4$ . Pensando alla rappresentazione geometrica di  $\mathbb{R}$ , il valore assoluto di  $x$  indica la misura del segmento che congiunge  $x$  a 0, ovvero la *distanza* del punto  $x$  da 0, si veda la Figura 1.7

**Figura 1.7**  
 $\overline{AO} = \overline{OB} = |x|.$



Sia  $C \in (0, +\infty)$ ; allora

$$\begin{aligned}|x| \leq C &\Leftrightarrow -C \leq x \leq C, & \text{ovvero } x \in [-C, C], \\|x| \geq C &\Leftrightarrow x \leq -C \text{ oppure } x \geq C, & \text{ovvero } x \in (-\infty, -C] \cup [C, +\infty)\end{aligned} \quad (1.6)$$

(nel caso di disuguaglianze strette valgono le stesse formule con gli intervalli aperti). La verifica segue direttamente dalla definizione: per esempio, per provare la prima relazione è sufficiente scrivere

$$|x| \leq C \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq C & \text{se } x \geq 0 \\ -x \leq C & \text{se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, C] \cup [-C, 0) = [-C, C].$$

Scegliendo  $C = |x|$  nella prima delle (1.6), si ottiene

$$-|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

#### ESEMPIO 1.4

Si vogliono determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$|x + 2| \leq |2x - 3| + 1.$$

Applicando la definizione di valore assoluto, si ottiene

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{se } x+2 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad |2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } 2x-3 \geq 0 \\ 3-2x & \text{se } 2x-3 < 0. \end{cases}$$

Si distinguono quindi tre insiemi,  $(-\infty, -2)$ ,  $[-2, \frac{3}{2}]$  e  $[\frac{3}{2}, +\infty)$ , e su ciascuno di essi si risolve la disequazione corrispondente:

$$|x+2| \leq |2x-3| + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \leq 2x-2 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ x+2 \leq 4-2x & \text{se } -2 \leq x < \frac{3}{2} \\ -x-2 \leq 4-2x & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 & \text{se } x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq \frac{2}{3} & \text{se } -2 \leq x < \frac{3}{2} \\ x \leq 6 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [-2, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty).$$

Perciò  $x \in (-\infty, \frac{2}{3}] \cup [4, +\infty)$ .

Si vogliono determinare le soluzioni della seguente disequazione:

$$1 < ||x| - 1| < 2.$$

Applicando la definizione, si ha

$$1 < ||x| - 1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < |x| < 3 & \text{se } |x| - 1 \geq 0 \\ 0 < -|x| < 1 & \text{se } |x| - 1 < 0. \end{cases}$$

Poiché la disequazione risultante nel secondo caso non è mai verificata, si ottiene

$$1 < ||x| - 1| < 2 \Leftrightarrow 2 < |x| < 3 \quad \text{e} \quad |x| \geq 1 \Leftrightarrow 2 < |x| < 3$$

ovvero, utilizzando ancora la definizione,

$$1 < ||x| - 1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 & \text{se } x \geq 0 \\ 2 < -x < 3 & \text{se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$

Presentiamo subito una disuguaglianza di fondamentale importanza, la **disuguaglianza triangolare**:

$$\boxed{|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.} \quad (1.8)$$

Per dimostrarla, si riscrive la proprietà (1.7) con  $x_1$  e  $x_2$  al posto di  $x$ , e si somma membro a membro:

$$-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|.$$

Per la proprietà (1.6) (con  $x = x_1 + x_2$  e  $C = |x_1| + |x_2|$ ) questa espressione coincide con la (1.8).

Vogliamo determinare i valori di  $x \in \mathbb{R}$  tali che

$$|x+2| \leq |2x+3| + 1. \quad (1.9)$$

Si può risolvere la (1.9) utilizzando la definizione, come nell'Esempio 1.4:

#### ESEMPIO 1.5

#### ESEMPIO 1.6





mentre  $(-\infty, 3)$  non possiede massimo né minimo. Si osservi che 3 è maggiorante ma non appartiene all'insieme. D'altra parte l'elemento 3 ha un ruolo particolare per  $(-\infty, 3)$  essendo il più piccolo dei maggioranti, ovvero quello che si definisce *estremo superiore* di  $(-\infty, 3)$ :

**DEFINIZIONE 1.8**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Un elemento  $p \in \mathbb{R}$  si dice **estremo superiore** (rispettivamente **estremo inferiore**) di  $A$  in  $\mathbb{R}$ , e si indica con  $\sup A$  (rispettivamente  $\inf A$ ), se  $p$  è il minimo dei maggioranti di  $A$  (rispettivamente il massimo dei minoranti di  $A$ ), ovvero:

$$\sup A := \min\{k \in \mathbb{R} : k \text{ è maggiorante di } A\},$$

$$\inf A := \max\{k \in \mathbb{R} : k \text{ è minorante di } A\}.$$

Chiaramente se esiste  $\sup A$  (rispettivamente  $\inf A$ ) questo è unico essendo il minimo (massimo) di un insieme (si veda Lemma 1.7). Inoltre lo studente verifichi che

$$\text{se } \exists \max A, \text{ allora } \exists \sup A \text{ e } \sup A = \max A$$

e

$$\text{se } \exists \sup A \text{ e se } \sup A \in A, \text{ allora } \exists \max A \text{ e } \max A = \sup A.$$

In conclusione, la differenza tra  $\max A$  e  $\sup A$  si nota se e solo se  $\exists \sup A$  e  $\nexists \max A$ , come anche evidenziato dal seguente esempio.

Riconsiderando l'esempio precedente, risulta:

$$\max[-2, 1] = \sup[-2, 1] = 1, \quad \min[-2, 1] = \inf[-2, 1] = -2, \quad \sup(-\infty, 3) = 3.$$

Sia  $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq 3x < 4\}$ . Allora  $A$  è limitato e  $\sup A = 4/3$  ( $A$  non ha massimo), mentre  $\inf A = \min A = -5/3$ .

**ESEMPIO 1.8**

**Notazioni.** Se un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}$  non è limitato superiormente (inferiormente) si scrive anche  $\sup A = +\infty$  ( $\inf A = -\infty$ ).

Nell'esempio precedente si ha  $\inf(-\infty, 3) = -\infty$ .

Un insieme  $A$  si dice **finito** se ha un numero finito di elementi, ovvero se  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che il numero degli elementi di  $A$  è  $n$ ; altrimenti  $A$  si dice **infinito**.

**TEOREMA 1.9**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A$  finito e non vuoto. Allora  $A$  ammette massimo e minimo.

**Dimostrazione**

Se  $A = \{a_1\}$  banalmente si ha  $\max A = \min A = a_1$ . Se  $A = \{a_1, a_2\}$ , risulta  $a_1 \leq a_2$  oppure  $a_2 \leq a_1$ . Nel primo caso  $\min A = a_1$  e  $\max A = a_2$ , nel secondo caso  $\min A = a_2$  e  $\max A = a_1$ . In generale, se  $A$  ha  $n$  elementi basta un numero finito ( $n - 1$ ) di confronti per determinare il massimo o il minimo.

Riassumiamo le proprietà che caratterizzano l'estremo superiore (inferiore) di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  e  $\ell \in \mathbb{R}$ . Essendo  $\sup A$  il minimo dei maggioranti di  $A$ , si ha che

Caratterizzazione  
 $\sup A / \inf A$

$$\ell = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall x \in A : x \leq \ell; \\ ii) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ tale che } x > \ell - \varepsilon. \end{cases} \quad (1.10)$$



Infatti la (i) dice che  $\ell$  è un maggiorante per  $A$ , la (ii) esprime il fatto che non esiste un maggiorante più piccolo:  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\ell - \varepsilon$  non è un maggiorante di  $A$ . Analogamente

$$\ell = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} i) \forall x \in A : x \geq \ell; \\ ii) \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \text{ tale che } x < \ell + \varepsilon. \end{cases} \quad (1.11)$$

**ESEMPIO 1.9**

Si consideri l'insieme  $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ . Banalmente, 1 è un maggiorante e 0 un minorante; quindi  $A$  è limitato sia superiormente che inferiormente. Poiché  $1 \in A$ ,  $\max A = 1$ . Essendo  $1/n$  "piccolo" per valori "grandi" di  $n$ , si potrebbe intuire che  $0 = \inf A$  ( $0 \notin A$ , quindi non può essere minimo). Utilizziamo la proprietà (1.11)-(ii) per provarlo. Sia  $\varepsilon > 0$ , dobbiamo determinare  $n \geq 1$  tale che  $1/n < \varepsilon$ . Tale  $n$  esiste per la proprietà di Archimede (posto  $x = \varepsilon$  e  $y = 1$  nella proprietà (18) del Paragrafo 1.2).

Finora abbiamo considerato per semplicità sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ . I concetti di maggiorante, massimo e estremo superiore si possono naturalmente introdurre anche in  $\mathbb{Q}$  (ovviamente di sottoinsiemi di  $\mathbb{Q}$ ). Ma, come risulterà chiaro nel prossimo esempio, considerare  $\mathbb{Q}$  anziché  $\mathbb{R}$  ha, in tale contesto, notevoli conseguenze.

**ESEMPIO 1.10**

Consideriamo  $A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213\dots\}$ , ovvero l'insieme degli allineamenti decimali finiti che "approssimano per difetto" il numero reale  $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$  (si veda (1.3)).  $A$  può essere considerato come sottoinsieme di  $\mathbb{Q}$  così come di  $\mathbb{R}$ . In entrambi i casi,  $A$  è limitato superiormente (2 è un maggiorante). L'unico "candidato" per l'estremo superiore di  $A$  è  $1.414213562\dots$ , ma come già osservato, non è un numero razionale. In conclusione  $A$ , pur essendo limitato superiormente, non ammette estremo superiore in  $\mathbb{Q}$ .

Completezza di  $\mathbb{R}$ 

Se consideriamo l'insieme  $A$  dell'esempio precedente come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , dalla (1.3), dalla proprietà di Archimede (19) e dalla (1.10), segue che  $\sup A = \sqrt{2}$ . Questo fornisce uno strumento alternativo per definire  $\sqrt{2}$ , che vedremo di seguito utilizzato per definire i radicali, potenze e logaritmi, grazie alla seguente *proprietà fondamentale che differenzia  $\mathbb{R}$  da  $\mathbb{Q}$* .

## Dimostrazione

**TEOREMA 1.10** Proprietà di completezza di  $\mathbb{R}$ 

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Se  $A$  è limitato superiormente (inferiormente), allora esiste  $\sup A \in \mathbb{R}$  ( $\inf A \in \mathbb{R}$ ).

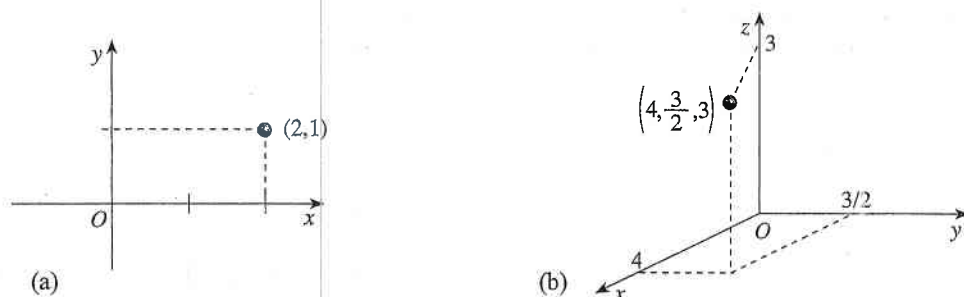
Dal punto di vista geometrico la proprietà di completezza implica che, a differenza del caso dei numeri razionali, presa una retta (riferita a un'origine e fissata un'unità di misura), ogni punto della retta corrisponde a un numero reale. Tale retta viene anche detta **retta reale**.

Analogamente si può introdurre il **piano reale** come rappresentazione geometrica di  $\mathbb{R}^2$  (si veda Figura 1.8a). In Figura 1.8b è illustrata una rappresentazione geometrica di  $\mathbb{R}^3$ . In tale contesto gli elementi della coppia  $(x, y)$ , rispettivamente della tripla  $(x, y, z)$ , sono detti **coordinate cartesiane**.

**ESERCIZIO 1.3**

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono limitati (superiormente, inferiormente) e determinare, se esistono, i loro massimi, minimi, estremi superiori e inferiori:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 \leq 9\}$ ;             | d) $\{p^2 : p \in \mathbb{Z}\}$ ;                                 |
| b) $\{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x^2 < 9\}$ ;             | e) $\{p^3 : p \in \mathbb{Z}\}$ ;                                 |
| c) $\left\{ \frac{1}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ; | f) $\left\{ (-1)^n - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ . |



**Figura 1.8** Rappresentazione geometrica di  $\mathbb{R}^2$  (a); rappresentazione geometrica di  $\mathbb{R}^3$  (b).

### 1.3.3 Radici, potenze e logaritmi

Una prima conseguenza della proprietà di completezza è contenuta nel seguente risultato.

#### TEOREMA 1.11

Siano  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Allora esiste uno e uno solo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$ , tale che  $x^n = y$ . Tale numero reale  $x$  viene indicato con i simboli  $\sqrt[n]{y}$  o  $y^{1/n}$  e si chiama **radice  $n$ -sima** di  $y$ .

**Dimostrazione**

Per definizione,  $\sqrt{2}$  è la soluzione *non negativa* di  $x^2 = 2$ .

L'idea della dimostrazione è quella di verificare che il numero

$$\sqrt[n]{y} := \sup\{s \in [0, +\infty) : s^n \leq y\}$$

è soluzione dell'equazione  $x^n = y$ . Si osservi che l'insieme  $\{s \in [0, +\infty) : s^n \leq y\}$  è limitato superiormente da  $\max\{1, y\}$  e quindi, per la proprietà di completezza, esiste in  $\mathbb{R}$  l'estremo superiore. L'unicità della soluzione non negativa di  $x^n = y$  segue dal fatto che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}, n > 1$$

risulta

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n < x_2^n.$$

**Osservazione.** Se  $n$  è *dispari* si può definire la radice  $n$ -sima di un numero negativo  $y$ :

$$y \in \mathbb{R}, y < 0 \text{ e } n \text{ dispari} \Rightarrow \sqrt[n]{y} := -\sqrt[n]{(-y)}$$

(si noti che  $-y > 0$  e  $(-\sqrt[n]{(-y)})^n = (-1)^n(-y) = (-1)(-y) = y$  poiché  $n$  è dispari). Se  $n$  è *pari*  $\sqrt[n]{y}$  non è definita per  $y < 0$  (si veda la proprietà 15 del Paragrafo 1.2); in altre parole,  $x^n = y < 0$  non ha soluzione in  $\mathbb{R}$ .

Per definizione, la radice  $n$ -esima di un numero non negativo è un numero non negativo, quindi:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

perciò se  $x < 0$ ,  $\sqrt{x^2} \neq x$ ; per esempio  $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3| \neq -3$ . Analogamente:

$$\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } n \geq 1.$$



L'operazione di **elevamento a potenza**, in simboli  $a^r$  ("a elevato a r"; a si dice **base** e **r esponente**), è ben nota quando  $r \in \mathbb{Z}$  e  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; se  $r$  è un intero *positivo*, allora  $0^r := 0$ . Per esempio  $a^3 = a \cdot a \cdot a$ ,  $a^{-5} = 1/a^5$ ,  $a^0 = 1$ . Se l'esponente  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $r = m/n$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $n > 0$ ,  $a^r$  è definita  $\forall a \in \mathbb{R}^+$  (se  $r > 0$  e  $a = 0$ , allora  $a^r := 0$ ) come segue

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}},$$

dove  $a^{\frac{1}{n}}$  denota  $\sqrt[n]{a}$ , la radice  $n$ -sima di  $a$ , definita dal Teorema 1.11. Si osservi che la condizione  $a \in \mathbb{R}^+$  implica che la definizione di elevamento a potenza con esponente razionale non dipende dalla rappresentazione del numero razionale  $r$ , cioè:

$$a > 0 \quad \text{e} \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \Rightarrow \quad a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}}$$

(per esempio  $8^{\frac{1}{3}} = 2 = 8^{\frac{2}{6}}$ ), e che effettivamente  $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ ; ovvero si può scambiare l'ordine delle operazioni. Se  $n$  è dispari la definizione di elevamento a potenza può essere estesa al caso di base  $a < 0$ .

Di seguito sono elencate le principali proprietà dell'elevamento a potenza.

#### Proprietà delle potenze

#### PROPRIETÀ

Per ogni  $a, b \in \mathbb{R}^+$  e  $r, s \in \mathbb{Q}$  risulta:

- 1)  $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$ ;
- 2)  $(ab)^r = a^r \cdot b^r$ ;
- 3)  $(a^r)^s = a^{rs}$ ;
- 4)  $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ ;
- 5)  $a^r > 0$ ,  $a^0 = 1$ ,  $1^r = 1$ ;
- 6)  $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a^r < 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a > 1 \text{ e } r < 0; \end{cases}$
- 7)  $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1; \end{cases}$
- 8)  $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^r < b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r > b^r & \text{se } r < 0; \end{cases}$
- 9)  $\forall a \neq 1: a^r = a^s \Rightarrow r = s$ .

Si osservi che la proprietà (8) segue dalla (6): basta considerare  $(a/b)^r$ , per cui la base  $a/b$  è minore o uguale a 1.

Si vuole estendere la definizione di elevamento a potenza al caso di esponente *reale*  $r \in \mathbb{R}$  e base  $a \in \mathbb{R}^+$  (non è così evidente come definire  $5^{\sqrt{3}}$ ).

#### Elevamento a potenza con esponente reale

#### DEFINIZIONE 1.12

Per ogni  $a > 1$  e  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $r = p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ , si definisce

$$a^r := \sup \{ a^{p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} : n \in \mathbb{N} \}.$$

Si noti che  $a^{p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  è ben definito poiché  $p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \in \mathbb{Q} \forall n \geq 1$ ; l'insieme  $\{ a^{p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} : n \in \mathbb{N} \}$  è, in virtù della proprietà delle potenze 7), limitato superiormente da  $a^{p+1}$  e ammette, per la completezza di  $\mathbb{R}$ , estremo superiore in  $\mathbb{R}$ . Inoltre si osservi che, se  $a > 1$ , per la 7)  $a^{p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} \geq a^{p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  se  $m > n$ ; quindi si potrebbe dire che la definizione di  $a^r$  come estremo superiore esprime il fatto che  $a^{p \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  approssima  $a^r$  per difetto.

Se  $0 < a < 1$  e  $r > 0$ , allora

$$a^r := \frac{1}{(1/a)^r}$$

(si noti che  $1/a > 1$ , quindi la potenza  $(1/a)^r$  è definita). Se  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  e  $r < 0$ , allora

$$a^r := \frac{1}{a^{-r}}$$

(si noti che  $-r > 0$ ). Se  $a = 1$

$$1^r := 1 \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

e se  $a = 0$

$$0^r := 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^+.$$

Si può dimostrare che con tali definizioni le proprietà delle potenze (1)-(9) rimangono valide  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$  e  $\forall r, s \in \mathbb{R}$ .

**Osservazione.** Sottolineiamo che  $a^{(b^c)} \neq (a^b)^c$ ; per esempio  $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$  ma  $(2^2)^3 = 64$ .



Determiniamo i numeri reali  $x$  che verificano le disuguaglianze

$$1 < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} \leq 27.$$

Poiché  $1 = (1/3)^0$ ,  $1/9 = (1/3)^2$  e  $27 = 3^3 = (1/3)^{-3}$ , dalla proprietà (7) delle potenze (con  $a = 1/3 \in (0, 1)$ ) segue che

$$1 < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3} \leq 27 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{2(2x-3)} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow -3 \leq 2(2x-3) < 0,$$

ovvero  $3/4 \leq x < 3/2$ .

#### ESEMPIO 1.11

Come le radici sono state introdotte come soluzioni delle equazioni del tipo  $x^n = y$ , i logaritmi emergono come soluzioni di equazioni del tipo  $a^x = y$ .

#### TEOREMA 1.13

Siano  $a, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$ , allora esiste uno e uno solo  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $a^x = y$ . La soluzione di tale equazione si chiama **logaritmo in base  $a$  di  $y$**  e si indica con il simbolo  $\log_a y$  (cioè  $a^{\log_a y} = y$ ).

Dimostrazione

Si osservi che l'equazione  $a^x = y$  non ha, per definizione di elevamento a potenza, soluzioni se  $y \leq 0$ ; mentre se  $a = 1$ , tale equazione non ha soluzione se  $y \neq 1$ , invece ha infinite soluzioni se  $y = 1$ .

Come per i radicali, l'idea è, per esempio nel caso  $a > 1$ , di verificare che il numero

$$x := \sup\{s \in \mathbb{R} : a^s \leq y\}$$

è soluzione dell'equazione  $a^x = y$ , ovvero  $\log_a y = \sup\{s \in \mathbb{R} : a^s \leq y\}$ . Per il caso  $0 < a < 1$  ci si può ricondurre a quello precedente (osservando che  $a^x = y \Leftrightarrow (1/a)^{-x} = y$ ), ma è anche possibile verificare che il numero  $x = \inf\{s \in \mathbb{R} : a^s \leq y\}$  è soluzione di  $a^x = y$ . Si noti che l'insieme  $\{s \in \mathbb{R} : a^s \leq y\}$  è limitato superiormente se  $a > 1$  e limitato inferiormente se  $0 < a < 1$ . L'unicità della soluzione segue direttamente dalle proprietà delle potenze.

Di seguito sono elencate le principali proprietà di cui godono i logaritmi.



Proprietà dei  
logaritmi

## PROPRIETÀ

Per ogni  $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ , risulta:

- 1)  $a^{\log_a x} = x$  (per definizione);
- 2)  $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ ;
- 3)  $\log_a (1/x) = -\log_a x$ ;
- 4)  $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ ;
- 5)  $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ;
- 6)  $\log_a x = 1/\log_x a = -\log_{\frac{1}{a}} x$ ;
- 7) (Cambiamento di base)  $\log_a x = \log_b x / \log_b a$ ;
- 8)  $x > y > 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x > \log_a y & \text{se } a > 1 \\ \log_a x < \log_a y & \text{se } 0 < a < 1; \end{cases}$
- 9)  $\log_a 1 = 0$ ,  $\log_a a = 1$ ,  $\log_a (1/a) = -1$ .

Per ogni  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \neq 1$ , risulta:

- 10)  $\begin{cases} \forall x \neq 0 \Rightarrow \log_a x^2 = 2 \log_a |x| \\ \forall x, y : xy > 0 \Rightarrow \log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|. \end{cases}$

Si noti la differenza fra la proprietà (2) e la (10): nella (10)  $x$  e  $y$  possono essere anche entrambi negativi. Per la dimostrazione delle proprietà si veda lo svolgimento dell'Esercizio 1.7.

## ESEMPIO 1.12

Per risolvere la disequazione

$$\log_{\frac{1}{2}}(8 - 2x^2) \geq -1,$$

si scrive  $-1 = \log_{\frac{1}{2}} 2$  e si usa la proprietà 8) con  $a = 1/2 \in (0,1)$ :

$$\log_{\frac{1}{2}}(8 - 2x^2) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2 \Leftrightarrow 0 < 8 - 2x^2 \leq 2 \Leftrightarrow -8 < -2x^2 \leq -6,$$

ovvero  $\sqrt{3} \leq |x| < 2$ .

## ESERCIZIO 1.4

Determinare i seguenti numeri reali:

a)  $\sqrt[5]{64}$ ;

c)  $\sqrt[5]{(-2)^5}$ ;

b)  $\sqrt[6]{(-2)^6}$ ;

d)  $\sqrt[3]{-40 \cdot 25}$ .

## ESERCIZIO 1.5

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $ab \geq 0$ . Dimostrare che  $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$ , e spiegare perché non si può scrivere  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

## ESERCIZIO 1.6

Determinare le soluzioni reali delle seguenti disequazioni:

a)  $9^{5x-2} > 3$ ;

d)  $1 < x^5 \leq 32$ ;

b)  $(1/4)^{-x^2} \geq 2$ ;

e)  $1 < x^{10} \leq 32$ .

c)  $1 < x^{1/2} \leq 32$ ;

## ESERCIZIO 1.7

Dimostrare le proprietà (2)-(10) dei logaritmi elencate nella pagina 18.

## ESERCIZIO 1.8

Calcolare i seguenti numeri reali:

a)  $\log_3 27$ ;

b)  $\log_2 1/4$ ;

- c)  $\log_{1/25} 5$ ;  
d)  $\log_{10} 1000000$ ;

- e)  $\log_{10} 0.00001$ ;  
f)  $\log_{25} 5 + \log_{25} 125$ .

Determinare le soluzioni reali delle seguenti disequazioni:

a)  $\log_3 (4 - x) < -1$ ;

d)  $\log_5 (\sqrt{3 - x^2} - 2) > 0$ ;

b)  $3^{x-2} < 2$ ;

e)  $\log_4 (3x + 2) - \log_4 (x - 3) > 0$ ;

c)  $\log_2 (1 - \sqrt{x - 2}) < 3$ ;

f)  $\log_4 ((3x + 2)/(x - 3)) > 0$ .

Semplificare le seguenti espressioni:

a)  $5^{-4 \log_{25} (1/x)} \forall x > 0$ ;

d)  $\log_{10} \sqrt{10x^2} \forall x \neq 0$ ;

b)  $3^{\log_9 x} \forall x > 0$ ;

e)  $\log_a \sqrt{x^2 - 1} - 1/2 \log_a (x - 1) \forall x > 1$ ,  
 $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ .

c)  $\log_{1/2} 2^{5x} \forall x \in \mathbb{R}$ ;

Risolvere le seguenti disequazioni:

a)  $x^4 - x \leq 0$ ;

b)  $|3x^2 - 6x - 5| > 0$ ;

c)  $(2 - x)^2(x^2 + 2x - 15)(1 - x)(2x + 4) > 0$ ;

d)  $(x^2 - 3x - 4)/(x^2 + 2x - 15) \leq 0$ ;

i)  $5 - x > \sqrt{x^2 + 6x + 8}$ ;

e)  $x \geq \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}$ ;

j)  $|x^2 - x - 3| < 2x + 1$ ;

f)  $x - 8 < \sqrt{x^2 - 9x + 14}$ ;

k)  $4/(x + 2) < (3 - x)/(x - 1)$ ;

g)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} > 2 - |x + 4|$ ;

l)  $\log_{10} (x^2 - 7x + 11) < 0$ ;

h)  $3x/(5x - 3) \leq 2/(4 - x)$ ;

m)  $2^{x^2 + 5x} < 4$ .

## ESERCIZIO 1.9

## ESERCIZIO 1.10

## ESERCIZIO 1.11

## 1.4 Numeri complessi

Un altro insieme numerico di particolare importanza è quello dei numeri complessi:

### DEFINIZIONE 1.14

Un **numero complesso** è una coppia ordinata  $(x, y)$  di due numeri reali  $x$  e  $y$ , usualmente rappresentata nella forma  $z = x + iy$ . Nell'insieme dei numeri complessi, indicato con

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

sono definite per ogni  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ :

(i) l'addizione

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

(ii) la moltiplicazione

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

I numeri reali  $x$  e  $y$  si dicono, rispettivamente, **parte reale** e **parte immaginaria** del numero complesso  $z = x + iy$  e si indicano, rispettivamente, con  $\operatorname{Re} z$  e  $\operatorname{Im} z$ :

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x + iy) := x, \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x + iy) := y.$$

### Guida

I numeri complessi sono utilizzati per: integrazione delle funzioni razionali (Paragrafo 8.6.3), successioni, serie e serie di potenze a termini complessi (Paragrafi 9.2-3), equazioni differenziali (Capitolo 17), funzioni olomorfe e trasformate.



Si usano anche le notazioni

$$x + yi := x + iy, \quad x := x + 0i, \quad iy := 0 + iy, \quad 0 := 0 + i0, \quad i := 0 + i1,$$

e

$$x - iy := x + i(-y).$$

Per esempio,  $4 - i$  è il numero complesso  $4 + i(-1)$ .

Come insieme  $\mathbb{C}$  può essere identificato con  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  e quindi è naturale rappresentare i numeri complessi in un piano, detto **piano complesso**: scelta l'origine e l'unità di misura, si rappresentano i numeri reali, ovvero i numeri complessi  $z$  con  $\text{Im } z = 0$ , sull'asse orizzontale passante per l'origine, detto **asse reale**, e i numeri  $iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , sull'asse verticale passante per l'origine, detto **asse immaginario**; un numero generico  $z = x + iy$  è rappresentato come indicato in Figura 1.9. Si sottolinea che  $\mathbb{C}$  è un insieme numerico, mentre  $\mathbb{R}^2$  non lo è.

L'addizione è un'operazione immediata, per esempio:

$$(3 - 4i) + (-2 + i) = 1 - 3i,$$

e geometricamente non è altro che la *regola del parallelogramma* (Figura 1.10). La definizione di moltiplicazione invece non sembra altrettanto chiara, ma, come vedremo successivamente, può essere descritta in termini di rotazioni e omotetie.

Si noti che il numero  $i = 0 + 1i$  verifica

$$i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Questa proprietà implica che, a differenza del campo dei numeri reali, l'equazione  $z^2 + 1 = 0$  ammette soluzione in  $\mathbb{C}$ .

Formalmente si può ritrovare la formula per il prodotto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &= x_1x_2 + i^2y_1y_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Qui abbiamo considerato  $x_1, y_1, x_2, y_2$  e  $i$  come numeri complessi ( $x_1 + 0i$  ecc.), supponendo che verifichino delle proprietà elementari come per esempio quella distributiva. Il seguente teorema rende tale procedimento rigoroso.

### Dimostrazione

#### TEOREMA 1.15

I numeri complessi verificano le proprietà (1)-(9) elencate nel Paragrafo 1.2. In particolare è definita la differenza  $z_1 - z_2$  per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , e il quoziente  $z_1/z_2$  per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  con  $z_2 \neq 0$ .

La dimostrazione è facile e si basa sulla definizione dell'addizione e della moltiplicazione e sulle analoghe proprietà dei numeri reali. Solo la costruzione del reciproco  $1/z$  per ogni  $z \neq 0$  richiede un piccolo artificio:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

ovvero  $1/(x + iy)$  è il numero complesso con parte reale  $x/(x^2 + y^2)$  e parte immaginaria  $-y/(x^2 + y^2)$  (a posteriori si verifica che tale numero soddisfa la proprietà richiesta).

#### ESEMPIO 1.13

$$\frac{3 + 2i}{2 - 5i} = \frac{(3 + 2i)(2 + 5i)}{(2 - 5i)(2 + 5i)} = -\frac{4}{29} + i\frac{19}{29}$$

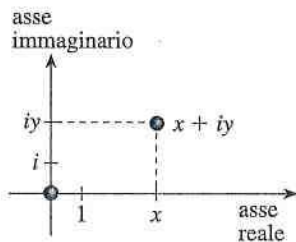


Figura 1.9

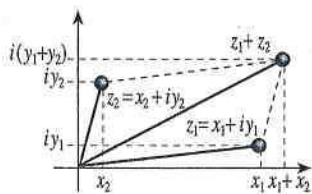


Figura 1.10

e

$$\frac{4-5i}{3i} = \frac{(4-5i)(-3i)}{(3i)(-3i)} = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3}i.$$

In particolare abbiamo

$$\operatorname{Re}\left(\frac{3+2i}{2-5i}\right) = -\frac{4}{29} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{3+2i}{2-5i}\right) = \frac{19}{29}.$$

Dato  $z = x + iy$ , si dice **complesso coniugato** di  $z$  e si denota con  $\bar{z}$  il numero  $x - iy$ :

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \bar{z} := x - iy.$$

In particolare, valgono le seguenti proprietà (di facile dimostrazione):

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \forall z = x + iy \quad (1.13)$$

e

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad \text{per ogni } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (1.14)$$

Per ogni  $z = x + iy$  si definisce il numero reale non negativo  $|z|$ , detto **modulo** di  $z$ :

$$|z| = |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.15)$$

Il significato geometrico del modulo è chiaro dalla Figura 1.11, in cui abbiamo indicato anche l'angolo  $\varphi$ , detto **argomento** di  $z$  e indicato con  $\arg z$ . Dalla definizione di seno e coseno (si veda l'Appendice 1.A) segue che

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z = |z| \sin(\arg z), \quad (1.16)$$

ovvero

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)). \quad (1.17)$$

Si noti che  $\arg z$  non è definito se  $z = 0$  e che, se  $z \neq 0$ ,  $\arg z$  è determinato a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ . Infatti sarà spesso utile riscrivere la (1.17) come

$$z = |z|(\cos(\arg z + 2k\pi) + i \sin(\arg z + 2k\pi)) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z} \text{ se } z \neq 0. \quad (1.18)$$

La (1.18) si dice anche **rappresentazione trigonometrica** di  $z \neq 0$  (si veda Figura 1.11).

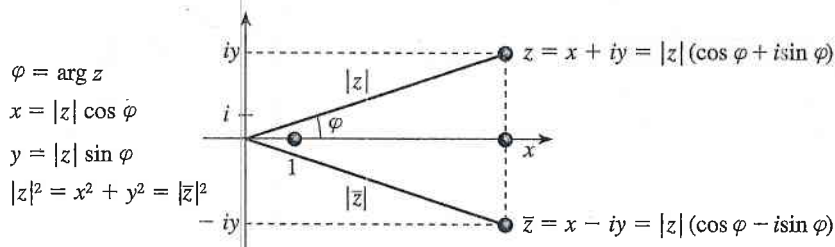


Figura 1.11

Si vuole determinare modulo e argomento di  $z_1 = 1 - i$  e  $z_2 = 1 + i$ .

Si ha

$$|z_1| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{e, analogamente, } |z_2| = \sqrt{2}.$$

Risulta poi evidente, rappresentando  $z_1$  e  $z_2$  nel piano complesso, che

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{4} (+2k\pi) \quad \text{e} \quad \arg z_2 = \frac{\pi}{4} (+2k\pi).$$

Quindi, per esempio,

ESEMPIO 1.14



$$z_1 = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

In generale, dato un numero complesso, non si riesce a determinare esplicitamente l'argomento, ma utilizzando la (1.16) è sempre possibile conoscere il valore del coseno e del seno dell'argomento.

Per la definizione di complesso coniugato si ha

$$|\bar{z}| = |z| \quad (1.19)$$

e, per la (1.13),

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

Di notevole importanza è il seguente risultato, che fornisce anche l'interpretazione geometrica della moltiplicazione (si veda Figura 1.12).

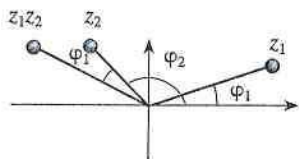


Figura 1.12

#### TEOREMA 1.16

Siano  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Allora

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

e

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad z_1, z_2 \neq 0, k \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

#### Dimostrazione

Siano  $\varphi_1 = \arg z_1$  e  $\varphi_2 = \arg z_2$ . Allora, per la (1.17),

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le ben note formule trigonometriche per il seno e coseno della somma di due angoli (si veda anche la proprietà 8 nell'Appendice 1.A).

Sia  $z = z_1/z_2$  con  $z_2 \neq 0$ , ovvero  $z z_2 = z_1$  (si veda Figura 1.13). Dal Teorema 1.16 segue che  $|z| \cdot |z_2| = |z_1|$  e che, se anche  $z_1 \neq 0$ ,  $\arg z + \arg z_2 = \arg z_1 + 2k\pi$ , ovvero:

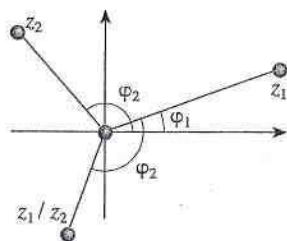


Figura 1.13

#### COROLLARIO 1.17

Siano  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 \neq 0$ . Allora

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (1.21)$$

e, se  $z_1 \neq 0$ ,

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

#### ESEMPIO 1.15

Consideriamo i numeri  $z_1 = 1 - i$  e  $z_2 = 1 + i$  dell'esempio precedente. Allora si ha

$$|z_1 z_2| = 2 \text{ e } \arg z_1 z_2 = 0 (+2k\pi)$$

e

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1 \text{ e } \arg \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\pi}{2} (+2k\pi).$$

Se applichiamo ripetutamente il Teorema 1.16, otteniamo che per ogni  $n = 1, 2, \dots$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{e, se } z \neq 0, \quad \arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.23)$$

In particolare, se  $|z| = 1$ , ovvero  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , segue la **formula di De Moivre**:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi). \quad (1.24)$$

È di grande utilità la notazione

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{per } \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

Con tale rappresentazione (si veda Figura 1.14) la formula  $(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$  diventa

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.26)$$

e possiamo riscrivere la formula di De Moivre come segue:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Evidenziamo che a questo punto delle nostre conoscenze la notazione introdotta è puramente formale. Tuttavia dalle due formule precedenti pare naturale introdurre una notazione che faccia uso delle potenze. Nel Capitolo 9 vedremo che neanche l'uso del "numero  $e$ " è casuale. Si noti che

$$e^{2k\pi i} = 1, \quad e^{i\varphi + 2k\pi i} = e^{i\varphi} \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}, \quad (1.27)$$

e

$$|e^{i\varphi}| = 1. \quad (1.28)$$

Da ciò e dalla (1.18) segue che per ogni  $z \neq 0$

$$z = |z|e^{i \arg z} \quad \text{oppure} \quad z = |z|e^{i \arg z + 2k\pi i} \quad \text{per } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.29)$$

La (1.29) è detta **rappresentazione esponenziale** di  $z \neq 0$ .

Valgono le uguaglianze  $e^{\pi i} = -1$ ,  $e^{\pi i/2} = i$ ,  $e^{3\pi i/2} = -i$  e  $e^{3\pi i/2} = (-1 + i)/\sqrt{2}$ .

Dalla (1.25) segue che  $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$  e si ottiene facilmente

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

La notazione esponenziale è largamente usata nelle applicazioni anche perché facilita notevolmente le manipolazioni che coinvolgono grandezze trigonometriche. Le formule (1.30) permettono di esprimere seno e coseno come combinazione di esponenziali complessi, e la regola di moltiplicazione (1.26) è particolarmente semplice da usare e da ricordare in confronto alle formule trigonometriche.

Determinare le parti reali e immaginarie di  $(i - 4)/(2i - 3)$ .

$z^n$

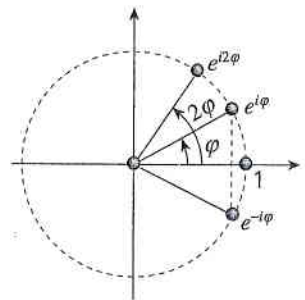


Figura 1.14  $\varphi$ ,  $e^{i\varphi}$ ,  $e^{i2\varphi}$  ed  $e^{-i\varphi}$ .

**ESEMPIO 1.16**

**ESERCIZIO 1.12**



**ESERCIZIO 1.13**

Determinare le parti reali e immaginarie del complesso coniugato di  $(3 + 2i)/(i - 2)$ .

**ESERCIZIO 1.14**

Dare la rappresentazione esponenziale dei seguenti numeri:

a)  $4 - 4i$ ;

b)  $(\sqrt{3} + i)(2 + 2i)$ ;

c)  $(-1 + i)/(1 - \sqrt{3}i)$ .

**1.4.1 Radici complesse**

L'equazione  $x^2 = -1$  non ha soluzioni reali, ma i numeri complessi  $i$  e  $-i$  sono soluzioni. In generale si ha:

**TEOREMA 1.18**

Sia  $w \in \mathbb{C}$  e sia  $n = 2, 3, \dots$

(i) Se  $w = 0$ , la sola soluzione complessa dell'equazione  $z^n = w$  è  $z = 0$ .

(ii) Se  $w \neq 0$ , l'equazione  $z^n = w$  ha esattamente  $n$  soluzioni complesse distinte, date da:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} e^{i(\arg w + 2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.31)$$

**Dimostrazione**

Se  $w = 0$  il risultato è immediato:  $z^n = 0$  se e solo se  $|z^n| = 0$ , ovvero, per la (1.23), se  $|z| = 0$ . Se invece  $w \neq 0$  si ha, sempre per la (1.23),

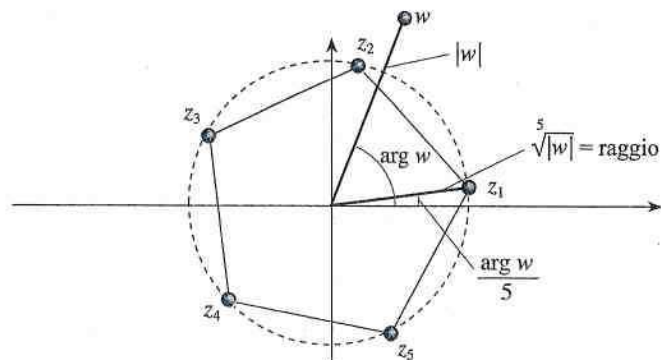
$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |w| \\ \arg(z^n) = \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = |w| \\ n \arg z = \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \arg z = \frac{\arg w}{n} + \frac{2k}{n}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Prendendo  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  troviamo le  $n$  soluzioni distinte date dalla (1.31).

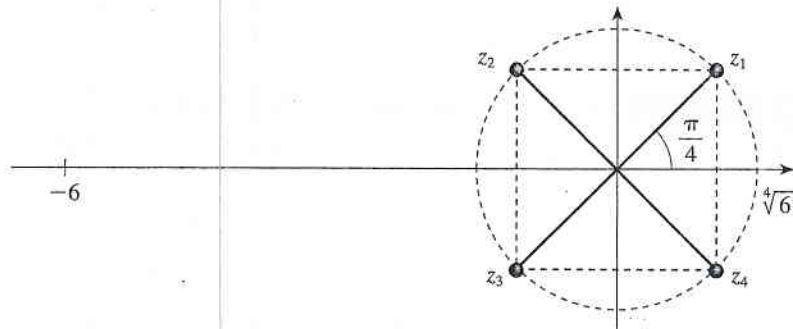
Queste sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione: scelto  $k = k_0 \in \mathbb{Z}$  e  $k = k_0 + n$  si ottengono gli stessi numeri.

Geometricamente, le soluzioni date dalla (1.31) corrispondono a  $n$  punti equidistanti sulla circonferenza di raggio  $\sqrt[n]{|w|}$  e centro 0, ovvero ai vertici di un poligono regolare di  $n$  lati (si veda Figura 1.15).

**Figura 1.15** Soluzioni di  $z^5 = w$ .



L'equazione  $z^4 = -6$  ha quattro soluzioni complesse:  $z = \sqrt[4]{6}(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$  (si veda Figura 1.16).

**ESEMPIO 1.17**

**Figura 1.16** Soluzioni di  $z^4 = -6$ .

Osserviamo che, se  $w \neq 0$ , le due soluzioni,  $z_1$  e  $z_2$ , di  $z^2 = w$  sono opposte:  $z_2 = -z_1$ . A differenza del caso reale,  $\sqrt{w}$  ( $w \in \mathbb{C}$ ) indica *una* delle soluzioni di  $z^2 = w$  (se  $w = 0$  c'è una sola soluzione:  $\sqrt{0} = 0$ ):

$$z^2 = w \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{w}. \quad (1.32)$$

Nel caso reale la distinzione tra le due soluzioni è guidata dall'ordinamento totale " $\leq$ ", che (ci limitiamo ad affermare) non è possibile introdurre in  $\mathbb{C}$ .

Consideriamo l'equazione quadratica

$$az^2 + bz + c = 0,$$

in cui  $a, b$  e  $c$  sono numeri complessi dati e  $a \neq 0$ . Se  $a, b$  e  $c$  sono reali, l'equazione è equivalente a

$$\left(2a\left(z + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 = b^2 - 4ac$$

e, se  $b^2 - 4ac \geq 0$ , le soluzioni sono

$$2a\left(z + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

(si veda l'Appendice 2.A). Analogamente possiamo trattare il caso complesso: se  $a, b, c \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ ,

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.33)$$

in cui  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  indica uno dei numeri complessi  $z_0$  che soddisfano  $z_0^2 = b^2 - 4ac$ .

Un altro modo per esprimere lo stesso risultato è la **scomposizione del polinomio quadratico in fattori lineari complessi**: se  $a, b, c \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ , allora

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) \text{ con } \begin{cases} z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \quad (1.34)$$

Ovviamente se  $b^2 - 4ac = 0$  allora  $z_1 = z_2$  e  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)^2$  (in tal caso  $z_1$  si dice radice di molteplicità 2 del polinomio). Sottolineiamo ancora una volta

Radici di un'equazione quadratica



la differenza con il caso reale: se  $a, b, c \in \mathbb{R}$  il polinomio  $ax^2 + bx + c$  non è sempre scomponibile in *fattori lineari reali*.

Di fatto la (1.34) può essere generalizzata al caso di polinomi di grado  $n$ : enunciamo il seguente risultato (che sarà dimostrato nel Capitolo 18):

**TEOREMA 1.19** Teorema fondamentale dell'algebra

Siano  $n = 2, 3, \dots$  e  $a_k \in \mathbb{C}$  per ogni  $k = 0, 1, \dots, n$ . Se  $a_n \neq 0$  esistono numeri complessi  $z_1, z_2, \dots, z_n$  tali che

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad \text{per } z \in \mathbb{C}. \quad (1.35)$$

La rappresentazione (1.35) è ovviamente unica. I numeri  $z_k$  sono le soluzioni di  $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  e non sono necessariamente  $n$  numeri distinti.

**ESEMPIO 1.18**

Risolviamo l'equazione  $z^6 - 8z^3 - 9 = 0$ . Ponendo  $w = z^3$  si ha  $w^2 - 8w - 9 = (w - 9)(w + 1) = 0$ , ovvero le soluzioni soddisfano  $z^3 = -1$  oppure  $z^3 = 9$ . Quindi, per la (1.31), le sei soluzioni sono  $-1, (1 \pm i\sqrt{3})/2, \sqrt[3]{9}$  e  $\sqrt[3]{9}(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ .

Per risolvere l'equazione  $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$  si ragiona allo stesso modo. Considerando  $z^3$  come incognita, per la (1.33) le soluzioni devono soddisfare

$$z^3 = -1 + i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) \right]$$

oppure

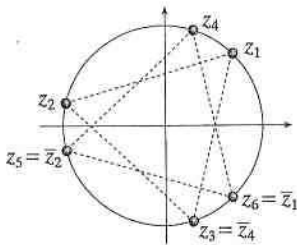
$$z^3 = -1 - i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) \right]$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ . Quindi, per la (1.31), le soluzioni sono

$$z_k = \sqrt[6]{2} (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad k = 1, \dots, 6,$$

dove (si veda Figura 1.17)

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{11\pi}{12}, \quad \varphi_3 = \frac{19\pi}{12}, \quad \varphi_4 = \frac{5\pi}{12}, \quad \varphi_5 = \frac{13\pi}{12}, \quad \varphi_6 = \frac{7\pi}{4}.$$



**Figura 1.17** Le soluzioni di  $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ .

Analizziamo il caso di **polinomio a coefficienti reali**:

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

con

$$a_k \in \mathbb{R} \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n, \quad a_n \neq 0.$$

Sia  $w \in \mathbb{C}$  tale che  $P(w) = 0$  ( $w$  esiste per il teorema fondamentale dell'algebra). Osservando che  $\overline{a_k} = a_k$  perché  $a_k \in \mathbb{R}$ , per le proprietà dei coniugati (1.14) anche il complesso coniugato di  $w$ ,  $\overline{w}$ , è una soluzione di  $P(z) = 0$ :

$$\begin{aligned} P(\overline{w}) &= a_n (\overline{w})^n + a_{n-1} (\overline{w})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{w} + a_0 \\ &= \overline{a_n w^n} + \overline{a_{n-1} w^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 w} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \dots + a_1 w + a_0} = \overline{P(w)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

In particolare, se  $w = \alpha + i\beta$  con  $\beta \neq 0$ , allora  $\overline{w} = \alpha - i\beta$  e la scomposizione (1.35) contiene i fattori

$$(z - w)(z - \overline{w}) = (z - \alpha - i\beta)(z - \alpha + i\beta) = (z - \alpha)^2 + \beta^2. \quad (1.36)$$

Quindi, preso  $z = x \in \mathbb{R}$ , dal teorema fondamentale dell'algebra si deduce il seguente risultato sulla **scomposizione di polinomi reali in fattori lineari e quadratici reali**:

**COROLLARIO 1.20** Scomposizione di polinomi reali

Siano  $n = 2, 3, \dots$  e  $a_k \in \mathbb{R}$  per ogni  $k = 0, 1, \dots, n$ . Se  $a_n \neq 0$  esistono  $m \in \mathbb{N}$  con  $2m \leq n$  e numeri reali  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  ( $\beta_k \neq 0$ ) e  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2m}$  tali che per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \\ &= a_n \left( (x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2 \right) \cdots \left( (x - \alpha_m)^2 + \beta_m^2 \right) (x - x_1) \cdots (x - x_{n-2m}). \end{aligned}$$

In particolare, se  $p(x)$  ha grado dispari allora l'equazione  $p(x) = 0$  ha almeno una soluzione reale.

Per trovare la scomposizione reale del polinomio  $z^4 + 16$  si determinano prima le soluzioni complesse di  $z^4 + 16 = 0$ :

$$z^4 = -16 = 16e^{-\pi i + 2k\pi i} \Leftrightarrow z = 2e^{-\pi i/4 + k\pi i/2} \Leftrightarrow z = (\pm 1 \pm i)\sqrt{2},$$

ovvero per ogni  $z \in \mathbb{C}$

$$z^4 + 16 = (z - (1+i)\sqrt{2})(z - (-1+i)\sqrt{2})(z - (-1-i)\sqrt{2})(z - (1-i)\sqrt{2}).$$

Essendo  $(1-i)\sqrt{2}$  il complesso coniugato di  $(1+i)\sqrt{2}$  risulta

$$(z - (1+i)\sqrt{2})(z - (1-i)\sqrt{2}) = \left( (z - \sqrt{2})^2 + 2 \right) = z^2 - 2\sqrt{2}z + 4.$$

Analogamente

$$(z - (-1+i)\sqrt{2})(z - (-1-i)\sqrt{2}) = z^2 + 2\sqrt{2}z + 4,$$

quindi, scegliendo  $z = x \in \mathbb{R}$ , risulta

$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che, in questo caso particolarmente semplice, si sarebbe potuti giungere alla stessa scomposizione procedendo come segue:

$$\begin{aligned} x^4 + 16 &= x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4). \end{aligned}$$

**ESEMPIO 1.19**

Torniamo all'Esempio 1.18. Nel primo caso si ha immediatamente

$$z^6 - 8z^3 - 9 = (z^3 + 1)(z^3 - 9) = (z + 1)(z^2 - z + 1)(z - 9^{1/3})(z^2 + 9^{1/3}z + 9^{2/3}).$$

Nel secondo caso applichiamo ripetutamente la (1.36), osservando che (si veda anche Figura 1.17)

$$z_6 = \bar{z}_1, z_3 = \bar{z}_4, z_5 = \bar{z}_2:$$

$$\begin{aligned} z^6 + 2z^3 + 2 &= (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_4)(z - \bar{z}_4)(z - z_2)(z - \bar{z}_2) \\ &= (z^2 - 2^{2/3}z + 2^{1/3}) \left( z^2 - 2^{7/6}z \cos \frac{5\pi}{12} + 2^{1/3} \right) \left( z^2 - 2^{7/6}z \cos \frac{11\pi}{12} + 2^{1/3} \right). \end{aligned}$$

**ESEMPIO 1.20**

**ESERCIZIO 1.15**

Risolvere le seguenti equazioni:

a)  $iz^2 + (1-i)z + 1 = 0$ ;      b)  $z^5 + 9\sqrt{3} = 0$ ;      c)  $3z^4 + 6z^2 - 1 = 0$ .

**ESERCIZIO 1.16**

Determinare la scomposizione reale e complessa dei seguenti polinomi:

a)  $z^5 + 32$ ;      b)  $2z^4 + 10z^2 + 8$ .

**Guida**

Il principio di induzione è utilizzato per: successioni ricorsive (Paragrafo 4.5, dalle quali comunque il testo non dipende), derivate successive (Paragrafo 7.8), polinomi di Taylor e Teorema di Peano (Paragrafo 7.11). La disuguaglianza di Bernoulli è utilizzata per i limiti notevoli (Paragrafi 3.6 e 4.2). La disuguaglianza triangolare con  $m$  addendi è utilizzata spesso (soprattutto nelle dimostrazioni riguardanti l'integrazione) a partire dal Paragrafo 4.9.1 (criterio di convergenza assoluta per le serie). L'Esercizio 1.17a è richiamato nell'Esempio 8.2 (area della parabola).

**1.5 Principio di induzione**

Utilizzeremo in varie circostanze il seguente Principio:

**PRINCIPIO DI INDUZIONE**

Sia  $n_0 \in \mathbb{Z}$  e sia  $\mathcal{P}_n$  un predicato  $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ . Se

(i)  $\mathcal{P}_{n_0}$  è vero,

(ii) “ $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0: \mathcal{P}_{n_0}, \mathcal{P}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{P}_n$  sono veri” (ipotesi di induzione)  $\Rightarrow$  “ $\mathcal{P}_{n+1}$  è vero”,

allora

$$\mathcal{P}_n \text{ è vero } \quad \forall n \geq n_0.$$

In altre parole, se (i) e (ii) sono verificate, allora:

(per la (i))  $\mathcal{P}_{n_0}$  è vero  $\Rightarrow$  (per la (ii) con  $n = n_0$ )  $\mathcal{P}_{n_0+1}$  è vero  $\Rightarrow$  (per la (ii) con  $n = n_0 + 1$ )  $\mathcal{P}_{n_0+2}$  è vero  $\Rightarrow$  (per la (ii) con  $n = n_0 + 2$ )  $\mathcal{P}_{n_0+3}$  è vero, ecc.

Come primo esempio di utilizzo del Principio di induzione, proviamo una disuguaglianza nota come **disuguaglianza di Bernoulli**:

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad \forall h \in (-1, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.37)$$

**Dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli**

Si definisce per ogni  $n \in \mathbb{N}$  l'enunciato

$$\mathcal{P}_n : “\forall h \in \mathbb{R}, h > -1 : (1+h)^n \geq 1+nh”$$

e si utilizza il principio di induzione per dimostrare che  $\mathcal{P}_n$  è vero per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Passo 1.** Si deve verificare che  $\mathcal{P}_0$  è vero, essendo:

$$\mathcal{P}_0 : “\forall h > -1 \quad (1+h)^0 \geq 1+0 \cdot h”.$$

Ovviamente

$$(1+h)^0 \geq 1+0 \cdot h \quad \forall h > -1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 1 \quad \forall h > -1,$$

quindi  $\mathcal{P}_0$  è vero.

**Passo 2.** Sia  $n \in \mathbb{N}$  e supponiamo che  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$  siano veri. Si deve quindi dimostrare che da questa ipotesi segue che  $\mathcal{P}_{n+1}$  è vero; cioè bisogna provare che

$$\forall h > -1 : (1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)h.$$

Essendo  $\mathcal{P}_n$  vero, mettiamo in evidenza  $(1+h)^n$ :

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h)$$

poiché, per l'ipotesi di induzione,

$$(1+h)^n \geq 1+nh \quad \text{e} \quad 1+h > 0 \quad (h > -1).$$

Quindi, svolgendo i calcoli si ha:



$$(1+h)^{n+1} \geq (1+nh)(1+h) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h,$$

cioè anche la (ii) del principio di induzione è soddisfatta e la disuguaglianza di Bernoulli risulta dimostrata.

Come ulteriore esempio di applicazione del Principio di induzione, generalizziamo la disuguaglianza triangolare al caso di  $n$  numeri reali  $x_1, \dots, x_n$ , con  $n \geq 2$ :

$$|x_1 + \dots + x_n| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = |x_1| + \dots + |x_n|. \quad (1.38)$$

Qui abbiamo utilizzato la seguente notazione: dati i numeri interi  $m, n$  (con  $m \leq n$ ) e i numeri reali  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ , si pone

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

### Dimostrazione della (1.38)

Si definisce per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , l'enunciato

$$\mathcal{P}_n : \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Verifichiamo le ipotesi (i) e (ii) del Principio di induzione con  $n_0 = 2$ :

**Passo 1.**  $\mathcal{P}_2$  è vero poiché corrisponde alla disuguaglianza triangolare (1.8) che abbiamo già dimostrato.

**Passo 2.** Sia  $n \geq 2$ , supponiamo che  $\mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$  siano veri, e dimostriamo che  $\mathcal{P}_{n+1}$  è vero. Infatti

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} x_k \right| &= \left| \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) + x_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| + |x_{n+1}| \quad (\text{per } \mathcal{P}_2, \text{ ovvero per la (1.8)}) \\ &\leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k| \right) + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k| \quad (\text{per } \mathcal{P}_n), \end{aligned}$$

quindi  $\mathcal{P}_{n+1}$  è vera. Poiché (i) e (ii) del Principio di induzione sono soddisfatte,  $\mathcal{P}_n$  è vera per ogni  $n \geq 2$ .

Utilizzare il principio di induzione per dimostrare:

- a)  $\forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ;      c)  $\forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ;
- b)  $\forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$ ;      d)  $\forall n \in \mathbb{N} : n < 10^n$ ;
- e)  $\forall n \geq 1, \forall a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1 : (1-a)^n < \frac{1}{1+na}$ .

### ESERCIZIO 1.17

# Appendice 1.A

## Grandezze trigonometriche

Sia  $\pi$  l'area del cerchio unitario (di raggio 1). Come è noto allo studente,  $\pi$  è anche la lunghezza della semicirconferenza unitaria (si vedano i Capitoli 8 e 12 per le definizioni analitiche di area e lunghezza). Per definizione di radiante,  $x \in [0, 2\pi)$  si dice ampiezza dell'angolo  $AOP$ , indicato nella Figura 1.A.1, se  $x$  è la lunghezza dell'arco  $AP$  (ovvero l'area del settore circolare  $OAP$  è  $x/2$ ). Per ogni  $x \in [0, 2\pi)$  si definiscono  $\cos x$  e  $\sin x$  (coseno e seno di  $x$ ) le coordinate del punto  $P$ :

$$P = (\cos x, \sin x).$$

Si noti che quando  $x = 2\pi$ , il punto  $P$  è  $(1, 0)$  e perciò si pone  $\cos(2\pi) = \cos 0 = 1$  e  $\sin(2\pi) = \sin 0 = 0$ . Più in generale, si definisce

$$\begin{cases} \cos(x + 2k\pi) = \cos x & \forall x \in [0, 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin(x + 2k\pi) = \sin x & \forall x \in [0, 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

in tal modo  $\cos x$  e  $\sin x$  risultano definiti per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Si definisce **tangente di  $x$**  il numero:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

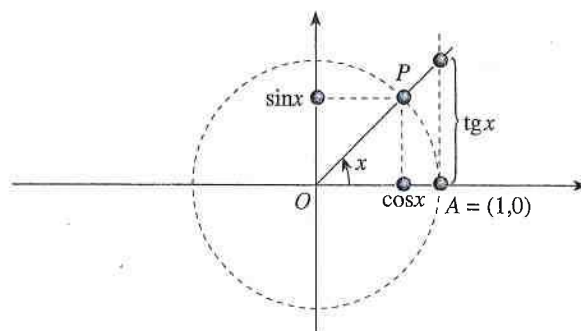
(si noti che i valori  $\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , sono le soluzioni di  $\cos x = 0$ ).

Elenchiamo alcuni dei valori tipici di seno, coseno e tangente:

$x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0	0	1	0
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	$\nexists$

Elenchiamo alcune delle proprietà, ben note allo studente, di seno, coseno e tangente; si intende che  $x, y \in \mathbb{R}$  e che, ove compare  $\operatorname{tg} \theta$ ,  $\theta \notin \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Figura 1.A.1** Circonferenza trigonometrica.



**PROPRIETÀ**

<b>1) Limitazioni</b>	$ \sin x  \leq 1$ $ \cos x  \leq 1$
<b>2) Teorema di Pitagora</b>	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
<b>3) Archi opposti</b>	$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
<b>4) Archi complementari</b>	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1/\operatorname{tg} x$
<b>5) Archi supplementari</b>	$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$
<b>6) Formule di duplicazione</b>	$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} 1 - 2 \sin^2 x \\ 2 \cos^2 x - 1 \end{cases}$ $\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
<b>7) Formule parametriche</b>	$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}$
<b>8) Formule di addizione</b>	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$
<b>9) Formule di prostaferesi</b>	$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$
<b>10) Formule di Werner</b>	$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x+y) + \sin(x-y))$

Si osservi che dalle proprietà precedenti segue che

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Altre grandezze trigonometriche che si usano nelle applicazioni sono **cotangente**, **secante** e **cosecante**:

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{csc} x := \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\sec x := \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



# Appendice 1.B

## Coefficienti binomiali

Introduciamo due quantità,  $n!$  e  $\binom{n}{k}$ , di particolare rilevanza in numerose applicazioni, quali, per esempio, il *calcolo combinatorio*.

### DEFINIZIONE 1.B.1

Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Si dice **fattoriale** di  $n$  (o  **$n$ -fattoriale**) e si indica con  $n!$ , il numero così definito:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

La definizione potrebbe essere riscritta nel seguente modo:

$$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n-1)! \quad \text{se } n \geq 1.$$

Per esempio  $3! = 6$ ,  $4! = 24$ ,  $5! = 120$ ,  $6! = 720$ ,  $7! = 5040$ ,  $8! = 40320$ ,  $9! = 362880$ ,  $10! = 3628800$  ecc.

### DEFINIZIONE 1.B.2

Siano  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , si dice **coefficiente binomiale** di indici  $n$  e  $k$  il numero

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

I coefficienti binomiali soddisfano le seguenti proprietà:

- a)  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ;
- b)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ;
- c)  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

Infatti risulta

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

e

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

La proprietà c) permette di calcolare i coefficienti binomiali per mezzo del Triangolo di Pascal o di Tartaglia: in cima al triangolo si pone  $\binom{0}{0} = 1$  e sui lati  $\binom{n}{0} = 1$  e  $\binom{n}{n} = 1$  con  $n \geq 1$ , allora applicando c) si ottengono le Figure 1.B.1a e 1.B.1b.





## FILO ROSSO

### La pallina

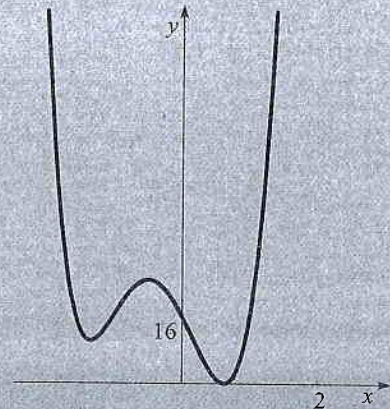
Le funzioni ci permettono di descrivere fenomeni fisici, chimici, biologici ed economici. Per esempio, sia  $x(t)$  la posizione al tempo  $t$  di una particella (talmente piccola che possa essere pensata come un punto) che si muove nello spazio durante un certo intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ . Allora  $x$  definisce una funzione da  $[t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^3$  e la sua immagine sarà una "curva" in  $\mathbb{R}^3$ . Oppure sia  $T(x_1, x_2, x_3, t)$  la temperatura nel punto  $(x_1, x_2, x_3)$  e al tempo  $t$  di un fluido contenuto in un contenitore  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  durante un certo intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ . Allora  $T$  definisce una funzione da  $\Omega \times [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R}^4$  in  $\mathbb{R}$ . Infine, il valore  $V(t)$  di un titolo al tempo  $t$  definisce una funzione da un certo intervallo temporale  $[t_0, t_1]$  in  $\mathbb{R}$ : nella figura seguente è indicato l'andamento dell'indice MIBTEL della Borsa di Milano dal 2000 al 2006.



Molti problemi applicativi possono essere ricondotti allo studio di qualche funzione  $f: X \rightarrow Y$ . Per esempio, è importante sapere:

- (i) per quali  $y \in Y$  esiste una soluzione dell'equazione  $y = f(x)$  (l'immagine di  $f$ )?
- (ii) se tale soluzione esiste per ogni  $y \in Y$ , essa è unica (l'iniettività di  $f$ )?
- (iii) se  $Y \subseteq \mathbb{R}$ , esistono e quali sono i valori più piccolo e più grande che  $f$  assume (il minimo e il massimo)?

Un ulteriore esempio che si incontra spesso è quello di "funzione potenziale".



Molto genericamente, si tratta dell'energia che un dato sistema può trasformare in lavoro. Per farsi un'idea intuitiva, si pensi al grafico di una funzione potenziale  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come a una guida su cui può scorrere una pallina: più alta la quota, maggiore l'energia che può (ma non necessariamente sarà) trasformata in movimento. Il minimo di  $f$ , se esiste, corrisponde certamente a una posizione di equilibrio (non necessariamente la sola), un *punto di minimo*. Quindi, data una specifica funzione potenziale  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , per esempio

$$f(x) = x^6 + ((2x + 1)^2 - 5)^2,$$

esiste il minimo di  $f$ ? Se sì, qual è (approssimativamente) la sua posizione? Esistono altre posizioni di equilibrio della pallina? A queste domande cercheremo di rispondere nei prossimi capitoli. Per ora limitiamoci a osservare che  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (essendo la somma di due quadrati che si annullano nello stesso punto; nella figura questa proprietà non è visibile a causa della scala utilizzata) ovvero  $f$  è inferiormente limitata,  $f(0) = 16$  (quindi il minimo di  $f$ , se esiste, è più piccolo di 16) e  $f(x) \geq x^6 \geq 64$  se  $|x| \geq 2$  (quindi il minimo di  $f$ , se esiste, è assunto per  $|x| < 2$ ).

Lo scopo di questo capitolo è introdurre i principali concetti che si utilizzano per descrivere le funzioni, quali appunto *immagine*, *iniettività*, *minimo*, *punto di minimo* ecc..



## 2.1 Funzione, dominio, immagine, grafico

### DEFINIZIONE 2.1

Siano  $X, Y$  insiemi non vuoti. Una **funzione**  $f$  da  $X$  in  $Y$  è una corrispondenza univoca da  $X$  in  $Y$ , ovvero associa a ogni  $x \in X$  uno e uno solo elemento  $y \in Y$ . Tale elemento è detto **valore della funzione** in  $x$  e si scrive  $y = f(x)$ .

L'insieme  $X$  si dice **dominio** della funzione e si scrive

$$X = \text{dom } f,$$

mentre  $Y$  si dice **codominio**. Il **grafico** di  $f$  è l'insieme

$$\text{graf } f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y \quad (2.1)$$

e l'**immagine** di  $f$  è l'insieme dei valori della funzione:

$$\text{im } f = f(X) := \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y. \quad (2.2)$$

In altre parole

$$\text{im } f = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ tale che } y = f(x)\}.$$

Sottolineiamo che

$$(x, y_1) \in \text{graf } f \quad \text{e} \quad (x, y_2) \in \text{graf } f \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2. \quad (2.3)$$

Il diagramma in Figura 2.1 visualizza una funzione  $f$  che associa a un (generico) punto  $x$  del suo dominio il valore  $f(x)$ .

Essendo  $\text{graf } f$  sottoinsieme del prodotto cartesiano  $X \times Y$ , è naturale, nel caso  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ , ovvero se  $f$  è una funzione reale di una variabile reale, rappresentare il grafico di  $f$  nel piano reale (esempi di grafici sono riportati in Figura 2.2a e 2.2b). Per convenzione, l'asse orizzontale è quello di riferimento per il dominio.

Tale rappresentazione geometrica aiuta a comprendere meglio il significato della (2.3): il grafico di una funzione reale di una variabile reale non può avere più di un'intersezione con una retta verticale. Per esempio, il sottoinsieme di  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  rappresentato nella Figura 2.3b può essere considerato il grafico di una funzione da  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ . Invece il sottoinsieme rappresentato nella Figura 2.3a non lo è.

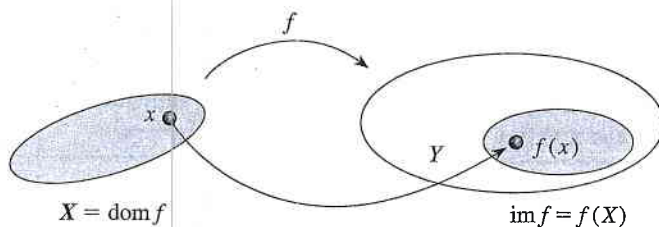


Figura 2.1 Diagramma rappresentante una funzione.

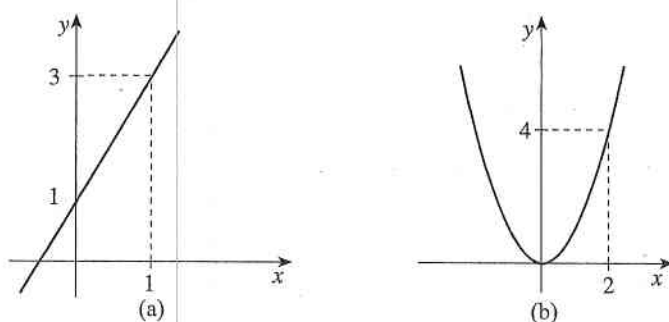
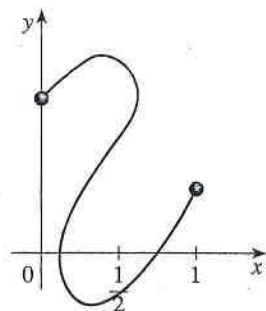
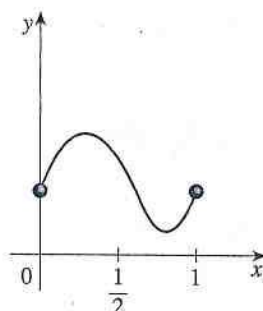


Figura 2.2 Grafici nel piano reale di  $f(x) = 1 + 2x$  (a) e di  $f(x) = x^2$  (b).

**Figura 2.3** Sottoinsieme di  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  che non è grafico di una funzione (a); sottoinsieme di  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  che è grafico di una funzione (b).



(a)



(b)

Un modo preciso per indicare una funzione da  $X$  in  $Y$  è il seguente:

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto y,$$

oppure

$$\begin{cases} f : X \rightarrow Y \\ f(x) = y. \end{cases}$$

Spesso si scrive anche

$$f : X \ni x \mapsto y$$

oppure

$$f(x) = y \quad \forall x \in X,$$

omettendo di specificare il codominio  $Y$ .

### ESEMPIO 2.1

Sia

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 \quad (\text{ovvero: } f(x) = x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}).$$

Allora  $\text{im } f = \{x^4 : x \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$ . È ovvio, infatti, che l'insieme dei valori effettivamente assunti dalla funzione è sottoinsieme di  $[0, +\infty)$ ; d'altra parte, per il Teorema 1.11 per ogni  $y \in [0, +\infty)$  esiste almeno un  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $x^4 = y$ .

### ESEMPIO 2.2

Si vuole determinare l'immagine della funzione

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \log_2(x^4 + 2).$$

Per l'Esempio 2.1, l'immagine della funzione  $x \mapsto x^4$  è  $[0, +\infty)$ . Ne segue che l'immagine della funzione  $x \mapsto x^4 + 2$  è  $[2, +\infty)$ . Per il Teorema 1.13, per ogni  $y \in [2, +\infty)$  esiste un unico  $z \in \mathbb{R}$  tale che  $y = 2^z$ , e di fatto è  $z = \log_2 y$ ; poiché  $y \geq 2$ , dalla proprietà (8) dei logaritmi segue che  $z \in [\log_2 2, +\infty)$ . Perciò  $\text{im } f = [1, +\infty)$ .

### Dominio naturale

Spesso non si specifica neanche il dominio della funzione. Per esempio, se dal contesto è chiaro che si stanno considerando funzioni di una sola variabile reale,  $f(x)$  indica la funzione definita sul suo **dominio naturale**, ovvero il più grande insieme di numeri reali  $x$  per i quali la scrittura  $f(x)$  ha senso. Anche il dominio naturale si indica con  $\text{dom } f$ .

### ESEMPIO 2.3

- La funzione  $f(x) = x^2 + 1$  ha come dominio naturale  $\mathbb{R}$ .
- La funzione  $f(x) = \log_2(x + 1)$  ha come dominio naturale  $(-1, +\infty)$ ; infatti la scrittura ha senso se l'argomento del logaritmo è positivo:  $x + 1 > 0$  se e solo se  $x > -1$ .
- La funzione  $f(x) = \sqrt{x + 1}$  ha come dominio naturale  $[-1, +\infty)$ ; infatti la scrittura ha senso se l'argomento della radice quadrata è non negativo:  $x + 1 \geq 0$  se e solo se  $x \geq -1$ .

Una **funzione razionale** è una funzione definita come quoziente di due polinomi (di grado  $n$  ed  $m$ ):

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}, \quad a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}, \quad (a_n, b_m \neq 0).$$

Il dominio naturale di  $f$  è  $\mathbb{R}$  con l'esclusione dei punti in cui si annulla il denominatore:

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \neq 0\}.$$

Si vuole determinare il dominio naturale della funzione di una variabile reale

$$f(x) = \log_2 \left( \frac{|x-3|}{x^2 - 3x + 2} \right).$$

Affinché l'espressione abbia senso, è necessario che non vi siano divisioni per zero e che il numero di cui si calcola il logaritmo sia positivo: quindi

$$\text{dom } f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ e } \frac{|x-3|}{x^2 - 3x + 2} > 0 \right\}.$$

Risolvendo le due disuguaglianze, si ottiene  $\text{dom } f = (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$  (lo studente controlli).

Negli Esempi 2.3-2.5 si è utilizzato, in modo implicito ed "empirico", il concetto di **funzione composta**, ovvero la possibilità di interpretare una funzione come "composta" da funzioni più "semplici". Si tornerà estensivamente su questo fondamentale concetto a partire dal Paragrafo 2.5

Elenchiamo alcuni tipi di funzione che sono di particolare importanza:

1) Dato un insieme  $X$ , si dice **identità di  $X$  in sé** la funzione

$$I_X : X \rightarrow X, \quad I_X(x) = x.$$

2) Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $A \subseteq X$ . Si dice **restrizione di  $f$  a  $A$**  la funzione

$$f|_A : A \rightarrow Y, \quad f|_A(x) = f(x).$$

Per esempio, la restrizione della funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  a  $[0, +\infty)$  è la funzione

$$g(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0.$$

3) Si dice **proiezione canonica** di  $X \times Y$  su  $X$  (rispettivamente  $Y$ ) la funzione

$$\begin{cases} f : X \times Y \rightarrow X & \text{(rispettivamente } Y) \\ f(x, y) = x & \text{(rispettivamente } y). \end{cases}$$

È utile osservare che la proiezione canonica del grafico di una funzione  $f : X \rightarrow Y$  su  $X$  coincide con il dominio di  $f$ , mentre la proiezione su  $Y$  coincide con l'immagine di  $f$ . Questo legame permette di risalire a dominio e immagine di una funzione dato il suo grafico: ad esempio, se  $f : \text{dom } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è quella in Figura 2.4, allora  $\text{dom } f = [0, 1] \cup [2, 3]$  e  $\text{im } f = [1, 4]$ .

Di particolare importanza sono le funzioni di dominio  $\mathbb{N}$ .

#### DEFINIZIONE 2.2

Si dice **successione** una funzione il cui dominio è  $\mathbb{N}$ . In particolare, una funzione da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$  si dice **successione reale**:

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(n) = a_n. \end{cases}$$

#### ESEMPIO 2.4

Funzioni razionali

#### ESEMPIO 2.5

#### Proiezioni del grafico

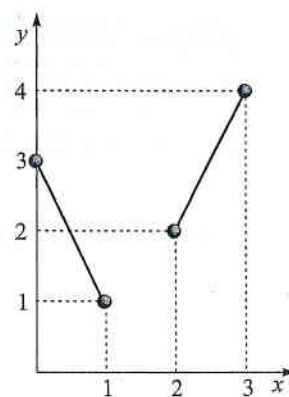


Figura 2.4



Si usano le notazioni

$$n \mapsto a_n; \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}; \{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}; \{a_n\};$$

$a_n$  si dice **termine** della successione e  $n$  è l'**indice del termine**  $a_n$ .

### ESEMPIO 2.6

Sia  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la successione con termini

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Il suo grafico è

$$\left\{ \left( n, \frac{n-1}{n+1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$$

del quale sono riportati alcuni punti in Figura 2.5. Dal grafico si evince che  $a_{n+1} > a_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Tale proprietà può essere dedotta analiticamente osservando che:

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{(n+1)-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Infatti

$$a_{n+1} = 1 - \frac{2}{(n+1)+1} = 1 - \frac{2}{n+2} > 1 - \frac{2}{n+1} = a_n.$$

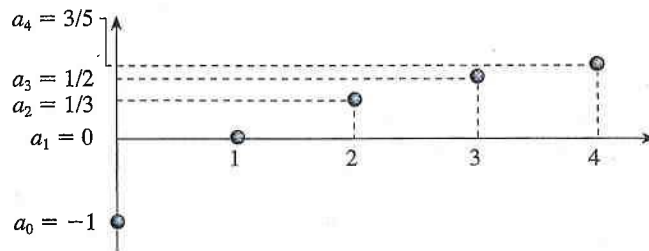


Figura 2.5 Grafico della

successione

$$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Spesso le successioni sono definite da un certo intero  $n_0$  in poi, cioè il dominio della successione è l'insieme

$$[n_0, +\infty) \cap \mathbb{Z} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}.$$

Per esempio  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  è definita per ogni intero  $n \geq 1$  e  $\{\sqrt[4]{n^2-18}\}$  per ogni intero  $n \geq 5$ . Dal punto di vista teorico questo non crea problemi particolari e, per semplicità di esposizione, supporremo nei teoremi riguardanti le successioni che  $\{a_n\}$  sia definita per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

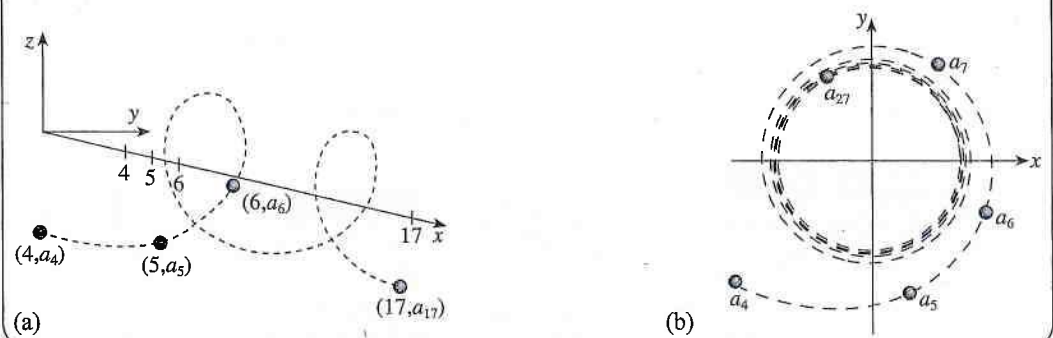
### ESEMPIO 2.7

Successione  
a valori  
in  $\mathbb{R}^2$

Figura 2.6 Successione  
a valori in  $\mathbb{R}^2$ : grafico  
(a); immagine (b).

$$\left\{ \sqrt{\frac{n}{n-3}} \cos n, \sqrt{\frac{n}{n-3}} \sin n \right\}_{n=4,5,6,\dots}$$

è una successione a valori in  $\mathbb{R}^2$ . In Figura 2.6a sono riportati alcuni punti del grafico e in Figura 2.6b alcuni punti dell'immagine. Sottolineiamo che il grafico è sottoinsieme di  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^2 (\subset \mathbb{R}^3)$  mentre l'immagine è sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ .



Determinare l'immagine delle seguenti funzioni  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ :

- |   |  |
|---|--|
| a) $X = \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ ;                                   | f) $X = \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ (al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ ); |
| b) $X = \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$ ;                                   | g) $X = \mathbb{R}, f(x) =  x $ ;  |
| c) $X = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ,<br>$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ; | h) $X = (0, +\infty), f(x) = \log_3 x$ ;                                   |
| d) $X = [-2, 2], f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ;                               | i) $X = \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ ;  |
| e) $X = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$ ;                         | j) $X = \mathbb{R}, f(x) = 2^{-x}$ ;                                       |
|   | k) $X = \mathbb{R}, f(x) = 4 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ .               |

**ESERCIZIO 2.1**

Disegnare il grafico delle successioni  $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{(-1)^n n\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{(-1)^n + (n/2)^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**ESERCIZIO 2.2**

Determinare il dominio (inteso come dominio naturale per funzioni di una variabile reale) delle seguenti funzioni:

- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \sqrt{ x+1  - 3}$ ;              | f) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$ ; |
| b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 27}$ ;            | g) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 4}$ ; |
| c) $f(x) = \log_2 x + x$ ;                  | h) $f(x) = \log_2(x^2)$ ;            |
| d) $f(x) = \log_3(1 - x) + \sqrt{2x - 1}$ ; | i) $f(x) = 2\log_2 x$ .              |
| e) $f(x) = \sin(2^x)$ ;                     |                                      |

**ESERCIZIO 2.3**

## 2.2 Funzioni reali di una variabile reale

Le funzioni il cui dominio e codominio sono sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  costituiscono una sottoclasse fondamentale al cui studio sono dedicati i capitoli dal 3 al 9. La peculiarità essenziale delle funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  è che sia il dominio sia il codominio sono insiemi ordinati. Ciò consente di introdurre in modo elementare alcune proprietà qualitative quali monotonia, simmetrie, periodicità.

### 2.2.1 Funzioni monotone

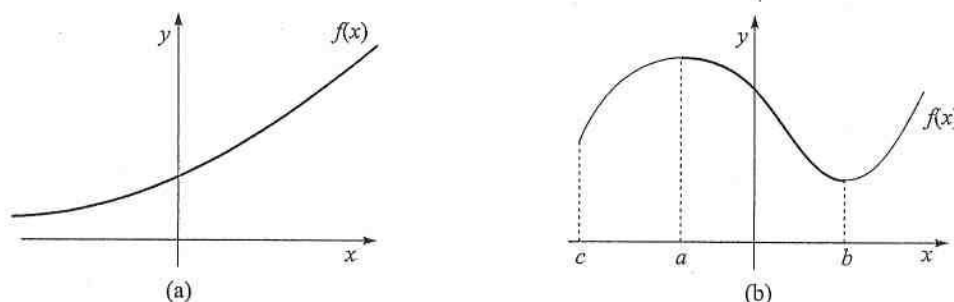
#### DEFINIZIONE 2.3

Siano  $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice:

- (i) **crescente** in  $A$  se per ogni  $x_1, x_2 \in A$  tali che  $x_1 > x_2$ , si ha  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ;
- (ii) **strettamente crescente** in  $A$  se per ogni  $x_1, x_2 \in A$  tali che  $x_1 > x_2$ , si ha  $f(x_1) > f(x_2)$ ;
- (iii) **decescente** in  $A$  se per ogni  $x_1, x_2 \in A$  tali che  $x_1 > x_2$ , si ha  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ;
- (iv) **strettamente decrescente** in  $A$  se per ogni  $x_1, x_2 \in A$  tali che  $x_1 > x_2$ , si ha  $f(x_1) < f(x_2)$ .

La  $f$  si dice **monotona** in  $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$  se  $f$  è crescente o decrescente in  $A$ ;  $f$  si dice **strettamente monotona** in  $A$  se  $f$  è strettamente crescente o strettamente decrescente in  $A$ .

**Figura 2.7**  $f$  strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  (a);  $f$  decrescente in  $A = [a, b]$  (b).

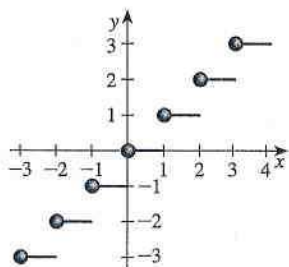


La Figura 2.7a mostra l'esempio di una funzione strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ . Si osservi il ruolo essenziale che gioca l'insieme  $A$  nella definizione: una funzione può essere decrescente in un certo insieme  $A_1$  e crescente in un certo altro insieme  $A_2$ . Ad esempio, la funzione il cui grafico è mostrato in Figura 2.7b è strettamente decrescente in  $[a, b]$  e strettamente crescente in  $[c, a]$ : quindi è monotona in  $[a, b]$  e monotona in  $[c, a]$ , ma *non* è monotona in  $[c, b]$ . Quindi la monotonia di una funzione dipende dall'insieme su cui si osserva.

### ESEMPIO 2.8

Segue dalle proprietà delle potenze che: la funzione  $f(t) = t^3$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ ; la funzione  $g(t) = t^2$  è strettamente crescente in  $[0, +\infty)$  e strettamente decrescente in  $(-\infty, 0]$ .

### ESEMPIO 2.9



**Figura 2.8**

**Figura 2.9** Gradino di Heaviside  $H(x)$  (a). Funzione  $\text{sgn } x$  (b).

La funzione **parte intera**:

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è crescente in  $\mathbb{R}$  ma non strettamente. In Figura 2.8 è stato riportato il grafico di  $[x]$ ; si noti che, per esempio,  $[3] = 3$ ,  $[-3] = -3$ ,  $[3.5] = 3$ ,  $[-3.5] = -4$ .

Anche il **gradino di Heaviside** (si veda Figura 2.9a), ovvero la funzione

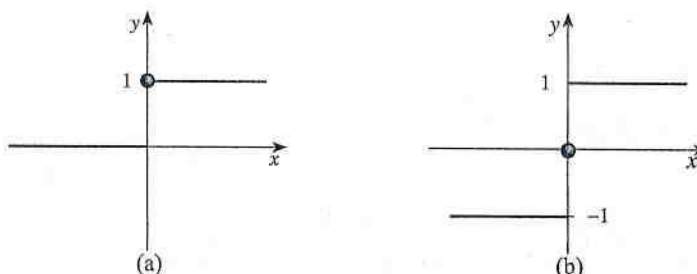
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e la **funzione segno** (si veda Figura 2.9b)

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

sono crescenti in  $\mathbb{R}$  ma non strettamente.

Le funzioni qui introdotte sono esempi delle cosiddette **funzioni costanti a tratti**.<sup>(1)</sup>



È utile osservare che talvolta le proprietà di monotonia si conservano rispetto alle operazioni elementari. Ad esempio:

<sup>(1)</sup> Una possibile definizione di funzione costante a tratti  $f$  da  $X \subseteq \mathbb{R}$  in  $Y$  è la seguente: per ogni  $M > 0$  l'intervallo  $[-M, M]$  è l'unione di un numero finito di intervalli  $I_n$  tali che  $f$  è costante su  $I_n \cap X$  per ogni  $n$ .



- (i) la somma di due funzioni (de)crescenti è (de)crescente;  
 (ii) il prodotto di due funzioni (de)crescenti e non negative è (de)crescente.

Tuttavia serve qualche cautela. Per esempio, (ii) è falsa se si elimina l'ipotesi che le funzioni siano non negative: basta prendere  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^3$ .

Dimostrare che la somma di due funzioni decrescenti è decrescente, e spiegare tramite un esempio che la somma di due funzioni monotone non è necessariamente monotona.

## ESERCIZIO 2.4

Dire quali delle seguenti funzioni sono (strettamente) (de)crescenti in  $A$ :

- a)  $f(x) = 4^x + \log_3 x$ ,  $A = \mathbb{R}^+$ ;  
 b)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  
 c)  $f(x) = 2^{-x}/x$ ,  $A = \mathbb{R}^+$ ;  
 d)  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x & \text{se } x \in (1, 3] \end{cases}$ ,  $A = [0, 3]$ ;  
 e)  $f$  come in (d),  $A = [0, 1]$ ;  
 f)  $f$  come in (d),  $A = [0, 1] \cup [2, 3]$ .

## ESERCIZIO 2.5

## 2.2.2 Funzioni simmetriche, funzioni periodiche

Introduciamo ora i concetti di funzione pari, funzione dispari (si vedano le Figure 2.10 e 2.11) e funzione periodica (si veda Figura 2.12).

## DEFINIZIONE 2.4

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

(i) La  $f$  si dice **pari** in  $X$  se

$$-x \in X \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

(ii) La  $f$  si dice **dispari** in  $X$  se

$$-x \in X \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X.$$

(iii) La  $f$  si dice **periodica** in  $X$  se esiste  $P > 0$  tale che

$$\begin{cases} x+P \in X & \forall x \in X \\ f(x+P) = f(x) & \forall x \in X, \end{cases}$$

e in tal caso il numero  $p = \inf\{P > 0 : f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in X\}$  si dice **periodo** di  $f$ .

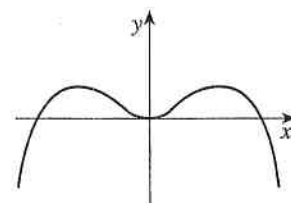


Figura 2.10 Una funzione pari.

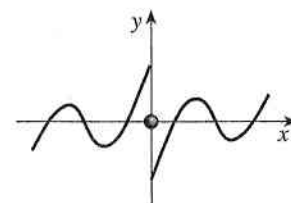


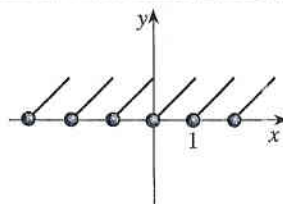
Figura 2.11 Una funzione dispari.

a)  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) è pari e non negativa in  $\mathbb{R}$  se  $n$  è pari, mentre è dispari in  $\mathbb{R}$  se  $n$  è dispari.

b) Le funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$  sono periodiche in  $\mathbb{R}$ , di periodo  $2\pi$ ; la funzione  $\operatorname{tg} x$  è periodica nel suo dominio,  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ , e ha periodo  $\pi$  (si veda anche Figura 2.19). Inoltre  $\sin x$  e  $\operatorname{tg} x$  sono dispari in  $\mathbb{R}$  e  $\cos x$  è pari in  $\mathbb{R}$ .

## ESEMPIO 2.10

La funzione **mantissa**  $f(x) = x - [x]$  per  $x \in \mathbb{R}$ , dove  $[x]$  è la parte intera di  $x$  introdotta nell'Esempio 2.9, è periodica di periodo 1 (si veda Figura 2.12).



## ESEMPIO 2.11

Figura 2.12 La funzione mantissa.

## ESERCIZIO 2.6

Studiare la parità delle seguenti funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = 3x - 4x^5 \quad \forall x \in \mathbb{R};$

d)  $f(x) = \sqrt[3]{5 - x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R};$

b)  $f(x) = 2x^5 - x^3 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R};$

e)  $f(x) = 3^x \quad \forall x \in \mathbb{R};$

c)  $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \forall x \in [-2, 2];$

f)  $f(x) = 3^{(x^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

## ESERCIZIO 2.7

Stabilire quali delle seguenti funzioni sono periodiche nel loro dominio naturale e determinarne l'eventuale periodo:

a)  $\sin^2 x;$

e)  $\sin(2x) - 2 \cos(3x);$

b)  $\sin(x^2);$

f)  $\text{tg}(3x + 1);$

c)  $\cos(3x);$

g)  $\sin(\text{tg}(3x - 1)).$

d)  $\sin(x/3);$

## 2.2.3 Funzioni elementari

Potenze, radici, esponenziali, logaritmi e grandezze trigonometriche possono essere interpretate come funzioni reali di una variabile reale definite nel loro dominio naturale. Tali funzioni, insieme alle funzioni trigonometriche inverse (che saranno introdotte nel Paragrafo 2.6.1 e alle funzioni iperboliche e iperboliche inverse (che saranno introdotte nel Paragrafo 5.1.1) vengono generalmente chiamate *funzioni elementari*. In questo paragrafo se ne descrivono le prime proprietà e se ne visualizza il grafico qualitativo. Si noti tuttavia che tali grafici saranno pienamente giustificabili solo una volta introdotti i principali strumenti del calcolo infinitesimale: *limite*, *continuità* e *derivabilità*. Durante la lettura, lo studente è invitato a verificare in dettaglio ciascuna delle proprietà e la loro corrispondenza con i relativi grafici: ciò sia per comprendere meglio i concetti fin qui esposti, sia per impadronirsi a dovere di proprietà e grafici, che saranno utilizzati moltissimo nel testo (spesso senza richiami espliciti).

**Funzioni lineari e funzioni quadratiche**

Queste funzioni dovrebbero essere ben note allo studente e sono richiamate in Appendice.

**Funzioni potenza**

Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la funzione  $f(x) = x^\alpha$  è detta **funzione potenza**; abbiamo deliberatamente ommesso di specificare il dominio naturale poiché esso dipende, come altre proprietà, dal valore di  $\alpha$ .

Nei casi in cui  $f(x) = x^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{dom } f$  è tutto  $\mathbb{R}$ . Determiniamo l'immagine se  $n \geq 2$  è pari. Poiché  $x^n \geq 0$  per ogni  $x \in \text{dom } f$ , si ha  $\text{im } f \subseteq [0, +\infty)$ ; viceversa (si veda il Teorema 1.11, per ogni  $y \in [0, +\infty)$  esiste  $x \in [0, +\infty)$  tale che  $x^n = y$  (di fatto  $x = y^{1/n}$ ). Perciò  $\text{im } f = [0, +\infty)$ . Per  $n$  dispari, procedendo allo stesso modo si ottiene  $\text{im } f = \mathbb{R}$ . Inoltre, segue dalla proprietà (8) delle potenze che se  $n$  è dispari allora  $f$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ , mentre se  $f$  è pari allora  $f$  è strettamente decrescente in  $(-\infty, 0]$  e strettamente crescente in  $[0, +\infty)$  (ma non è monotona in  $\mathbb{R}$ !). Osserviamo infine che  $f$  è pari se  $n$  è pari, dispari se  $n$  è dispari (questa analogia in effetti motiva la nomenclatura): infatti

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tali proprietà sono visualizzate e riassunte in Figura 2.13.

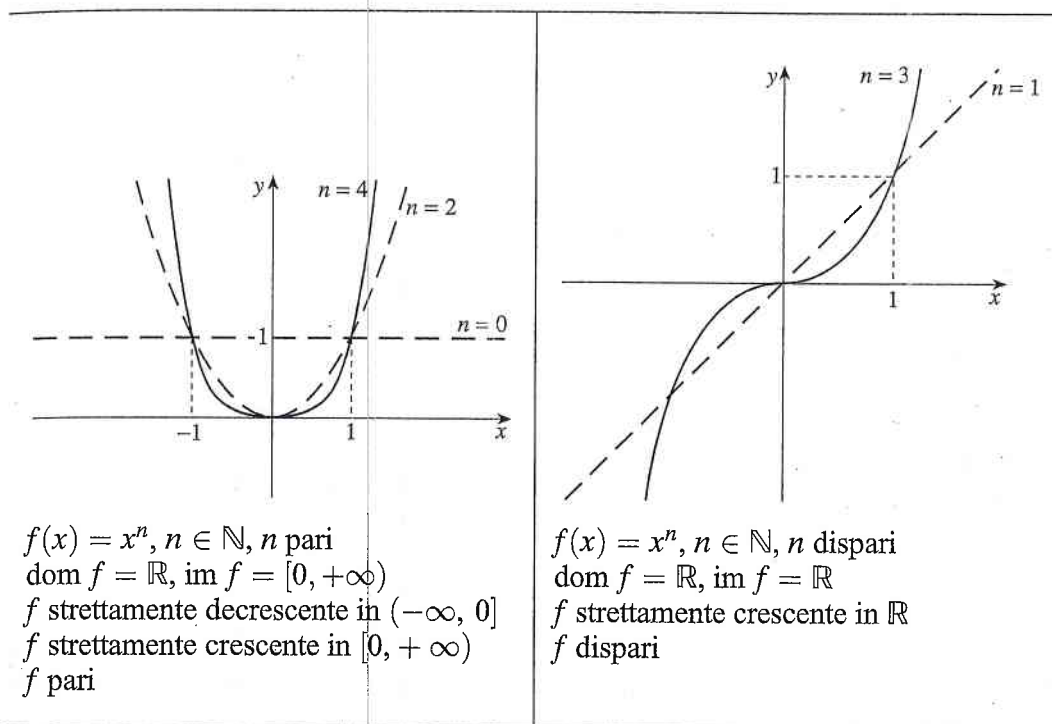


Figura 2.13  $x \mapsto x^n$ ,  
 $n \in \mathbb{N}$ .

Nei casi in cui  $f(x) = x^{-n}$  con  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , si ha  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Immagine, monotonia e simmetria si determinano come sopra. Si osservi in particolare che se  $n$  è dispari allora  $f$  è strettamente decrescente in  $(-\infty, 0)$  ed in  $(0, +\infty)$ , ma non in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ : infatti  $f(-1) = -1 < f(1) = 1$ .

Le proprietà sono visualizzate e riassunte in Figura 2.14.

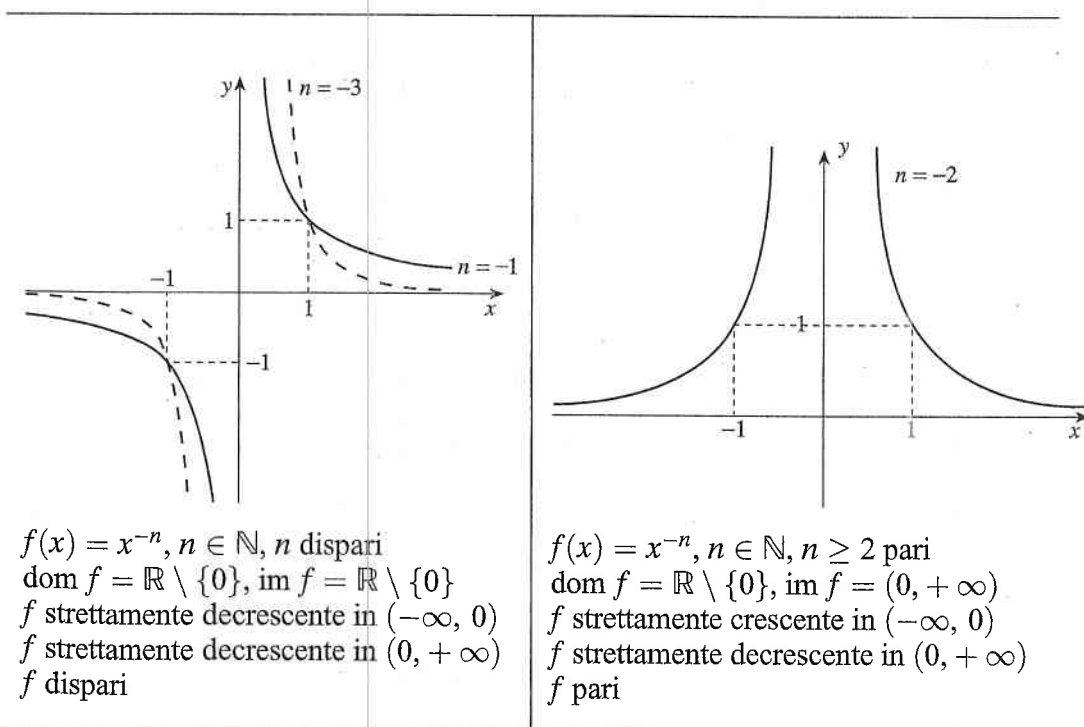


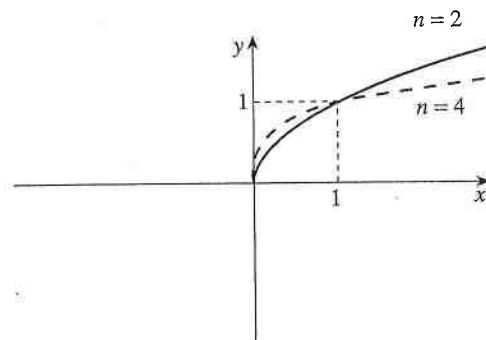
Figura 2.14  $x \mapsto x^{-n}$ ,  
 $n$  intero positivo.

Nei casi in cui  $f(x) = x^{1/n}$  con  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , si ha  $\text{dom } f = [0, +\infty)$  se  $n$  è pari e  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  se  $n$  è dispari. Le proprietà visualizzate e riassunte in Figura 2.15 si ricavano ragionando come sopra.

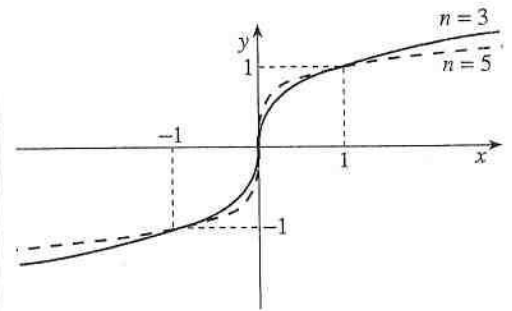


**Figura 2.15**

$x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ ,  
 $n$  intero positivo.

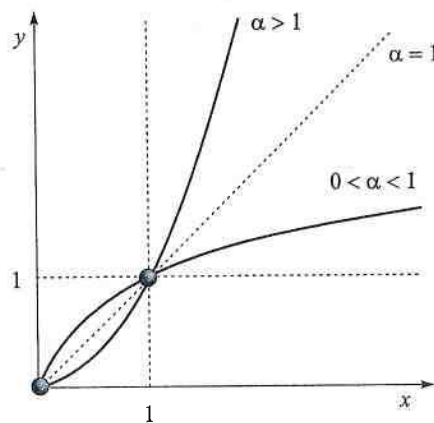


$f(x) = x^{1/n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  pari  
 $\text{dom } f = [0, +\infty)$ ,  $\text{im } f = [0, +\infty)$   
 $f$  strettamente crescente in  $[0, +\infty)$

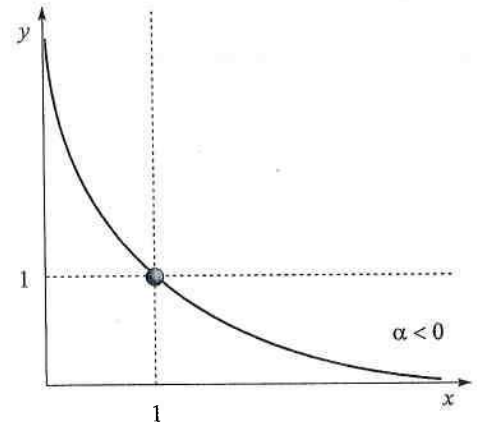


$f(x) = x^{1/n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  dispari  
 $\text{dom } f = \mathbb{R}$ ,  $\text{im } f = \mathbb{R}$   
 $f$  strettamente crescente in  $\mathbb{R}$   
 $f$  dispari

Se infine, in generale,  $f(x) = x^\alpha$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ , allora  $\text{dom } f = [0, +\infty)$  se  $\alpha \geq 0$  e  $\text{dom } f = (0, +\infty)$  se  $\alpha < 0$ . Le proprietà, visualizzate e riassunte in Figura 2.16, si ricavano come sopra:

**Figura 2.16**  $x \mapsto x^\alpha$ ,  
 $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$   
 $\text{dom } f = [0, +\infty)$ ,  $\text{im } f = [0, +\infty)$   
 $f$  strettamente crescente in  $[0, +\infty)$

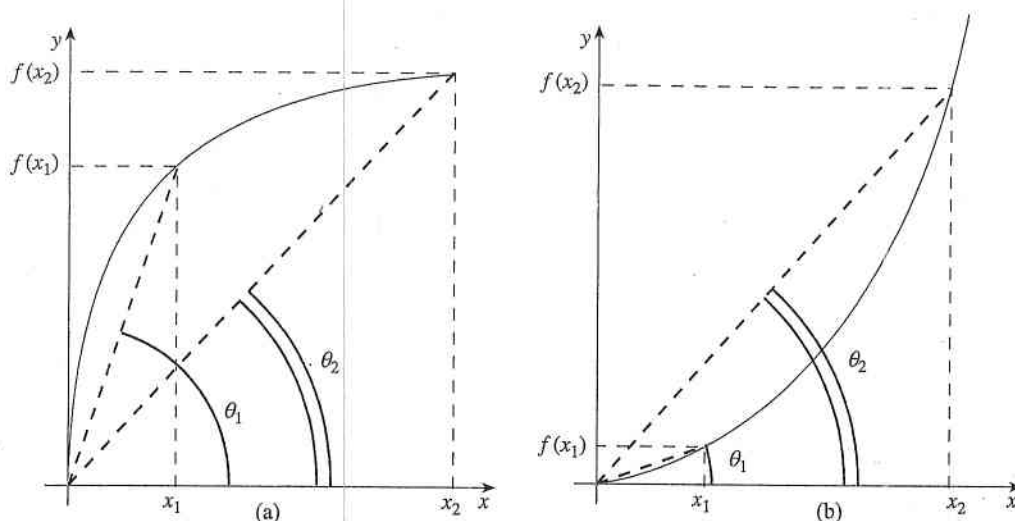


$f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha < 0$   
 $\text{dom } f = (0, +\infty)$ ,  $\text{im } f = (0, +\infty)$   
 $f$  strettamente decrescente in  $(0, +\infty)$

Si noti che, come illustrato in Figura 2.17,

$$\frac{f(x)}{x} = x^{\alpha-1} \text{ è strettamente crescente in } \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \alpha > 1;$$

questo spiega, ricordando il significato geometrico di  $f(x)/x$ , la differenza della forma del grafico di  $f$  nei casi  $\alpha > 1$  e  $0 < \alpha < 1$  (in Figura 2.17 si indica  $\text{tg } \theta_i = f(x_i)/x_i$ ,  $i = 1, 2$ ).



**Figura 2.17**  $f(x) = x^\alpha$   
con  $0 < \alpha < 1$  (a);  
 $f(x) = x^\alpha$  con  
 $\alpha > 1$  (b).

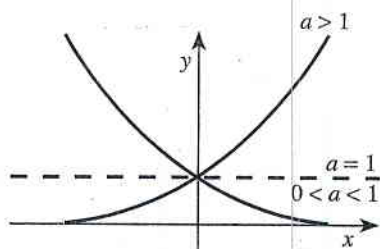
### Funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche

Dato  $a \in (0, +\infty)$ , la funzione  $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x$  si dice **funzione esponenziale**. Segue dalle proprietà delle potenze che

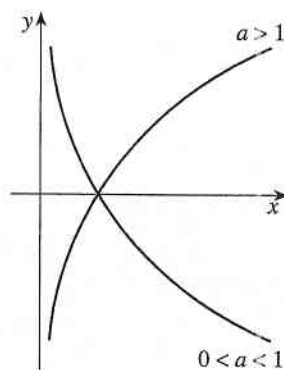
$$f(0) = 1, \quad 1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Perciò  $\text{im } f \subseteq (0, +\infty)$  e  $\text{im } f = \{1\}$  se  $a = 1$ ; viceversa, se  $a \neq 1$  dal Teorema 1.13 segue che per ogni  $y > 0$  esiste  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = y$  (di fatto  $x = \log_a y$ ). Pertanto  $\text{im } f = (0, +\infty)$  se  $a \neq 1$ . Infine, segue dalla proprietà (7) delle potenze che  $f$  è strettamente (de)creciente in  $\mathbb{R}$  se  $a > 1$  ( $a \in (0, 1)$ ).

Ancora per  $a \in (0, +\infty)$ , ma stavolta con  $a \neq 1$  (si ricordi il Teorema 1.13, si definisce la **funzione logaritmica**  $f: \mathbb{R}^+ \ni x \mapsto \log_a x$ . Si ha  $f(1) = 0$  (qualunque sia  $a$ ) e ragionando come sopra si ottiene che  $\text{im } f = \mathbb{R}$  ed  $f$  è strettamente crescente (decrecente) se  $a > 1$  ( $0 < a < 1$ ).



$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$   
 $\text{dom } f = \mathbb{R}, \text{im } f = (0, +\infty)$   
 $f$  strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  se  $a > 1$   
 $f$  strettamente decrescente in  $\mathbb{R}$  se  
 $a \in (0, 1)$



$f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$   
 $\text{dom } f = (0, +\infty), \text{im } f = \mathbb{R}$   
 $f$  strettamente crescente in  $\mathbb{R}^+$  se  $a > 1$   
 $f$  strettamente decrescente in  $\mathbb{R}^+$  se  
 $a \in (0, 1)$

**Figura 2.18**

$x \mapsto a^x$  e  $x \mapsto \log_a x$ .

### Funzioni trigonometriche

Le principali **funzioni trigonometriche** sono la funzione seno, la funzione coseno e la funzione tangente:

$$f: \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x,$$

$$f: \mathbb{R} \ni x \mapsto \cos x,$$

$$f: \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \ni x \mapsto \operatorname{tg} x$$

(si veda Figura 2.19). Segue dalla definizione (si veda l'Appendice 1.A) che sia la funzione seno che la funzione coseno hanno  $\operatorname{im} f = [-1, 1]$  e sono periodiche di periodo  $2\pi$ . Inoltre, dalle formule per archi opposti segue che la funzione seno è dispari, la funzione coseno è pari, e per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  si ha

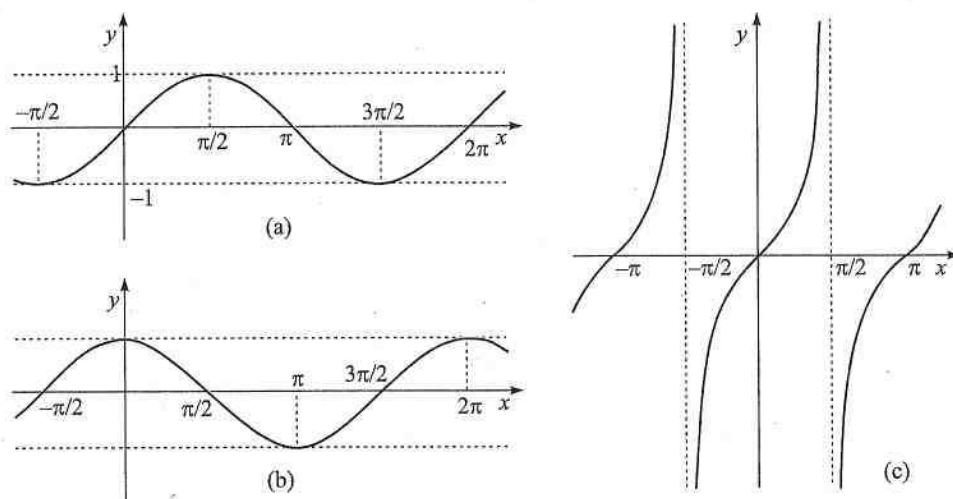
$$x \mapsto \sin x \quad \text{è strettamente} \begin{cases} \text{crescente} & \text{in } [-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi] \\ \text{decrescente} & \text{in } [\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi], \end{cases}$$

$$x \mapsto \cos x \quad \text{è strettamente} \begin{cases} \text{crescente} & \text{in } [\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi] \\ \text{decrescente} & \text{in } [2k\pi, \pi + 2k\pi]. \end{cases}$$

La funzione tangente ha  $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$ , è periodica di periodo  $\pi$ , è dispari ed è strettamente crescente in ciascun intervallo  $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Figura 2.19**

Le funzioni  $x \mapsto \sin x$   
(a),  $x \mapsto \cos x$  (b),  
 $x \mapsto \operatorname{tg} x$  (c).



## 2.3 Funzione limitata, estremo superiore, estremo inferiore, massimo, minimo

In questo paragrafo consideriamo funzioni a valori *reali*.

### DEFINIZIONE 2.5

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice **limitata superiormente** (rispettivamente **inferiormente**) in  $X$  se esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$f(x) \leq M \quad (\text{rispettivamente } \geq -M) \quad \forall x \in X,$$

ovvero, in maniera equivalente, se

$\operatorname{im} f = f(X)$  è un sottoinsieme limitato superiormente (inferiormente) di  $\mathbb{R}$ .

La  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **limitata** in  $X$  se è limitata superiormente e inferiormente in  $X$ .

Quindi  $f$  è limitata in  $X$  se e solo se esiste  $M \in \mathbb{R}$  tale che

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X,$$

ovvero, in maniera equivalente, se

$\operatorname{im} f = f(X)$  è un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$ .



La funzione  $x \mapsto \sin x$  è limitata in  $\mathbb{R}$ , le successioni  $\{(-1)^n + 1\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{(n-1)/(n+1)\}_{n \in \mathbb{N}}$  (si veda Esempio 2.6) sono limitate in  $\mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^2$  è limitata inferiormente ma non superiormente in  $\mathbb{R}$  e  $x \mapsto x^3$  non è limitata superiormente né inferiormente in  $\mathbb{R}$ .

**ESEMPIO 2.12**

La funzione  $x \mapsto 3/x$  non è limitata superiormente né inferiormente nel suo dominio naturale  $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ . Invece la sua restrizione all'intervallo  $[1, +\infty)$  ha come immagine l'intervallo  $(0, 3]$  e quindi è limitata in  $[1, +\infty)$ .

**ESEMPIO 2.13**

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . L'esempio precedente suggerisce di introdurre il concetto di limitatezza di  $f$  in un sottoinsieme  $A \subseteq X$ :  $f$  si dice **limitata (superiormente, inferiormente) in  $A \subseteq X$**  ( $A \neq \emptyset$ ) se è tale la restrizione di  $f$  ad  $A$ ,  $f|_A$ , introdotta nel Paragrafo 2.1. Quando si parla di funzione limitata (superiormente, inferiormente) senza precisare in quale insieme, si intende che  $A = \text{dom } f$ .

Funzione limitata  
in un  
sottoinsieme

Per il ruolo particolare che riveste lo zero, è molto conveniente introdurre una nomenclatura per funzioni limitate inferiormente o superiormente da zero:

**DEFINIZIONE 2.6**

Sia  $X$  un insieme e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice **positiva (negativa, non negativa, non positiva)** in  $A \subseteq X$  se

$$f(x) > (\text{rispettivamente } <, \geq, \leq) 0 \quad \forall x \in A.$$

Per esempio, la funzione  $x \mapsto \cos x$  è non negativa in  $[0, \pi]$  e la funzione  $\sin(4x^2 - x^3) - 3$  è negativa in  $\mathbb{R}$ .

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  limitata superiormente in  $A \subseteq X$ . Allora  $f(A) \subseteq \mathbb{R}$  è un insieme limitato superiormente e quindi, per la completezza di  $\mathbb{R}$ ,  $f(A)$  ammette estremo superiore in  $\mathbb{R}$ . Tale numero si dice anche estremo superiore di  $f$  in  $A$ .

**DEFINIZIONE 2.7**

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\emptyset \neq A \subseteq X$ . Si definiscono

$$\sup_A f := \begin{cases} \sup f(A) & \text{se } f \text{ è limitata superiormente in } A \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$\inf_A f := \begin{cases} \inf f(A) & \text{se } f \text{ è limitata inferiormente in } A \\ -\infty & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$\sup_A f$  ( $\inf_A f$ ) si dice **estremo superiore (inferiore) di  $f$  in  $A$** , e si scrive anche

$$\sup_{x \in A} f(x) \quad \left( \inf_{x \in A} f(x) \right).$$

Ricordando la proprietà (1.10) dell'estremo superiore di un insieme, segue che

$$M = \sup_A f < +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \forall x \in A: f(x) \leq M \\ ii) & \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: f(x) > M - \varepsilon. \end{cases} \quad (2.4)$$

Caratterizzazione  
 $\sup_A f / \inf_A f$

Analogamente (si veda (1.11)):

$$m = \inf_A f > -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} i) & \forall x \in A: f(x) \geq m \\ ii) & \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: f(x) < m + \varepsilon. \end{cases} \quad (2.5)$$

## ESEMPIO 2.14

Riconsideriamo le funzioni degli Esempi 2.3 e 2.4. Allora risulta:

$$\begin{array}{lll} \sup_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 1, & \inf_{x \in \mathbb{R}} \sin x = -1 & \text{poiché } \text{im}(\sin x) = [-1, 1], \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} ((-1)^n + 1) = 2, & \inf_{n \in \mathbb{N}} ((-1)^n + 1) = 0 & \text{poiché } \{(-1)^n + 1\} = \{0, 2\}, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} x^2 = +\infty, & \inf_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0 & \text{poiché } \text{im}(x^2) = [0, +\infty), \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} x^3 = +\infty, & \inf_{x \in \mathbb{R}} x^3 = -\infty & \text{poiché } \text{im}(x^3) = \mathbb{R}, \\ \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{3}{x} = +\infty, & \inf_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{3}{x} = -\infty & \text{poiché } \text{im}\left(\frac{3}{x}\right) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \sup_{x \in [1, +\infty)} \frac{3}{x} = 3, & \inf_{x \in [1, +\infty)} \frac{3}{x} = 0. & \end{array}$$

## ESEMPIO 2.15

Riconsideriamo la successione  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ . Come abbiamo visto nell'Esempio 2.6,  $a_n < a_{n+1}$  per ogni  $n$ : perciò  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = a_0 = -1$ . Poiché inoltre  $a_n = 1 - \frac{2}{n+1} < 1$  per ogni  $n$ , ci si aspetta che  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ . Per provarlo si utilizza la (2.4). La (i) è ovvia. Per verificare (ii), preso  $\varepsilon > 0$  osserviamo che

$$a_n = 1 - \frac{2}{n+1} > 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1,$$

e l'ultima disuguaglianza è vera scegliendo  $n$  sufficientemente grande.

## DEFINIZIONE 2.8

$M \in \mathbb{R}$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) si dice **massimo (minimo) globale** o **assoluto** di  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  in  $A \subseteq X$  se esiste  $x_0 \in A$ , detto **punto di massimo (minimo) globale** di  $f$  in  $A$ , tale che

$$\begin{cases} f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m) \quad \forall x \in A \\ f(x_0) = M \quad (f(x_0) = m), \end{cases}$$

e si scrive:

$$M = \max_A f = \max_{x \in A} f(x) \quad (m = \min f = \min_{x \in A} f(x)).$$

Si noti che

$$\max_A f = \max f(A), \quad \min f = \min f(A).$$

Se  $f$  è limitata superiormente in  $A$ ,  $f$  ammette estremo superiore in  $A$  ma non ammette sempre massimo globale in  $A$  (ovviamente, se esiste  $\max_A f$ , allora  $\sup f = \max_A f$ ).

Nel caso in cui  $A = \text{dom } f$  talvolta ometteremo di specificare  $A$ : cioè  $\inf f = \inf_A f$ ,  $\max f = \max_A f$  ecc., se  $A = \text{dom } f$ .

## ESEMPIO 2.16

Riprendiamo alcune delle funzioni degli Esempi 2.14 e 2.15. Risulta

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \sin x = 1, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} \sin x = -1, \quad \min_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0, \quad \max_{x \in [1, +\infty)} \frac{3}{x} = 3,$$

$$\max_{n \in \mathbb{N}} ((-1)^n + 1) = 2, \quad \min_{n \in \mathbb{N}} ((-1)^n + 1) = 0, \quad \min_{n \in \mathbb{N}} \frac{n-1}{n+1} = -1,$$

mentre non esistono

$$\max_{x \in \mathbb{R}} x^2, \quad \min_{x \in [1, +\infty)} \frac{3}{x} \quad \text{e} \quad \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{n-1}{n+1}.$$

Data

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 2(2-x) & \text{se } x \in [1, 2], \end{cases}$$

si vuole determinare  $\sup f$ ,  $\inf f$  e, se esistono,  $\max f$  e  $\min f$ . L'immagine di  $f$  è l'unione delle immagini delle funzioni  $(x \mapsto 2x+1)|_{[0,1)}$  e  $(x \mapsto 2(2-x))|_{[1,2]}$ . Quindi  $\text{im } f = [1, 3) \cup [0, 2] = [0, 3)$ , ovvero  $\sup f = 3$ ,  $\inf f = 0 = \min f$  e il massimo di  $f$  non esiste. Si noti che, come osservato nel Paragrafo 2.1, l'immagine di  $f$  si determina immediatamente proiettando il grafico della funzione sull'asse  $y$  (si veda Figura 2.20).

## ESEMPIO 2.17

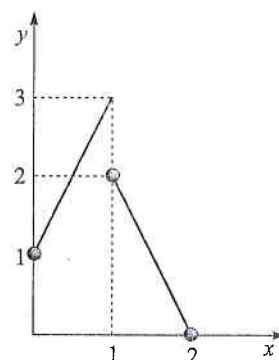


Figura 2.20

Se  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , allora è ben definita la **funzione somma**:

$$(f+g) : X \ni x \mapsto f(x) + g(x).$$

Valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \inf\{f(x) + g(x) : x \in X\} &= \inf_X(f+g) \geq \inf_X f + \inf_X g, \\ \sup\{f(x) + g(x) : x \in X\} &= \sup_X(f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Infatti, per esempio, per ogni  $x \in X$  si ha  $f(x) \geq \inf_X f$  e  $g(x) \geq \inf_X g$ ; sommando membro a membro si ottiene  $f(x) + g(x) \geq \inf_X f + \inf_X g$  per ogni  $x \in X$ , da cui segue la prima delle (2.6). Si noti che la disuguaglianza non può essere sostituita dall'uguaglianza: basta scegliere  $f(x) = x$  e  $g(x) = -x$  in  $[0, 1]$ . Segue immediatamente dalla (2.6) che le stesse relazioni intercorrono tra i massimi e i minimi di  $f$ ,  $g$  ed  $f+g$ , purché tutti e tre esistano (si veda l'Esempio 2.18).

Siano  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f(x) = \begin{cases} 3x/4 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 3x/4 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Procedendo come negli esempi precedenti, si verifica che  $\min f = \inf f = \min g = \inf g = 0$  e  $\max f = \sup f = \max g = \sup g = 1$ . D'altra parte, la funzione somma vale

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 3x/2 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e quindi  $\inf(f+g) = 0$ ,  $\sup(f+g) = 3/2$ , ma né il massimo né il minimo di  $f+g$  esistono.

## ESEMPIO 2.18

Determinare  $\sup_X f$  e  $\inf_X f$  e, se esistono,  $\max_X f$  e  $\min_X f$ :

- a)  $X = [0, 4)$ ,  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 5-x & \text{se } 2 < x < 4; \end{cases}$
- b)  $X = [0, 4)$ ,  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 5-x & \text{se } 3 < x < 4; \end{cases}$
- c)  $X = (-1, 3]$ ,  $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ 1-3x & \text{se } 2 < x \leq 3; \end{cases}$

## ESERCIZIO 2.8





Sia  $X$  un insieme. Se esiste una successione  $\{a_n\}$  a valori in  $X$  che è biettiva, allora  $X$  si dice **insieme numerabile**. Banalmente,  $\mathbb{N}$  è numerabile (basta prendere  $a_n = n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ). Anche l'insieme  $\mathbb{Z}$  lo è:  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -2$ ,  $a_4 = 2$ , ovvero  $a_n = n/2$  se  $n$  è pari e  $a_n = -(n+1)/2$  se  $n$  è dispari. Non è difficile dimostrare che anche  $\mathbb{Q}$  è numerabile. L'insieme  $\mathbb{R}$  invece non è numerabile.

**ESEMPIO 2.21**

Insieme numerabile

Dimostrazione

Risolubilità di una equazione

Molti problemi applicativi possono essere ridotti alla soluzione di qualche **equazione**, ovvero a un problema del seguente tipo:

siano  $X, Y$  insiemi e  $f : X \rightarrow Y$  una funzione; dato  $y \in Y$ , determinare  $x \in X$  tale che  $y = f(x)$ .

In questo contesto è importante sapere se

- 1)  $\forall y \in Y$  esiste almeno una soluzione  $x$  di  $y = f(x)$ ;
- 2)  $\forall y \in Y$  esiste al più una soluzione di  $y = f(x)$ .

Si noti che (1), ovvero l'**esistenza di una soluzione**, è equivalente alla suriettività della funzione  $f$ , mentre (2), ovvero l'**unicità della soluzione**, è equivalente all'iniettività di  $f$ . Quindi esistenza e unicità della soluzione di un'equazione equivale alla biettività della funzione associata:

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x) \Leftrightarrow f : X \rightarrow Y \text{ è biettiva.}$$

Più in generale, si usano le proprietà della funzione  $f$  per analizzare l'equazione  $y = f(x)$ ; spesso, in altre parole, *lo studio di un'equazione si riduce allo studio di una funzione*.

Stabilire se le seguenti funzioni  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sono iniettive, suriettive, biiettive:

- |   |   |
|---|---|
| a) $f(x) = \sqrt{x}$ , $X = [0, +\infty)$ ;                       | e) $f(x) = -x^4$ , $X = [1, +\infty)$ ;                     |
| b) $f(x) = \frac{1}{x}$ , $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;      | f) $f(x) = -x^4$ , $X = [-1, 0] \cup [2, +\infty)$ ;        |
| c) $f(x) = \frac{1}{ x+1 }$ , $X = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ; | g) $f(x) = 5^x$ , $X = \mathbb{R}$ ;                        |
| d) $f(x) = -x^4$ , $X = \mathbb{R}$ ;                             | h) $f(x) = \log_3  x $ , $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; |
|   | i) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ , $X = \mathbb{R}^+$ .     |

**ESERCIZIO 2.9**

## 2.5 Funzione composta

**DEFINIZIONE 2.10**

Siano  $X, Y, V, W$  insiemi, e siano  $f : X \rightarrow Y, g : V \rightarrow W$  tali che  $\text{im } f \cap V \neq \emptyset$ . Si dice **funzione composta**  $g \circ f$  (e si legge "g composta f") la funzione

$$\begin{cases} g \circ f : X_0 \rightarrow W \\ g \circ f : x \mapsto g(f(x)), \end{cases}$$

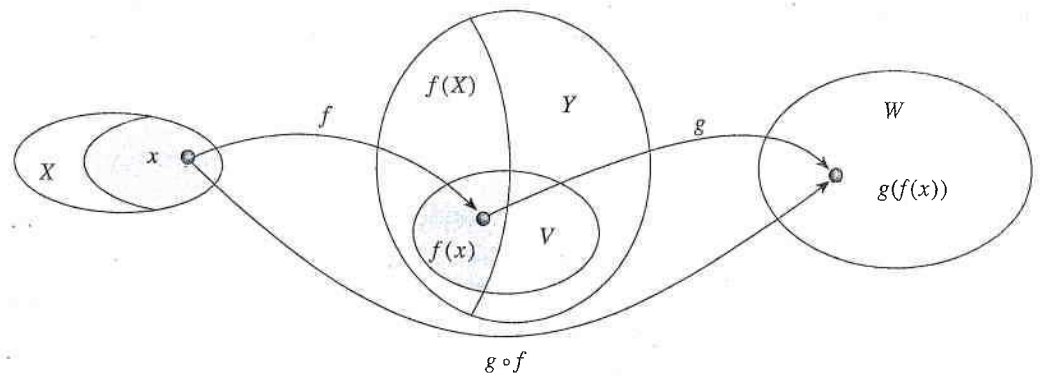
dove il dominio  $X_0$  è così definito:

$$X_0 := \{x \in X : f(x) \in V\} \subseteq X.$$

La definizione del dominio  $X_0$  (si veda Figura 2.23) diventa chiara se si pensa a quale sia il dominio naturale della funzione

$$x \mapsto g(f(x)),$$

Figura 2.23

 $g \circ f : x \mapsto g(f(x)).$ 


ovvero per quali  $x$  abbia senso la scrittura  $g(f(x))$ : per scrivere  $f(x)$  si richiede che  $x \in X = \text{dom } f$ , mentre  $g(f(x))$  ha senso se anche  $f(x) \in V = \text{dom } g$ , ovvero la  $g \circ f$  è determinata da:

$$\begin{cases} \text{dom } g \circ f = \{x \in \text{dom } f : f(x) \in \text{dom } g\} \\ g \circ f(x) = g(f(x)). \end{cases}$$

In altre parole la condizione  $\text{im } f \cap V \neq \emptyset$  garantisce che  $\text{dom } g \circ f$  sia non vuoto.

**ESEMPIO 2.22**

Siano

$$f(x) = x + 1 \text{ per } x \in \mathbb{R} \text{ e } g(x) = x^2 \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

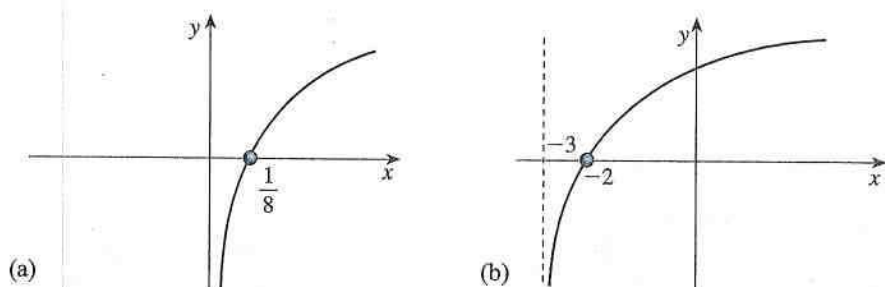
La funzione composta  $g \circ f$  è  $g \circ f(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2$  per  $x \in \mathbb{R}$ . Invece la funzione composta  $f \circ g$  è  $f \circ g(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$  per  $x \in \mathbb{R}$ .

Siano

$$f(x) = \log_2 x \text{ per } x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } g(x) = 3 + x \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

La funzione composta  $g \circ f$  è  $g \circ f(x) = g(f(x)) = 3 + \log_2 x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^+$  (si veda Figura 2.24a). Invece il dominio della funzione composta  $f \circ g$  è  $X_0 = \{x \in \mathbb{R} : 3 + x > 0\} = (-3, +\infty)$  e  $f \circ g(x) = f(g(x)) = \log_2(3 + x)$  per  $x > -3$  (si veda Figura 2.24b).

**Figura 2.24** Composte di  $f(x) = \log_2 x$  e  $g(x) = 3 + x$ :  $g \circ f$  (a),  $f \circ g$  (b).



È importante osservare che, come si è visto nell'esempio precedente, l'operazione di composizione non è commutativa, cioè

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

**ESEMPIO 2.23**Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ -4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $g : [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da



$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 14 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Allora la funzione  $g \circ f$  ha come dominio  $\{x \in \text{dom } f : f(x) \geq -2\} = (-\infty, 0]$  e  $g \circ f(x) = g(f(x)) = 14$  per ogni  $x \leq 0$ . Il dominio della funzione  $f \circ g$  è  $\text{dom } g$  e

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} -4 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

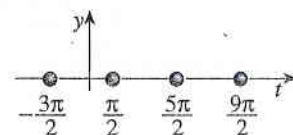
Sia  $f(t) = \sqrt{\log_2(\sin t)}$ . Il dominio delle funzioni  $\sin x$ ,  $\log_2 x$  e  $\sqrt{x}$  è, rispettivamente,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^+$  e  $[0, +\infty)$ , quindi

$$\begin{aligned} \text{dom } f &= \{t \in \mathbb{R} : \sin t > 0 \text{ e } \log_2(\sin t) \geq 0\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} : \sin t \geq 1\} = \{t \in \mathbb{R} : \sin t = 1\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sqrt{\log_2 1} = \sqrt{0} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Il grafico è riportato nella Figura 2.25.

**ESEMPIO 2.24****Figura 2.25**

$t \mapsto \sqrt{\log_2(\sin t)}$ .

È facile verificare che l'operazione di composizione gode della proprietà associativa:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

È essenziale imparare a interpretare una funzione come composta di funzioni più "semplici", perché ciò permette di ricondurre lo studio di una funzione "complicata" a quello di funzioni elementari (ne discuteremo ampiamente anche nel Paragrafo 2.7). Per cominciare, l'individuazione del dominio naturale di una funzione è basata, come abbiamo anticipato nel Paragrafo 2.1, sul concetto di funzione composta.

Proprietà associativa della composizione

Dominio di funzioni composte

Si vuole determinare il dominio naturale della funzione di una variabile reale

$$F(x) = \frac{1}{\log_2(\sqrt{x^3 + 3} - 10)}.$$

Cerchiamo di interpretarla come funzione composta "scomponendola" in funzioni più semplici:

$$\frac{1}{\log_2(\sqrt{x^3 + 3} - 10)} = k(h(g(f(x)))),$$

dove

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \ni x &\mapsto x^3 + 3, & h: (0, +\infty) \ni x &\mapsto \log_2 x \\ g: [0, +\infty) \ni x &\mapsto \sqrt{x} - 10, & k: \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Affinché la composizione sia ben definita è necessario che:

$$\begin{aligned} \text{im } f &\subseteq \text{dom } g, & \text{ovvero } x^3 + 3 &\geq 0, \\ \text{im } (g \circ f) &\subseteq \text{dom } h, & \text{ovvero } \sqrt{x^3 + 3} - 10 &> 0, \\ \text{im } (h \circ g \circ f) &\subseteq \text{dom } k, & \text{ovvero } \log_2(\sqrt{x^3 + 3} - 10) &\neq 0. \end{aligned}$$

Perciò

$$\text{dom } F = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^3 + 3 \geq 0, \sqrt{x^3 + 3} - 10 > 0, \log_2(\sqrt{x^3 + 3} - 10) \neq 0 \right\}.$$

**ESEMPIO 2.25**

Risolvendo le tre disuguaglianze si ottiene

$$\begin{cases} x^3 + 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 3} - 10 > 0 \\ \log_2(\sqrt{x^3 + 3} - 10) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\sqrt[3]{3}, +\infty) \\ x \in (\sqrt[3]{97}, +\infty) \\ x \neq \sqrt[3]{118}, \end{cases}$$

quindi  $\text{dom } F = (\sqrt[3]{97}, +\infty) \setminus \{\sqrt[3]{118}\}$ .

Varie proprietà sono conservate attraverso l'operazione di composizione. Una di queste è la monotonia:

Composizione  
di funzioni  
monotone

#### TEOREMA 2.11

Siano  $f, g$  funzioni reali di una variabile reale, e sia  $A \subseteq \text{dom } g \circ f$ . Allora

- (i)  $f$  crescente in  $A$  e  $g$  crescente in  $f(A) \Rightarrow g \circ f$  crescente in  $A$ ;
- (ii)  $f$  crescente in  $A$  e  $g$  decrescente in  $f(A) \Rightarrow g \circ f$  decrescente in  $A$ ;
- (iii)  $f$  decrescente in  $A$  e  $g$  crescente in  $f(A) \Rightarrow g \circ f$  decrescente in  $A$ ;
- (iv)  $f$  decrescente in  $A$  e  $g$  decrescente in  $f(A) \Rightarrow g \circ f$  crescente in  $A$ .

Tali affermazioni rimangono valide se si sostituiscono a “(de)crescente” le parole “strettamente (de)crescente”. In altri termini, la composizione di due funzioni (strettamente) monotone è (strettamente) monotona.

Proviamo, per esempio, la (ii) (gli altri casi si trattano analogamente). Dati  $x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2$ , si deve dimostrare che  $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ . Essendo  $f$  crescente in  $A$  e  $x_1 > x_2$  allora  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ; ma  $g$  è decrescente in  $f(A)$  e  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , quindi  $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ .

#### ESEMPIO 2.26

La funzione  $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}+1)$  è strettamente decrescente nel suo dominio  $[-1, +\infty)$ . Infatti  $x \mapsto \sqrt{x+1}+1$  è strettamente crescente in  $[-1, +\infty)$  e  $x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}x$  è strettamente decrescente nel suo dominio  $\mathbb{R}^+$ .

Composizione  
di funzioni  
iniettive

Anche l'iniettività di funzioni viene conservata nell'operazione di composizione: se  $f$  e  $g$  sono iniettive nei loro domini, anche  $g \circ f$  lo è (lasciamo la verifica allo studente).

#### ESERCIZIO 2.10

Determinare il dominio e l'immagine delle funzioni composte  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , dove  $f$  e  $g$  sono le seguenti funzioni:

- a)  $f(x) = \sqrt[3]{x} \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1 \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $f(x) = \sqrt{x} \forall x \geq 0, g(x) = x^2 - 1 \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- c)  $f(x) = \sqrt{x} \forall x \geq 0, g(x) = 1 - x^2 \forall x \in \mathbb{R}$ .

#### ESERCIZIO 2.11

Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni reali di una variabile reale:

- a)  $f(x) = \log_2(\sqrt{x} - x^3)$ ;
- b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}-1}}$ ;
- c)  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2| - |3 - x|}$ ;
- d)  $f(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \log_2(x^2 - 1)\right)$ .

#### ESERCIZIO 2.12

Dire quali delle seguenti funzioni sono (strettamente) (de)crescenti in  $X$  (se  $X = \text{dom } f$  si intende il dominio naturale):

- a)  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}x + 1}, X = \text{dom } f$ ;
- b)  $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^4, X = \text{dom } f$ ;
- c)  $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^4, X = \text{dom } f$ ;
- d)  $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^3, X = \text{dom } f$ ;
- e)  $f(x) = \cos(4 - 5x), X = [0, \pi/2]$ ;
- f)  $f(x) = \cos(4 - 5x), X = [3/5, 4/5]$ .

## 2.6 Funzione inversa

Abbiamo definito una funzione  $f : X \rightarrow Y$  come una corrispondenza univoca tra  $X$  e  $Y$ . Se  $f$  è biettiva la corrispondenza tra  $X$  e  $Y$  si dice biunivoca. Se  $f$  è solo iniettiva,  $f$  è una corrispondenza biunivoca tra  $X$  e  $f(X)$ :

$$f : X \rightarrow Y \text{ è iniettiva} \Leftrightarrow \forall y \in f(X) \exists! x \in X : y = f(x).$$

Perciò, una funzione iniettiva  $f : X \rightarrow Y$  definisce una nuova funzione, detta (*funzione*) *inversa* e indicata con  $f^{-1}$ , che associa a ogni  $y \in f(X)$  la (unica!) soluzione  $x \in X$  dell'equazione  $f(x) = y$ .

### DEFINIZIONE 2.12

Sia  $f : X \rightarrow Y$  iniettiva. Si dice **funzione inversa** di  $f$  la funzione

$$\begin{cases} f^{-1} : f(X) \rightarrow X \\ f^{-1} : y \mapsto x \text{ dove } f(x) = y. \end{cases}$$

In altre parole, (si veda Figura 2.26)

$$\forall (x, y) \in X \times f(X) : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \quad (2.9)$$

ovvero

$$(x, y) \in \text{graf } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{graf } f^{-1}. \quad (2.10)$$

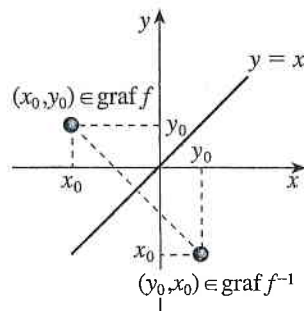
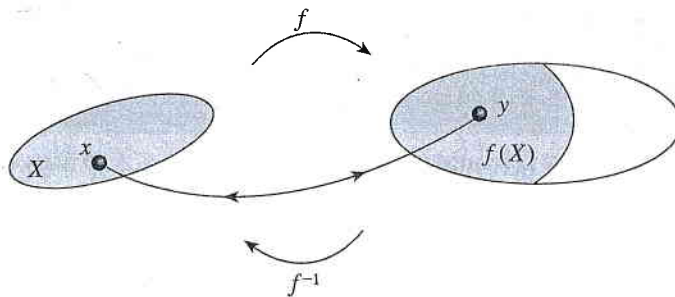
Una funzione iniettiva è anche detta **invertibile**. Si noti che

$$\text{dom } f^{-1} = \text{im } f \text{ e } \text{im } f^{-1} = \text{dom } f. \quad (2.11)$$

Per le funzioni reali  $f$  di una variabile reale (cioè,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $X \subseteq \mathbb{R}$ ), la relazione (2.9) fornisce la possibilità di ricavare geometricamente il grafico della funzione inversa  $f^{-1}$  dal grafico di  $f$ : come illustrato nella Figura 2.27, i punti  $(x_0, y_0) \in \text{graf } f$  e  $(y_0, x_0) \in \text{graf } f^{-1}$  sono simmetrici rispetto alla retta  $\{(x, y) : y = x\}$ .

Costruzione  
geometrica di  
graf  $f^{-1}$

**Figura 2.26**  
 $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ .



**Figura 2.27**



## ESEMPIO 2.27

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^3$ , è iniettiva e  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , quindi  $\text{dom } f^{-1} = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  e

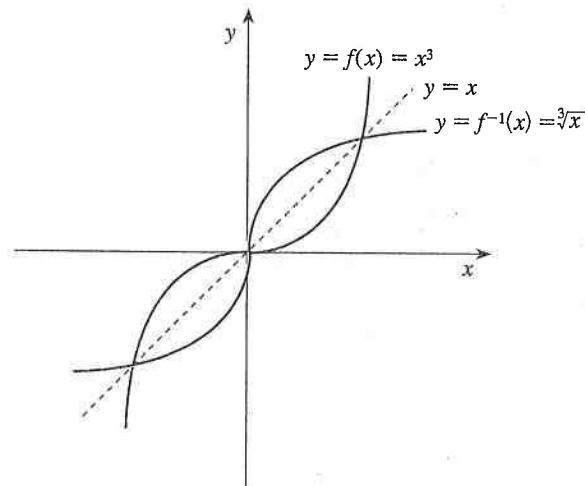
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) = x^3,$$

ovvero

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}.$$

Perciò risulta  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \forall y \in \mathbb{R}$  (oppure, equivalentemente,  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \forall x \in \mathbb{R}$ ). Nella Figura 2.28 è riportata la costruzione geometrica del grafico della funzione inversa.

**Figura 2.28** Costruzione geometrica del grafico della funzione inversa di  $f(x) = x^3$



Nell'esempio precedente si è visto che, per trovare l'espressione  $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ , abbiamo ricavato  $x$  risolvendo l'equazione  $y = f(x) = x^3$  con la condizione che  $x \in \text{dom } f$ . Più precisamente,

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{dom } f \\ f(x) = y \end{cases} \quad \forall y \in \text{dom } f^{-1} = f(X) \quad (2.12)$$

(nell'esempio successivo si vedrà l'importanza della condizione  $x \in \text{dom } f$ ).

Sottolineiamo, tuttavia, il fatto che solo in alcuni "rari" casi è possibile scrivere un'espressione analitica per la funzione inversa.

## DEFINIZIONE 2.13

$f: X \rightarrow Y$  si dice **invertibile** in  $A \subseteq X$  se la restrizione di  $f$  ad  $A$ ,  $f|_A: A \rightarrow Y$ , è iniettiva. La funzione  $(f|_A)^{-1}$  si dice **inversa** di  $f$  in  $A$ .

Quindi, se  $f: X \rightarrow Y$  è invertibile in  $A \subseteq X$ ,  $g: f(A) \rightarrow X$  è l'inversa di  $f$  in  $A$  se e solo se

$$\forall y \in \text{dom } g = f(A) : g(y) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ f(x) = y. \end{cases} \quad (2.13)$$

Invertibilità in un sottoinsieme del dominio

## ESEMPIO 2.28

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(s) = s^2$  non è iniettiva, ma lo sono per esempio le sue restrizioni  $f|_{[0, +\infty)}$ ,  $f|_{(-\infty, 0]}$  e  $f|_{(-2, -1) \cup [0, 1]}$ . Quindi  $f$  è invertibile in  $[0, +\infty)$ , in  $(-\infty, 0]$  e in  $(-2, -1) \cup [0, 1]$ . Si ha che  $f((-\infty, 0]) = f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$  e  $f((-2, -1) \cup [0, 1]) = [0, 4)$ . La funzione inversa di  $f$  in  $[0, +\infty)$  (si veda Figura 2.29) è la funzione  $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  così definita:

$$\forall y \geq 0 : g(y) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = x^2. \end{cases} \quad (\Leftrightarrow x \in \text{dom } f|_{[0, +\infty)!})$$

Se  $y = 0$ ,  $g(0) = 0$ , mentre se  $y > 0$ , l'equazione  $y = x^2$  ha due soluzioni reali:  $x = \pm\sqrt{y}$ , ma solo la soluzione  $\sqrt{y}$  è non negativa, quindi

$$g(y) = \sqrt{y} \quad \forall y \geq 0.$$

Invece l'inversa di  $f$  in  $(-\infty, 0]$  (si veda Figura 2.29) è la funzione  $h : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$  così definita:

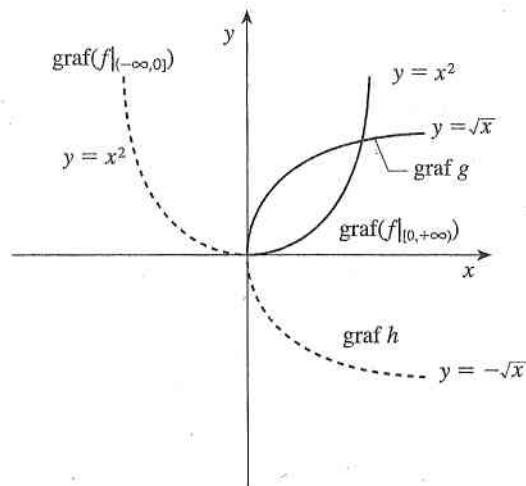
$$\forall y \geq 0 : h(y) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 & (\Leftrightarrow x \in \text{dom } f|_{(-\infty, 0]}) \\ y = x^2, \end{cases}$$

ovvero

$$h(y) = -\sqrt{y} \quad \forall y \geq 0.$$

Lasciamo per esercizio verificare che la funzione inversa di  $f$  in  $(-2, -1) \cup [0, 1]$  è la funzione

$$k(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{y} & \text{se } 1 < y < 4. \end{cases}$$



**Figura 2.29** Inversa di  $f(x) = x^2$  in  $[0, +\infty)$  e in  $(-\infty, 0]$ .

La funzione  $f(x) = ax + b$ ,  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ , è invertibile se e solo se  $a \neq 0$ ; in tal caso la sua inversa  $f^{-1}$  verifica

$$\forall y \in \text{im } f = \mathbb{R} : x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ovvero, ricavando  $x$  dall'equazione  $y = ax + b$ ,

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b) \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

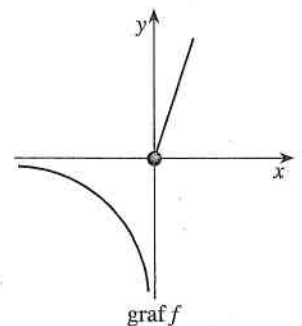
La funzione (si veda Figura 2.30)

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{1}{2x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

è iniettiva e  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  (l'allievo controlli!). L'inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (si veda Figura 2.31) è così definita:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y & \text{se } y \geq 0 \\ \frac{1}{2y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

#### ESEMPIO 2.29



**Figura 2.30**



Sottolineiamo che non bisogna confondere l'inversa di una funzione con la funzione reciproca (se esiste):  $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$ . Per esempio, se  $f(x) = x^2$  con  $x > 0$ ,  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  per  $x > 0$  e  $\frac{1}{f(x)} = x^{-2}$  per  $x > 0$ .

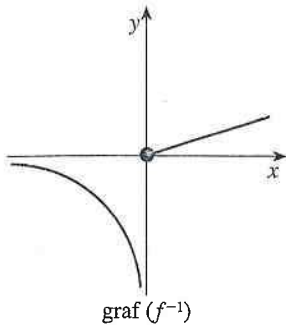


Figura 2.31

**TEOREMA 2.14**

Sia  $f$  invertibile in  $A$  e sia  $f^{-1}$  l'inversa di  $f$  in  $A$ . Allora

$$f^{-1} \circ f : x \mapsto x \quad \forall x \in A$$

$$f \circ f^{-1} : x \mapsto x \quad \forall x \in f(A),$$

ovvero, le funzioni  $f^{-1} \circ f$  e  $f \circ f^{-1}$  sono le identità nei rispettivi domini.

**Dimostrazione**

Preso  $x \in A$  allora  $y = f(x) \in f(A)$  e, per definizione di  $f^{-1}$ ,  $f^{-1}(y) = x$ , ovvero  $f^{-1}(f(x)) = x$  per ogni  $x \in A$ . Analogamente si dimostra che  $f(f^{-1}(y)) = y$  per ogni  $y \in f(A)$ .

**ESERCIZIO 2.13**

Dire se le seguenti funzioni sono invertibili e scrivere una formula esplicita per le funzioni inverse, se esistono, specificando il loro dominio:

a)  $f(x) = x^5 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $f(x) = x^4 - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ;

c)  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ;

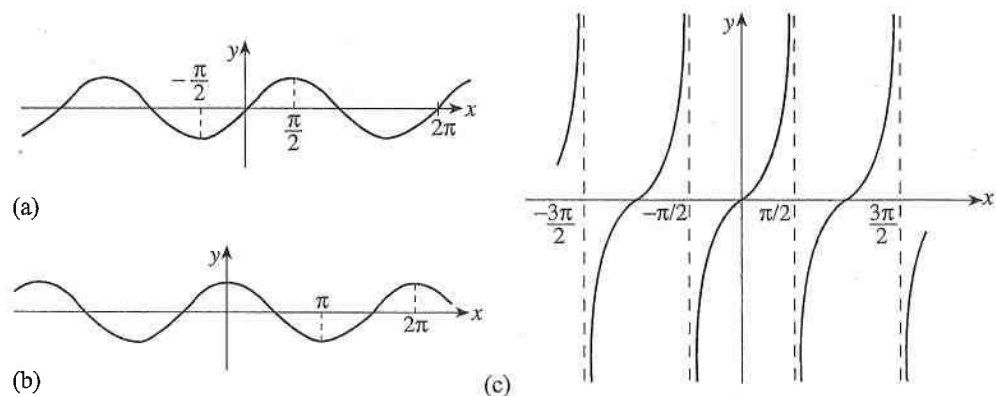
d)  $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

**2.6.1 Le funzioni arcseno, arcocoseno, arcotangente**

Nella Figura 2.32 sono tracciati i grafici delle funzioni seno, coseno e tangente, il cui dominio e immagine è stato discusso nel Paragrafo 2.2.3.

Chiaramente le funzioni  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\operatorname{tg} x$  non sono iniettive nei loro domini, ma lo sono le loro restrizioni agli insiemi (rispettivamente)  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $[0, \pi]$  e  $(-\pi/2, \pi/2)$ , ovvero le funzioni  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\operatorname{tg} x$  sono invertibili rispettivamente in  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $[0, \pi]$  e  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

**Figura 2.32** Grafici di  $x \mapsto \sin x$  (a),  $x \mapsto \cos x$  (b),  $x \mapsto \operatorname{tg} x$  (c): in rosso le restrizioni iniettive.





**DEFINIZIONE 2.15**

- (i) La funzione inversa di  $x \mapsto \sin x$  in  $[-\pi/2, \pi/2]$  si dice **arcoseno** e si indica con  $\arcsin$ .
- (ii) La funzione inversa di  $x \mapsto \cos x$  in  $[0, \pi]$  si dice **arccoseno** e si indica con  $\arccos$ .
- (iii) La funzione inversa di  $x \mapsto \operatorname{tg} x$  in  $(-\pi/2, \pi/2)$  si dice **arcotangente** e si indica con  $\operatorname{arctg}$ .

Si verifica che

$$\operatorname{dom}(\arcsin) = \operatorname{dom}(\arccos) = [-1, 1], \operatorname{dom}(\operatorname{arctg}) = \mathbb{R};$$

con la costruzione geometrica del grafico della funzione inversa, possiamo disegnare i grafici corrispondenti (si veda Figura 2.33).

**Osservazione.** Si possono considerare altri intervalli per invertire le funzioni trigonometriche, ma le funzioni inverse non sono  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$  e  $\operatorname{arctg} x$ . Sottolineiamo che, quando si parla di  $\arcsin$ ,  $\arccos$  e  $\operatorname{arctg}$ , la scelta *non* è libera: per convenzione gli intervalli di riferimento sono rispettivamente  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $[0, \pi]$  e  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

Dalle proprietà delle funzioni trigonometriche segue che, per esempio,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin \left( \sin \left( \frac{9\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{4}, \quad \arcsin \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{7\pi}{6} \right) \right) = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{arctg} \left( 2 \sin \left( \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Infine, dimostriamo che

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x & \forall x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x & \forall x < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

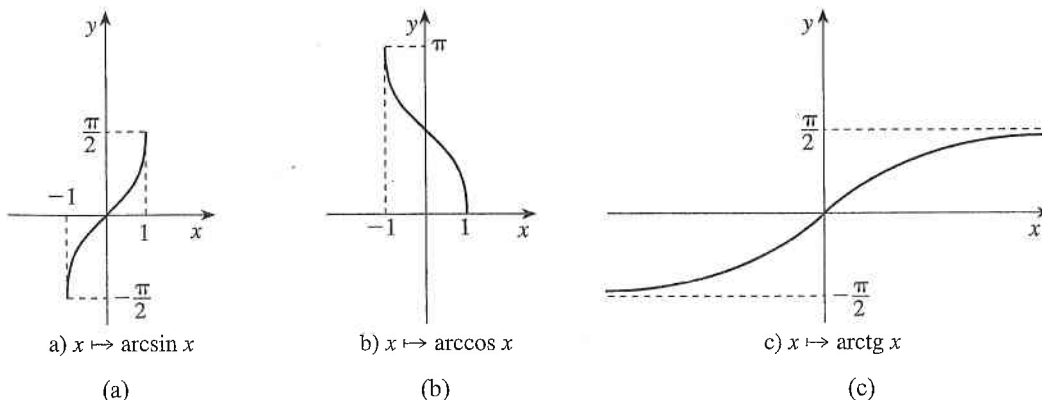
Siano  $x > 0$  e  $y = \operatorname{arctg} 1/x$ . Allora

$$\frac{1}{x} = \operatorname{tg} y \text{ e } 0 < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - y \right) \text{ e } 0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

resta così dimostrata la (2.14) per  $x > 0$ . Se invece  $x < 0$ , basta scrivere la (2.14) per  $(-x) > 0$ , ovvero

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{-x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} (-x) \quad \forall x < 0.$$



**Figura 2.33** Grafici di  $x \mapsto \arcsin x$  (a),  $x \mapsto \arccos x$  (b)  $x \mapsto \operatorname{arctg} x$  (c).

Allora, poiché  $\operatorname{arctg}(-y) = -\operatorname{arctg} y$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} \frac{1}{x} &= -\operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{x} \right) = -\left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(-x) \right) \\ &= -\left( \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x \right) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \quad \forall x < 0.\end{aligned}$$

**ESERCIZIO 2.14**

Per le seguenti funzioni determinare il dominio della funzione inversa e disegnare un grafico qualitativo della funzione inversa usando la costruzione geometrica:

a)  $f(x) = \sin x$  in  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ ;

c)  $f(x) = 1 + \operatorname{tg} x$  in  $\left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ ;

b)  $f(x) = \cos x$  in  $[-\pi, 0]$ ;

d)  $f(x) = 3 - \cos x$  in  $[\pi, 2\pi]$ .

**ESERCIZIO 2.15**

Risolvere le seguenti disequazioni:

a)  $\sin(3x + 1) \geq \frac{1}{2}$ ;

d)  $\operatorname{arctg}(3x) > -1$ ;

b)  $3x + 1 \geq \arcsin \frac{1}{2}$ ;

e)  $\arcsin(x^2) > \frac{1}{6}\pi$ .

c)  $2 \cos^2 x - \sin^2 x \leq -1$ ;

**2.6.2 Invertibilità e monotonia**


Il seguente risultato fornisce un primo legame tra i concetti di invertibilità e monotonia.

**TEOREMA 2.16**

*Siano  $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è strettamente monotona in  $A$ , allora  $f$  è invertibile in  $A$ ; inoltre  $f^{-1}$  è strettamente monotona in  $f(A)$ .*

Per esempio, la funzione  $x \mapsto \arcsin x$  è strettamente crescente in  $[-1, 1]$ , essendo  $\sin x$  strettamente crescente in  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Analogamente,  $x \mapsto \arccos x$  è strettamente decrescente in  $[-1, 1]$  e  $\operatorname{arctg} x$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$  (si veda ancora Figura 2.33).

**Osservazioni:**

- Il Teorema 2.16 segue immediatamente dalle definizioni di monotonia stretta e di invertibilità.
-  Il viceversa del Teorema 2.16 non è valido. Infatti abbiamo visto nell'Esempio 2.29 che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{1}{2x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è invertibile in  $\mathbb{R}$ , anche se, come è ovvio,  $f$  non è monotona in  $\mathbb{R}$ . Nel Capitolo 6 vedremo quali ulteriori ipotesi occorrono affinché stretta monotonia e invertibilità siano equivalenti.

**ESEMPIO 2.30**

La funzione  $f(x) = 2^x + x$  è invertibile in  $\mathbb{R}$  in quanto strettamente monotona: infatti è somma di funzioni strettamente crescenti. Si noti che in questo caso non è possibile esprimere l'inversa in modo elementare.



## 2.7 Operando con le funzioni

Nei paragrafi precedenti abbiamo costruito nuove funzioni a partire da due funzioni assegnate utilizzando le quattro operazioni. Codifichiamo tale procedura nella seguente definizione.

### DEFINIZIONE 2.17

Sia  $X$  un insieme e  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (i) Siano  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , si dice **combinazione lineare** di  $f$  e  $g$  (con **coefficienti**  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ), in simboli  $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ , la funzione che associa a ogni  $x \in X$  il numero reale  $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 f + \lambda_2 g : X \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda_1 f + \lambda_2 g : x \mapsto \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x). \end{cases}$$

- (ii) Si dicono **funzione prodotto**,  $fg$ , rispettivamente **funzione quoziente**,  $f/g$ , le funzioni

$$\begin{cases} fg : X \rightarrow \mathbb{R} \\ fg : x \mapsto f(x)g(x), \end{cases}$$

rispettivamente

$$\begin{cases} \frac{f}{g} : \{x \in X : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{cases}$$

Siano  $f(x) = 3x^2$ ,  $g(x) = x + 1 \forall x \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\begin{aligned} 2f - g : x &\mapsto 6x^2 - x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ fg : x &\mapsto 3x^3 + 3x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \frac{f}{g} : x &\mapsto \frac{3x^2}{x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq -1. \end{aligned}$$

### ESEMPIO 2.31

Nel Paragrafo 2.5 abbiamo anche introdotto uno strumento estremamente generale per costruire nuove funzioni, la **composizione**. Nel seguito di questo paragrafo si illustrano alcuni tipi di composizione di particolare importanza e si spiega come dedurre le proprietà e il grafico qualitativo.

### DEFINIZIONE 2.18

Sia  $X$  un insieme e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Le funzioni **valore assoluto** di  $f$ ,  $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , **parte positiva** di  $f$ ,  $f_+ : X \rightarrow \mathbb{R}$ , e **parte negativa** di  $f$ ,  $f_- : X \rightarrow \mathbb{R}$ , (si veda Figura 2.34) sono così definite:  $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} |f| : x &\mapsto |f(x)|, \\ f_+ : x &\mapsto f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0, \end{cases} \\ f_- : x &\mapsto f_-(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tutte e tre le funzioni si interpretano come composizioni. Per  $|f|$  è ovvio, si tratta della composizione  $g \circ f$  con  $g(x) = |x|$ . Per le altre due basta osservare che

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{ed} \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\};$$

A parte le Definizioni 2.17 e 2.18, il Paragrafo 2.7 non contiene informazioni essenziali. Tuttavia lo riteniamo molto importante e nel seguito le composizioni elementari tra funzioni saranno utilizzate spesso.



perciò, ad esempio,  $f_+$  è la composizione di  $f$  con la funzione  $g(x) = \max\{x, 0\}$ .

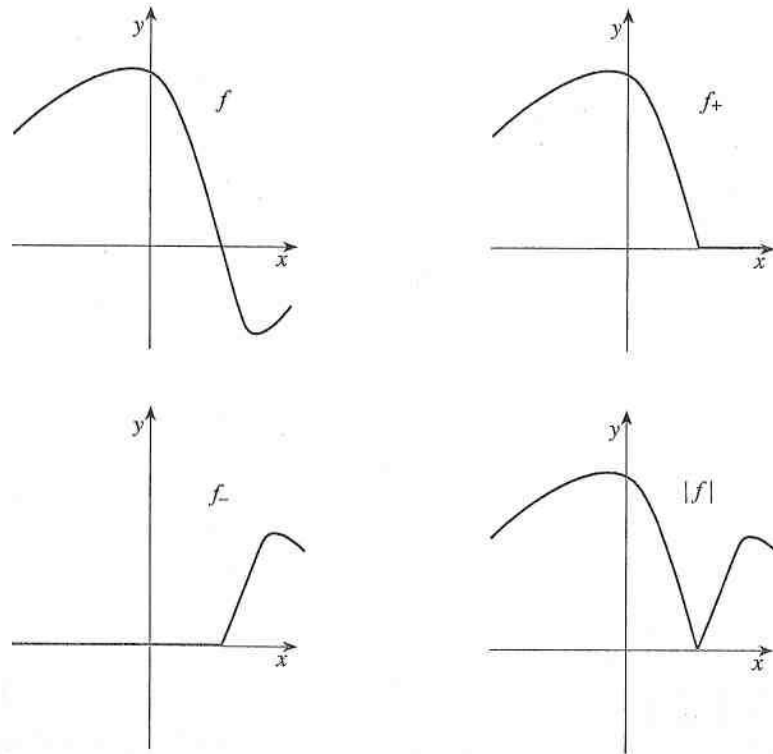
Per definizione,  $|f|$ ,  $f_+$  ed  $f_-$  sono non negative. Geometricamente, nel caso di una variabile reale, ciò significa che i grafici di tali funzioni non hanno punti nel semipiano  $y < 0$ . In particolare,  $f_-(x) = 0$  per ogni  $x \in X$  se  $f$  è non negativa in  $X$ ; analogamente  $f_+(x) = 0$  per ogni  $x \in X$  se  $f$  è non positiva in  $X$ .

Dato il grafico della funzione  $f$ , è semplice ricavare il grafico delle funzioni  $|f|$ ,  $f_+$  ed  $f_-$  (si veda Figura 2.34). Poiché

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

il grafico della funzione  $|f|$  (ovvero, si ricordi, l'insieme delle coppie ordinate  $(x, |f(x)|)$ ) coincide con quello di  $f$  nel semipiano  $y \geq 0$ , mentre dove  $f(x) < 0$  il grafico viene ribaltato rispetto all'asse  $y = 0$ , in quanto in questo caso  $(x, |f(x)|) = (x, -f(x))$ . Per come è definita  $f_-$ , il suo grafico coincide con l'asse  $y = 0$  nei punti in cui  $f(x) > 0$ , mentre (come illustrato nel caso del valore assoluto) nei punti in cui  $f(x) < 0$  il grafico di  $f$  viene ribaltato rispetto all'asse  $y = 0$ . Il grafico di  $f_+$  si motiva allo stesso modo.

**Figura 2.34** Grafici di  $f, f_+, f_-, |f|$ .

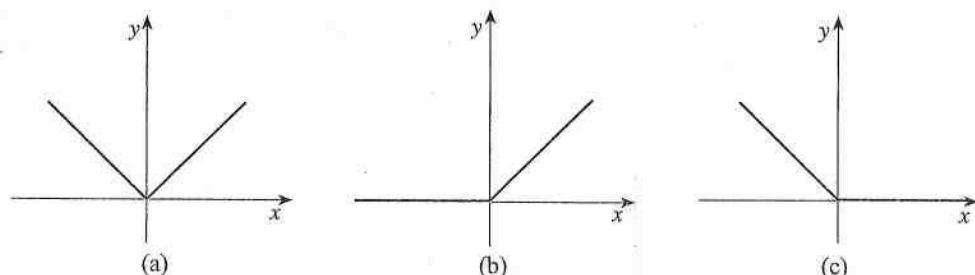


### ESEMPIO 2.32

Se  $f$  è l'identità su  $\mathbb{R}$ , ovvero  $f(x) = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ottengono le funzioni  $|f|(x) = |x|$ ,  $f_+(x) = x_+$  e  $f_-(x) = x_-$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , i cui grafici sono riportati nella Figura 2.35.

**Figura 2.35**

- a)  $|f|(x) = |x|$ ;  
 b)  $f_+(x) = x_+$ ;  
 c)  $f_-(x) = x_-$ .



Osserviamo che  $\forall x \in X$

$$\begin{cases} f(x) = f_+(x) - f_-(x) \\ |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \end{cases} \quad (2.15)$$

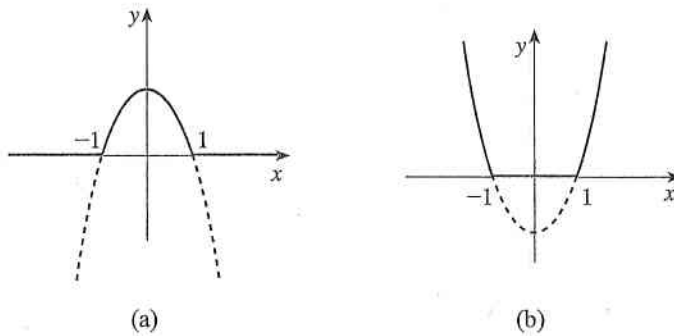
Quindi  $f$  e  $|f|$  possono essere interpretate come combinazioni lineari di  $f_+$  e  $f_-$ :

$$f = f_+ - f_- \quad , \quad |f| = f_+ + f_-$$

(si noti:  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = \pm 1$ ).

Sia  $f(x) = 1 - x^2$ . Allora (si veda Figura 2.36)

$$f_+(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



**ESEMPIO 2.33**

**Figura 2.36** a) Grafico di  $f_+(x) = (1 - x^2)_+$ ; b) grafico di  $f_-(x) = (1 - x^2)_- = (x^2 - 1)_+$ .

Le composizioni introdotte nella Definizione 2.18 possono essere commutate, considerando cioè le funzioni

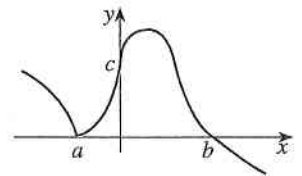
$$x \mapsto f(|x|), \quad x \mapsto f(x_+), \quad x \mapsto f(x_-).$$

Poiché, come abbiamo osservato nel Paragrafo 2.5, la composizione non è commutativa, il risultato sarà in generale diverso: illustriamolo con un esempio.

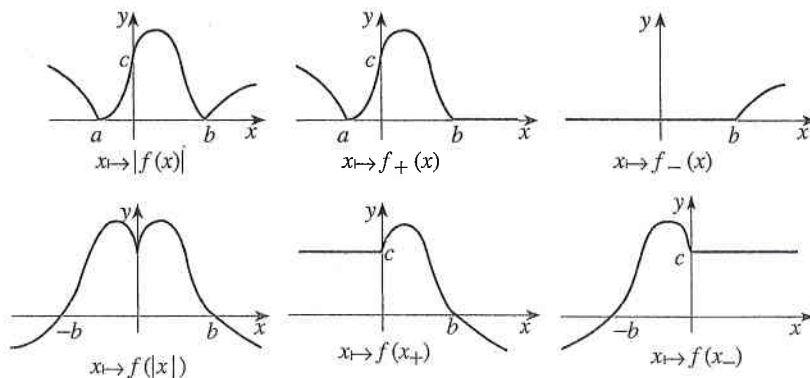
Sia  $f$  la funzione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  il cui grafico approssimativo è riportato nella Figura 2.37. Nella Figura 2.38 sono rappresentati i grafici approssimativi delle funzioni

$$|f(x)|, \quad f_+(x), \quad f_-(x), \quad f(|x|), \quad f(x_+), \quad f(x_-).$$

Per caratterizzare il dominio e il grafico qualitativo di  $x \mapsto f(|x|)$  basta osservare che tale funzione coincide con  $f(x)$  per  $x \geq 0$  (quindi il grafico è identico a quello di  $f(x)$  per  $x \geq 0$ ) ed è pari: perciò sia il dominio che il grafico sono simmetrici rispetto all'asse delle  $y$ . Per studiare  $f(x_+)$  ed  $f(x_-)$ , conviene scriverle in modo esplicito: ad esempio



**Figura 2.37**  $x \mapsto f(x)$ .



**Figura 2.38** Grafici di  $|f(x)|, f_+(x), f_-(x), f(|x|), f(x_+)$  e  $f(x_-)$ , con  $f$  come in Figura 2.37

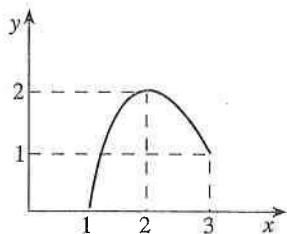
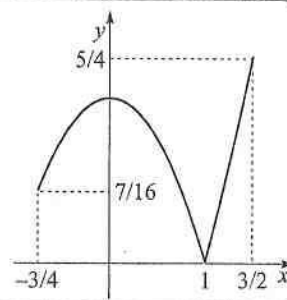
$$f(x_-) = \begin{cases} f(0) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(0) & \text{se } x \geq 0 \\ f(|x|) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Perciò il grafico di  $f(x_-)$  è coincide con la semiretta  $y = f(0)$  per  $x \geq 0$  e coincide con quello di  $f(|x|)$  per  $x < 0$ .

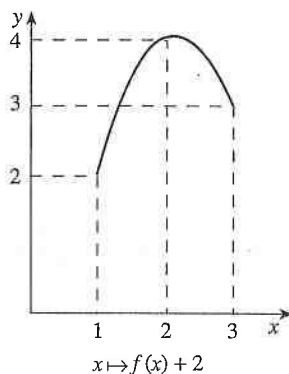
**ESEMPIO 2.35****Figura 2.39**

$$f : [-3/4, 3/2] \mapsto \mathbb{R}, \\ f(x) = |x^2 - 1|$$

Si vuole determinare (se esistono) il massimo e il minimo assoluto della funzione  $f : [-3/4, 3/2] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = |x^2 - 1|$ . Tracciandone il grafico qualitativo come in Figura 2.39, si ottiene immediatamente la risposta: poiché  $\text{im } f = [0, 5/4]$ , si ha  $\min f = 0$  e  $\max f = 5/4$ .

**Figura 2.40**

$$x \mapsto f(x).$$

**Figura 2.41**

Oltre a quelle appena illustrate, vi sono altri tipi di composizione “standard” che si incontrano spessissimo nelle applicazioni. Sia il dominio che il grafico qualitativo sono anche in questi casi facilmente ricavabili: per illustrare il procedimento si utilizzerà a mo’ di esempio la funzione  $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  il cui grafico è indicato nella Figura 2.40.

**Traslazione della variabile dipendente**

Per  $A \in \mathbb{R}$ , il cambio di coordinate  $y \mapsto y + A$  modifica la posizione dello zero sull’asse delle  $y$  mantenendo invariata la scala. La funzione composta associata a questa operazione è

$$F : \text{dom } F \ni x \mapsto f(x) + A.$$

Il suo dominio naturale coincide con  $\text{dom } f$ , mentre il suo grafico è costituito dai punti  $(x, f(x) + A)$ : è quindi traslato di  $|A|$  parallelamente all’asse delle  $y$ , verso l’alto se  $A > 0$ , verso il basso se  $A < 0$ . In Figura 2.41 è illustrato il caso  $A = 2$ .

**Traslazione della variabile indipendente**

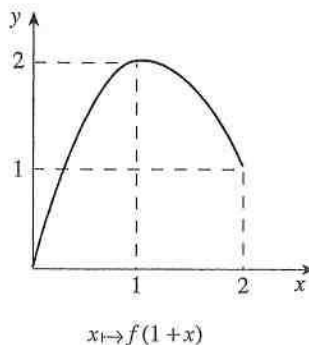
Per  $A \in \mathbb{R}$ , il cambio di coordinate  $x \mapsto x + A$  modifica la posizione dello zero sull’asse delle  $x$  mantenendo invariata la scala. La funzione composta associata a questa operazione è

$$F : \text{dom } F \ni x \mapsto f(x + A).$$

Il suo dominio naturale e il suo grafico sono traslati di  $|A|$  parallelamente all’asse delle  $x$ , verso sinistra se  $A > 0$ , verso destra se  $A < 0$ : infatti

$$\text{dom } F = \{x \in \mathbb{R} : x + A = \hat{x} \in \text{dom } f\} = \{\hat{x} - A : \hat{x} \in \text{dom } f\}.$$

In Figura 2.42 è illustrato il caso  $A = 1$ .

**Figura 2.42**



**Riscaldamento della variabile dipendente**

Per  $A \in \mathbb{R}^+$ , il cambio di coordinate  $y \mapsto Ay$  modifica la scala sull'asse delle  $y$  mantenendo invariata l'origine. La funzione composta associata a questa operazione è

$$F : \text{dom } F \ni x \mapsto Af(x).$$

Il suo dominio naturale coincide con  $\text{dom } f$ , mentre il suo grafico è costituito dai punti  $(x, Af(x))$ , quindi è riscaldato parallelamente all'asse delle  $y$ : è "espanso" se  $A > 1$ , mentre è "compresso" se  $A \in (0, 1)$ . In Figura 2.43 è illustrato il caso  $A = 2$ .

**Riscaldamento della variabile indipendente**

Per  $A \in \mathbb{R}^+$ , il cambio di coordinate  $x \mapsto Ax$  modifica la scala sull'asse delle  $x$  mantenendo invariata l'origine. La funzione composta associata a questa operazione è

$$F : \text{dom } F \ni x \mapsto f(Ax).$$

Il suo dominio naturale e il suo grafico sono "espansi" se  $A \in (0, 1)$ , o "compressi" se  $A > 1$ , parallelamente all'asse delle  $x$ : infatti

$$\text{dom } F = \{x \in \mathbb{R} : Ax = \hat{x} \in \text{dom } f\} = \{\hat{x}/A : \hat{x} \in \text{dom } f\}.$$

In Figura 2.44 è illustrato il caso  $A = 2$ .

**Riflessione della variabile dipendente**

Il cambio di coordinate  $y \mapsto -y$  modifica il verso dell'asse delle  $y$  mantenendone invariate origine e scala. La funzione composta associata a questa operazione è

$$F : \text{dom } F \ni x \mapsto -f(x).$$

Il suo dominio naturale coincide con  $\text{dom } f$ , mentre il suo grafico è costituito dai punti  $(x, -f(x))$  e quindi è "ribaltato" rispetto all'asse delle  $x$ , come illustrato in Figura 2.45.

**Riflessione della variabile indipendente**

Il cambio di coordinate  $x \mapsto -x$  modifica il verso dell'asse delle  $x$  mantenendone invariate origine e scala. La funzione composta associata a questa operazione è

$$F : \text{dom } F \ni x \mapsto f(-x).$$

Come illustrato in Figura 2.46, sia il dominio naturale che il grafico sono "ribaltati" rispetto all'asse delle  $y$ : infatti

$$\text{dom } F = \{x \in \mathbb{R} : -x = \hat{x} \in \text{dom } f\} = \{-\hat{x} : \hat{x} \in \text{dom } f\}.$$

Le composizioni finora illustrate possono ovviamente essere combinate tra loro: i prossimi esempi mostrano come ciò consenta di identificare il grafico qualitativo di funzioni anche piuttosto complicate, evidenziando ancora una volta l'importanza del concetto di funzione composta.

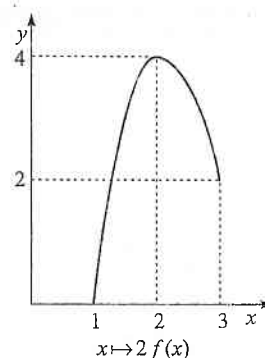


Figura 2.43

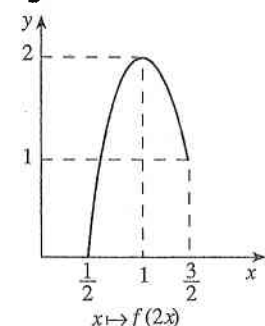


Figura 2.44

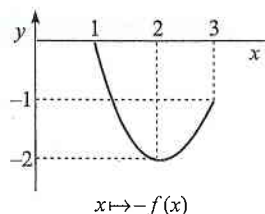


Figura 2.45

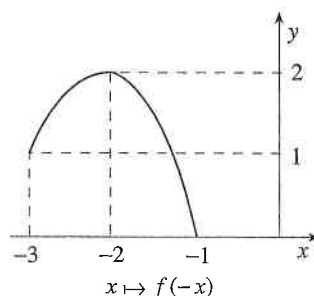


Figura 2.46

**ESEMPIO 2.36**

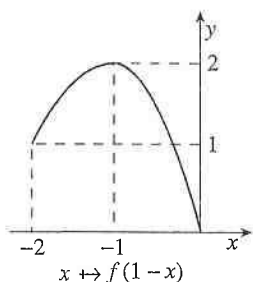


Figura 2.47

**ESEMPIO 2.37**

Sia  $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  come in Figura 2.40. La funzione  $x \mapsto f(1-x)$  combina una riflessione e una traslazione della variabile indipendente. Posto  $g_1(x) = -x$  e  $g_2(x) = 1+x$ , si ha infatti

$$f(g_2(g_1(x))) = f(1+g_1(x)) = f(1-x),$$

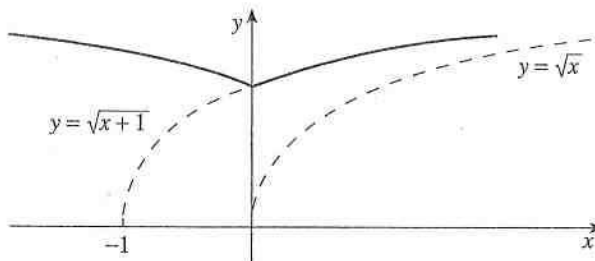
ovvero  $f(1-x) = (f \circ g_2)(-x)$ .

Guidati da questa osservazione, tracciamo anzitutto il grafico della funzione  $h(x) = (f \circ g_2)(x) = f(1+x)$ : in effetti esso è già disponibile nella Figura 2.42. Infine tracciamo il grafico della funzione  $x \mapsto h(-x) = f(1-x)$  "ribaltando" il grafico di  $h$  rispetto all'asse  $y$ . Il risultato è quello di Figura 2.47.

Figura 2.48

$x \mapsto \sqrt{|x|+1}$ .

Sia  $f(x) = \sqrt{|x|+1}$ . Il dominio di  $t \mapsto \sqrt{t}$  è  $[0, +\infty)$ ; d'altra parte  $|x|+1 \geq 1 > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , quindi  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ . La  $f$  è pari (infatti  $f(-x) = \sqrt{|-x|+1} = \sqrt{|x|+1} = f(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ) ed è strettamente crescente in  $[0, +\infty)$ , essendo funzione composta di due funzioni strettamente crescenti (lasciamo la verifica allo studente). Si noti che  $f(x) = \sqrt{x+1}$  per ogni  $x \geq 0$ , ovvero il suo grafico (per  $x \geq 0$ ) è quello di  $x \mapsto \sqrt{x}$  traslato di 1 a sinistra. Per  $x < 0$ , il grafico si ottiene immediatamente per la parità di  $f$ . Il grafico della funzione è riportato nella Figura 2.48.



**ESEMPIO 2.38**

Si vuole tracciare un grafico approssimativo della funzione  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x > 3 \\ ||x^2 - 4| - 1| - 2 & \text{se } x \in [0, 3]. \end{cases}$$

Per  $x > 3$  il grafico è banale. Per  $x \in [0, 3]$  procediamo tracciando in sequenza i grafici delle funzioni  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x^2 - 1$ , ecc., come indicato nella Figura 2.49 (per ragioni tipografiche, le scale variano da grafico a grafico). In Figura 2.50, il grafico completo della funzione  $f$ .

Figura 2.49

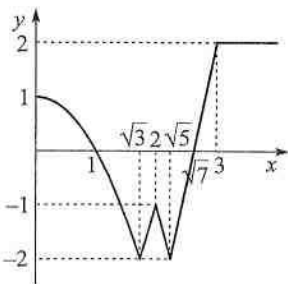
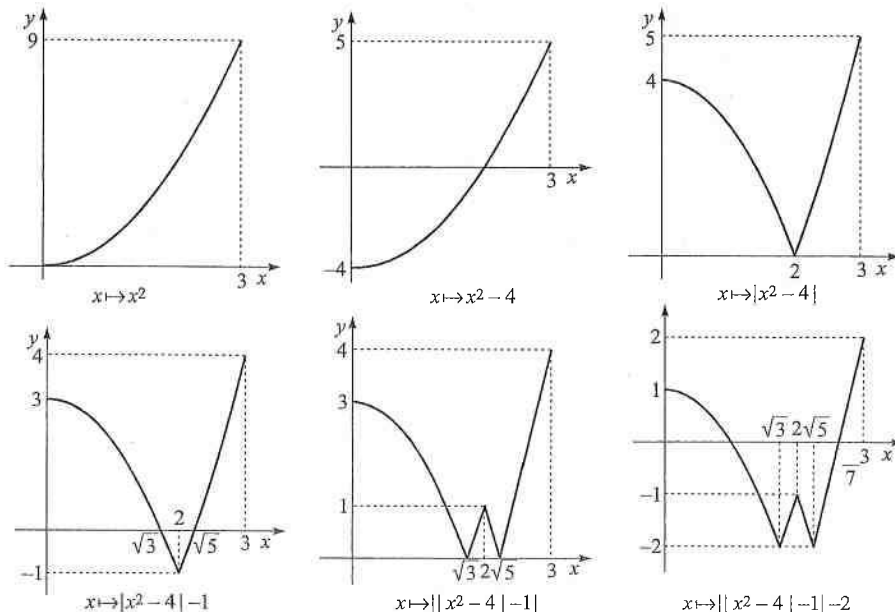


Figura 2.50

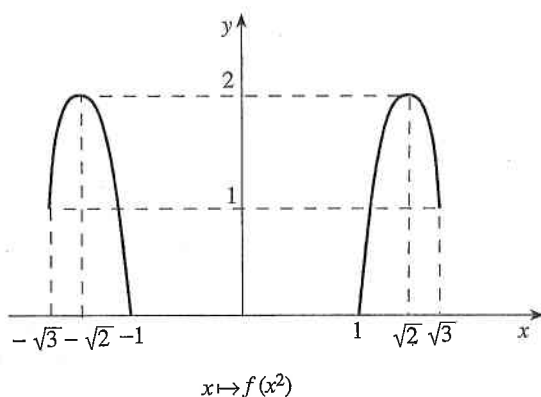
Concludiamo il paragrafo con due esempi di composizione meno immediati (soprattutto il secondo).

Sia  $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  come in Figura 2.40. Si vuole descrivere la funzione  $x \mapsto f(x^2)$ . Anzitutto, il dominio naturale è dato da

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \text{dom } f = [1, 3]\} = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}].$$

Posto  $h(x) = x^2$ , si noti che  $h$  è crescente in  $[1, \sqrt{3}]$  e decrescente in  $[-\sqrt{3}, -1]$ , quindi, per il Teorema 2.2, la funzione composta  $f(x^2) = f(h(x))$  è crescente in  $[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]$  e in  $[1, \sqrt{2}]$ , mentre è decrescente in  $[-\sqrt{2}, -1]$  e in  $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ . Infine, si osservi che  $f(x^2)$  è pari nel suo dominio, infatti  $-x \mapsto f((-x)^2) = f(x^2)$ .

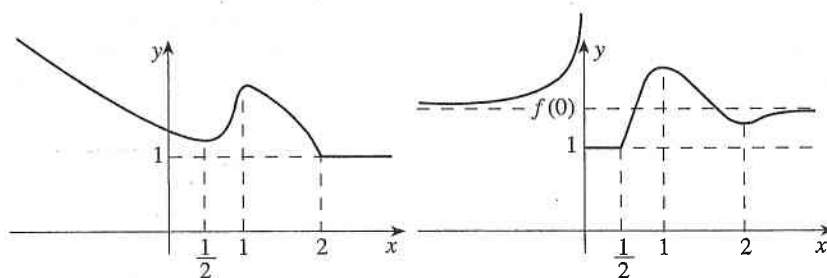
Il grafico della funzione  $f(x^2)$  è riportato nella Figura 2.51.



## ESEMPIO 2.39

Figura 2.51 Grafico di  $f(x^2)$ , con  $f$  come in Figura 2.40

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione il cui grafico è riportato nella Figura 2.52a. Il dominio della funzione  $f(1/x)$  è  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Utilizzando il grafico della funzione  $1/x$  (si veda Figura 2.14), non è difficile farsi un'idea dell'andamento qualitativo del grafico di  $f(1/x)$ . Il risultato è stato indicato in Figura 2.52b.



## ESEMPIO 2.40

Figura 2.52 Grafico di  $x \mapsto f(x)$  (a); grafico di  $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$  (b).

Determinare il dominio delle seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ;

b)  $f(x) = \frac{1}{2x-2}$ ;

c)  $f(x) = \frac{3x-4}{x-1} \left( = \frac{3x-3-1}{x-1} = 3 - \frac{1}{x-1} \right)$ ;

d)  $f(x) = \frac{1}{3-x}$ ;

## ESERCIZIO 2.16



- e)  $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ ;  
 f)  $f(x) = \frac{x+2}{1-3x}$ ;  
 g)  $f(x) = \sin(2x)$ ;  
 h)  $f(x) = \sin(x-1)$ ;  
 i)  $f(x) = \sqrt{\sin(1-x)}$ ;  
 j)  $f(x) = 2 - \sin^2(x-1)$ ;  
 k)  $f(x) = 1 + |\sin(x-1)|$ ;  
 l)  $f(x) = \sin(2x-1)$ ;  
 m)  $f(x) = \arcsin(2x)$ ;  
 n)  $f(x) = \arctg(2x+4)$ ;  
 w)  $f(x) = [2x+1]$  ( $x \mapsto [x]$  indica la funzione parte intera);  
 x)  $f(x) = H(2-3x)$  ( $x \mapsto H(x)$  indica la funzione di Heaviside).
- o)  $f(x) = \sqrt{\arccos x}$ ;  
 p)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  
 q)  $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ;  
 r)  $f(x) = \log_3\left(\frac{3(x-1)}{x-3}\right)$ ;  
 s)  $f(x) = ||x| - 1|$ ;  
 t)  $f(x) = \log_3|3x-2|$ ;  
 u)  $f(x) = |\sin(3|x|) + 1/2|$ ;  
 v)  $f(x) = \begin{cases} \min\{1, -x\} & \text{se } x < 0 \\ \min\{2, x\} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

## 2.8 Equazioni e disequazioni: metodo grafico

Illustreremo, tramite alcuni esempi molto elementari, come intervengono le funzioni, o meglio i loro grafici (da qui il nome **metodo grafico**), nella risoluzione di equazioni e disequazioni.

### ESEMPIO 2.41

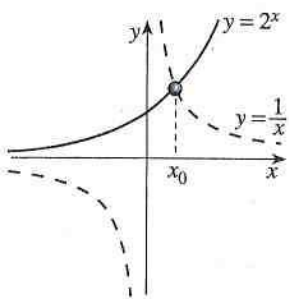


Figura 2.53

### ESEMPIO 2.42

Consideriamo l'equazione  $x2^x = 1$ . Non è possibile determinarne analiticamente la soluzione. Cominciamo a vedere se esiste almeno una soluzione. Chiaramente  $x = 0$  non è soluzione, quindi l'equazione è equivalente a  $2^x = 1/x$ .

Riportiamo nella Figura 2.53 i grafici delle funzioni  $f(x) = 2^x$  e  $g(x) = 1/x$ . La figura fa pensare che essi si intersechino nel primo quadrante. Nel Paragrafo 6.3 renderemo rigorosa l'esistenza di tale intersezione e quindi l'esistenza di almeno una soluzione. Possiamo osservare inoltre che nel primo quadrante non possono esistere ulteriori punti di intersezione. Infatti  $f$  è strettamente crescente e  $g$  è strettamente decrescente in  $\mathbb{R}^+$ . Ovviamente non possono esistere soluzioni negative, essendo  $f$  positiva e  $g$  negativa in  $\mathbb{R}^-$ .

In conclusione, il procedimento descritto suggerisce che l'equazione  $x2^x = 1$  ammette un'unica soluzione  $x_0$  e tale soluzione è positiva.

Nell'Esempio 1.4 abbiamo determinato analiticamente le soluzioni della disequazione

$$|x+2| \leq |2x-3| + 1. \quad (2.16)$$

Una seconda possibilità è tracciare prima i grafici delle funzioni  $f(x) = |x+2|$  e  $g(x) = |2x-3| + 1$ , come in Figura 2.54.

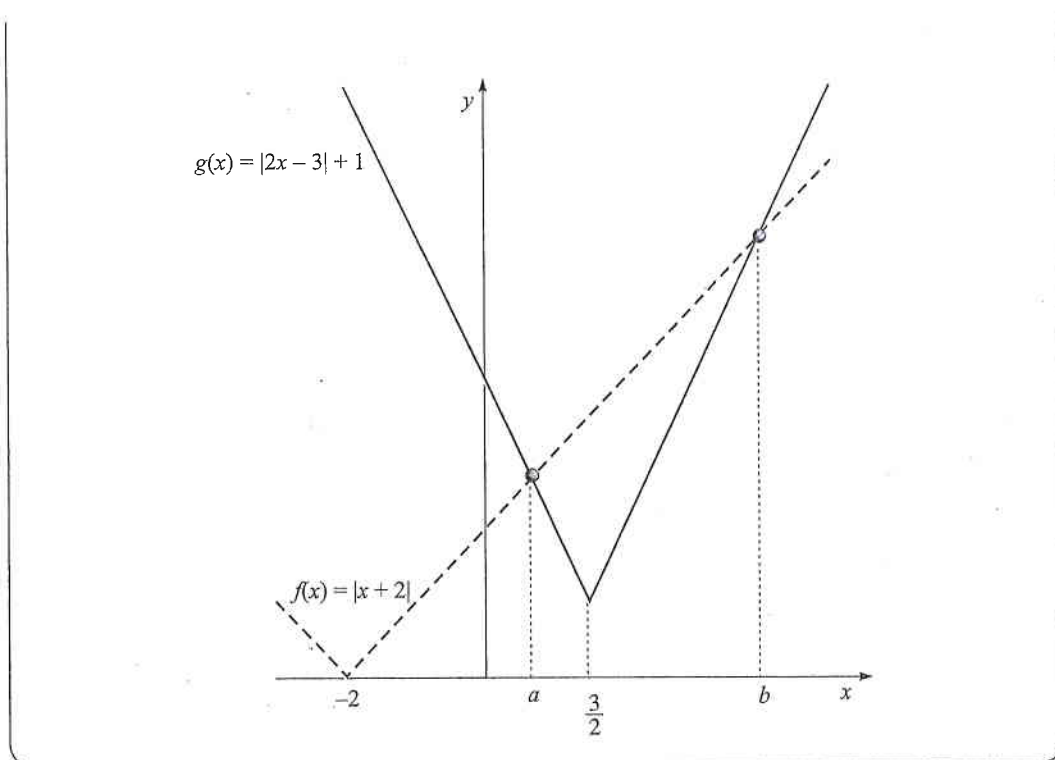
Si osservi che il grafico di  $f$  è il grafico di  $x \rightarrow |x|$  traslato di 2 a sinistra mentre il grafico di  $g(x) = 2|x-3/2| + 1$  è quello di  $2|x|$  traslato di 3/2 a destra e di 1 verso l'alto. Graficamente diventa evidente che la (2.16) è equivalente a

$$x \leq a \quad \text{oppure} \quad x \geq b$$

dove  $a$  e  $b$  sono le soluzioni (uniche!) di, rispettivamente,

$$a+2 = -2\left(a - \frac{3}{2}\right) + 1, \quad b+2 = +2\left(b - \frac{3}{2}\right) + 1$$

cioè due equazioni facilissime, con soluzioni  $a = 2/3$ ,  $b = 4$ .



**Figura 2.54** Studio di  $|x + 2| \leq |2x - 3| + 1$  attraverso il metodo grafico.

Nell'esempio precedente si è visto come il metodo grafico (in questo caso, l'uso della Figura 2.54) possa aiutare a ridurre i calcoli algebrici. Ovviamente, tale riduzione dipende fortemente dal tipo di disequazione (in certi casi è molto facile tracciare i grafici, mentre in altri casi i calcoli algebrici sono immediati). Il metodo grafico diventa importante quando i calcoli algebrici si complicano notevolmente.

Determiniamo per quali  $x \geq 0$  vale la disuguaglianza

$$\sqrt[6]{x} \geq 5x - 3.$$

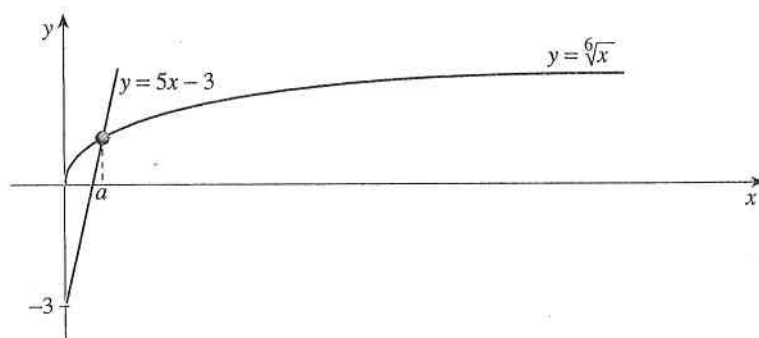
I grafici delle funzioni  $x \mapsto \sqrt[6]{x}$  e  $y \mapsto 5x - 3$  sono stati riportati nella Figura 2.55.

Si capisce facilmente da tale figura che esiste un solo numero positivo  $a > 0$  tale che

$$\sqrt[6]{a} = 5a - 3$$

e che la disuguaglianza è valida per  $x \in [0, a]$ . I concetti che introdurremo nei capitoli successivi permetteranno di rendere rigorose queste affermazioni.

In questo caso non è possibile calcolare  $a$  esplicitamente (non ci sono metodi generali per risolvere  $a = (5a - 3)^6$ ), ma in ogni caso il metodo grafico serve per strutturare il problema.



**Figura 2.55** Studio di  $\sqrt[6]{x} \geq 5x - 3$  ( $x \geq 0$ ) attraverso il metodo grafico.

#### ESEMPIO 2.43

**ESERCIZIO 2.17**

Risolvere le seguenti disequazioni:

a)  $\sin x \geq \cos x$ ;

b)  $f(x) < \arctg(2x + 1)$ , dove  $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) & \text{se } 2x + 1 > 0 \\ -1 & \text{se } 2x + 1 \leq 0. \end{cases}$

**ESERCIZIO 2.18**

Determinare per quali valori di  $C \in \mathbb{R}$  l'equazione  $\sin(Cx) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ammette un'unica soluzione nell'intervallo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**ESERCIZIO 2.19**

Utilizzare il metodo grafico per risolvere la disuguaglianza dell'Esempio 1.6 e le disuguaglianze (a)-(d) dell'Esercizio 1.2.



# Appendice 2.A

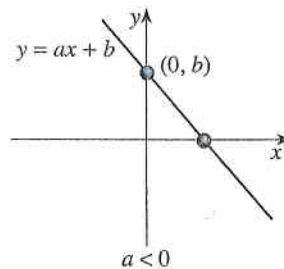
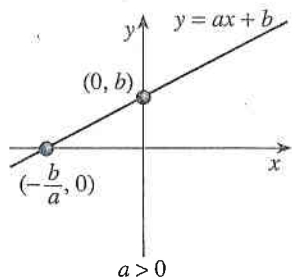
## Funzioni lineari e funzioni quadratiche

### La funzione lineare

$$f(x) = ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

ha come grafico la retta nel piano, con **coefficiente angolare**  $a$ , passante per i punti  $(0, b)$  e, se  $a \neq 0$ ,  $(-b/a, 0)$  (si veda Figura 2.A.1). Se  $a = 0$ ,  $f$  si dice **funzione costante**; se  $a \neq 0$ ,  $\text{im } f = \mathbb{R}$  e

$$f \text{ è strettamente (de)creciente} \Leftrightarrow a > 0 \text{ } (< 0).$$



**Figura 2.A.1** Grafici di funzioni lineari.

### La funzione quadratica

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0)$$

ha come grafico una parabola (si veda Figura 2.A.2).

È ben noto che

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{se } b^2 - 4ac > 0 \\ x_0 = -\frac{b}{2a} & \text{se } b^2 - 4ac = 0 \\ \text{mai} & \text{se } b^2 - 4ac < 0. \end{cases} \quad (2.A.1)$$

La costante  $b^2 - 4ac$  si dice **discriminante** del polinomio quadratico. Ricordiamo come ricavare la (2.A.1). Per  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{e } b^2 - 4ac \geq 0 \end{aligned}$$

e si trova la (2.A.1). Si noti inoltre che

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

e quindi,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \begin{cases} \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \text{se } a > 0 \\ \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

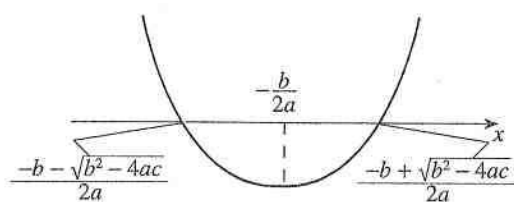
essendo

$$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \begin{cases} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } a > 0 \\ \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

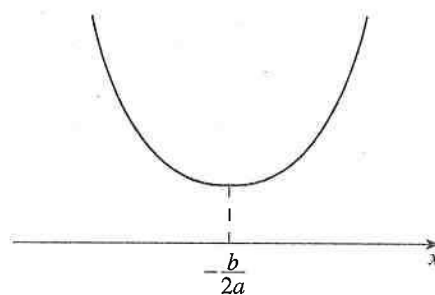
Tali proprietà sono visualizzate nella Figura 2.A.2.

**Figura 2.A.2**

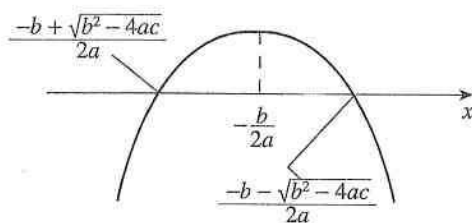
$x \mapsto ax^2 + bx + c$   
( $a \neq 0$ ).



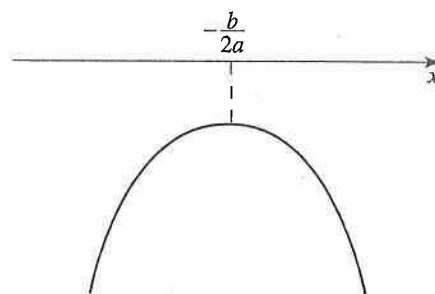
(1)  $a > 0, b^2 - 4ac > 0$



(2)  $a > 0, b^2 - 4ac < 0$



(3)  $a < 0, b^2 - 4ac > 0$



(4)  $a < 0, b^2 - 4ac < 0$



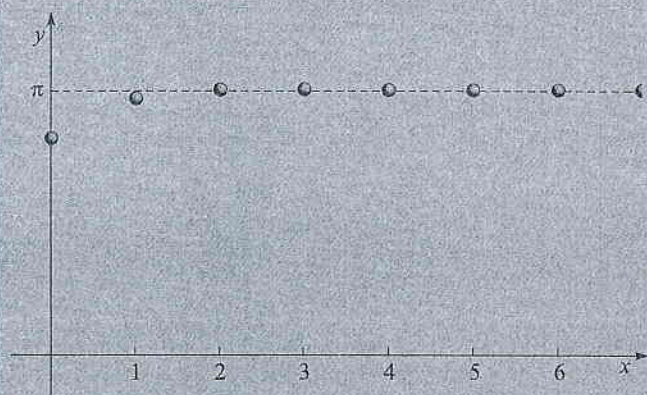
# Introduzione alle proprietà locali e al concetto di limite

# 3

## FILO ROSSO Il concetto di limite

Tornando al metodo di esaustione, osserviamo che, una volta definiti seno e coseno, l'area del poligono  $p_n$  di  $6 \cdot 2^n$  lati inscritto nella circonferenza si esprime molto semplicemente:

$$\text{area}(p_n) = a_n = 6 \cdot 2^{n-1} \sin(2^{1-n}\pi/6).$$



Vorremmo disporre di uno strumento matematico che ci permetta di dire che

“la successione

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{n-1}}\right)}{\frac{1}{6 \cdot 2^{n-1}}}$$

si avvicina a  $\pi$  quando  $n$  diventa grande”.

La formalizzazione matematica del concetto di *limite* è alla base dello sviluppo dell'analisi matematica e fornisce lo strumento per eccellenza per introdurre concetti fondamentali quali continuità, derivata e integrale. Come nel caso dell'estremo superiore e inferiore, si tratta di un concetto intimamente legato a quelli di *completezza* e di *approssimazione*. Nonostante l'idea intuitiva sia chiara, bisogna attendere Cauchy (il suo *Course d'Analyse* è del 1821) per arrivare alla sistemazione delle basi dell'analisi fondate sul concetto di limite. Col senno di poi, non è così difficile definirlo rigorosamente. Vogliamo

provareci, almeno nel caso in cui  $a_n$  è una successione che “si avvicina a un numero reale  $\ell$  quando  $n$  diventa grande”? Il primo tentativo,

“la distanza tra  $a_n$  e  $\ell$ ,  $|a_n - \ell|$ , diventa piccola quando  $n$  diventa grande”,

è chiaramente insoddisfacente: che cosa vuol dire “piccolo” e “grande”? Bisogna quantificarlo, ovvero dire “più piccolo (o più grande) di certo un numero positivo” (questo sarà il concetto di *intorno*). Il secondo tentativo,

“ $|a_n - \ell| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  è piccolo) quando  $n > N$  ( $N > 0$  è grande)”,

è però altrettanto insoddisfacente, perché non siamo riusciti ad eliminare le parole “piccolo” e “grande”. Il punto cruciale è che bisogna precisare il senso della frase usata nel primo tentativo:

“ $|a_n - \ell|$  diventa arbitrariamente piccolo quando  $n$  diventa sufficientemente grande”.

Questo è un bel passo avanti. Ora, “sufficientemente” vuol dire che è sufficiente trovare un  $N$  per cui le cose funzionano, e “arbitrariamente” vuol dire che  $\varepsilon$  è *qualunque* (in particolare, piccolo a piacere). Il terzo tentativo,

“per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che  $|a_n - \ell| < \varepsilon$  quando  $n > N$ ”,

è giusto.

Se invece  $f(x)$  è una funzione che “si avvicina a  $\ell$  quando  $x$  si avvicina a  $x_0 \in \mathbb{R}$ ”, si può ripetere il ragionamento con “ $n > N$ ” rimpiazzato da “ $|x - x_0| < \delta$ ”:

“per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  quando  $|x - x_0| < \delta$ ”.

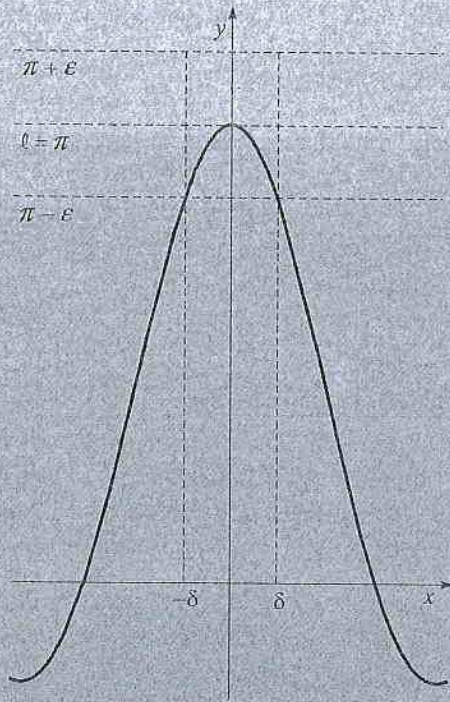
Tuttavia, nei casi più interessanti la funzione  $f$  non è definita nel punto  $x_0$ , quindi non possiamo scrivere



re  $f(x_0)$  al posto di  $l$ ; anche se lo fosse, *non vogliamo* che il concetto di limite dipenda dal valore della funzione in  $x_0$ . Per esempio la funzione

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

non è definita in  $x = 0$ .



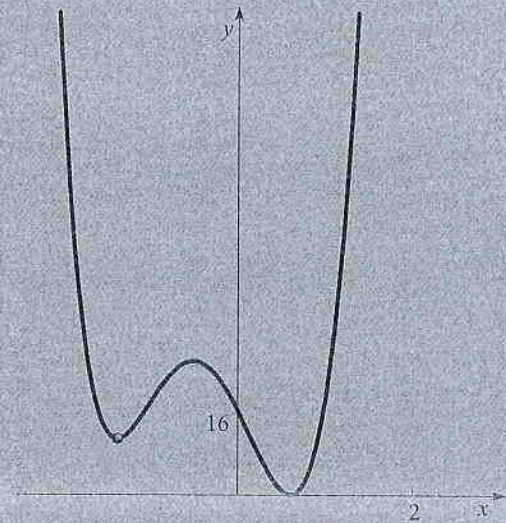
Perciò

“per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$   
tale che  $|f(x) - l| < \varepsilon$   
quando  $0 < |x - x_0| < \delta$ ”.

Resta un “dettaglio”, ossia escludere l’eventualità che non ci sia alcun elemento  $x \in \text{dom} f$  tale che  $0 < |x - x_0| < \delta$ : lo sistemeremo con il concetto di *punto di accumulazione*.

Invitiamo il lettore a riflettere molto bene se questa definizione rigorosa formalizzi veramente la nozione intuitiva del limite. Ripetiamo, rifletterci vale assolutamente la pena: una volta introdotto lo strumento del limite, il “resto” (continuità, derivata, integrale, ecc.) segue “facilmente”.

In questo libro abbiamo scelto un approccio che privilegia il concetto di intorno a quello di distanza. Il motivo è semplice: il concetto di intorno unifica i due casi appena discussi (e tutti gli altri possibili casi): per esempio, le due frasi “ $x$  diventa grande” e “ $x$  si avvicina a  $x_0$ ” diventano identiche se espresse in termini di intorni. Una volta compreso questo fatto, la nozione rigorosa di limite si avvicina molto di più all’intuizione. Inoltre la nozione di intorno aiuta a comprendere la natura *locale* di molte altre proprietà delle funzioni, per esempio il concetto di *minimo locale* - infatti è proprio da qui che inizieremo il capitolo. Per intuire di cosa si tratti, basta ripensare al potenziale, alla pallina, e guardare la figura seguente.





Nei capitoli precedenti abbiamo introdotto concetti che ci permettono di descrivere *proprietà globali* delle funzioni. È facile però capire che se, per esempio, si deve risolvere un'equazione del tipo  $f(x) = C$ , la conoscenza di  $\sup f$  e  $\inf f$  non basterà in generale per poter stabilire il numero di soluzioni. A tale scopo, nella Figura 3.1 sono stati rappresentati i grafici di tre funzioni definite nello stesso intervallo e con lo stesso estremo superiore e inferiore. Si noti che le ultime due funzioni hanno anche la stessa immagine. Chiaramente però, il numero di soluzioni dell'equazione  $f(x) = 1$  è diverso (0, 1 e 4). Occorrono quindi alcuni strumenti per studiare le *proprietà locali* delle funzioni, ovvero l'andamento della funzione in "prossimità" di un punto.

### 3.1 Intorni

Come abbiamo visto nel Capitolo 1, è possibile rappresentare geometricamente i numeri reali su una retta, la *retta reale*. Guidati anche dall'esperienza quotidiana, se si considerano due punti  $x$  e  $y$  è naturale considerare il numero  $|x - y|$  come *distanza* di  $x$  e  $y$ . Formalizziamo da un punto di vista matematico tale concetto.

#### DEFINIZIONE 3.1

Una funzione  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **distanza** in  $\mathbb{R}$  se verifica le seguenti proprietà:

- (i)  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ,
- (ii)  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (iii)  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (**disuguaglianza triangolare**).

Nel seguito ci occuperemo esclusivamente della **distanza euclidea**  $d_e$ , definita in  $\mathbb{R}$  da

$$d_e(x, y) := |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Si verifica facilmente che  $d_e$  verifica (i)-(iii): in particolare, la disuguaglianza triangolare segue dalla (1.8) ponendo  $x_1 = x - z$  e  $x_2 = z - y$ . Altre disuguaglianze che si possono facilmente dedurre e di chiaro significato geometrico sono:

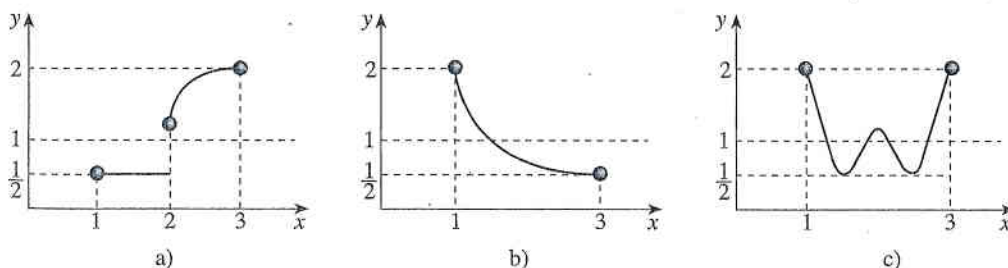
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| \leq |x| + |y| \quad \text{e} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (3.1)$$

Grazie al concetto di distanza è possibile ora precisare che cosa si intende con l'espressione "in prossimità di un punto". Come detto, anche se il prossimo concetto (come molti dei seguenti) ha carattere generale, ci riferiremo sempre alla distanza euclidea in  $\mathbb{R}$ .

#### DEFINIZIONE 3.2

Dati  $x \in \mathbb{R}$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , si dice **intorno sferico** di  $x$  di raggio  $\varepsilon$  l'intervallo

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : d_e(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

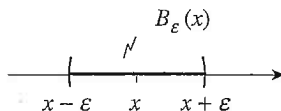


**Figura 3.1** L'equazione  $f(x) = 1$  ha: nessuna soluzione (a), una soluzione (b), quattro soluzioni (c).

## Topologia

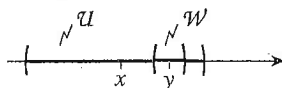
Possiamo quindi associare a ogni elemento  $x \in \mathbb{R}$  una famiglia (non vuota) di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ , gli intorni sferici di  $x$  e  $\mathbb{R}$  stesso, che chiameremo semplicemente *famiglia di intorni di  $x$*  (si veda Figura 3.2).  $\mathbb{R}$  risulta così dotato di una *topologia* (euclidea), che gode, fra le altre, delle seguenti proprietà:

Figura 3.2 L'intorno  $B_\varepsilon(x)$ .



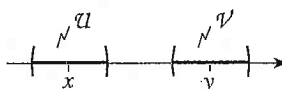
- (i) se  $\mathcal{U}$  è un intorno di  $x$ , allora  $x \in \mathcal{U}$ ;
- (ii) se  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  sono due intorni di  $x$ , lo è anche  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ;
- (iii) se  $\mathcal{U}$  è un intorno di  $x$  e  $y \in \mathcal{U}$ , allora esiste un intorno  $\mathcal{W}$  di  $y$  tale che  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$  (si veda Figura 3.3);

Figura 3.3 La proprietà (iii).



- (iv) (**proprietà di separazione**) se  $x \neq y$ , allora esistono un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x$  e un intorno  $\mathcal{V}$  di  $y$  tali che  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$  (si veda Figura 3.4).

Figura 3.4 La proprietà di separazione.



**Osservazione.** È evidente che un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$  è limitato in  $\mathbb{R}$  se e solo se esiste  $M > 0$  tale  $|x| < M$  per ogni  $x \in E$ , ovvero

$$E \subseteq \mathbb{R} \text{ è limitato se e solo se esiste } M > 0 \text{ tale } E \subseteq B_M(0). \quad (3.2)$$

## Punti di estremo

Un primo esempio di proprietà locale riguarda il concetto di *massimo (minimo) locale o relativo* di una funzione, la cui definizione utilizza gli intorni.

## DEFINIZIONE 3.3

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in X$ . Allora  $x_0$  si dice **punto di minimo (locale, relativo)** di  $f$  e  $f(x_0)$  si dice **minimo (locale, relativo)** di  $f$  se

$$\text{esiste un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \text{ tale che } f(x) \geq f(x_0) \forall x \in \mathcal{U} \cap X. \quad (3.3)$$

Si parla di **minimo locale forte** se

$$\text{esiste un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \text{ tale che } f(x) > f(x_0) \forall x \in \mathcal{U} \cap X, x \neq x_0. \quad (3.4)$$

Si parla di **massimo locale (forte)** se vale la (3.3) (rispettivamente la (3.4)) con la disuguaglianza opposta.

In generale ci si riferisce a punti di massimo e di minimo (locale o globale) come a **punti di estremo (locale o globale)**.

## ESEMPIO 3.1

Nella Figura 3.5 è disegnato il grafico di una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f(a)$  e  $f(x_2)$  sono minimi locali forti,  $f(x_2)$  è il minimo globale di  $f$  in  $[a, b]$ ,  $\max_{[a, b]} f$  non esiste,  $\sup f = M$ ,  $b$  è punto di massimo locale forte,  $x_0$  è punto di massimo locale (ma non forte),  $x_1$  è punto di minimo locale e i punti appartenenti all'intervallo  $(x_0, x_1)$  sono punti di massimo e di minimo locale.



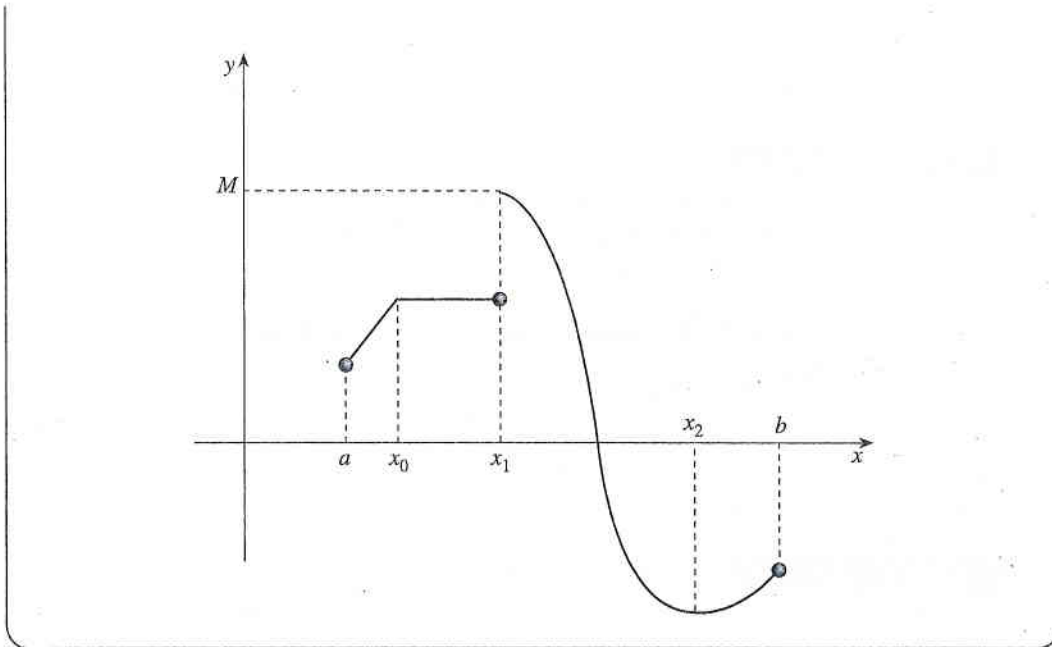


Figura 3.5 Punti di estremo di una funzione.

Nel seguito vedremo che gli interni sono gli strumenti principali per definire il concetto di *limite di funzione*. Come molti studenti avranno già visto durante i propri studi, è utile introdurre un *ampliamento* dell'insieme  $\mathbb{R}$  per considerare il comportamento della funzione per valori molto grandi (o molto negativi) della variabile. Una scelta possibile è quella di  $\mathbb{R}^*$ . Tale ampliamento si ottiene aggiungendo due elementi, indicati con  $-\infty$  e  $+\infty$ , ovvero

$$\mathbb{R}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\};$$

esso prende anche il nome di  $\mathbb{R}$  **esteso** o di **retta ampliata**. Si osservi che gli elementi  $-\infty$  e  $+\infty$  non sono numeri, e  $\mathbb{R}^*$  non è un insieme numerico. Per esempio, non è possibile definire  $(+\infty) + (-\infty)$  compatibilmente con le proprietà dell'insieme numerico  $\mathbb{R}$ . Si può invece estendere in modo naturale l'ordinamento di  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^*$  definendo

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

In  $\mathbb{R}^*$  si considerano anche gli intervalli che contengono  $+\infty$  e/o  $-\infty$ . In tal caso si sostituisce la parentesi quadra a quella tonda utilizzata per gli intervalli definiti in  $\mathbb{R}$ ; per esempio,  $[-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R}^* : x < 3\} = \{-\infty\} \cup (-\infty, 3)$ .

Per dotare  $\mathbb{R}^*$  di una topologia si deve associare ad ogni punto  $x \in \mathbb{R}^*$  una famiglia di interni. Se  $x \in \mathbb{R}$  lo abbiamo già fatto (nella Definizione 3.2). Perciò resta da specificare cosa si intende per "intorno di  $+\infty$ " e "intorno di  $-\infty$ ".

#### DEFINIZIONE 3.4

Si dice **intorno sferico di  $+\infty$**  un qualunque intervallo del tipo

$$(a, +\infty], \quad a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}.$$

Analogamente, si dice **intorno sferico di  $-\infty$**  un qualunque intervallo del tipo

$$[-\infty, b), \quad b \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}.$$

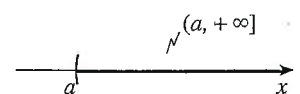


Figura 3.6 Un intorno di  $+\infty$ .

È un semplice esercizio verificare che, con questa definizione, le proprietà (i)-(iv) di pagina 76 sono valide per ogni  $x, y \in \mathbb{R}^*$ .

Per studiare il comportamento di una funzione in prossimità di un punto  $x_0$  appare piuttosto intuitivo richiedere che ogni suo intorno contenga punti del dominio della funzione diversi da  $x_0$  stesso; questo conduce al concetto di *punto di accumulazione*.

**DEFINIZIONE 3.5**

Sia  $E \subset \mathbb{R}^*$ . Un punto  $x \in \mathbb{R}^*$  si dice di **accumulazione** per  $E$  se ogni intorno di  $x$  contiene un punto di  $E$  diverso da  $x$ , ovvero se per ogni intorno  $\mathcal{U}$  di  $x$

$$\mathcal{U} \setminus \{x\} \cap E \neq \emptyset.$$

Un punto  $x \in E$  che non è di accumulazione per  $E$  si dice **isolato**, ovvero:

$$x_0 \in E \text{ è isolato} \Leftrightarrow \text{esiste un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \text{ tale che } E \cap \mathcal{U} = \{x_0\}.$$

Poiché *ogni* intorno di un punto di accumulazione  $x$  per  $E$  deve contenere un punto di  $E$  diverso da  $x$ , ogni intorno di  $x$  contiene in realtà *infiniti* punti di  $E$ . Infatti risulta:

**LEMMA 3.6**

Ogni intorno di un punto di accumulazione per  $E$  contiene **infiniti** punti di  $E$ .

Dimostrazione

Sottolineiamo che un punto di accumulazione per  $E$  può non appartenere a  $E$ , come mostra l'Esempio 3.2b e 3.2c.

**ESEMPIO 3.2**

- L'insieme  $\mathbb{N}$  è costituito solamente da punti isolati: preso  $n \in \mathbb{N}$ , l'intorno  $(n - 1/2, n + 1/2)$  di  $n$  non contiene altri punti di  $\mathbb{N}$  diversi da  $n$ .  $\mathbb{N}$  è privo di punti di accumulazione in  $\mathbb{R}$ . In  $\mathbb{R}^*$  l'unico punto di accumulazione per  $\mathbb{N}$  è  $+\infty$ .
- Tutti i punti di  $E := \{1/n : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$  sono isolati e 0 è l'unico punto di accumulazione. Per provare che 0 è punto di accumulazione, basta osservare che, preso un generico intorno  $\mathcal{U} = (-\varepsilon, \varepsilon)$  di 0,  $\mathcal{U}$  contiene gli infiniti elementi  $1/n \in E$  per cui  $n\varepsilon > 1$ .
- Analogamente l'insieme  $\{n/(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$  è costituito da punti isolati e  $1/2$  è l'unico punto di accumulazione.
- Esaminiamo l'insieme  $\mathbb{Q}$ . Per la proprietà di densità dei numeri razionali e dei numeri irrazionali in  $\mathbb{R}$ , ogni punto  $x \in \mathbb{R}$  è di accumulazione per  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q}$  è privo di punti isolati. Anche  $\pm\infty \in \mathbb{R}^*$  sono di accumulazione per  $\mathbb{Q}$ .

Il seguente teorema fornisce una *condizione sufficiente per l'esistenza in  $\mathbb{R}$  di punti di accumulazione per un insieme* (da qui la sua notevole importanza, come si vedrà in seguito).

**TEOREMA 3.7** Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia  $E \subset \mathbb{R}$  limitato e infinito. Allora esiste in  $\mathbb{R}$  almeno un punto di accumulazione per  $E$ .

Dimostrazione

È evidente (si veda anche il Lemma 3.6) che affinché un insieme ammetta un punto di accumulazione, l'insieme deve essere infinito. D'altra parte, non tutti gli insiemi infiniti hanno un punto di accumulazione in  $\mathbb{R}$ , per esempio  $\mathbb{N}$  ne è privo. Ciò non contraddice il Teorema 3.7 in quanto  $\mathbb{N}$  non è limitato.

La dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass (riportata in rete) si basa su un *procedimento di bisezione*, che vedremo in dettaglio nel Capitolo 6 (si veda il Teorema degli zeri): essendo limitato,  $E$  è contenuto in un intervallo limitato  $[a_0, b_0]$ ; dividendo  $[a_0, b_0]$  in due intervalli di uguale lunghezza, almeno uno dei due, che indichiamo con  $[a_1, b_1]$ , contiene infiniti punti di  $E$ ; così procedendo, si costruiscono intervalli sempre più piccoli,  $[a_n, b_n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , che contengono infiniti punti di  $E$ . Non è difficile far vedere che  $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n \in \mathbb{R}$  e che questo punto è di accumulazione per  $E$ .



**Osservazione.** Il teorema di Bolzano-Weierstrass non vale in  $\mathbb{Q}$ , ovvero non è detto che un sottoinsieme di  $\mathbb{Q}$  limitato e infinito ammetta un punto di accumulazione appartenente a  $\mathbb{Q}$ ; si pensi per esempio all'insieme  $A$  definito nell'Esempio 1.10:  $\sqrt{2}$  è infatti l'unico punto di accumulazione in  $\mathbb{R}$ , ma non appartiene a  $\mathbb{Q}$ . Ciò mostra ancora una volta il ruolo essenziale che la proprietà di completezza di  $\mathbb{R}$  gioca nello sviluppo del calcolo differenziale.

Come abbiamo sottolineato sin dal titolo, in questo capitolo poniamo le basi per lo studio delle "proprietà locali di una funzione". Terminiamo il paragrafo con una definizione che useremo spesso e che formalizza tale concetto intuitivo.

**DEFINIZIONE 3.8**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  punto di accumulazione per  $X$  in  $\mathbb{R}^*$ . Si dice che  $f(x)$  ha una certa proprietà  $\mathcal{P}$  **definitivamente per**  $x \rightarrow x_0$  se

esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0: \forall x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}, f(x)$  ha la proprietà  $\mathcal{P}$ .

La scelta di escludere il punto  $x_0$  da quelli in cui deve valere la proprietà  $\mathcal{P}$  diventerà più chiara alla luce del concetto di limite. Per ora si sottolinea soltanto che, per esempio,

$$f(x) = x^2 > 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow 0 \text{ anche se } f(0) = 0.$$

Infatti, scegliendo per esempio l'intorno  $(-1, 1)$  di  $0$ , si ha che  $x^2 > 0$  se  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\} = (-1, 0) \cup (0, 1)$ .

a) La funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$ , con dominio  $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , è definitivamente limitata e negativa per  $x \rightarrow -\infty$ . Infatti, preso ad esempio l'intorno  $\mathcal{U} = [-\infty, -1)$  di  $-\infty$ , si ha  $-1 < \frac{1}{x} < 0$  per ogni  $x \in \text{dom } f \cap \mathcal{U} = (-\infty, -1)$ . Si noti che  $f$  non è definitivamente limitata per  $x \rightarrow 0$ .

b) Si ha  $2^x < 0.01$  definitivamente per  $x \rightarrow -\infty$ : infatti  $2^x < 0.01$  se (e solo se)  $x \in (-\infty, -2\log_2 10)$ .

**ESEMPIO 3.3**

Dimostrare la seconda disuguaglianza nella (3.1).

**ESECIZIO 3.1**

Determinare i punti isolati e di accumulazione (in  $\mathbb{R}^*$ ) per i seguenti insiemi  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

**ESECIZIO 3.2**

a)  $X = (-\infty, 2] \cup \{3\} \cup (4, +\infty)$ ;

d)  $X = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Q}$ ;

b)  $X = \{p^2 : p \in \mathbb{N}\}$ ;

e)  $X = \{2 - \arcsin(-x^2) : |x| \leq 1\}$ .

c)  $X = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ ;

Determinare l'insieme dei punti di accumulazione in  $\mathbb{R}^*$  per i domini delle seguenti funzioni reali di una variabile reale:

**ESECIZIO 3.3**

a)  $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ ;

d)  $f(x) = \text{tg}(5x^2 + 3x - 15)$ ;

b)  $f(x) = \log_5(3x - 12)$ ;

e)  $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x-4}}$ .

c)  $f(x) = \sqrt{-1 - \sin x}$ ;



## ESERCIZIO 3.4

Determinare, se esistono,  $\max_X f$ ,  $\min_X f$ ,  $\sup_X f$ ,  $\inf_X f$  e i massimi e minimi locali forti nei seguenti casi:

- a)  $X = [0, 4)$ ,  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 5 - x & \text{se } 2 < x < 4; \end{cases}$
- b)  $X = (-1, 3]$ ,  $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ 1 - 3x & \text{se } 2 < x \leq 3; \end{cases}$
- c)  $X = (0, 3]$ ,  $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 3; \end{cases}$
- d)  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{|x - 2| + 1}$ ;
- e)  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \arctg x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{-2}{x + 1} & \text{se } x > 0; \end{cases}$
- f)  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;
- g)  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos(x^2)$ ;
- h)  $X = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos^2(x^2)$ .

## ESERCIZIO 3.5

Verificare che:

- a)  $x^4 < x^2$  definitivamente per  $x \rightarrow 0$ ;
- b)  $x^4 > x^2$  definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- c)  $4n/(n^2 + 7)$  è definitivamente decrescente per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- d)  $\sin(1/(10 - n)) < 0$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- e)  $\log_2(x^2 - x - 10)$  è definitivamente limitato inferiormente per  $x \rightarrow -\infty$ .

## ESERCIZIO 3.6

Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

- a)  $\sin(1/x^2) > 0$  definitivamente per  $x \rightarrow 0$ ;
- b)  $\log_{1/2}(1 + 1/n) > 0$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- c)  $x^2 + x > 0$  definitivamente per  $x \rightarrow 0$ ;
- d)  $x^2 + x^3 > 0$  definitivamente per  $x \rightarrow 0$ .

## Guida

Se si intende sviluppare il calcolo differenziale in una variabile solo su intervalli (per esempio, enunciare il Teorema di Weierstrass solo su intervalli), ci si può limitare a specificare cosa siano la frontiera e i punti interni di un intervallo.

## 3.1.1 Insiemi aperti e chiusi

Il concetto di intorno ci permette di introdurre alcuni ulteriori concetti di base, che si utilizzeranno nei capitoli successivi.

Dato un sottoinsieme  $E \subseteq \mathbb{R}$ , introduciamo la seguente classificazione topologica degli elementi di  $\mathbb{R}$  rispetto all'insieme  $E$ . Indicheremo con  $\complement E$  il complementare di  $E$  rispetto a  $\mathbb{R}$ :  $\complement E = \mathbb{R} \setminus E$ .

## DEFINIZIONE 3.9

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Un elemento  $x \in \mathbb{R}$  si dice:

- (i) **punto interno** a  $E$  se esiste un suo intorno  $B_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon > 0$ , contenuto in  $E$ ,
- (ii) **punto esterno** a  $E$  se è punto interno a  $\complement E$ ,
- (iii) **punto di frontiera** per  $E$  se non è interno né esterno a  $E$ .

Gli insiemi:

$$\partial E = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è punto di frontiera per } E\}$$

$$\bar{E} = E \cup \partial E$$

$$\overset{\circ}{E} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è punto interno a } E\}$$

si dicono rispettivamente **frontiera** di  $E$ , **chiusura** di  $E$  ed **interno** di  $E$ .

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

- 1) Sia  $E = (a, b)$ . Allora  $\overset{\circ}{E} = E$ ,  $\partial E = \{a, b\}$  ed  $\bar{E} = [a, b]$ .
- 2) Sia  $E = [a, b]$ . Allora  $\overset{\circ}{E} = (a, b)$ ,  $\partial E = \{a, b\}$  ed  $\bar{E} = [a, b]$ .
- 3) Sia  $E = (a, +\infty)$ . Allora  $\overset{\circ}{E} = E$ ,  $\partial E = \{a\}$  ed  $\bar{E} = [a, +\infty)$ .
- 4) Sia  $E = \mathbb{R}$ . Allora  $\overset{\circ}{E} = \mathbb{R}$ ,  $\partial \mathbb{R} = \emptyset$  ed  $\bar{E} = \mathbb{R}$ .

#### ESEMPIO 3.4

Il seguente esempio mostra che i concetti appena introdotti non sono sempre intuitivi se  $E$  non è un intervallo.

Sia  $E = \mathbb{Q}$ . Si ha  $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ : infatti, per la proprietà di densità (1.5) dei numeri irrazionali, ogni intorno di ogni numero razionale contiene infiniti numeri irrazionali. Ragionando allo stesso modo, dalla proprietà di densità (1.4) dei numeri razionali segue che non esistono punti esterni a  $\mathbb{Q}$ . Pertanto  $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$  e  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$  (si noti che  $\mathbb{Q} \subset \partial \mathbb{Q}$ !).

#### ESEMPIO 3.5

#### DEFINIZIONE 3.10

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$  si dice **aperto in  $\mathbb{R}$**  se  $E = \overset{\circ}{E}$ , cioè se ogni elemento di  $E$  è punto interno a  $E$ . Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$  si dice **chiuso** se  $\mathbb{C}E$  è aperto. L'insieme  $\emptyset$  è aperto.

L'insieme  $\{3, 4, 7\}$  è chiuso in  $\mathbb{R}$ . Anche  $\mathbb{N}$  lo è.

#### ESEMPIO 3.6

La Definizione 3.10 motiva la nomenclatura introdotta nel Capitolo 1. Infatti, si verifica facilmente che sono aperti i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ :

$$(a, b), (-\infty, b), (a, +\infty), (-\infty, +\infty).$$

Viceversa sono chiusi i seguenti insiemi:

$$[a, b], [a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty).$$

Gli intervalli  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  non sono né aperti né chiusi. Si può dimostrare che gli insiemi  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}$  sono i soli sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  che sono contemporaneamente aperti e chiusi.

È facile verificare che, dati due insiemi  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$A \text{ e } B \text{ aperti} \Rightarrow A \cup B \text{ e } A \cap B \text{ aperti}, \quad (3.5)$$

$$A \text{ e } B \text{ chiusi} \Rightarrow A \cup B \text{ e } A \cap B \text{ chiusi}. \quad (3.6)$$

Come abbiamo visto nel Paragrafo 1.3, ogni insieme limitato ammette estremo superiore e inferiore (Teorema 1.10), ma può non ammettere massimo e/o minimo (per esempio, l'intervallo  $(-1, 2]$  è limitato ma non ha minimo). Ciò non può accadere se l'insieme è chiuso:

#### TEOREMA 3.11

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  un insieme non vuoto, chiuso e limitato. Allora esistono  $\min E$  e  $\max E$ .



**Dimostrazione**

Si prova l'esistenza del massimo (l'esistenza del minimo è del tutto analoga). Poiché  $E$  è non vuoto e (superiormente) limitato,  $M := \sup E \in \mathbb{R}$ . Come sappiamo già dal Capitolo 1, se  $M \in E$  allora il massimo esiste e coincide con  $M$ . Supponiamo per assurdo che  $M \notin E$ . Per la caratterizzazione (1.10) dell'estremo superiore, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $x_\varepsilon \in (M - \varepsilon, M) \cap E = (M - \varepsilon, M) \setminus E$ . Perciò  $M$  non è interno a  $E$ , ovvero  $E$  non è chiuso. Ciò contraddice le ipotesi: perciò  $M \in E$  e il Teorema è dimostrato.

**ESERCIZIO 3.7**

Dire quali tra i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono aperti o chiusi:

- |   |   |
|---|---|
| a) $(-1, 2) \cup \{3\}$ ;                         | g) $\{x \in [0, 2\pi] : 0 \leq \sin x < 2\}$ ;  |
| b) $[-1, 2] \cup \{3\}$ ;                         | h) $\{x \in \mathbb{R}^+ : \log_2 x < 3\}$ ;    |
| c) $\{x \in \mathbb{R} : 1 <  x - 2  < 2\}$ ;     | i) $\{x \in \mathbb{R}^+ : \log_2 x \leq 3\}$ ; |
| d) $\{x \in \mathbb{R} :  x - 2  \geq 1\}$ ;      | j) $\{x \in \mathbb{R}^+ : \log_2 x > 3\}$ ;    |
| e) $\{x \in \mathbb{R} : 3 < x^2 + x \leq 4\}$ ;  | k) $\{x \in \mathbb{R}^+ : \log_2 x \geq 3\}$ . |
| f) $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x^2 + x \leq 4\}$ ; |   |

**3.2 Limite**

Come abbiamo già annunciato, gli intorni ci permettono di introdurre il concetto di limite di funzione, lo strumento per eccellenza per studiare il comportamento di una funzione "in prossimità di un punto di accumulazione,  $x_0$ , per il suo dominio", ovvero definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Il valore  $\ell \in \mathbb{R}^*$  si dice limite della funzione per  $x$  che tende a  $x_0$  se, preso *qualsiasi* intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$ , si riesce a determinare un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  in modo tale che *tutti* i valori che la funzione assume in quei punti di  $\mathcal{U}$  che appartengono al dominio e sono diversi da  $x_0$ , si trovino nell'intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$ .

**DEFINIZIONE 3.12**

Siano  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione per  $X$ . Allora  $\ell \in \mathbb{R}^*$  si dice **limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$**  e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{oppure} \quad f(x) \rightarrow \ell \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se

per ogni intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$ ,  $f(x) \in \mathcal{V}$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ .

In altre parole:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \text{per ogni intorno } \mathcal{V} \text{ di } \ell, \text{ esiste un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \\ \text{tale che } f(x) \in \mathcal{V} \text{ per ogni } x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Si noti che in generale la scelta dell'intorno  $\mathcal{U}$  dipenderà da  $\mathcal{V}$  (si veda anche l'Esempio 3.7 che segue).

**Osservazioni.**

- Dalla definizione segue facilmente che il limite  $\ell$  è un punto di accumulazione per  $f(X)$  in  $\mathbb{R}^*$  oppure  $\ell$  è un punto isolato di  $f(X)$ .
- Nella definizione di limite non si richiede  $x_0 \in X = \text{dom } f$ , e anche se  $x_0 \in X$ ,



nella (3.7) non si richiede  $f(x_0) \in \mathcal{V}$ ; in altre parole, il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  non dipende in alcun modo dall'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto  $x_0$ , né dà alcuna informazione su tale valore.



- c) La condizione che  $x_0$  sia punto di accumulazione per  $X$  garantisce che  $(\mathcal{U} \cap X) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$  per qualsiasi intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$ .
- d) Se  $\ell \in \mathbb{R}$ , si dice anche che la funzione ammette **limite finito** per  $x \rightarrow x_0$ . È evidente che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0.$$

Mostriamo adesso alcune formulazioni equivalenti della (3.7), in cui gli intorni  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  sono descritti esplicitamente.

- Se  $\ell \in \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$ , gli intorni  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  e  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  possono essere scritti nella forma  $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$  e  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , con  $\varepsilon, \delta > 0$ . Quindi la (3.7) è equivalente a:

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad (3.8)$$

(ricordiamo che  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  se e solo se  $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ ).

- Se  $x_0 = +\infty$  e  $\ell \in \mathbb{R}$ , gli intorni  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  e  $\mathcal{U}$  di  $+\infty$  si possono scrivere come  $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$  e  $(m, +\infty]$ , con  $\varepsilon > 0$  e  $m \in \mathbb{R}$ ; perciò la (3.7) è equivalente a:

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $m \in \mathbb{R}$  tale che

$$x \in X, x > m \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon. \quad (3.9)$$

In particolare, per le successioni  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \forall n > N. \quad (3.10)$$

- Se  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $\ell = -\infty$ , gli intorni  $\mathcal{V}$  di  $-\infty$  e  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  si scrivono come  $[-\infty, m)$  e  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , con  $\delta > 0$  e  $m \in \mathbb{R}$ ; sicché la (3.7) è equivalente a:

per ogni  $m \in \mathbb{R}$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < m \quad (3.11)$$

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Per verificarlo applichiamo la (3.8): preso un arbitrario  $\varepsilon > 0$ , si ha

$$|x^2 - 0| = |x^2| < \varepsilon \quad \text{se } x \in (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$$

quindi si può scegliere  $\delta = \sqrt{\varepsilon}$  nella (3.8).

- b) Per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/\sqrt{x+a} = 0$  (si osservi che  $\text{dom } f = (-a, +\infty)$ , quindi il limite è ben definito). In questo caso utilizziamo la (3.9): preso un arbitrario  $\varepsilon > 0$ , si ha

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x+a}} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2} - a,$$

perciò la (3.9) è verificata scegliendo  $m = \varepsilon^{-2} - a$ .

- c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n+2} = 2$ ; infatti, per la (3.10), è sufficiente verificare che, preso  $\varepsilon > 0$ , esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

**ESEMPIO 3.7**

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon \text{ se } n > N.$$

Ma

$$\left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| = \frac{4}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} - 2,$$

quindi basta scegliere  $N \geq \frac{4}{\varepsilon} - 2$ .

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ ; infatti, preso  $m > 0$ , si ha  $n^2 > m$  se  $n > \sqrt{m}$ .

La prima, essenziale proprietà del limite  $\ell$  è la sua unicità:

### TEOREMA 3.13 Unicità del limite

Se esistono

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ e } \ell_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

allora  $\ell_1 = \ell_2$ .

### Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Per la proprietà (iv) degli intorni (la proprietà di separazione, si veda Paragrafo 3.1) esistono due intorni,  $\mathcal{V}_1$  di  $\ell_1$  e  $\mathcal{V}_2$  di  $\ell_2$ , che sono *disgiunti*:  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ . Applicando la definizione di limite con tali intorni, segue che esistono due intorni di  $x_0$ ,  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$ , tali che  $f(x)$  appartiene sia a  $\mathcal{V}_1$  sia a  $\mathcal{V}_2$  se  $x \in (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap \text{dom } f \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ . Chiaramente questo non è possibile perché  $\mathcal{V}_1$  e  $\mathcal{V}_2$  sono disgiunti.

Notiamo che dalla definizione di limite segue banalmente che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > -\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{per ogni } m < \ell \text{ si ha che} \\ f(x) > m \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Infatti, scegliendo nella definizione di limite un intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  di raggio  $\varepsilon < \ell - m$ , si ottiene  $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ , quindi in particolare  $f(x) > \ell - \varepsilon > m$ , definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Analogamente risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell < +\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{per ogni } m > \ell \text{ si ha che} \\ f(x) < m \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Segue immediatamente dalle (3.12)-(3.13) che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \text{ è definitivamente limitata per } x \rightarrow x_0. \quad (3.14)$$

Il caso particolare in cui  $\ell \neq 0$  e  $m = 0$  nelle (3.12)-(3.13) è noto come proprietà della permanenza del segno.

### LEMMA 3.14 Permanenza del segno

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  punto di accumulazione per  $X$  e  $\ell \in \mathbb{R}^*$ . Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell > 0$  ( $< 0$ ), allora

$$f(x) > 0 \text{ } (< 0) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0,$$

ovvero esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  tale che  $f(x) > 0$  ( $< 0$ ) per ogni  $x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$ .

Si noti che non vale il viceversa nel lemma precedente, ovvero

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0 \\ \text{e } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* \end{array} \right\} \not\Rightarrow \ell > 0;$$

infatti potrebbe essere  $\ell = 0$ :  $x^2 > 0$  definitivamente per  $x \rightarrow 0$ , ma  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

Come mostra il seguente esempio, i limiti possono non esistere.

- a) Non esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ . Supponiamo per assurdo che il limite  $\ell \in \mathbb{R}^*$  esista. Se  $\ell \geq 0$ , allora segue dalla (3.12) (con  $m = -1/2$ ) che  $f(x) > -1/2$  definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ . Ciò è impossibile: per esempio  $\sin x = -1$  se  $x = 3\pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Analogamente, dalla (3.13) si ottiene una contraddizione se  $\ell \leq 0$ , scegliendo  $m = 1/2$  e  $x = \pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- b) Non esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ . Come sopra, supponiamo per assurdo che il limite  $\ell \in \mathbb{R}^*$  esista. Se  $\ell \geq 0$ , allora per la (3.12) (con  $m = -1/2$ )  $(-1)^n > -1/2$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ , mentre  $(-1)^n = -1$  se  $n$  è dispari. Analogamente, dalla (3.13) si ottiene una contraddizione se  $\ell \leq 0$ , scegliendo  $m = 1/2$  ed  $n$  pari.
- c) Se  $a \leq -1$ , non esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ . Si osserva che  $a^n = (-1)^n |a|^n$  e si ragiona come in (b).

Non è difficile dimostrare che anche la funzione  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  (introdotta nel Paragrafo 2.2) non ammette limite per  $x \rightarrow 0$  (si veda Figura 3.7). Tuttavia, guidati dall'intuizione, in questo caso vorremmo affermare che  $\operatorname{sgn} x$  tende a 1 ( $-1$ ) per  $x$  che tende a zero da destra (da sinistra). A tale scopo è comodo parlare di punto di accumulazione destro (sinistro) per un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

#### DEFINIZIONE 3.15

$x_0$  si dice **punto di accumulazione destro (sinistro)** per  $X$  se è punto di accumulazione per  $X \cap (x_0, +\infty)$  (rispettivamente  $X \cap (-\infty, x_0)$ ).

Possiamo così formalizzare il concetto di limite destro (sinistro).

#### DEFINIZIONE 3.16

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}$  punto di accumulazione destro (sinistro) per  $X$ . Allora  $\ell \in \mathbb{R}^*$  si dice **limite destro (sinistro)** di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \right)$$

se la restrizione di  $f$  a  $X \cap (x_0, +\infty)$  ( $X \cap (-\infty, x_0)$ ) tende a  $\ell$  per  $x \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)} = \ell \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)} = \ell \right). \quad (3.15)$$

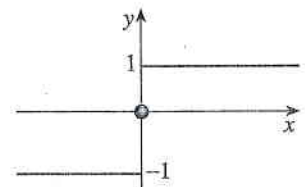
Dalla definizione segue che se  $x_0$  è punto di accumulazione sinistro e destro per il dominio, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell. \quad (3.16)$$

Ciò fornisce anche un semplice criterio per verificare la non esistenza dei limiti.



#### ESEMPIO 3.8



**Figura 3.7**  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  non ammette limite in  $x = 0$ , ma ammette limite destro ( $= 1$ ) e limite sinistro ( $= -1$ ).



**ESEMPIO 3.9**

a) Siano  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $X = \mathbb{R}$  (si veda Figura 3.7) e  $x_0 = 0$ . Si ha

$$f|_{\mathbb{R} \cap (0, +\infty)} = 1 \quad \text{e} \quad f|_{\mathbb{R} \cap (-\infty, 0)} = -1.$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

In particolare, la (3.16) implica che non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ .

b) Siano  $f(x) = 1/x$ ,  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $x_0 = 0$ . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

In particolare, la (3.16) implica che

$$\boxed{\text{non esiste } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}}.$$

Concludiamo con la definizione di limite per eccesso e per difetto.

**DEFINIZIONE 3.17**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  punto di accumulazione per  $X$ . Si dice che  $f(x)$  tende a  $\ell \in \mathbb{R}$  per eccesso (per difetto) e si scrive

$$f(x) \rightarrow \ell^+ \quad (\ell^-) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se per ogni intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  tale che per ogni  $x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$  si ha  $f(x) \in \mathcal{V} \cap (\ell, +\infty)$  (rispettivamente  $\mathcal{V} \cap (-\infty, \ell)$ ).

In modo analogo si definiscono  $f(x) \rightarrow \ell^+$  per  $x \rightarrow x_0^-$  ecc.

**ESEMPIO 3.10**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \log_{\frac{1}{3}} x = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \log_{\frac{1}{3}} x = 0^-.$$

**ESERCIZIO 3.8**

Determinare, se esistono, i seguenti limiti ( $n$  indica un intero positivo):

- |  |  |
|--|--|
| a) $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ ; | f) $\lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{sgn}  x - 4 $ ;   |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n$ ;                                  | g) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \operatorname{sgn} (x - 4)$ ; |
| c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x - 3)^n}$ ;                      | h) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \operatorname{sgn} (4 - x)$ ; |
| d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x - 3)^n}$ ;                      | i) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3}{2 + x}$ .         |
| e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x - 3)^n}$ ;                        |  |

**ESERCIZIO 3.9**

Usare la definizione di limite per verificare i seguenti limiti:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow -2} x = -2$ ;                 | c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^2) = +\infty$ . |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{10}  x  = -\infty$ ; |   |

### 3.3 Proprietà elementari dei limiti

Occupiamoci ora del comportamento dei limiti che esistono *finiti* rispetto alle operazioni elementari, la cosiddetta "algebra dei limiti".

Algebra dei limiti

#### TEOREMA 3.18

Siano  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

dove  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  è un punto di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ . Allora, per  $x \rightarrow x_0$ ,

- (i)  $cf(x) \rightarrow cl_1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f(x) + g(x) \rightarrow l_1 + l_2$ ,
- (iii)  $f(x)g(x) \rightarrow l_1l_2$ ,
- (iv)  $1/g(x) \rightarrow 1/l_2$  (se  $l_2 \neq 0$ ),
- (v)  $f(x)/g(x) \rightarrow l_1/l_2$  (se  $l_2 \neq 0$ ).

Il Lemma 3.14 garantisce che i quozienti  $1/g(x)$  e  $f(x)/g(x)$  sono ben definiti definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ .

#### Dimostrazione

Dimostriamo solo le tesi (iii) e (iv).

(iii) Scriviamo  $f(x)g(x) - l_1l_2 = (f(x) - l_1)g(x) + l_1(g(x) - l_2)$  e osserviamo che, per la (3.14),  $|g(x)| < M$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$  (per qualche  $M > 0$ ). Preso  $\varepsilon > 0$ , per la definizione di limite, si ha  $|f(x) - l_1| < \varepsilon$  e  $|g(x) - l_2| < \varepsilon$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ , quindi, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - l_1l_2| &\leq |f(x) - l_1| \cdot |g(x)| + |l_1| \cdot |g(x) - l_2| \\ &< \varepsilon M + |l_1|\varepsilon = (M + |l_1|)\varepsilon \end{aligned}$$

definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , segue la (iii).

(iv) È sufficiente considerare il caso  $l_2 > 0$  (altrimenti scambiamo  $g$  con  $-g$ ). Scelto un numero  $m$  compreso tra 0 e  $l_2$ , per la (3.12)  $g(x) > m$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ , quindi, preso  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_2} \right| = \frac{|l_2 - g(x)|}{l_2g(x)} < \frac{\varepsilon}{l_2m} \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0.$$

**Osservazione.** Ricordando che l'intersezione di due intorni è ancora un intorno, possiamo affermare che: se  $x_0$  è di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$  e

$$f(x) \text{ verifica la proprietà } \mathcal{P}_1 \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0 \quad (3.17)$$

$$g(x) \text{ verifica la proprietà } \mathcal{P}_2 \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0 \quad (3.18)$$

allora

$$f(x) \text{ verifica } \mathcal{P}_1 \text{ e } g(x) \text{ verifica } \mathcal{P}_2 \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0. \quad (3.19)$$

Questa proprietà è stata utilizzata per esempio nella dimostrazione della (iii) quando abbiamo affermato che  $|f(x) - l_1| < \varepsilon$  e  $|g(x) - l_2| < \varepsilon$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . A una prima lettura potrebbe risultare banale, ma vale la pena analizzarla in

dettaglio. La (3.17) e la (3.18) valgono se e solo se esistono due intorno  $\mathcal{U}_1$  e  $\mathcal{U}_2$  di  $x_0$  tali che

$$f(x) \text{ verifica } \mathcal{P}_1 \text{ se } x \in \mathcal{U}_1 \cap \text{dom } f \setminus \{x_0\}$$

$$g(x) \text{ verifica } \mathcal{P}_2 \text{ se } x \in \mathcal{U}_2 \cap \text{dom } g \setminus \{x_0\}$$

mentre la (3.19) afferma che esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  tale che

$$f(x) \text{ verifica } \mathcal{P}_1 \text{ e } g(x) \text{ verifica } \mathcal{P}_2 \text{ se } x \in \mathcal{U} \cap \text{dom } f \cap \text{dom } g \setminus \{x_0\}.$$

Perciò, se valgono le (3.17) e (3.18), basta porre  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$  (che, come abbiamo ricordato, è ancora un intorno di  $x_0$ !) per capire che vale anche la (3.19).

### ESEMPIO 3.11

Si vuole calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x + 1}{5x^3 + 3x^2 - 7}$ . Applichiamo il Teorema 3.18. Possiamo considerare le potenze  $x^2$  e  $x^3$  come prodotti della funzione  $f(x) = x$  per se stessa. Poiché  $\lim_{x \rightarrow -2} x = -2$ , segue dal Teorema 3.18 che il limite è dato da

$$\frac{\left(\lim_{x \rightarrow -2} x\right)^2 - 3\left(\lim_{x \rightarrow -2} x\right) + 1}{5\left(\lim_{x \rightarrow -2} x\right)^3 + 3\left(\lim_{x \rightarrow -2} x\right)^2 - 7} = \frac{(-2)^2 - 3(-2) + 1}{5(-2)^3 + 3(-2)^2 - 7} = -\frac{11}{35}.$$



L'ipotesi del Teorema 3.18, che i limiti  $\ell_1$  e  $\ell_2$  siano *finiti*, non può essere indebolita in generale. Per esempio, siano  $f(x) = x$  e  $g(x) = 1/x^2$ ; allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

ma

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ in } \mathbb{R}^*.$$

### ESEMPIO 3.12

Si vuole calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^3 - n + 2}{-4n^3 + n^2 + 1}$ . In questo caso non possiamo applicare direttamente il Teorema 3.18, perché sia il numeratore sia il denominatore divergono. Possiamo però ricorrere a un artificio, ovvero raccogliere i termini di grado maggiore:

$$\frac{3n^3 - n + 2}{-4n^3 + n^2 + 1} = \frac{n^3(3 - n^{-2} + 2n^{-3})}{n^3(-4 + n^{-1} + n^{-3})} = \frac{3 - n^{-2} + 2n^{-3}}{-4 + n^{-1} + n^{-3}}.$$

Siamo così in grado di applicare il teorema:

$$\frac{3n^3 - n + 2}{-4n^3 + n^2 + 1} \rightarrow \frac{3 - 0 + 0}{-4 + 0 + 0} = -\frac{3}{4} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Prima di iniziare l'esame di alcune possibili estensioni del Teorema 3.18, presentiamo un ulteriore risultato di grande utilità per il calcolo di limiti.

### TEOREMA 3.19 Teorema del confronto

Siano  $f, g$  e  $h$  funzioni da  $X$  in  $\mathbb{R}$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione per  $X$ . Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$$

e

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0 \quad (3.20)$$

allora anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .



Si osservi che se  $l = +\infty$  ( $l = -\infty$ ), l'ipotesi che esista la funzione  $h(x)$  (rispettivamente  $f(x)$ ) è superflua.

### Dimostrazione

Preso qualsiasi intorno  $\mathcal{V}$  di  $l$ ,  $f(x)$  e  $h(x)$  appartengono a  $\mathcal{V}$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Ma essendo  $\mathcal{V}$  un intervallo, la (3.20) implica che anche  $g(x) \in \mathcal{V}$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ , quindi  $g(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$ .

a) Verifichiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Per il teorema del confronto, è sufficiente osservare che

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$$

e

$$\pm \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

b) Sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}^+$ . Allora  $g(x) > l/2$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$  ed essendo  $f$  definitivamente positiva per  $x \rightarrow x_0$ ,  $f(x)g(x) > lf(x)/2$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Poiché  $lf(x)/2 \rightarrow +\infty$  (la verifica è immediata!), per il teorema del confronto anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = +\infty$ . Per esempio,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 3n^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(1 - \frac{3}{n}\right) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + 5}{x^4} = +\infty.$$

Argomenti analoghi a quelli utilizzati nell'Esempio 3.13b permettono di ottenere facilmente le seguenti estensioni del Teorema 3.18.

### ESEMPIO 3.13

Aritmetica  
parziale di  $\mathbb{R}$

Dimostrazione

### TEOREMA 3.20

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  punto di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ .

(i) Se, per  $x \rightarrow x_0$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ) e  $g$  è definitivamente limitata inferiormente (superiormente) allora

$$f(x) + g(x) \rightarrow +\infty \text{ } (-\infty) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

(ii) Se, per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad g(x) \rightarrow l \in (0, +\infty] \quad (l \in [-\infty, 0))$$

allora

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow +\infty \text{ } (-\infty) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

(iii) Se, per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ e } g(x) \text{ è definitivamente limitata}$$

allora

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

(iv) Se, per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f(x) \rightarrow 0^+ (+\infty)$$

allora

$$1/f(x) \rightarrow +\infty (0^+) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

### ESEMPIO 3.14

a) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Ciò segue da (iii) del Teorema 3.20:  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad \forall x \neq 0$  (infatti la (iii) si prova con il Teorema del confronto).

b) 
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sin x) = +\infty.$$

Infatti  $g(x) = -\sin x$  è limitata inferiormente (da  $-1$ ) e il risultato segue da (i) del Teorema 3.20.

### Forme indeterminate

I casi che non rientrano nel Teorema 3.20 possono essere rappresentati dalle seguenti espressioni, note come **forme indeterminate** (o **forme di indecisione**):

$$[+\infty - (+\infty)], \quad [-\infty + (+\infty)], \quad [-\infty - (-\infty)], \quad [+\infty \cdot 0],$$

$$[-\infty \cdot 0], \quad \left[ \frac{0}{0} \right], \quad \left[ \frac{+\infty}{+\infty} \right], \quad \left[ \frac{-\infty}{+\infty} \right] \quad \text{ecc.}$$

(per semplicità scriveremo, quando non vi siano ambiguità,  $[\infty/\infty]$ ,  $[\infty - \infty]$ , ecc.). Abbiamo già incontrato qualche caso di forma indeterminata nell'Esempio 3.12 ( $[\infty/\infty]$ ) e nell'Esempio 3.13b ( $[\infty - \infty]$ ). Vediamone altri.

### ESEMPIO 3.15

a) Verifichiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0.$$

Il limite in esame è una forma indeterminata del tipo  $[\infty - \infty]$ , in quanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

(ciò segue facilmente dalla definizione di limite, oppure dall'Esempio 3.7b e dal Teorema 3.20 (iv)). Per risolverla si procede come segue:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Applicando, nell'ordine, (i) e (iv) del Teorema 3.20, si ottiene che  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \rightarrow +\infty$  e che quindi  $1/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Perciò il limite in esame esiste e vale 0.

b) Un primo esempio di forma indeterminata del tipo  $[0/0]$  è fornito dal seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{3x^4 + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{3x^2+5} = \frac{0-2}{0+5} = -\frac{2}{5}.$$

In questo caso la forma indeterminata è stata risolta grazie a una banale semplificazione.

Esaminiamo il caso generale dei limiti per  $x \rightarrow \pm\infty$  delle funzioni razionali

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m} \quad (a_n, b_m \neq 0).$$

### Limiti di funzioni razionali



Ragioniamo come nell'Esempio 3.12. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^n \left( a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n} \right)}{x^m \left( b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^m} \right)} \\ &= x^{n-m} \left( \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^m}} \right) \end{aligned}$$

ed evidentemente la funzione entro parentesi tende a  $a_n/b_m$  ( $\neq 0$ ) per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$  (segue dal Teorema 3.18). Per esempio, se  $x \rightarrow +\infty$ , usando il Teorema 3.20 si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ +\infty \text{ } (-\infty) & \text{se } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ } (< 0) \text{ e } n > m. \end{cases}$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{5}{x^2}} = -\infty.$$

#### ESEMPIO 3.16

Una classe di funzioni particolarmente importante rispetto al problema dell'esistenza dei limiti è quella delle funzioni monotone. Vale infatti il seguente risultato.

#### TEOREMA 3.21 Esistenza del limite per funzioni monotone

Sia  $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monotona.

(i) Se  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  è punto di accumulazione destro per  $X$  e  $f$  è monotona crescente (decescente) in  $X$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{X \cap (x_0, +\infty)} f \left( \sup_{X \cap (x_0, +\infty)} f \right).$$

(ii) Se  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  è punto di accumulazione sinistro per  $X$  e  $f$  è monotona crescente (decescente) allora

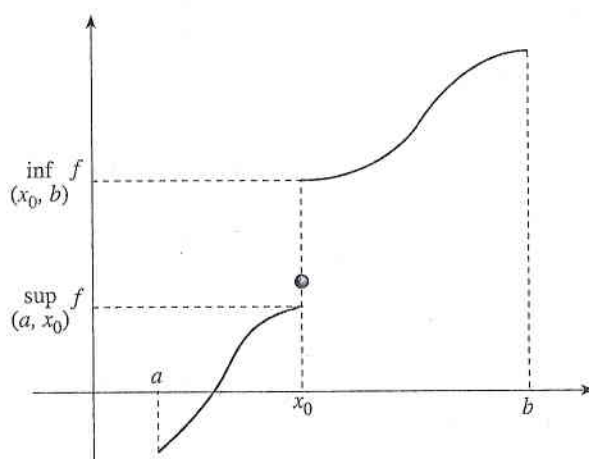
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{X \cap (-\infty, x_0)} f \left( \inf_{X \cap (-\infty, x_0)} f \right).$$

#### Dimostrazione

Consideriamo, per esempio, la (ii) nel caso di una funzione crescente. Posto  $\ell = \sup_{X \cap (-\infty, x_0)} f$ , esaminiamo prima il caso  $\ell \in \mathbb{R}$ . Per le proprietà dell'estremo superiore,  $f \leq \ell$  in  $X \cap (-\infty, x_0)$  e, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $x_\varepsilon \in X \cap (-\infty, x_0)$  tale che  $\ell - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$ . Per la monotonia di  $f$  si ha  $\ell - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq \ell$  per ogni  $x \in X \cap [x_\varepsilon, x_0)$ , quindi  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ . Analogamente, se  $\ell = +\infty$ ,  $f$  non è limitata superiormente in  $X \cap (-\infty, x_0)$  e per ogni  $M \in \mathbb{R}$  esiste  $x_M \in X \cap (-\infty, x_0)$  ta-



**Figura 3.8** Limite destro e sinistro in  $x_0$  di una funzione crescente.



le che  $f(x_M) > M$ . La monotonia di  $f$  implica che  $f(x) \geq f(x_M) > M$  per ogni  $x \in X \cap [x_M, x_0)$ , da cui  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ .

**Osservazione.** Nel caso in cui  $x_0$  è punto di accumulazione destro e sinistro e  $f$  è monotona, il Teorema 3.21 garantisce l'esistenza del limite destro e sinistro (ma non del limite; si veda Figura 3.8).

Applicando il Teorema 3.21 al caso di potenze, esponenziali e logaritmi, si ottengono le seguenti informazioni per le funzioni potenza,

Limiti di potenze,  
esponenziali,  
logaritmi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} x^\alpha &= x_0^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha &= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.21)$$

per le funzioni esponenziali,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} a^x &= a^{x_0} \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, x_0 \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x &= \begin{cases} 0^+ & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.22)$$

e per le funzioni logaritmiche,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x &= \log_a x_0 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1, x_0 \in \mathbb{R}^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x &= \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x &= \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Infatti, tutte queste funzioni sono monotone. Per esempio, per verificare la (3.21) nel caso  $\alpha > 0$ , osserviamo che  $f(x) = x^\alpha$  è crescente. Allora per il Teorema 3.21 la (3.21) è equivalente a

$$\sup_{(0, x_0)} x^\alpha = \inf_{(x_0, +\infty)} x^\alpha = x_0^\alpha, \quad \sup_{(0, +\infty)} x^\alpha = +\infty, \quad \inf_{(0, +\infty)} x^\alpha = 0$$

che segue dalle proprietà elementari delle potenze.

Un ragionamento simile permette di provare lo stesso tipo di risultati per le funzioni seno e coseno:

Limiti di seno  
e coseno

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0 \end{array} \quad \text{per ogni } x_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

Prendiamo la funzione  $\cos x$  (per  $\sin x$  il ragionamento è identico). Se  $x_0 \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), (3.24) segue come sopra poiché  $\cos x$  è definitivamente monotona per  $x \rightarrow x_0$ . Se  $x_0 = k\pi$ , osserviamo che  $\cos x$  è monotona da destra e da sinistra, quindi come sopra ammette limiti destro e sinistro ed entrambi valgono 1. Allora, per la (3.16), il limite esiste e vale 1.

Dalla (3.24), utilizzando l'algebra dei limiti e l'aritmetica parziale di  $\mathbb{R}^*$ , segue che

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \quad \text{se } x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty. \end{array} \quad (3.25)$$

Ricordando (Teorema 2.16) che se  $f$  è strettamente monotona in  $A$  allora  $f^{-1}$  è strettamente monotona in  $f(A)$ , con ragionamenti analoghi si ottengono i limiti delle funzioni trigonometriche inverse:

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 \in [-1, 1] \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in [-1, 1] \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } x_0 = -\infty \\ \operatorname{arctg} x_0 & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ \pi/2 & \text{se } x_0 = +\infty. \end{cases} \end{array} \quad (3.26)$$

Un altro risultato fondamentale per il calcolo dei limiti è dato dal seguente teorema.

**TEOREMA 3.22**      **Limite di funzione composta**

Siano  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f(X) \subseteq Y$  (in particolare, è definita la composizione  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ). Siano  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  ed  $\ell \in \mathbb{R}^*$  punti di accumulazione per  $X$  e  $Y$ , rispettivamente. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \quad \lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = k \quad (3.27)$$

e

$$f(x) \neq \ell \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0 \quad (3.28)$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = k. \quad (3.29)$$

L'ipotesi (3.28) non è necessaria se  $\ell \in Y$  e  $g(\ell) = k$ .

**Osservazione** La funzione  $g(y)$  può benissimo non essere definita in  $y = \ell$  (per esempio se  $\ell = +\infty$ , ma non solo). Anche se è definita, la (3.27) non contiene alcuna informazione sul valore  $g(\ell)$ , e nulla vieta che  $g(\ell) \neq k$ . Per queste ragioni, in generale occorre garantire che  $f(x) \neq \ell$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ , che è esattamente l'ipotesi (3.28).

Avendo chiara l'osservazione precedente, è molto facile provare il Teorema 3.22:

#### Dimostrazione

Sia  $\mathcal{W}$  un generico intorno di  $k$ . Per la (3.27), esiste un intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  tale che  $g(y) \in \mathcal{W}$  per ogni  $y \in \mathcal{V} \cap Y \setminus \{\ell\} =: \mathcal{V}'$ . Ancora per la (3.27),  $f(x) \in \mathcal{V} \cap Y$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ , e per la (3.28)  $f(x) \neq \ell$ , ovvero  $f(x) \in \mathcal{V}'$ . Quindi  $g(f(x)) \in \mathcal{W}$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Se inoltre  $\ell \in Y$  e  $g(\ell) = k$ , allora la (3.27) implica che  $g(y) \in \mathcal{W}$  per ogni  $y \in \mathcal{V} \cap Y$  e che  $f(x) \in \mathcal{V} \cap Y$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ , quindi  $g(f(x)) \in \mathcal{W}$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ .

Le (3.27)-(3.29) possono essere interpretate come formule di **cambiamento di variabili** per il calcolo dei limiti, come si vede nei prossimi due esempi.

Cambiamento  
di variabili

#### ESEMPIO 3.17

$$2^{\frac{1}{x}} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{per } x \rightarrow \pm\infty \\ +\infty & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ 0 & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Infatti, osservando che

$$\frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{per } x \rightarrow \pm\infty \\ +\infty & \text{per } x \rightarrow 0^+ \\ -\infty & \text{per } x \rightarrow 0^- \end{cases}$$

posto  $y = 1/x$  il risultato segue dalla (3.22) e dal Teorema 3.22.

#### ESEMPIO 3.18

Calcoliamo il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_7 \frac{n^5 - 6n^3 + 2}{3n^5 + n^4 + 24}$$

Risulta

$$y := \frac{n^5 - 6n^3 + 2}{3n^5 + n^4 + 24} = \frac{1 - 6n^{-2} + 2n^{-5}}{3 + n^{-1} + 24n^{-5}} \rightarrow \frac{1}{3} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e, per la (3.23) e il Teorema 3.22, il limite vale  $-\log_7 3$ .

Limiti di funzioni  
esponenziali

I limiti ora considerati permettono di trattare agevolmente limiti della forma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} \quad (3.30)$$

essendo  $f$  una funzione definitivamente positiva per  $x \rightarrow x_0$ . Scelta una base  $a \neq 1$  si può scrivere

$$f(x)^{g(x)} = a^{g(x) \log_a f(x)}$$

Quindi, ricordando la (3.22), il limite (3.30) si riconduce al calcolo di

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log_a f(x). \quad (3.31)$$



Se tale limite esiste, allora, per il Teorema 3.22,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \log_a f(x)}$$

(la scrittura è del tutto formale nel caso in cui (3.31) sia  $+\infty$  o  $-\infty$ ). Applicando questo ragionamento, si ottiene in particolare che:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \ell \in (0, +\infty) \\ g(x) \rightarrow k \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ per } x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^k (= a^{k \log_a \ell}).$$

Di solito si usa come base  $e$ , un numero irrazionale compreso tra 2 e 3 che sarà definito nel Paragrafo 4.2, sicché

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log_e f(x)}} \quad (3.32)$$

Si consiglia lo studente di utilizzare la (3.32) per trattare funzioni del tipo  $f(x)^{g(x)}$  ovvero in cui sia la base che l'esponente dipendono dalla variabile indipendente. Il calcolo di limiti del tipo (3.30) può portare a forme indeterminate del tipo

$$[0^0], [1^\infty], [\infty^0]$$

che, in virtù delle (3.31) e (3.32), sono riconducibili alla forma indeterminata  $[0 \cdot \infty]$ .

Concludiamo questo paragrafo con il calcolo di alcuni limiti, che ci permettono di riassumere i vari metodi incontrati finora.

### ESEMPIO 3.19

Determiniamo i seguenti limiti:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{\cos \frac{\pi x}{3}}$ ;

d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)^{x+1} \operatorname{arctg}(2^{1/x})$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{10}(1 + \sin(\pi x))$ ;

e)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{\log_a(n+1)}} \quad (a > 0, a \neq 0)$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x^2+x\sqrt{x}-2})$ ;

a) Posto  $y = \cos(\pi x/3)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} y = -1$  e  $\lim_{y \rightarrow -1} 2^y = 2^{-1}$ , quindi  $\lim_{x \rightarrow 3} 2^{\cos \frac{\pi x}{3}} = 1/2$ .

b) Posto  $y = 1 + \sin(\pi x)$  risulta  $\lim_{x \rightarrow 1} y = 1$  e, poiché  $\lim_{y \rightarrow 1} \log_{10} y = \log_{10} 1 = 0$ , risulta  $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{10}(1 + \sin(\pi x)) = 0$ .

c) È facile verificare la seguente formula per ogni  $n = 2, 3, 4, \dots$  e per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(se  $n = 2$  la formula è ben nota:  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ ); sostituendo a  $n$ ,  $a$  e  $b$ , rispettivamente,  $3$ ,  $\sqrt[3]{x^2+1}$  e  $\sqrt{x^2+x\sqrt{x}-2}$  e ragionando come nell'Esempio 3.15a, si trova:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x^2+x\sqrt{x}-2}}{-x\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^2+1)(x^2+x\sqrt{x}-2)} + \sqrt[3]{(x^2+x\sqrt{x}-2)^2}}{-1 + \frac{3}{x\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{2}{x^2}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{2}{x^2}\right)^2}}{-1 + \frac{3}{x\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo diviso numeratore e denominatore per  $x\sqrt[3]{x}$ . Segue dall'algebra dei limiti e dal Teorema 3.22 che il numeratore tende a  $-1$  e il denominatore tende a  $3$ : ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 1} y^{2/3} = 1 = 1^{2/3},$$

per cui segue dal Teorema 3.22 che  $(1 + 1/x^2)^{2/3} \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow -\infty$ . In conclusione il limite in esame esiste e vale  $-1/3$ .

d) Poiché  $1/x \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ , per composizione si ottiene che  $2^{1/x} \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ , e quindi (ancora per composizione)  $\arctg(2^{1/x}) \rightarrow \pi/2$ . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{(x+1)\log_2(x+2)} = 2^{\log_2 2} = 2.$$

Pertanto, essendo il prodotto di due limiti finiti, il limite in esame vale  $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ .

e) Scrivendo

$$n^{\frac{1}{\log_a(n+1)}} = a^{\frac{1}{\log_a(n+1)} \cdot \log_a n}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\log_a n}{\log_a(n+1)} &= \frac{\log_a \left( \frac{n}{n+1} (n+1) \right)}{\log_a(n+1)} = \frac{\log_a \frac{n}{n+1} + \log_a(n+1)}{\log_a(n+1)} \\ &= 1 + \frac{\log_a \left( \frac{n}{n+1} \right)}{\log_a(n+1)} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

da cui, per la (3.22), si ricava che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{\log_a(n+1)}} = a^1 = a$ .

### ESERCIZIO 3.10

Determinare i limiti delle seguenti funzioni:

a)  $\frac{\sqrt{4n^2 - 4n - 1}}{n+1}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;

f)  $x(\sin x - 2)$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;

b)  $\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + n}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;

g)  $\frac{x^3 - 4x + 5}{x^2 - 16}$  per  $x \rightarrow 4^-$ ;

c)  $\frac{x^2 + 1}{3x + 4}$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;

h)  $\frac{4^x - 2}{(2^x + 5)(2^x - 6)}$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;

d)  $x(x - \sqrt{x^2 - 1})$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;

i)  $\frac{4^x - 2}{(2^x + 5)(2^x - 6)}$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;

e)  $x(x + \sqrt{x^2 - 1})$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;

j)  $\frac{\log_2(2x)}{\log_2 x}$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;

k)  $\frac{ax^2 - 3x + 5}{x - 2a}$  per  $x \rightarrow -\infty$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ;

l)  $\frac{2^{ax} - 1}{3^x}$  per  $x \rightarrow +\infty$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ;

m)  $\log_2(n+1) - \log_2 \sqrt{n^2 + 3}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;

n)  $\left( \frac{2n-1}{n+3} \right)^{\frac{4n^2-3n+1}{8n^2+1}}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;

o)  $5 \log_7(2n-5) - 3 \log_7(n+2) - 2 \log_7(n+1)$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

### 3.4 Funzioni infinitesime e infinite; il simbolo $o(1)$

Introduciamo ora alcuni concetti che incontreremo spessissimo in seguito:

#### DEFINIZIONE 3.23

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ .

- (i) Se  $f(x) \rightarrow +\infty$  oppure  $f(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow x_0$  (con  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ) si dice anche che  $f$  è **divergente** oppure che  $f$  è **infinita** (o un **infinito**) per  $x \rightarrow x_0$ .
- (ii) Se  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0$  (con  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ), si dice che  $f$  è **infinitesima** (o un **infinitesimo**) per  $x \rightarrow x_0$ ; si scrive anche

$$f(x) = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Il simbolo  $o$  (si legge “o piccolo”) è noto come uno dei *simboli di Landau*, che tratteremo in dettaglio nel Capitolo 5. Si sottolinea che il simbolo  $o(1)$  indica genericamente una funzione che tende a 0 per  $x \rightarrow x_0$ . È chiaro che tale notazione perde di significato se non si precisa “per  $x$  che tende a che cosa”. Per esempio,  $x^2 = o(1)$  per  $x \rightarrow 0$  e  $1/n = o(1)$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Si osservi che

$$f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \text{ per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = \ell + o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0. \quad (3.33)$$

Infatti, segue dall'algebra dei limiti e dalla definizione di  $o(1)$  che

$$\begin{aligned} f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \text{ per } x \rightarrow x_0 &\Leftrightarrow f(x) - \ell \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ &\Leftrightarrow f(x) - \ell = o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = \ell + o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

La scrittura “ $o(1)$  per  $x \rightarrow x_0$ ” permette di evidenziare le quantità che caratterizzano il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto senza rinunciare al rigore matematico. Sarà utilizzato moltissimo in seguito, e conviene abituarci da subito.

#### ESEMPIO 3.20

Sia  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x}{x^4 + 2x^2 + x}$ . Per  $x \rightarrow 0$ , si ha

$$x^3 - 4x^2 + x = x(\underbrace{x^2 - 4x}_{=o(1)} + 1), \quad x^4 + 2x^2 + x = x(\underbrace{x^3 + 2x}_{=o(1)} + 1)$$

e quindi

$$f(x) = \frac{x(1 + o(1))}{x(1 + o(1))} \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ragionando allo stesso modo, per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$f(x) = \frac{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)} = \frac{1 + o(1)}{x(1 + o(1))} \rightarrow 0.$$

#### ESEMPIO 3.21

Si vuole calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left( \frac{\pi x^4 - 3x^3 - \frac{1}{x}}{x^3 \log_2(1 + 4^x)} \right).$$



Osserviamo che

$$\pi x^4 - 3x^3 - \frac{1}{x} = \pi x^4 \left( 1 - \frac{3}{\pi x} - \frac{1}{\pi x^5} \right) = \pi x^4 (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Inoltre, utilizzando il Teorema 3.22 (limite di funzione composta) si ottiene

$$\begin{aligned} \log_2(1 + 4^x) &= \log_2(4^x(1 + 4^{-x})) = \log_2(4^x) + \log_2(1 + 4^{-x}) = 2x + o(1) \\ &= 2x \left( 1 + \frac{o(1)}{2x} \right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Poiché  $\frac{o(1)}{2x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ , concludiamo che

$$\log_2(1 + 4^x) = 2x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Perciò

$$\sin \left( \frac{\pi x^4 - 3x^3 - \frac{1}{x}}{x^3 \log_2(1 + 4^x)} \right) = \sin \left( \frac{\pi x^4 (1 + o(1))}{2x^4 (1 + o(1))} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2} (1 + o(1)) \right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

e ancora per il Teorema 3.22 segue che il limite esiste e vale 1.

#### Algebra degli $o(1)$

Nell'Esempio precedente sono state di fatto utilizzate alcune delle seguenti "regole di calcolo" per  $o(1)$ : per  $x \rightarrow x_0$ , si ha che

- (i)  $\ell o(1) = o(1)$  per ogni  $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (naturalmente  $0 \cdot o(1) = 0$ );
- (ii)  $o(1) \cdot o(1) = o(1)$ ;
- (iii)  $o(1) \pm o(1) = o(1)$ .

Tali proprietà seguono direttamente dalla definizione. Ad esempio, per provare la (iii) basta osservare che, per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = o(1) \\ g(x) = o(1) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \pm g(x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) \pm g(x) = o(1)$$

(la verifica di (i) e (ii) è lasciata al lettore). Segue dalla proprietà (i) che, se  $\ell \neq 0$ , allora  $\ell + o(1) = \ell + \ell o(1) = \ell(1 + o(1))$ . Perciò, se  $\ell \neq 0$ , la (3.33) si può riscrivere come segue:

$$f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = \ell(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (3.34)$$

Si noti che questa equivalenza è falsa se  $\ell = 0$  (a destra si avrebbe  $f(x) = 0$  in un intorno di  $x_0$ , che è falso in generale).

#### ESEMPIO 3.22

Verifichiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{1}{|x|} \sqrt{x^2 + 3x^3 + 2x^3 \sin x} \right) = 0.$$

Per  $x \rightarrow 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x^3 + 2x^3 \sin x} &= \sqrt{x^2(1 + 3o(1) + 2o(1) \cdot o(1))} \quad (\text{poichè } x = o(1) \text{ e } \sin x = o(1)) \\ &= |x| \sqrt{1 + o(1)} \quad (\text{per (i), (ii) e (iii)}) \end{aligned}$$

Quindi

$$1 - \frac{1}{|x|} \sqrt{x^2 + 3x^3 + 2x^3 \sin x} = 1 - \sqrt{1 + o(1)} \rightarrow 1 - 1 = 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Sottolineiamo che  $o(1) - o(1) = o(1)$  (non zero!). Questa è una delle cautele con cui è necessario procedere quando si utilizza  $o(1)$ . Un'altra cautela consiste nel *non omettere mai* il simbolo  $o(1)$ ! Vediamo perché.

Sia

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Chiaramente  $1/\sqrt{n} = o(1)$  e  $1/n = o(1)$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Perciò è vero che

$$a_n = o(1) \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

mentre, ovviamente, è *falso* che  $a_n = 0$  o che  $a_n = 1/\sqrt{n}$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Ad esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( a_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -1.$$

ESEMPIO 3.23

Determinare (purché esistano) i limiti delle seguenti funzioni utilizzando il simbolo  $o(1)$ :

- $\frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n+1}{\sqrt{n}}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- $\frac{n^2}{\sqrt{n^2+3n+1}} - n$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- $\frac{\log_3^2 x}{6 + \log_3 5x}$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;
- $\frac{2^x - 5}{3^x - 6}$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- $\frac{2^{ax} - 3^x}{2^x}$  per  $x \rightarrow +\infty$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ;
- $\frac{2^{ax} - 3^x}{2^x}$  per  $x \rightarrow 0$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ;
- $\left( \frac{x+1}{3x+2^{-1/x}} \right)^{\sqrt{x^2+4x}-x}$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- $2 \log_3(n+2) - \log_3(n^2-5)$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- $\lim_{x \rightarrow 3} \log \left( \sin \left( \frac{\pi^{x-2}}{x^2 - 3x + 2} \right) - \log(2^{x-3} - \log(x-2)) \right)$ ;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^\alpha + x) \log_2(1 + 3^{1/x})$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha + n^{8-\alpha}}{3n^6 - 2 \sin n}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{A^x - 2^x - \sin x}{A^{2x} + 3 \cdot 2^x}$  al variare di  $A \in (0, +\infty)$ ;

ESERCIZIO 3.11

Dire per quali valori reali di  $\alpha, \beta, \gamma$  esiste il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha + \gamma x^\beta \sin x).$$

ESERCIZIO 3.12

### 3.5 Limiti notevoli di funzioni trigonometriche

I cosiddetti “limiti notevoli” sono delle particolari forme indeterminate che possono essere risolte combinando semplici calcoli con le proprietà elementari dei limiti e che si utilizzano come base per i successivi sviluppi del calcolo. In questo paragrafo se ne illustra una prima classe: i limiti di funzioni trigonometriche. Il punto di partenza è il seguente risultato:

#### TEOREMA 3.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (3.35)$$

ovvero

$$\sin x = x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (3.36)$$

#### Dimostrazione

Usiamo il Teorema 3.19 del confronto analizzando la Figura 3.9. Consideriamo il cerchio di raggio 1 e sia  $x \in (0, \pi/2)$  l'ampiezza dell'angolo indicato in Figura 3.9 (espressa in radianti). Quindi l'area del triangolo  $OAB$  è  $(\operatorname{tg} x)/2$ , quella del triangolo  $OAC$  è  $(\sin x)/2$  e quella del settore circolare  $OAC$  è  $x/2$  (si veda l'Appendice 1.A). Poiché le tre regioni sono una contenuta nell'altra, le loro aree sono ordinate:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.37)$$

Dividendo per  $\sin x > 0$  e passando ai reciproci, segue che

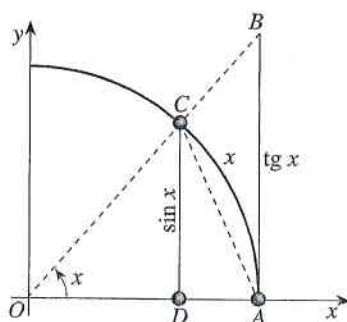
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Poiché  $\cos x$  e  $(\sin x)/x$  sono funzioni pari, la disuguaglianza rimane valida per  $-\pi/2 < x < 0$  e la (3.35) segue dal teorema del confronto perché, per la (3.24),  $\cos x \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ . Infine, la (3.36) segue dalla (3.33): per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \stackrel{(3.33)}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x}{x} = 1 + o(1) \Leftrightarrow \sin x = x(1 + o(1)).$$

Elenchiamo alcuni limiti notevoli che seguono dalla (3.35).

**Figura 3.9** Triangolo  $OAC \subset$  settore  $OAC \subset$  triangolo  $OAB$ .





## COROLLARIO 3.25

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \quad (3.39)$$

## Dimostrazione

La (3.38) segue dall'identità  $(1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Qui abbiamo utilizzato la (3.35), la (3.24) e le (i), (iii) e (iv) del Teorema 3.18. Analogamente,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Posto  $y = \arcsin x \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  (per la (3.26)), si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

Analogamente, utilizzando la sostituzione  $y = \operatorname{tg} x \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  (per la (3.25)), segue che  $(\operatorname{arctg} x)/x \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ .

I limiti nel Corollario 3.25 si possono riscrivere come

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2(1 + o(1)) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ \operatorname{tg} x &= x(1 + o(1)) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ \arcsin x &= x(1 + o(1)) && \text{per } x \rightarrow 0 \\ \operatorname{arctg} x &= x(1 + o(1)) && \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Per esempio, per  $x \rightarrow 0$ , utilizzando la (3.34) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}(1 + o(1)) \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2(1 + o(1)) \Leftrightarrow \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Con un semplice cambiamento di variabile, segue dalla (3.35) che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

dove  $y = 1/x$  (ovviamente abbiamo usato che  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ ). Analogamente, ponendo  $y = x^2$  si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

## ESEMPIO 3.24

## ESEMPIO 3.25

Utilizzando il cambiamento di variabile  $y = 2x$  e osservando che  $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ , dalla (3.36) segue che

$$\sin(2x) = 2x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 + o(1))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + o(1)) = 2.$$

Analogamente si ottiene che, per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} = a$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x} = a.$$

Dalla (3.40) si ottiene che

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))}{x} = \frac{1}{2}x(1 + o(1)) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Analogamente si calcola

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + o(1))}{-\frac{1}{2}x^2(1 + o(1))} = -2.$$



Nell'esempio precedente sarebbe stato possibile ottenere gli stessi risultati utilizzando direttamente i limiti notevoli (3.35) e (3.38) e il Teorema 3.18. Ma, come abbiamo già sottolineato, è estremamente utile abituarsi all'uso del simbolo " $o(1)$ " per  $x \rightarrow \dots$ " per indicare qualsiasi funzione che tende a 0, in quanto permette di rendere il calcolo dei limiti molto trasparente senza trascurare il rigore matematico. Per esempio, la scrittura

$$f(x) := \frac{\sin(3x^2)}{1 - \cos \sqrt{x}} = \frac{3x^2(1 + o(1))}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2(1 + o(1))} = 6x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

equivale, per la Definizione 3.23 di  $o(1)$ , al limite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 6$ , quindi descrive in modo conciso il comportamento della funzione  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ ; d'altra parte la scrittura " $f(x) = 6x$  per  $x \rightarrow 0^+$ ", purtroppo usata frequentemente dagli studenti, è sbagliata e conduce spesso a errori facilmente evitabili.

### ESEMPIO 3.26

Determiniamo i seguenti limiti:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin \frac{4}{x}}{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{x^2+1}};$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}.$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$

*Svolgimento.*

a) Si noti che  $y = 4/x \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow -\infty$  e  $\sin y = y(1 + o(1))$  per  $y \rightarrow 0$ ; quindi

$$\sin \frac{4}{x} = \frac{4}{x}(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned}\sqrt{3+x^2} - \sqrt{x^2+1} &= \frac{2}{\sqrt{3+x^2} + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2} \left( \sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right)} \\ &= \frac{2}{|x|(\sqrt{1+o(1)} + \sqrt{1+o(1)})} \\ &= \frac{1+o(1)}{-x} \quad \text{per } x \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

( $|x| = -x$  se  $x < 0$ ). Si ottiene allora facilmente

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin \frac{4}{x}}{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} (1+o(1)) \cdot \frac{-x}{1+o(1)} = -4.$$

b) Il risultato segue immediatamente dalle (3.35) e (3.38): per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x^3} \cdot \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

c) Posto  $y = x - \pi$ , risulta  $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pi$  e  $x = y + \pi$ , quindi

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y + \pi)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1.$$

Determinare il limite delle seguenti funzioni:

a)  $\frac{\sin x}{\cos(\sqrt{x}) - 1}$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;

d)  $\frac{\arccos x}{x - 1}$  per  $x \rightarrow 1^-$ ;

b)  $n \operatorname{arctg} \frac{4}{n+1}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;

e)  $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$  per  $x \rightarrow 1^-$ ;

c)  $\frac{\cos x}{2x - \pi}$  per  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ;

f)  $\frac{\sqrt[3]{x} \sin^2(2x)(\sqrt{x} - 1)}{1 + x - \cos(3x)}$  per  $x \rightarrow 0^+$ .

### ESERCIZIO 3.13

## 3.6 Infiniti, infinitesimi e confronti

Le funzioni  $x \mapsto x$  e  $x \mapsto 4^x$  sono entrambe infinite per  $x \rightarrow +\infty$ . Perciò il loro rapporto  $x/4^x$  è una forma indeterminata per  $x \rightarrow +\infty$ . Si ha:

### LEMMA 3.26

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4^x} = 0 \quad (3.41)$$

ovvero

$$x = o(1) \cdot 4^x \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$



**Dimostrazione**

Il limite è una conseguenza della disuguaglianza

$$2^x > x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Per dimostrarla basta considerare il caso  $x > 0$  e ricordarsi la definizione di  $[x]$ , la parte intera di  $x$  (si veda l'Esempio 2.9), e la disuguaglianza di Bernoulli ( $(1+h)^n \geq 1+nh$  per ogni  $h > -1$  e  $n \in \mathbb{N}$ ; si veda la (1.42)):

$$\begin{aligned} 2^x &\geq 2^{[x]} && \text{(essendo } x \geq [x] \text{ e } 2^x \text{ una funzione crescente)} \\ &\geq 1 + [x] && \text{(per la disuguaglianza di Bernoulli, } h = 1 \text{ e } n = [x]) \\ &> x && \text{(essendo } [x] > x - 1 \text{)}. \end{aligned}$$

È ora sufficiente applicare il Teorema 3.19 del confronto, scrivendo

$$\frac{x}{4^x} = \frac{x}{2^x} \cdot \frac{1}{2^x} < \frac{1}{2^x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Con semplici cambi di variabile, dal Lemma 3.26 si deduce un'ampia classe di limiti notevoli:

**TEOREMA 3.27**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, a > 1 \quad (3.43)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, b > 0, b \neq 1 \quad (3.44)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x |x|^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, a > 1 \quad (3.45)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\log_b x|^a = 0 \quad \forall \beta > 0, b > 0, b \neq 1, a \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

A parte i casi banali, i limiti nel Teorema 3.27 sono forme indeterminate: ad esempio, le funzioni  $a^x$  ( $a > 1$ ) e  $x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) sono entrambe infinite per  $x \rightarrow +\infty$  e le funzioni  $a^x$  ( $a > 1$ ) e  $|x|^\alpha$  ( $\alpha < 0$ ) sono entrambe infinitesime per  $x \rightarrow -\infty$ . I limiti (3.43) e (3.45) indicano che  $a^x$  ( $a > 1$ ) "va all'infinito più velocemente" di  $x^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) per  $x \rightarrow +\infty$ , e che  $a^x$  ( $a > 1$ ) "va a zero più velocemente di"  $|x|^\alpha$  ( $\alpha < 0$ ) per  $x \rightarrow -\infty$ . Dopo la dimostrazione introdurremo una nomenclatura più precisa per descrivere questi confronti.

**Dimostrazione**

(3.43). Se  $\alpha \leq 0$  il limite è immediato (non è una forma indeterminata), quindi basta considerare il caso  $\alpha > 0$ .

L'idea è di elaborare opportunamente l'espressione di partenza in modo da poter utilizzare la (3.41). Osservando che  $a^x = 4^{\log_4(a^x)} = 4^{x \log_4 a}$ , si scrive

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \frac{x^\alpha}{4^{x \log_4 a}} = \left( \frac{x}{4^{(x \log_4 a)/\alpha}} \right)^\alpha. \quad (3.47)$$

Perciò, effettuando la sostituzione

$$y = \frac{x \log_4 a}{\alpha} \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

si conclude che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \left( \frac{\alpha}{\log_4 a} \right)^\alpha \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y}{4^y} \right)^\alpha \stackrel{(3.41)}{=} 0.$$

(3.45). Si ottiene scambiando nella (3.43)  $x$  con  $-x$  (ovvero, ricorrendo al cambiamento di variabile  $y = -x$ :  $y \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow -\infty$ ).

(3.44). Se  $b > 1$ , si pone  $x = b^y$ , quindi  $y = \log_b x \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$  e

$$\frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = \frac{|y|^\alpha}{(b^\beta)^y} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (\Leftrightarrow y \rightarrow +\infty)$$

dove abbiamo utilizzato il limite (3.43) con  $a := b^\beta > 1$ . Se  $0 < b < 1$  la dimostrazione è analoga:  $y := \log_b x \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$  e, per la (3.45) con  $a := b^{-\beta} > 1$ ,

$$\frac{|\log_b x|^\alpha}{x^\beta} = |y|^\alpha (b^{-\beta})^y \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (\Leftrightarrow y \rightarrow -\infty).$$

(3.46) La sostituzione  $y := 1/x \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  riconduce il limite in esame al limite (3.44).

Come annunciato, introduciamo una nomenclatura che formalizza concetti quali “ $f$  va all’infinito più lentamente di  $g$ ” o “ $f$  va a zero più velocemente di  $g$ ”. Date due funzioni  $f$  e  $g$ , sia  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ .

(i) Se  $f$  e  $g$  sono entrambe infinite per  $x \rightarrow x_0$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

si dice che  $f$  è un **infinito di ordine inferiore** rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$  o, equivalentemente, che  $g$  è un **infinito di ordine superiore** rispetto a  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ ;

(ii) se  $f$  e  $g$  sono entrambe infinitesime per  $x \rightarrow x_0$  (con  $g \neq 0$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ ) e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

si dice che  $f$  è un **infinitesimo di ordine superiore** rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$  o, equivalentemente, che  $g$  è un **infinitesimo di ordine inferiore** rispetto a  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ .

In entrambi i casi, se invece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

si dice che  $f$  e  $g$  sono **infiniti dello stesso ordine** oppure **infinitesimi dello stesso ordine** per  $x \rightarrow x_0$ . Negli altri casi (ovvero se né  $f/g$  né  $g/f$  ammettono limite finito per  $x \rightarrow x_0$ ) si dice che  $f$  e  $g$  sono *non confrontabili* per  $x \rightarrow x_0$ .

Le (3.43)-(3.45) possono quindi essere riformulate come segue:

se  $a > 1$ ,  $a^x$  è un infinito di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza positiva di  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$

e, per ogni base  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ,

$\log_b x$  è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualsiasi potenza positiva di  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;

inoltre

se  $a > 1$ ,  $a^{-x}$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza positiva di  $1/x$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Per  $x \rightarrow x_0^+$  e per  $x \rightarrow x_0^-$  si danno definizioni analoghe: ad esempio, due funzioni infinite  $f$  e  $g$  sono dello stesso ordine per  $x \rightarrow x_0^+$  se  $f(x)/g(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  per  $x \rightarrow x_0^+$ .

### ESEMPIO 3.27

a) Per il limite notevole (3.38), la funzione  $f(x) = 1 - \cos x$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $g(x) = x$  per  $x \rightarrow 0$ . In altre parole,  $1 - \cos x$  tende a zero "più velocemente" di  $x$  per  $x \rightarrow 0$ . Si noti che  $1 - \cos x$  e  $x^2$  sono infinitesimi dello stesso ordine per  $x \rightarrow 0$ :

$$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Tale notazione evidenzia particolarmente bene questa proprietà.

b) Le funzioni  $f(x) = \log_4(3x^6 - 5x)$  e  $g(x) = \sqrt[8]{x+1}$  sono infinite per  $x \rightarrow +\infty$ . Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_4(3x^6 - 5x)}{\sqrt[8]{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_4(x^6(3 - 5x^{-5}))}{\sqrt[8]{x(1 + o(1))}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_4(x^6) + \log_4(3 + o(1))}{x^{1/8}(1 + o(1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6\log_4 x}{x^{1/8}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_4(3 + o(1))}{x^{1/8}} = 0 \end{aligned}$$

e quindi  $f$  è un infinito di ordine inferiore a  $g$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

c) Le funzioni  $f(x) = x(2 + \sin x)$  e  $g(x) = x$  non sono confrontabili per  $x \rightarrow +\infty$ , perché non esistono i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \sin x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \sin x}.$$

Un errore piuttosto comune consiste nel pensare che, per una qualunque funzione  $f$  infinita,  $\log(f(x))$  sia un infinito di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Il prossimo esempio mostra che ciò è falso.

### ESEMPIO 3.28

La funzione  $\log_7(1 + 2^{3x})$  è un infinito di ordine superiore a  $\sqrt{x}$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Infatti

$$\log_7(1 + 2^{3x}) = \log_7 2^{3x} + \log_7(2^{-3x} + 1) = 3x \log_7 2 + \log_7(1 + o(1))$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_7(1 + 2^{3x})}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3\sqrt{x} \log_7 2 + \frac{o(1)}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$$

È importante osservare che in questo caso l'argomento del logaritmo non è una funzione polinomiale in  $x$  e quindi il limite considerato non è riconducibile al limite notevole (3.44).

Concludiamo il paragrafo con alcuni esempi ulteriori.



Per calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 2^{\frac{1}{x}} 3^{\frac{1}{x^2}}$$

si noti che, essendo  $3^y = 2^{y \log_2 3}$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$x^4 2^{\frac{1}{x}} 3^{\frac{1}{x^2}} = x^4 2^{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \log_2 3} = x^4 2^{\frac{1}{x^2} (\log_2 3 + x)}.$$

Ponendo  $y = (\log_2 3 + x)/x^2$ , si ha che  $y \rightarrow +\infty$  e  $2^y \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0$ . D'altra parte  $x^4 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  e il limite si presenta come forma indeterminata del tipo  $0 \cdot \infty$ . È intuitivo cercare di utilizzare la (3.43). A tale scopo si osservi che  $x^4 = (\log_2 3 + x)^2 / y^2 = (\log_2 3 + o(1))^2 / y^2$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Da ciò segue che il limite vale

$$\log_2^2 3 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{2^y}{y^2} = +\infty.$$

**ESEMPIO 3.29**

Si vogliono disporre le seguenti funzioni in ordine di infinito crescente per  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\sqrt{1+x^4}, 2^{\sqrt{-x}}, x^2 \log_2(x^2), |x|^{-2 \arctg x}.$$

Si noti anzitutto che ciascuna funzione è infinita per  $x \rightarrow -\infty$ . Sulla base del Teorema 3.27, possiamo congetturare che l'ordine di infinito crescente sia il seguente:

$$\sqrt{1+x^4}, x^2 \log_2(x^2), |x|^{-2 \arctg x}, 2^{\sqrt{-x}}$$

(avere una prima ipotesi di lavoro aiuta perché minimizza le verifiche necessarie). Cominciamo a dimostrare che  $\sqrt{1+x^4}$  è un infinito di ordine inferiore rispetto a  $x^2 \log_2(x^2)$  per  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2 \log_2(x^2)} = \frac{x^2(1+o(x))}{x^2 \log_2(x^2)} = \frac{1+o(x)}{\log_2(x^2)} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

Proseguiamo mostrando che  $x^2 \log_2(x^2)$  è un infinito di ordine inferiore rispetto a  $|x|^{-2 \arctg x}$  per  $x \rightarrow -\infty$ : poiché  $2 + 2 \arctg x \rightarrow 2 - \pi < 0$  per  $x \rightarrow -\infty$ , risulta  $2 + 2 \arctg x < (2 - \pi)/2$  definitivamente per  $x \rightarrow -\infty$ . Quindi

$$0 < \frac{x^2 \log_2(x^2)}{|x|^{-2 \arctg x}} = |x|^{2+2 \arctg x} \log_2(x^2) \leq |x|^{\frac{2-\pi}{2}} \log_2(x^2)$$

definitivamente per  $x \rightarrow -\infty$ . Per il Teorema 3.27 la funzione a destra tende a zero per  $x \rightarrow -\infty$ , perciò la tesi segue dal Teorema del confronto. Per dimostrare l'ultima relazione, è sufficiente notare che  $\arctg x \geq -\pi$  e applicare ancora una volta il Teorema 3.27 e il Teorema del confronto:

$$0 < \frac{|x|^{-2 \arctg x}}{2^{\sqrt{-x}}} \leq \frac{|x|^\pi}{2^{\sqrt{-x}}} = \frac{(\sqrt{|x|})^{2\pi}}{2^{\sqrt{|x|}}} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

**ESEMPIO 3.30**

Determinare il limite delle seguenti successioni:

a)  $\frac{2^n}{n^{10000}};$

c)  $2^{-n} \log_2(n^2 + 1);$

b)  $\frac{1}{\sqrt[n]{n}};$

d)  $\frac{\sqrt{n+1}}{n} \log_2(n^2 + 3).$

**ESERCIZIO 3.14**

Determinare i limiti delle seguenti funzioni:

a)  $x^2 3^x$  per  $x \rightarrow 0;$

b)  $x 4^x$  per  $x \rightarrow -\infty;$

**ESERCIZIO 3.15**

- c)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log_2 x}\right)$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;
- d)  $\frac{\sqrt{x^4 + 1}}{\log_3\left(\frac{1}{x^2}\right)}$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;
- e)  $(x-1) \log_5(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)$  per  $x \rightarrow 1$ ;
- f)  $x^{-10} 3^{-(x+1)} 2^x$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;
- g)  $x^4 2^{-\frac{1}{x}}$  per  $x \rightarrow 0^-$ ;
- h)  $x^4 2^{-\frac{1}{x}}$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;
- i)  $(x-1)^{\frac{1}{x-1}}$  per  $x \rightarrow 1^+$ ;
- j)  $\left((x^2 + 1) \left(1 - \cos \frac{1}{16x}\right)\right)^{(x^3 + x^2 \log^{10} x) \sin^3 \frac{1}{2x}}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

**ESERCIZIO 3.16**

Studiare il seguente limite al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin(x^2 + x \log_2 x)}{(5x - \log_2 x)(x^\alpha + 3^{-\frac{1}{x}})}$$

**ESERCIZIO 3.17**

Disporre le seguenti funzioni in ordine di infinitesimo crescente per  $x \rightarrow +\infty$ :

- a)  $\frac{\log_2 x}{x}$ ,  $\frac{1}{x^{1/3} \log_3 x}$ ,  $x^{10} 2^{-x}$ ,  $\sin(x^{-1})$ ;
- b)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ ,  $\frac{1}{\log_2 x}$ ,  $1 - \cos(x^{-1/6})$ .

**ESERCIZIO 3.18**

Disporre le seguenti funzioni in ordine di infinito crescente per  $x \rightarrow +\infty$ :

- a)  $\frac{x^4}{\log_6^6 x}$ ,  $x^3 \log_2(3^x - 1)$ ,  $x^{\sqrt{15} \cos(\frac{1}{x})}$ ;
- b)  $3^{x \log_3 x}$ ,  $3^x$ ,  $(\log_3 x)^x$ ,  $\frac{1}{\sin(2^{-x})}$ .



## FILO ROSSO Capitali e parabole

Supponiamo di depositare un capitale  $C = 1$  euro nel nostro conto corrente, al tasso di interesse annuo nominale del 100% (magari...). Se l'interesse non è composto, allo scadere dell'anno il capitale finale  $C_f$  sarà  $1 + 1 = 2$ . Se l'interesse è composto semestralmente, allo scadere dei sei mesi  $C = 1 + \frac{1}{2}$ , e allo scadere dell'anno

$$C_f = 1 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25.$$

Rendimenti trimestrali danno  $C = 1 + 1/4$  dopo 3 mesi,  $C = (1 + 1/4)^2$  dopo 6 mesi,  $C = (1 + 1/4)^3$  dopo 9 mesi e  $C_f = (1 + 1/4)^4 = 2.44141$  dopo 1 anno. Più in generale, se l'interesse è composto  $n$  volte durante l'anno,  $C_f = (1 + 1/n)^n$ .

È intuitivo che  $C_f$  aumenta con l'aumentare del numero di composizioni annue,  $n$ , ma che succede se l'interesse è composto "istantaneamente"? Per saperlo dobbiamo passare al limite per  $n \rightarrow +\infty$ , cosa che pare fu esaminata per primo da Jacob Bernoulli nel 1683. Il risultato, sappiamo oggi, è un valore *finito* e irrazionale di  $C_f$ , indicato con  $e$ :

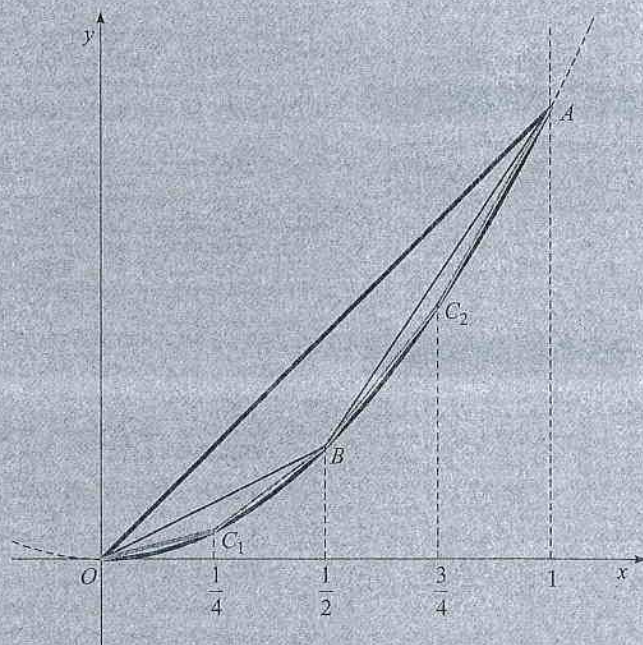
$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828182845904523536028747135662497\dots$$

All'inizio del capitolo ci occupiamo del numero  $e$ , altre proprietà delle successioni, e successioni ricorsive. Il resto del capitolo è dedicato al concetto di serie numerica, utilizzato per la prima volta da Archimede per affrontare la *quadratura della parabola*. Torniamo quindi un'altra volta al metodo di esaustione: data la parabola  $y = x^2$ , calcoleremo l'area del settore di parabola  $OA$  seguendo l'idea di Archimede.

Al passo zero consideriamo il triangolo  $p_0$  di vertici  $O$ ,  $B$  e  $A$ . Al primo passo consideriamo il pentagono  $p_1$  di vertici  $O$ ,  $C_1$ ,  $B$ ,  $C_2$  e  $A$ . Quindi  $p_1$  è ot-

tenuto aggiungendo a  $p_0$  due triangoli più piccoli: il primo di vertici  $O$ ,  $C_1$  e  $B$ , l'altro di vertici  $B$ ,  $C_2$  e  $A$ . Analogamente, al secondo passo si aggiungono altri 4 triangoli ancora più piccoli e si ottiene il poligono di vertici  $O$ ,  $(1/8, 1/64)$ ,  $C_1$ ,  $(3/8, 9/64)$ ,  $B$ ,  $(5/8, 25/64)$ ,  $C_2$ ,  $(7/8, 49/64)$  e  $A$ . In generale, al passo  $n$  si considera il poligono  $p_n$  che ha come vertici i punti

$$\left(\frac{j}{2^{n+1}}, \left(\frac{j}{2^{n+1}}\right)^2\right), \quad j = 0, \dots, 2^{n+1}.$$



Cerchiamo di capire quanto aumenti ad ogni passo l'area del poligono. Il numero di "nuovi" triangolini che si aggiungono è  $2^n$ , e un semplice calcolo algebrico mostra che l'area  $a_n$  di ciascun "nuovo" triangolino è  $1/8$  dell'area del precedente:

$$a_n = \frac{1}{8} a_{n-1} = \frac{1}{8^2} a_{n-2} = \dots = \frac{1}{8^n} a_0.$$



Perciò

$$\begin{aligned} s_n &= \text{area}(p_n) = a_0 + 2 \cdot a_1 + \dots + 2^n a_n \\ &= a_0 + \frac{1}{4} a_0 + \dots + \frac{1}{4^n} a_0 = a_0 \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}. \end{aligned}$$

Vedremo in questo capitolo che tale *progressione geometrica* converge:

$$a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{4}{3} a_0.$$

L'area  $a_0$  si calcola facilmente e vale  $1/8$ . Perciò l'area del settore di parabola  $OA$  vale  $1/6$ .

Chiariamo l'idea che abbiamo usato. Per sommare infiniti termini (le aree di tutti i triangoli) abbiamo prima calcolato delle *somme parziali*  $s_n$  (le somme fino al passo  $n$ ), e poi siamo passati al limite rispetto al numero di addendi. Quest'idea è la base del concetto di *serie numerica* che sviluppiamo nella seconda parte del capitolo.

### Guida

I primi tre paragrafi sono indispensabili. La trattazione delle serie (Paragrafo 4.7 e seguenti) è differibile finché non si trattano: complementi sulle serie numeriche (Capitolo 9), curve non rettificabili (Esempio 12.5), metodo di Frobenius ed equazioni di Bessel (Paragrafo 17.5.4), funzioni olomorfe e trasformate (Parte V). Per alcuni dettagli si vedano i singoli paragrafi.

### Limite e successioni

## 4.1 Successioni a valori in $\mathbb{R}$

Ricordiamo che una successione a valori in  $\mathbb{R}$  è una funzione da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ , indicata con  $\{a_n\}$ . L'unico punto di accumulazione per il suo dominio  $\mathbb{N}$  è  $+\infty$ , perciò si può solo studiare il limite della successione per  $n \rightarrow +\infty$ . Distinguiamo tre casi.

### DEFINIZIONE 4.1

Sia  $\{a_n\}$  una successione a valori in  $\mathbb{R}$ :

- (i) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ , la successione  $\{a_n\}$  si dice **convergente**;
- (ii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$  oppure  $-\infty$ , la successione si dice **divergente**;
- (iii) se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  non esiste in  $\mathbb{R}^*$ , la successione si dice **irregolare**.

**Notazione.** In questo capitolo,  $k$ ,  $n$  e  $N$  indicheranno sempre numeri naturali.

Raccogliamo le principali proprietà di una successione a valori reali.

### PROPOSIZIONE 4.2

Sia  $\{a_n\}$  una successione a valori in  $\mathbb{R}$ . Allora:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tale che  $|a_n - \ell| < \varepsilon \forall n > N$ .
- 2a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n > M \forall n > N$ .
- 2b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n < M \forall n > N$ .
- 3) **Permanenza del segno.** Se  $a_n \rightarrow \ell > 0$  allora  $a_n > 0$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ .
- 4) **Una successione convergente è limitata.**
- 5) **Confronto.** Se  $a_n \rightarrow \ell$ ,  $c_n \rightarrow \ell$  e  $a_n \leq b_n \leq c_n$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ , allora  $b_n \rightarrow \ell$  per  $n \rightarrow +\infty$ .
- 6) **Successioni (definitivamente) monotone.**  $\{a_n\}$  è definitivamente crescente (decrescen-te) se e solo se esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $a_n \leq (\geq) a_{n+1}$  per ogni  $n \geq n_0$ .  $\{a_n\}$  è crescente (decrescen-te) se e solo se  $a_n \leq (\geq) a_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .
- 7) **Limiti di successioni definitivamente monotone.** Una successione definitivamente crescente (decrescen-te)  $\{a_n\}$  ammette limite  $\ell \in \mathbb{R}^*$ . Tale limite è finito se e solo se  $\{a_n\}$  è anche limitata, altrimenti  $\ell = +\infty$  (rispettivamente  $\ell = -\infty$ ). Quindi:
- 7a) **Una successione monotona e limitata è convergente.**

### Dimostrazione

(1), (2) e (6) sono riformulazioni delle corrispondenti definizioni date per funzioni



generiche. (3), (5) e (7) sono riformulazioni dei corrispondenti risultati per limiti di funzioni. Per provare (4), prendiamo  $\varepsilon = 1$  nella definizione di limite (vedi (1)): si ottiene che esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$|a_n| \leq M_0 := |\ell| + 1 \quad \forall n > N.$$

Posto

$$M_1 := \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_N|\}$$

(si osservi che  $M_1$  esiste, essendo il massimo di un sottoinsieme *finito* di  $\mathbb{R}$ ), risulta

$$|a_n| \leq M_1 \quad \text{se } 0 \leq n \leq N$$

e quindi

$$|a_n| \leq M := \max\{M_0, M_1\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si noti che non vale il viceversa di (3); per esempio  $1/n > 0$  per ogni  $n \geq 1$ , mentre risulta  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \neq 0$ . Non vale neppure il viceversa di (4), ovvero una successione limitata non è necessariamente convergente; per esempio la successione  $\{(-1)^n\}$  è limitata e irregolare (si veda l'Esempio 3.20b).

Nella Proposizione 4.2 mancano enunciati corrispondenti al limite di funzione composta. Vedremo nel Paragrafo 4.3 come definire la composizione tra due successioni. Per ora occupiamoci della composizione di una successione con una funzione:

date  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in X \\ X \ni x \mapsto g(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$ , consideriamo  $\mathbb{N} \ni n \mapsto g(a_n) \in \mathbb{R}$ .

Sia  $\ell$  un punto di accumulazione per  $X$ . Applicando il teorema del limite di funzione composta (Teorema 3.22) con  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(n) = a_n$ , si ottiene che

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \\ a_n \neq \ell \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{x \rightarrow \ell} g(x) = k \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n) = k. \quad (4.1)$$

Questa semplice osservazione consente di utilizzare i limiti ottenuti finora (e altri che saranno ottenuti in seguito) per il calcolo dei limiti di successione.

verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n \begin{cases} = 0 & \text{se } -1 < r < 1 \\ = 1 & \text{se } r = 1 \\ = +\infty & \text{se } r > 1 \\ \text{non esiste in } \mathbb{R}^* & \text{se } r \leq -1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Sappiamo (si veda la (3.22)) che, per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $r^x \rightarrow 0$  se  $r \in (0, 1)$  e  $r^x \rightarrow +\infty$  se  $r > 1$ . Inoltre  $1^x = 1$  e  $0^x = 0$  per ogni  $x > 0$ . Utilizzando (4.1) con  $a_n = n \rightarrow +\infty$ , si ottiene (4.2) per  $r \geq 0$ . Se  $r \leq -1$ , la non esistenza del limite è già stata discussa nell'Esempio 3.8b e 3.8c. Infine, se  $r \in (-1, 0)$  allora  $-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n$  e la conclusione segue dal Teorema del confronto (punto 5 della Proposizione 4.2).

Per la (3.22) sappiamo che  $r^x \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$  per ogni  $r > 0$ . Utilizzando (4.1) con  $a_n = 1/n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{r} = 1 \quad \text{per ogni } r > 0. \quad (4.3)$$



#### ESEMPIO 4.1

#### ESEMPIO 4.2

## ESEMPIO 4.3

Si vuole determinare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left( 3 \sin^2 \left( \frac{1}{3n^2} \right) + \cos \left( \frac{1}{n^2} \right) - 1 \right).$$

Sappiamo che  $\sin x = x(1 + o(1))$  e  $1 - \cos x = \frac{x^2}{2}(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow 0$ . Poiché le successioni  $a_n = 1/n^2$  e  $a_n = 1/(3n^2)$  sono infinitesime per  $n \rightarrow +\infty$ , utilizzando (4.1) si ottiene

$$3 \sin^2 \left( \frac{1}{3n^2} \right) + \cos \left( \frac{1}{n^2} \right) - 1 = \frac{1}{3n^4} (1 + o(1)) - \frac{1}{2n^4} (1 + o(1)) = -\frac{1}{6n^4} (1 + o(1))$$

per  $n \rightarrow +\infty$ . Pertanto il limite esiste e vale  $-1/6$ .

Procedendo come nell'Esempio 4.1, ovvero utilizzando (4.1) con  $a_n = n \rightarrow +\infty$ , i limiti notevoli (3.43) e (3.44) implicano che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}, a > 1 \quad (4.4)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\log_b n|^\alpha}{n^\beta} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0, b > 0, b \neq 1. \quad (4.5)$$

Inoltre non è difficile dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{per ogni } a > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (4.6)$$

dove  $n!$  è definito nell'Appendice 1.B. Proviamo solo il primo limite nella (4.6). Si noti che

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n}.$$

Fissato  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $a/m < 1/2$  per ogni  $m > N$ , risulta

$$\frac{a^n}{n!} = \left( \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N} \right) \cdot \left( \frac{a}{N+1} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n} \right) < \frac{a^N}{N!} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-N} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e il risultato segue per confronto (punto 5 della Proposizione 4.2).

Quanto espresso dai limiti notevoli (4.4)-(4.6) può essere riassunto così: le seguenti successioni sono disposte in ordine di infinito crescente per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\log_b n \ (b > 1), \quad n^\alpha \ (\alpha > 0), \quad r^n \ (r > 1), \quad n!, \quad n^n.$$

Inoltre, osservando che  $\sqrt[n]{n} = 2^{\frac{1}{n} \log_2 n}$ , dalla (4.5) segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Gerarchie di infiniti

## ESERCIZIO 4.1

Dimostrare il secondo limite nella (4.6).



Determinare il limite delle seguenti successioni:

a)  $\frac{30^{4n}}{(3n+1)!}$ ;

d)  $(\sqrt{n} + \log_3^5(14n^5 + 3n^2 + 1)) \sqrt[4]{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^3}}$ ;

b)  $\frac{n^n}{(2n)!}$ ;

e)  $\frac{2^{\log_3 n}}{n}$ ;

c)  $\frac{4^{(n^2)}}{n^n}$ ;

f)  $\frac{7\sqrt{n}}{n^{\log_3 n}}$ .

ESERCIZIO 4.2

Disporre le seguenti successioni in ordine di infinitesimo crescente:

a)  $\frac{1}{(n+1)^2}$ ,  $\sin(n^{-1/2})$ ,  $\sqrt{n^4+n} - n^2$ ; c)  $\frac{1}{(n!)!}$ ,  $2^{-n^2}$ ,  $\frac{1}{n^{2n}}$ .

b)  $\frac{1}{(n!)^2}$ ,  $\frac{1}{n^n}$ ,  $2^{-100n}$ ;

ESERCIZIO 4.3

## 4.2 Il numero e

Oltre a  $\pi$ , vi è un altro numero irrazionale di particolare importanza: si tratta del numero  $e$ , la cui definizione si basa sul seguente risultato.

### TEOREMA 4.3

La successione

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n=1,2,\dots} \quad (4.7)$$

è strettamente crescente e limitata.

Dimostrazione 

Dal Teorema 4.3 e dal punto 7a della Proposizione 4.2 segue che la successione (4.7) è convergente; il numero  $e$  è definito come il suo limite:

### DEFINIZIONE 4.4

Si pone

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (4.8)$$

Il  $\log_e x$  prende il nome di **logaritmo naturale** di  $x$  e si usano anche le notazioni

$$\log x := \log_e x \quad \text{oppure} \quad \ln x := \log_e x \quad \text{per } x > 0.$$

Si può dimostrare che  $e \notin \mathbb{Q}$ , e che la sua rappresentazione decimale comincia così:

$$e = 2.7182818284 \dots$$

Valgono inoltre le seguenti disuguaglianze che forniscono stime per difetto e per eccesso di  $e$ :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

La prima segue ovviamente dalla monotonia stretta della successione, la seconda disuguaglianza è meno ovvia (per questa rimandiamo il lettore interessato alla dimostrazione del Teorema 4.3); si osservi però che  $(1 + 1/n)^{n+1} = (1 + 1/n)^n \cdot (1 + 1/n) \rightarrow e$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Scegliendo per esempio  $n = 3$  si ottiene la stima  $2.3 < e < 3.2$ .

Le applicazioni del Teorema 4.3 riguardanti limiti notevoli saranno discusse in modo approfondito nel Capitolo 5. Per il momento ci limitiamo a presentare alcune prime conseguenze. Si ha anzitutto

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}(1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (4.10)$$

Infatti, dalla (4.8) e dalla (4.1) si ottiene  $n \log(1 + 1/n) = \log(1 + 1/n)^n \rightarrow 1$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Segue poi dalla (4.9) e dalla disuguaglianza di Bernoulli che

$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}(1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (4.11)$$

(si veda l'Esercizio 4.5). Un'ulteriore applicazione, di grande utilità per approssimare il valore di  $n!$  per grandi valori di  $n$ , è la **formula di Stirling** (di cui omettiamo la dimostrazione):

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

ovvero, passando al logaritmo naturale,

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \log(\sqrt{2\pi}) + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

#### ESERCIZIO 4.4

Determinare il limite delle seguenti successioni:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}; & \text{c) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3/\cos(1/\sqrt{n})-1}; \\ \text{b) } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+3}{2n+1}}; & \text{d) } \frac{n \log^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}. \end{array}$$

#### ESERCIZIO 4.5

Dimostrare la (4.11) (si utilizzi la (4.9) e la disuguaglianza di Bernoulli (1.37) con  $h = 1/n^2$ ).

#### ESERCIZIO 4.6

Disporre le seguenti successioni in ordine di infinito crescente:

$$\begin{array}{l} \text{a) } n^3 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n^{5/2}(e^{1/n} - 1), \quad n^{\arctg n}, \quad n^2 \log(2 + n^2); \\ \text{b) } n^{\arctg(2n)}, \quad \sqrt{n}(3 + \cos n), \quad n^3 \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad \sqrt{n} \log n; \end{array}$$

$$c) n^{2\arctg n}, \quad n^3 \log^{10} n, \quad \log(e^{(n^5)} - 1), \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

### 4.3 Sottosuccessioni

Sia  $\{a_n\}$  una successione; ne selezioniamo, in modo arbitrario, infiniti termini con cui costruiamo una nuova successione  $\{b_n\}$  i cui termini si succedono nello stesso ordine che avevano nella successione di partenza. Allora  $\{b_n\}$  si dice **sottosuccessione** di  $\{a_n\}$ . In altre parole, una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  è definita da infiniti (ma non necessariamente tutti!) termini di  $\{a_n\}$  e l'ordine degli elementi non cambia. Più precisamente:

#### DEFINIZIONE 4.5

Una successione  $\{b_n\}$  si dice **sottosuccessione** della successione  $\{a_n\}$  se esiste una successione strettamente crescente  $\{k_n\}$  a valori in  $\mathbb{N}$  tale che

$$b_n = a_{k_n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Sia  $a_n = (-1)^n / (n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Le successioni

$$\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\} \quad (k_n = 2n)$$

$$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots\right\} \quad (k_n = 2n+1)$$

sono sottosuccessioni di  $\{a_n\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots\right\}$ . Non è una sottosuccessione  $\left\{1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \dots\right\}$ .

Nella Definizione 4.5, la sottosuccessione  $b_n = a_{k_n}$  si può interpretare come la composizione delle due successioni  $n \mapsto k_n$  e  $k \mapsto a_k$ . Questa osservazione (oppure, direttamente, la definizione di limite) conduce facilmente al seguente risultato:

#### TEOREMA 4.6

Una successione ha limite  $l \in \mathbb{R}^*$  se e solo se ogni sua sottosuccessione ha limite  $l$ .

Il Teorema 4.6 si utilizza spesso per provare che una data successione è irregolare, come mostra il prossimo esempio.

La successione  $a_n = \cos(\pi n)$  è irregolare. Infatti la sottosuccessione  $b_n = \cos(2\pi n)$  ( $k_n = 2n$ ) è tale che  $b_n \equiv 1$ , mentre la sottosuccessione  $b'_n = \cos(2\pi n + \pi)$  ( $k_n = 2n+1$ ) è tale che  $b'_n \equiv -1$ .

Il seguente risultato è di grande utilità.

#### TEOREMA 4.7

Una successione limitata a valori in  $\mathbb{R}$  ha una sottosuccessione convergente.

#### ESEMPIO 4.4

Dimostrazione

#### ESEMPIO 4.5

Dimostrazione



Abbiamo già visto che una successione limitata non è necessariamente convergente. Per esempio,  $\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$  non ha limite; in questo caso è facile *estrarre* una sottosuccessione convergente:  $\{1, 1, 1, \dots\}$  ( $k_n = 2n$ ) oppure  $\{-1, -1, -1, \dots\}$  ( $k_n = 2n + 1$ ) sono convergenti e il limite è 1, rispettivamente -1. Il Teorema 4.7 afferma che è sempre possibile estrarre una sottosuccessione convergente da una successione limitata.

Infatti, se consideriamo l'immagine della successione, essa sarà un insieme finito o infinito. Nel primo caso è ovvio che almeno un valore è assunto infinite volte e questo ci permette di estrarre una sottosuccessione costante. Nel secondo caso, poiché l'immagine è un sottoinsieme limitato e infinito di  $\mathbb{R}$ , il teorema di Bolzano-Weierstrass assicura l'esistenza di un punto di accumulazione per l'immagine della successione, e come si può intuire, tale punto risulta essere il limite di una sottosuccessione.

**Osservazione.** Il Teorema 4.7 non vale in  $\mathbb{Q}$  (così come il teorema di Bolzano-Weierstrass, su cui si basa): se prendiamo una successione di numeri razionali che converge in  $\mathbb{R}$  a un numero irrazionale  $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , ogni sua sottosuccessione converge in  $\mathbb{R}$  a  $\ell$ , e quindi non converge in  $\mathbb{Q}$ .

#### Guida

Il criterio di Cauchy è utilizzato nelle seguenti dimostrazioni: criterio di convergenza assoluta per serie (Paragrafo 4.9.1, e 4.9.2), prodotto di Cauchy di due serie (Paragrafo 4.11, da cui il testo non dipende), proprietà di funzioni uniformemente continue (Paragrafo 6.6, da cui il testo non dipende) e teorema di Cauchy per EDO (Paragrafo 17.2.2).

## 4.4 Criterio di Cauchy

Sia  $\{a_n\}$  una successione convergente a  $\ell \in \mathbb{R}$ . Per la disuguaglianza triangolare,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| \quad \text{per ogni } n, m \in \mathbb{N}.$$

Allora, preso  $\varepsilon > 0$ , esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \in \mathbb{N}$$

ovvero si può rendere la distanza tra due termini  $a_n$  e  $a_m$  di una successione convergente arbitrariamente piccola scegliendo  $n$  e  $m$  opportunamente grandi. Quindi una successione convergente è anche "fondamentale":

#### DEFINIZIONE 4.8

Una successione  $\{a_n\}$  a valori reali si dice **fondamentale** o **di Cauchy** se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } N \in \mathbb{N} \text{ tale che } |a_n - a_m| < \varepsilon \text{ per ogni } n, m \geq N. \quad (4.12)$$

Scegliendo nella definizione per esempio  $\varepsilon = 1$  e  $m = N$ , si ottiene facilmente che

$$\boxed{\text{una successione fondamentale è limitata}}. \quad (4.13)$$

Essendo limitata, per il Teorema 4.7 una successione di Cauchy ammette una sottosuccessione  $\{a_{k_n}\}$  convergente a un limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Ma alla luce della definizione di successione fondamentale,

$$|a_n - \ell| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Abbiamo così ottenuto che *una successione di Cauchy è convergente*, ovvero vale il seguente risultato.

#### TEOREMA 4.9 Criterio di Cauchy

*Una successione a valori reali è convergente se e solo se è fondamentale.*

Dimostrazione

Ancora una volta il risultato non vale in  $\mathbb{Q}$ : la successione  $\{(1 + 1/n)^n\}$  è fondamentale in  $\mathbb{R}$ , essendo ivi convergente, quindi è fondamentale in  $\mathbb{Q}$ ; d'altra parte non è convergente in  $\mathbb{Q}$  poiché  $e$  non è un numero razionale.

Si noti la differenza cruciale tra la definizione di successione convergente e quella di successione fondamentale: nella definizione di successione fondamentale non interviene il valore del limite. Quindi, per verificare che una successione sia fondamentale non si deve conoscere a priori il valore  $\ell$  del suo limite. Questo fatto risulterà di particolare importanza nello studio delle serie, per le quali, come vedremo in seguito, è generalmente difficile individuare candidati per l'eventuale limite.

## 4.5 Successioni ricorsive

La banca ci presta  $a_0$  euro con una spesa di gestione di 10 euro l'anno. Al tasso di interesse fisso del 5%, quanto dovremo restituire tra  $n$  anni? Dopo un anno  $a_1 = a_0 + (5/100)a_0 + 10$ , dopo due anni  $a_2 = a_1 + (5/100)a_1 + 10$ , e così via:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{21}{20}a_n + 10 & \text{per } n \geq 0 \\ a_0 & \text{dato.} \end{cases}$$

Questo è uno tra i più semplici esempi di successione definita per ricorrenza.

### DEFINIZIONE 4.10

Siano  $k \in \mathbb{N}$  e  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Una **successione ricorsiva** è definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(n, a_n, \dots, a_{n-k}) & \text{per } n \geq k \\ a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R} & \text{dati.} \end{cases}$$

Le successioni ricorsive possono assumere tutti i comportamenti delle successioni definite in precedenza come funzioni da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$ : convergente, divergente, irregolare. Ovviamente c'è una differenza cruciale: il valore del termine  $n$ -esimo non è definito esplicitamente, ma dipende dai precedenti; quindi il comportamento di una successione ricorsiva dipende dai valori iniziali  $a_0, \dots, a_k$ .

Sia

$$a_{n+1} = (a_n)^2 \quad \text{per } n \geq 0.$$

In questo caso si può ricavare esplicitamente  $a_n$  per induzione:

$$a_{n+1} = (a_n)^2 = \left((a_{n-1})^2\right)^2 = (a_{n-1})^4 = \dots = (a_0)^{2^{n+1}}.$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } |a_0| < 1 \\ 1 & \text{se } |a_0| = 1 \\ +\infty & \text{se } |a_0| > 1. \end{cases}$$

Spesso non è possibile esplicitare  $a_n$ . In tal caso, oltre al principio di induzione, per studiare il comportamento di una successione ricorsiva dovremo utilizzare altri strumenti introdotti in precedenza (confronto, monotonia, criterio di Cauchy). Ci sarà anche molto utile il seguente (immediato) criterio che seleziona i possibili valori del limite della successione.

### Guida

Il Paragrafo è opzionale (anche se nel seguito si incontrano alcune successioni ricorsive, per esempio la caratterizzazione delle somme parziali di una serie).



### ESEMPIO 4.6



**PROPOSIZIONE 4.11**

Sia  $\{a_n\}$  una successione ricorsiva. Se esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$ , allora  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, a_n, \dots, a_{n-k})$ .

Facciamo qualche esempio che illustra come procedere.

**ESEMPIO 4.7**

Al variare di  $b \in \mathbb{R}^+$ , determiniamo il comportamento della successione ricorsiva

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} & \text{per } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = b. \end{cases}$$

Applicando la Proposizione 4.11, se la successione converge a  $\ell \in \mathbb{R}^*$  deve essere

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = \begin{cases} \frac{\ell}{1+\ell} & \text{se } \ell \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{se } \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Poichè l'uguaglianza è vera se e solo se  $\ell = 0$ , se il limite  $\ell$  esiste deve valere 0. Utilizzando il principio di induzione, si vede subito che  $a_n > 0$  per ogni  $n$ : infatti  $a_0 = b > 0$  per ipotesi, e se  $a_n > 0$  allora  $a_{n+1} = a_n/(1+a_n) > 0$ . Da questo segue che la successione è decrescente: infatti

$$a_{n+1} - a_n = a_n \left( \frac{1}{1+a_n} - 1 \right) = -\frac{a_n^2}{1+a_n} < 0.$$

Siamo ora in grado di concludere: poichè  $\{a_n\}$  è decrescente e a termini positivi,  $0 < a_n \leq b$  per ogni  $n$ ; quindi  $\{a_n\}$  è convergente (punto 7a della Proposizione 4.2), e per quanto sopra il limite deve essere 0. Concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad \text{per ogni } b > 0.$$

**ESEMPIO 4.8**

La successione di Fibonacci

All'inizio del XIII secolo, Fibonacci introduce la seguente successione, che a lui deve il nome:

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_n + a_{n+1} & \text{per } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = a_1 = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Si tratta di uno dei primi tentativi di descrizione matematica di fenomeni biologici: la crescita di una popolazione di conigli a partire da una coppia. Indicando con  $n$  il numero di mesi trascorsi e con  $a_n$  il numero di coppie, la struttura della successione si ottiene facilmente (lo studente verifichi!) dalle due ipotesi seguenti: a) i conigli sono immortali; b) ogni coppia diviene fertile dopo un mese e successivamente genera una coppia ogni mese. Ragionando come nell'esempio precedente, si vede che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$$

Infatti, segue subito dalla Proposizione 4.11 che gli unici possibili valori del limite sono  $0, +\infty, -\infty$ ; utilizzando il Principio di induzione, si verifica facilmente che  $a_n > 0$  per ogni  $n$ ; in particolare  $a_{n+2} - a_{n+1} = a_n > 0$ , ovvero  $\{a_n\}$  è crescente, quindi ammette limite: poichè  $a_n > 0$  per ogni  $n$ , tale limite non può essere né 0, né  $-\infty$ . Pertanto  $a_n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Sia la successione di Fibonacci sia quella, da essa ottenuta, definita da

$$A_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad (4.15)$$

hanno interessanti legami con la musica, la geometria, le arti figurative, l'architettura e la teoria dei numeri. Ne indicheremo uno nel prossimo esempio.



Consideriamo la successione  $\{A_n\}$  definita dalla (4.15). Poiché

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{A_n}, \quad A_1 = \frac{a_1}{a_0} = 1,$$

$\{A_n\}$  è essa stessa una successione ricorsiva:

$$\begin{cases} A_{n+1} = 1 + \frac{1}{A_n}, & n \geq 1 \\ A_1 = 1. \end{cases}$$

Si verifica subito per induzione che  $A_n \geq 1$  per ogni  $n$ . Pertanto, se il limite  $\ell$  esiste, per la Proposizione 4.11

$$1 \leq \ell = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{se } \ell = \pm\infty \end{cases} \quad \text{e quindi } \ell = A := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Il numero  $A$  si chiama **sezione aurea**: se dividiamo un segmento  $\overline{AB}$  in due segmenti  $\overline{AC}$  e  $\overline{CB}$  tali che le corrispondenti lunghezze verifichino la relazione  $|\overline{AB}|/|\overline{AC}| = |\overline{AC}|/|\overline{CB}|$ , si ottiene  $|\overline{AB}|/|\overline{AC}| = A$ .

Verifichiamo che  $A$  è in effetti il limite della successione. Osserviamo anzitutto che

$$A_n > A \Rightarrow A_{n+1} < A \quad \text{e} \quad A_n < A \Rightarrow A_{n+1} > A$$

infatti, se per esempio  $A_n > A$ , allora (ricordando la definizione di  $A$ )

$$A_{n+1} - A = 1 + \frac{1}{A_n} - A < 1 + \frac{1}{A} - A = \frac{1 + A - A^2}{A} = 0.$$

Quindi  $\{A_n\}$  oscilla intorno ad  $A$ . Poiché  $A_1 = 1 < A$ , ne deduciamo che  $A_{2k} > A$  e  $A_{2k-1} < A$  per ogni  $k \geq 1$ . Verifichiamo adesso che queste due sottosuccessioni sono anch'esse ricorsive e inoltre monotone, rispettivamente decrescente e crescente: infatti, per esempio,

$$A_{2(k+1)} - A_{2k} = 1 + \frac{1}{A_{2k+1}} - A_{2k} = 1 + \frac{A_{2k}}{1 + A_{2k}} - A_{2k} = \frac{1 + A_{2k} - A_{2k}^2}{1 + A_{2k}} < 0,$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che  $A_{2k} > A$ . Concludiamo: la successione  $\{A_{2k}\}$  è decrescente e limitata inferiormente (da  $A$ ), quindi converge. Essendo ricorsiva, possiamo utilizzare ancora la Proposizione 4.11, da cui segue subito che il limite deve valere  $A$ . Per le stesse ragioni  $A_{2k-1} \rightarrow A$ , e pertanto tutta la successione converge ad  $A$ .

Determinare il comportamento (e, se esiste, il limite) delle seguenti successioni ricorsive:

- a)  $a_{n+1} = 1 - a_n$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ;                      d)  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} a_n$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $a_{n+1} = \max\{1, a_n\}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $a_{n+1} = \sin(a_n)$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ ;                      e)  $a_{n+1} = \sqrt{|1 + a_n|}$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}^+$ .

## 4.6 Sommatorie

Dati  $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$  con  $n_0 \leq n_1$ , e  $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_{n_1} \in \mathbb{R}$ , si pone

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1}. \quad (4.16)$$

### ESEMPIO 4.9

La sezione aurea



Figura 4.1 Sezione aurea di  $\overline{AB}$ :  $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}$ .

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### ESERCIZIO 4.7

#### Guida

Il paragrafo è differibile finché non si trattano le serie e i polinomi di Taylor.

Se  $n_0 = n_1$ , allora  $\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k = a_{n_0}$ . Il simbolo a sinistra nella (4.16) è detto **sommatoria**. Per esempio

$$\sum_{k=0}^4 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

$$\sum_{k=-10}^{-8} \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{8} - \frac{1}{7}. \quad (4.17)$$

L'indice  $k$  assume tutti i valori interi compresi tra  $n_0$  e  $n_1$  e ovviamente (4.16) non dipende dall'indice  $k$  ma solo dai valori iniziale e finale che esso assume:

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} a_k = \sum_{h=n_0}^{n_1} a_h. \quad (4.18)$$

Utilizzeremo spesso i "cambiamenti di indice": per esempio, ponendo  $j = k + 10$  (ovvero  $k = j - 10$ ), la (4.17) si riscrive come

$$\sum_{k=-10}^{-8} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=0}^2 \frac{1}{j-9} \stackrel{(4.18)}{=} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{k-9}.$$

Progressione  
geometrica

Come lo studente ricorda,

$$1 - r^2 = (1 - r)(1 + r), \quad 1 - r^3 = (1 - r)(1 + r + r^2), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, si ha:

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad (4.19)$$

La sommatoria a sinistra nella (4.19) si chiama **progressione geometrica di ragione  $r$** . Per verificare (4.19), basta applicare la proprietà distributiva ed effettuare un cambio di indice:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^n r^k \right) (1 - r) &= \sum_{k=0}^n r^k - \sum_{k=0}^n r^{k+1} = \sum_{k=0}^n r^k - \sum_{j=1}^{n+1} r^j = \sum_{k=0}^n r^k - \sum_{k=1}^{n+1} r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (r^k - r^k) - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}. \end{aligned}$$

Con lo stesso tipo di ragionamento possiamo mostrare che

$$\sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}. \quad (4.20)$$

Infatti

$$\sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Utilizzare la formula (4.19) per dimostrare che

$$\forall a_0, r \in \mathbb{R}, r \neq 1 \text{ e } \forall n, n_0 \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$$

si ha

$$\sum_{k=n_0}^n a_0 r^k = \frac{a_0 r^{n_0} - a_0 r^{n+1}}{1-r}$$

#### ESERCIZIO 4.8

#### GUIDA

Si veda la guida all'inizio del capitolo.

## 4.7 Serie numeriche: definizione e proprietà elementari

Una **serie numerica** è la somma formale degli elementi di una successione numerica  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Per indicare una serie si usano le notazioni

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{oppure} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

e  $a_k$  prendono il nome di **termini** della serie.

Il metodo che seguiamo per dare rigore matematico alla somma formale è intuitivo: a partire dalla successione  $\{a_k\}$ , costruiamo un'altra successione sommando i primi  $n$  termini di  $\{a_k\}$ . I numeri

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \quad (4.21)$$

sono detti **somme parziali** o **somme ridotte** della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Si noti che, data  $\{a_k\}$ ,  $\{s_n\}$  può essere definita in modo ricorsivo come

$$\begin{cases} s_n = s_{n-1} + a_n & \text{per } n \geq 1 \\ s_0 = a_0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Il *comportamento della serie* è determinato dall'andamento della successione  $\{s_n\}$ .

#### DEFINIZIONE 4.12

Sia  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione a valori in  $\mathbb{R}$ . Si dice che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  è (semplicemente) **convergente** se è convergente la successione  $\{s_n\}$  delle somme parziali definita in (4.21). In tal caso il limite  $s$  di  $\{s_n\}$  si dice **somma** della serie:

$$s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

e si scrive

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Si dice che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  è **divergente (irregolare)** se è tale la successione delle sue somme parziali  $\{s_n\}$ .



In altre parole, si dice che:

$$\text{il comportamento di } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R} \\ \text{divergente a } +\infty & \text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty \\ \text{divergente a } -\infty & \text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty \\ \text{irregolare} & \text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \text{ non esiste.} \end{cases}$$

**Osservazione.** Il simbolo  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  viene usato sia per indicare la serie stessa, cioè la somma formale, sia per indicare la somma della serie nel caso in cui questa converga. Se la serie diverge si scrive anche

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \text{ (oppure } -\infty \text{)} :$$

Il problema centrale nella teoria delle serie è che raramente si può determinare una formula esplicita per la somma parziale  $s_n$ , quindi non è possibile in generale applicare direttamente la teoria presentata nei paragrafi precedenti per studiare la successione  $\{s_n\}$ . Occorre perciò sviluppare *criteri di convergenza* ed eventuali metodi di *approssimazione della somma*.

Cominciamo con una *condizione necessaria* per la convergenza di una serie.

Condizione  
necessaria

#### TEOREMA 4.13

Sia  $\{a_k\}$  una successione reale. Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è convergente} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0. \quad (4.23)$$

#### Dimostrazione

Essendo la serie convergente con somma  $s \in \mathbb{R}$ , per definizione la successione delle somme ridotte converge a  $s$ :  $s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Ricordando la (4.22), si ha  $a_n = s_n - s_{n-1}$  per ogni  $n > 0$ , e quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

La doppia implicazione nella (4.23) è falsa:



$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è convergente.}$$

Per esempio, i termini della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$  tendono a zero per  $k \rightarrow +\infty$ , mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty.$$

Infatti

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ addendi}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi la condizione  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$  è necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie.

Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  una serie. Fissato  $n_0 \in \mathbb{N}$ , consideriamo la serie  $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$ , anche detta una **coda** della serie. Le rispettive somme parziali,  $s_n$  e  $s'_n$ , sono collegate dalla relazione

Coda, errore

$$s'_n = \sum_{k=n_0+1}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_k - (a_0 + \dots + a_{n_0}) = s_n - s_{n_0} \text{ per ogni } n > n_0. \quad (4.24)$$

Poiché  $s_{n_0}$  non dipende da  $n$ , le proprietà elementari dei limiti implicano che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ e } \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k \text{ hanno lo stesso comportamento per ogni } n_0 \in \mathbb{N}. \quad (4.25)$$

Quindi i primi  $n_0$  termini sono rilevanti per il valore della somma  $s$  (se essa esiste finita), ma sono ininfluenti rispetto al comportamento della serie, che è determinato dalla coda. Se la serie è convergente ad  $s$ , passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  nella (4.24) si ottiene

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) - s_{n_0} = s - s_{n_0}. \quad (4.26)$$

Per la (4.26), ciascuna coda della serie può essere interpretata come l'**errore** che si commette approssimando la somma  $s$  con la somma parziale  $s_{n_0}$ . Poiché il valore  $n_0$  nella (4.26) è arbitrario, passando al limite per  $n_0 \rightarrow +\infty$  risulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è convergente} \Rightarrow \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \text{ per } n_0 \rightarrow +\infty. \quad (4.27)$$

Dalle proprietà elementari dei limiti segue immediatamente che per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ convergenti} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k) \text{ convergente} \quad (4.28)$$

Linearità di  $\sum$

e in tal caso le somme delle serie verificano la relazione

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k) = \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lambda_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \quad (4.29)$$

Inoltre, le seguenti proprietà seguono immediatamente dall'aritmetica parziale di  $\mathbb{R}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k) = -\infty \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot a_k = +\infty \quad \forall \lambda > 0, \quad (4.30)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} b_k = s \neq -\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = +\infty. \quad (4.31)$$

La definizione di *prodotto di due serie* è più delicata; rimandiamo il lettore interessato al Paragrafo 4.11).

In alcuni casi eccezionali si possono determinare esplicitamente le somme parziali e, di conseguenza, la somma.

**ESEMPIO 4.10**

## Serie di Mengoli

La serie di Mengoli è convergente e la sua somma vale 1:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1. \quad (4.32)$$

Osserviamo che

$$s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Abbiamo calcolato questa sommatoria nel Paragrafo 4.6 (si veda la (4.20)), ottenendo

$$s_n = 1 - \frac{1}{n},$$

da cui segue la (4.32) passando al limite  $n \rightarrow \infty$ .

## Serie geometrica

Concludiamo il paragrafo con un esempio di serie di notevole importanza nelle applicazioni, le cui somme parziali sono esplicitamente calcolabili.

**DEFINIZIONE 4.14**

Si dice *serie geometrica di ragione*  $r \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \dots$$

**TEOREMA 4.15**

La serie geometrica di ragione  $r$  è

(i) *convergente se*  $-1 < r < 1$  e

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{se } -1 < r < 1; \quad (4.33)$$

(ii) *divergente se*  $r \geq 1$  e

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = +\infty \quad \text{se } r \geq 1;$$

(iii) *irregolare se*  $r \leq -1$ .

Il Teorema 4.15 segue immediatamente dalla formula (4.19):

$$s_n = \sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{se } r \neq 1$$

(ovviamente  $s_n = n + 1$  se  $r = 1$ ). Si noti che dal Teorema 4.15 (i) segue anche la seguente formula:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} ar^k = \frac{ar^{k_0}}{1-r} \quad \text{se } -1 < r < 1 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}, k_0 \in \mathbb{N}. \quad (4.34)$$



Infatti, per ogni  $n \geq k_0$  si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^n ar^k &= a(r^{k_0} + r^{k_0+1} + \dots + r^n) = ar^{k_0}(1 + r + \dots + r^{n-k_0}) \\ &= ar^{k_0} \sum_{k=0}^{n-k_0} r^k \rightarrow ar^{k_0} \frac{1}{1-r} \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

## 4.8 Serie numeriche a termini positivi

Una serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  si dice a **termini positivi** se  $a_k \geq 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Più in generale, si parla di serie a **termini definitivamente positivi** se  $a_k \geq 0$  definitivamente per  $k \rightarrow +\infty$ . Per la (4.25), queste due nozioni sono del tutto equivalenti rispetto al comportamento di una serie. Osserviamo che, se la serie è a termini (definitivamente) positivi, allora la successione delle somme parziali è (definitivamente) crescente:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad (\text{definitivamente per } n \rightarrow +\infty).$$

Quindi (per il punto 7 della Proposizione 4.2) la successione  $\{s_n\}$  ammette limite  $s$ , ed  $s > -\infty$ . Perciò:

### TEOREMA 4.16

Sia  $a_k \geq 0$  definitivamente per  $k \rightarrow +\infty$ . Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{è convergente oppure} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{è divergente a } +\infty.$$

### ESEMPIO 4.11

#### La serie armonica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad \text{è divergente a } +\infty.$$

Per il Teorema precedente, basta dimostrare che non è convergente. Supponiamo per assurdo che lo sia. Allora, ricordando le (4.25) e (4.27), tutte le code sono convergenti e risulta

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{k} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

D'altra parte

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{k} > \sum_{k=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{n_0+1} + \dots + \frac{1}{2n_0}}_{n_0 \text{ addendi}} > \underbrace{\frac{1}{2n_0} + \dots + \frac{1}{2n_0}}_{n_0 \text{ volte}} = n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}$$

(nella prima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che tutti gli addendi sono positivi). Le due formule sono incompatibili, quindi la serie non converge.

Nel seguito del paragrafo illustreremo alcuni criteri che permettono di stabilire il comportamento di serie a termini (definitivamente) positivi. Vale la pena osservare che, per le (4.28)-(4.31), tali criteri sono applicabili anche a serie a termini definitivamente negativi. Per esempio, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-3}{2k}$  è divergente a  $-\infty$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{-2k} = -\frac{3}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \right) = -\infty.$$

### 4.8.1 Criterio del confronto

#### TEOREMA 4.17

#### Criterio del confronto per serie a termini positivi

Siano  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  due successioni reali tali che

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \text{definitivamente per } k \rightarrow +\infty. \quad (4.35)$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ è convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è convergente}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty.$$

Se  $0 \leq a_k \leq b_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , allora  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

#### Dimostrazione

Ovviamente basta considerare il caso  $0 \leq a_k \leq b_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per il teorema precedente le due tesi sono equivalenti, quindi dimostriamo solo la prima.

Supponiamo perciò che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  sia convergente. Per il teorema precedente la successione delle sue somme parziali è limitata, quindi lo sarà anche la successione delle somme parziali corrispondenti a  $a_k$ . Applicando un'altra volta il

Teorema 4.16 risulta convergente anche  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

#### ESEMPIO 4.12

Consideriamo la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k}{k}$  con  $b > 0$ . Si tratta ovviamente di una serie a termini positivi.

Verifichiamo anzitutto la condizione necessaria (4.26):

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{b^k}{k} = 0 \text{ se e solo se } 0 < b \leq 1.$$

Perciò la serie è divergente se  $b > 1$ . Se  $b = 1$  ritroviamo la serie armonica, che sappiamo essere divergente. Nel caso  $0 < b < 1$  è naturale utilizzare quale serie di confronto quella geometrica di ragione  $b$ , che converge quando  $0 < b < 1$ :  $b^k/k \leq b^k$  per  $k \geq 1$ . Possiamo allora concludere, per il Teorema 4.17, che la serie è convergente se  $0 < b < 1$ .

#### ESEMPIO 4.13

Serie armonica generalizzata

La serie armonica generalizzata  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  ha il seguente comportamento:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} \text{diverge} & \text{per ogni } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{per ogni } \alpha > 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

Si tratta ovviamente di una serie a termini positivi. Se  $\alpha \leq 0$ , la divergenza segue immediatamente dalla condizione necessaria (4.23). Se  $0 < \alpha \leq 1$ , la divergenza segue dal confronto con la serie armonica: infatti  $k^{-\alpha} = k^{-1} k^{1-\alpha} \geq k^{-1}$  per  $k \geq 1$ . Se  $\alpha = 2$ , la convergenza

segue dal confronto con la serie di Mengoli (4.32): infatti  $1/k^2 \leq 1/(k(k-1))$  per ogni  $k \geq 2$ . Inoltre, poichè  $1/k^\alpha \leq 1/k^2$  per ogni  $k \geq 1$  e  $\alpha > 2$ , per confronto si ottiene la (4.36) per ogni  $\alpha \geq 2$ . Resta da considerare il caso in cui  $1 < \alpha < 2$ , per la cui verifica si può utilizzare sia il *criterio della condensazione* che il *criterio integrale*: si rimanda perciò il lettore al paragrafo seguente (Esempio 4.16) o al Paragrafo 9.1 (Esempio 9.1). Anticipiamo anche che con questi due strumenti si deduce il comportamento delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log^\beta k} \begin{cases} \text{diverge} & \text{per ogni } \beta \leq 1 \\ \text{converge} & \text{per ogni } \beta > 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

(si veda l'Esempio 4.17 o l'Esempio 9.1). Tale risultato precisa e generalizza la (4.36) nel caso "critico"  $\alpha = 1$ .

## ESEMPIO 4.14

Consideriamo la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-5}{k^2+1}$ . Si noti che

$$a_k := \frac{2k-5}{k^2+1} = \frac{2}{k} \cdot \frac{1 - \frac{5}{2k}}{1 + \frac{1}{k^2}} = \frac{2}{k} (1 + o(1)) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Da ciò si deduce non solo che  $a_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , e quindi la condizione necessaria per la convergenza è verificata, ma anche che i termini della serie hanno un comportamento confrontabile con quello dei termini della serie armonica:

$$a_k > \frac{1}{k} > 0 \quad \text{definitivamente per } k \rightarrow \infty$$

( $2 + o(1) > 1$  definitivamente per  $k \rightarrow \infty$ !). Quindi, per il teorema del confronto, la serie in esame diverge.

Il ragionamento usato nell'esempio precedente può essere facilmente generalizzato e conduce alla seguente riformulazione del criterio del confronto:

**TEOREMA 4.18** Criterio del confronto asintotico

Siano  $a_k \geq 0$  e  $b_k \geq 0$  definitivamente per  $k \rightarrow +\infty$ . Se

$$a_k = b_k(1 + o(1)) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty,$$

allora le serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  hanno lo stesso comportamento.

Dimostrazione 

Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  si vuole determinare il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha + k^{8-\alpha}}{3k^6 - 2 \sin k}.$$

La serie è a termini positivi. Per  $k \rightarrow +\infty$ , si ha

$$3k^6 - 2 \sin k = 3k^6(1 + o(1)) \quad \text{e} \quad k^\alpha + k^{8-\alpha} = \begin{cases} k^\alpha(1 + o(1)) & \text{se } \alpha > 4 \\ 2k^4 & \text{se } \alpha = 4 \\ k^{8-\alpha}(1 + o(1)) & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{k^\alpha + k^{8-\alpha}}{3k^6 - 2 \sin k} = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k^{6-\alpha}} \cdot (1 + o(1)) & \text{se } \alpha > 4 \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{k^2} & \text{se } \alpha = 4 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k^{\alpha-2}} \cdot (1 + o(1)) & \text{se } \alpha < 4 \end{cases} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

## ESEMPIO 4.15



Nelle espressioni a destra compaiono i termini di serie armoniche generalizzate, di cui per la (4.36) è noto il comportamento. Pertanto, dal criterio del confronto asintotico segue che la serie in esame è convergente se  $3 < \alpha < 5$  e divergente a  $+\infty$  altrimenti.

## ESERCIZIO 4.9

Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k^{\frac{4}{3}} + 1};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2 - 1}{k^3 + 1} \operatorname{tg} \frac{1}{k};$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 + 3k + 7}};$$

$$e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1) - \log k}{\sqrt{4k^2 + 3}};$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{k};$$

$$f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2 + 1)e^{\frac{1}{k}} - k^2}{k - \sqrt{1+k}}.$$

## ESERCIZIO 4.10

Studiare al variare di  $b \in \mathbb{R}$  la convergenza delle seguenti serie:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|be^{\frac{1}{k}} - 2|}{k};$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} k^3 |9 - b^2|^{\frac{4k^2}{k+7}};$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b+3)^{2k}}{k^2 + 11};$$

$$d) \sum_{k=1}^{\infty} (\log(1+b^2) - \log b^2)^{\frac{1}{k}}.$$

## ESERCIZIO 4.11

Studiare al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la convergenza delle serie seguenti:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt[3]{k^\alpha + k+1}};$$

$$b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4 + k+1} - k^2}{\log^{2\alpha+3} k}.$$

## Guida

Il criterio della condensazione è opzionale se non si intende dimostrare la convergenza delle serie armoniche generalizzate con esponente  $\alpha \in (1,2)$  oppure se si intende dimostrarla con il criterio integrale (Paragrafo 9.1).

## 4.8.2 Criterio della condensazione

Per trattare il caso  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  con  $1 < \alpha < 2$ , non contemplato negli esempi precedenti, cominciamo con il considerare una successione  $\{a_k\}$  decrescente e a termini non negativi:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq 0.$$

Si noti che le somme parziali associate,  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  verificano le seguenti disuguaglianze:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_3 = a_1 + (a_2 + a_3) \leq a_1 + 2a_2,$$

$$s_7 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4,$$

$$s_{15} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) +$$

$$+ (a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8,$$

ecc.

Questo suggerisce di costruire come serie di confronto quella che ha come somme parziali  $S_0 = a_1$ ,  $S_1 = a_1 + 2a_2$ ,  $S_2 = a_1 + 2a_2 + 4a_4$ ,  $S_3 = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8$  e, in generale,

$$S_n := a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n} = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} \quad \text{per } n \in \mathbb{N}.$$

Chiaramente

$$s_{2^{n-1}} \leq S_{n-1} \quad \text{per } n \geq 1,$$

perciò, se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  è convergente, la successione  $\{s_{2^{n-1}}\}$  è limitata. Per la monotonia di  $\{s_n\}$  sarà limitata anche  $\{S_n\}$ , quindi, trattandosi di una serie a termini non negativi,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  è convergente. È altrettanto facile dimostrare, utilizzando la monotonia di  $a_n$ , che

$$S_n \leq 2s_{2^n} \quad \text{per } n \in \mathbb{N},$$

ovvero la convergenza di  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  implica quella di  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ . Più in generale vale il seguente criterio:

**TEOREMA 4.19** Criterio di condensazione

Sia  $\{a_k\}_{k=1,2,\dots}$  una successione a termini definitivamente non negativi e definitivamente decrescente per  $k \rightarrow +\infty$ :

$$a_{n_0} \geq a_{n_0+1} \geq a_{n_0+2} \geq \dots \geq 0.$$

Allora  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge se e solo se converge  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ .

A prima vista il criterio della condensazione potrebbe sembrare piuttosto artificiale, ma i seguenti due esempi mettono in chiara evidenza la sua efficacia.

Riprendiamo in esame la serie armonica generalizzata. Se  $a_k = k^{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), si trova

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-k\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$$

cioè la serie geometrica di ragione  $2^{1-\alpha}$ . Sappiamo (si veda il Teorema 4.15) che quest'ultima converge se e solo se  $1 - \alpha < 0$ . Ritroviamo perciò la (4.36), e stavolta la conclusione include il caso  $1 < \alpha < 2$ .

**ESEMPIO 4.16**

Applichiamo il criterio della condensazione alla serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log^{\beta} k} \quad (\beta > 0).$$

Si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k \log^{\beta}(2^k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\beta} \log^{\beta} 2}$$

che, per la (4.36), è convergente se e solo se  $\beta > 1$ . Dunque abbiamo verificato la (4.37).

**ESEMPIO 4.17**

### 4.8.3 Criterio del rapporto, criterio della radice

Presentiamo due criteri che risultano piuttosto utili nel caso di serie i cui termini contengano funzioni esponenziali o fattoriali.

#### TEOREMA 4.20 Criterio del rapporto

Sia  $\{a_k\}$  una successione reale tale che  $a_k > 0$  definitivamente per  $k \rightarrow +\infty$ .

(i) Se esiste  $r \in (0, 1)$  tale che

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \text{definitivamente per } k \rightarrow +\infty,$$

allora la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  converge.

(ii) Se

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \quad \text{definitivamente per } k \rightarrow +\infty,$$

allora  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$ .

#### Dimostrazione

(i) Se

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r \quad \forall k \geq k_0$$

allora  $a_k \leq a_{k-1}r \leq a_{k-2}r^2 \leq \dots \leq a_{k_0}r^{k-k_0}$ ; quindi, per il teorema del confronto e per la convergenza della serie geometrica  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_{k_0}r^{k-k_0}$  se  $0 < r < 1$ , la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  converge.

(ii) In questo caso, definitivamente per  $k \rightarrow +\infty$ , si ha che  $a_{k+1} \geq a_k$ , ovvero la successione  $\{a_k\}$  è crescente; perciò  $\{a_k\}$  non può tendere a zero e la condizione necessaria (4.26) implica che la serie diverge a  $+\infty$ .

Segue facilmente dal criterio del rapporto che

$$\text{se } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell, \text{ allora } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{converge se } \ell < 1 \\ \text{non converge se } \ell > 1. \end{cases} \quad (4.38)$$



Se  $\ell = 1$  non si può concludere niente; per esempio, se  $a_k = 1/k^\alpha$ , allora  $\ell = 1$  per ogni  $\alpha > 0$ , ma  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  converge se e solo se  $\alpha > 1$ .

#### ESEMPIO 4.18

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{converge.}$$

Infatti, posto  $a_k = 1/k!$  risulta

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$



quindi il risultato segue dal Teorema 4.20 (i) (ovvero dalla (4.38)). Sarebbe anche stato possibile fare il confronto con la serie geometrica di ragione  $r < 1$  (per il limite notevole (4.6)) oppure con la serie  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}$  (si veda la (4.32)).

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \quad \text{è convergente.}$$

Infatti, posto  $a_k = k!k^{-k}$ , risulta

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1)!(k+1)^{-k-1}}{k!k^{-k}} = \frac{(k+1)(k+1)^{-k-1}}{k^{-k}} \\ &= \left(\frac{k+1}{k}\right)^{-k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

quindi la convergenza segue dal criterio del rapporto.

#### ESEMPIO 4.19

#### TEOREMA 4.21 Criterio della radice

Sia  $\{a_k\}$  una successione a termini definitivamente non negativi per  $k \rightarrow +\infty$ .

(i) Se esiste  $r \in (0,1)$  tale che

$$\sqrt[k]{a_k} \leq r \quad \text{definitivamente per } k \rightarrow +\infty$$

la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  è convergente.

(ii) Se

$$\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \quad \text{per infiniti valori di } k$$

allora  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$ .

#### Dimostrazione

La disuguaglianza  $\sqrt[k]{a_k} \leq r$  implica che  $a_k \leq r^k$ , quindi la (i) segue dal confronto con la serie geometrica. Per quanto riguarda la (ii), osserviamo che se  $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$  anche  $a_k \geq 1$ , quindi  $a_k$  non tende a zero per  $k \rightarrow +\infty$ .

Un'osservazione del tutto analoga alla (4.38) può essere ripetuta per il criterio della radice:

$$\text{se } \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell, \quad \text{allora } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{converge se } \ell < 1 \\ \text{non converge se } \ell > 1. \end{cases} \quad (4.39)$$

#### ESEMPIO 4.20

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(3k \sin \frac{1}{4k}\right)^k$$

è convergente. Poiché è a termini positivi, si può utilizzare il criterio della radice: si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\left(3k \sin \frac{1}{4k}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 3k \sin \frac{1}{4k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 3k \cdot \frac{1}{4k} (1 + o(1)) = \frac{3}{4} < 1$$

e la conclusione segue dalla (4.39).

### ESERCIZIO 4.12

Dire quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{k-1}}$ ;

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 4^k}{2^k + 5^k}$ ;

b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$ ;

e)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k \sqrt{k}}$ ;

c)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(3k^2 \log \frac{2k^2 + 2}{2k^2 + 1}\right)^k$ ;

## 4.9 Serie a termini di segno variabile

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilito vari criteri per la convergenza di serie a termini *non negativi*, che permettono ovviamente di trattare anche quelli a termini non positivi (la caratteristica importante è che i termini siano di segno costante). Qui ci si occupa invece del caso generale, in cui la situazione è più complicata.

### 4.9.1 Convergenza assoluta, criterio di convergenza assoluta, criterio di Cauchy

Il prossimo teorema, basato sul concetto di *convergenza assoluta*, mostra che talvolta (ma, come vedremo di seguito, non sempre!) è possibile ricondursi allo studio di una serie a termini non negativi.

#### DEFINIZIONE 4.22

La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  si dice **assolutamente convergente** se  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  è (semplicemente) convergente.

#### TEOREMA 4.23

#### Criterio di convergenza assoluta

Se  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  è **assolutamente convergente**, allora è anche **semplicemente convergente** e risulta

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \quad (4.40)$$

La dimostrazione del Teorema 4.23 si basa sul criterio di Cauchy per le serie: illustreremo entrambi al termine del paragrafo, concentrandoci prima su esempi e applicazioni. Il Teorema 4.23 afferma che

**convergenza assoluta  $\Rightarrow$  convergenza semplice**

Per  $\alpha > 0$ , studiamo la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \dots \quad (4.41)$$

La convergenza assoluta di questa serie equivale alla convergenza semplice della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \dots$$

che, per la (4.36), è convergente se e solo se  $\alpha > 1$ . Quindi la serie (4.41) è assolutamente convergente se e solo se  $\alpha > 1$  e, per il Teorema 4.23, semplicemente convergente se  $\alpha > 1$ .

Come già annunciato,

**convergenza semplice  $\not\Rightarrow$  convergenza assoluta**

e perciò nell'Esempio 4.21 non abbiamo affermato che la serie (4.41) è semplicemente convergente se e solo se  $\alpha > 1$ . Infatti, vedremo nel Paragrafo 4.9.2 che

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{è convergente per ogni } \alpha > 0. \quad (4.42)$$

Nei prossimi esempi studieremo la convergenza assoluta di alcune serie riassumendo così i criteri già introdotti per la convergenza delle serie a termini di segno costante.

Sia

$$a_k = \frac{\log(e^{3k} + 5)}{k^{5/2} + k \log k + 2} \sin\left(\frac{k^2 + 1}{k + 2}\right) \quad \text{per } k \geq 1.$$

Si vuole studiare la convergenza della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Tale serie non è definitivamente a termini di segno costante o alterno. Vediamo se converge assolutamente; in caso affermativo dal Teorema 4.23 seguirebbe anche la convergenza semplice. Risulta

$$|a_k| \leq \frac{\log(e^{3k} + 5)}{k^{5/2} + k \log k + 2} := b_k \quad \text{per } k \geq 1.$$

Tale stima suggerisce di utilizzare il *criterio del confronto* mediante la serie (a termini positivi)  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Osservando che per  $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{3k + \log(1 + 5e^{-3k})}{k^{5/2}(1 + k^{-3/2} \log k + 2k^{-5/2})} \\ &= \frac{3k + o(1)}{k^{5/2}(1 + o(1))} = \frac{3}{k^{3/2}} (1 + o(1)) \leq \frac{6}{k^{3/2}} \end{aligned}$$

ed essendo  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$  convergente, ancora per il criterio del confronto, risulta convergente  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Ciò implica che  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

**ESEMPIO 4.21**



**ESEMPIO 4.22**



## ESEMPIO 4.23

Si vuole studiare la convergenza della serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  con

$$a_k = \left( \sin \sqrt{k} - \sin \left( \frac{k+1}{\sqrt{k}+6} \right) \right)^{3k} \quad \text{per } k \geq 0.$$

Ragionando come nell'esempio precedente, esaminiamo la convergenza assoluta. La forma dei termini suggerisce di utilizzare il *criterio della radice* per  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ . Utilizzando le formule di prostaferesi (si veda l'Appendice 1.A), si ottiene

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{|a_k|} &= \left| \sin \sqrt{k} - \sin \left( \frac{k+1}{\sqrt{k}+6} \right) \right|^3 \\ &= \left| 2 \sin \left( \frac{6\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}+12} \right) \cos \left( \frac{2k+6\sqrt{k}+1}{2\sqrt{k}+12} \right) \right|^3 \\ &\leq \left| 2 \sin \left( \frac{6\sqrt{k}-1}{2\sqrt{k}+12} \right) \right|^3 \rightarrow |2 \sin 3|^3 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Poiché  $3 \in (5\pi/6, \pi)$ , si ha  $\sin 3 \in (0, 1/2)$  e quindi  $|2 \sin 3|^3 < 1$ . Perciò la convergenza assoluta (e quindi semplice) della serie segue dal criterio della radice (in particolare dalla (4.39)).

## ESEMPIO 4.24

Dati

$$a_k := \frac{\operatorname{tg}(k^2)}{|\operatorname{tg}(k^2)| + k} \cdot \frac{e^{\log^2 k}}{\sqrt{k!}} \quad \text{per } k \geq 1,$$

esaminiamo la convergenza della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Anche in questo caso studiamo la convergenza assoluta. Osserviamo che

$$\left| \frac{\operatorname{tg}(k^2)}{|\operatorname{tg}(k^2)| + k} \right| \leq \frac{|\operatorname{tg}(k^2)|}{|\operatorname{tg}(k^2)|} = 1 \quad \text{per ogni } k \geq 1$$

e che quindi

$$|a_k| < \frac{e^{\log^2 k}}{\sqrt{k!}} =: b_k \quad \text{per } k \geq 1.$$

Applichiamo il *criterio del rapporto* per analizzare la convergenza di  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ . Si ha

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{e^{\log^2(k+1)}}{\sqrt{(k+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{k!}}{e^{\log^2 k}} = \frac{e^{\log^2(k+1) - \log^2 k}}{\sqrt{k+1}}.$$

Ricordando le proprietà dei logaritmi e la (4.10), risulta

$$\begin{aligned} \log^2(k+1) - \log^2 k &= (\log(k+1) - \log k)(\log(k+1) + \log k) \\ &= \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \log(k^2 + k) \\ &= \frac{1}{k} (1 + o(1)) \log(k^2 + k) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

da cui ricordando la (4.5) si ottiene

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Quindi per la (4.38)  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  è convergente e per il criterio del confronto lo è anche  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ . Abbiamo così dedotto la convergenza assoluta di  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

Concludiamo il paragrafo con la dimostrazione del Teorema 4.23 che, come abbiamo annunciato, si basa sulla seguente riformulazione del criterio di Cauchy per le serie:

**TEOREMA 4.24** Criterio di Cauchy per le serie

La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  è convergente se e solo se  
per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq N, p \geq 1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon. \quad (4.43)$$

**Dimostrazione**

Per il Teorema 4.9 la successione  $\{s_n\}$  è convergente se e solo se è fondamentale, cioè se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq N.$$

Osservando che

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^m a_k \quad \text{per ogni } n < m$$

si ottiene il risultato.

Dato il criterio di Cauchy, è sorprendentemente facile dimostrare il Teorema 4.23

**Dimostrazione del Teorema 4.23**

Per la disuguaglianza triangolare (1.8),

$$|a_m + \dots + a_{m+p}| \leq |a_m| + \dots + |a_{m+p}| \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}, p \geq 0. \quad (4.44)$$

Poiché per ipotesi la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  è convergente, segue dal Teorema 4.24 che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che la somma a destra della disuguaglianza in (4.44) è minore di  $\varepsilon$  per ogni  $m > N$  ed ogni  $p \geq 0$ . Quindi anche la somma a sinistra è minore di  $\varepsilon$ : perciò applicando una seconda volta il criterio di Cauchy (ma stavolta nella direzione opposta alla precedente) si ottiene che  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  è convergente. Infine, la disuguaglianza  $|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  segue dalla (4.44) scegliendo  $m = 0$  e passando al limite per  $p \rightarrow +\infty$ .

## 4.9.2 Serie a termini di segno alterno

Ci si occupa ora di una classe di serie con una struttura particolare, ovvero le serie a termini di segno alterno:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \quad \text{con } a_k \geq 0 \text{ definitivamente per } k \rightarrow +\infty.$$

Per questo tipo di serie vale un criterio molto più preciso di quello della convergenza assoluta:

**TEOREMA 4.25** Criterio di Leibniz

Sia  $\{a_k\}$  una successione tale che:

(i)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0;$

(ii)  $\{a_k\}$  è definitivamente non negativa e decrescente per  $k \rightarrow +\infty$ , ovvero esiste  $k_0 \in \mathbb{N}$  tale che

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k \quad \forall k \geq k_0.$$

Allora la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

è semplicemente convergente e, se  $2n > k_0$ , le somme parziali  $s_{2n}$  (rispettivamente  $s_{2n+1}$ ) approssimano la somma  $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  per eccesso (rispettivamente per difetto); inoltre l'errore che si commette approssimando  $s$  con  $s_n$  è, in valore assoluto, maggiorato dal modulo del primo termine omissa,  $a_{n+1}$ :

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1} \quad \text{per ogni } n \geq k_0. \quad (4.45)$$

Un risultato analogo vale per la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

(con  $s_{2n}$  e  $s_{2n+1}$  scambiati). Per esempio,  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  è convergente e

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

La (4.42) segue immediatamente dal criterio di Leibniz.

**Dimostrazione**

Consideriamo il caso in cui  $\{a_k\}$  sia una successione decrescente e convergente a zero:

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0.$$

Considerando le somme parziali  $s_n$ , risulta

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 - a_1 \leq s_0 \quad (\text{perché } a_1 \leq a_0) \\ s_2 &= \begin{cases} s_1 + a_2 \geq s_1 & (\text{perché } a_2 \geq 0) \\ s_0 - (a_1 - a_2) \leq s_0 & (\text{perché } a_2 \leq a_1) \end{cases} \\ s_3 &= \begin{cases} s_2 - a_3 \leq s_2 & (\text{perché } a_3 \geq 0) \\ s_1 + (a_2 - a_3) \geq s_1 & (\text{perché } a_3 \leq a_2) \end{cases} \\ s_4 &= \begin{cases} s_3 + a_4 \geq s_3 & (\text{perché } a_4 \geq 0) \\ s_2 - (a_3 - a_4) \leq s_2 & (\text{perché } a_4 \leq a_3) \end{cases} \end{aligned}$$



e così via. Perciò

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \dots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

ovvero le successioni  $\{s_1, s_3, s_5, \dots\}$  e  $\{s_2, s_4, s_6, \dots\}$  sono monotone e limitate, quindi convergenti con, rispettivamente, limiti  $s$  (per difetto) e  $S$  (per eccesso). Poiché  $a_k \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$S - s = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0$$

quindi  $s = S$ , ovvero la serie è convergente. Inoltre segue facilmente dallo stesso ragionamento che l'errore commesso approssimando la somma  $s$  con una somma parziale  $s_n$  non può superare  $a_{n+1}$ , ovvero il modulo del primo termine "omesso":

$$|s_n - s| \leq a_{n+1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

**Osservazione.** Discutiamo brevemente le ipotesi del criterio di Leibniz. La (i) è semplicemente la condizione necessaria (4.23), e la condizione  $a_k \geq 0$  garantisce che la serie sia effettivamente a segno alterno. La condizione di monotonia (definitiva per  $k \rightarrow +\infty$ ) della successione  $\{a_k\}$  è cruciale. Per esempio, i termini  $a_k$  della serie a termini di segno alterno

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

ovvero

$$a_k = \begin{cases} \frac{2}{k+2} & \text{se } k \text{ è pari} \\ \left(\frac{2}{k+1}\right)^2 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

convergono a 0, ma la serie è divergente:

$$\begin{aligned} s_{2n} &:= 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

dove l'ultima sommatoria indica la somma della serie convergente  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ . Poiché la serie armonica è divergente,  $s_{2n} \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , quindi la serie è divergente.

Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

Si vuole applicare il criterio di Leibniz. Dobbiamo quindi verificare che  $a_k := \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$  converge a 0 ed è definitivamente non negativa e decrescente per  $k \rightarrow +\infty$ . Queste condizioni seguono banalmente riscrivendo  $a_k$  come

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$



**ESEMPIO 4.25**

quindi la serie converge semplicemente. Si noti che la serie non converge assolutamente. Infatti, la serie dei valori assoluti,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , è divergente, come segue dal confronto con la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k+1}}$ .

**ESEMPIO 4.26**

Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k-4}{k^2+1}.$$

Posto  $a_k = (k-4)/(k^2+1)$ , osserviamo che per  $k \rightarrow +\infty$  la serie è definitivamente a termini di segno alterno:  $a_k \geq 0$  se  $k \geq 4$ . Banalmente il criterio necessario per la convergenza è soddisfatto:  $(k-4)/(k^2+1) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Per poter applicare il criterio di Leibniz occorre quindi stabilire se  $\{a_k\}$  è definitivamente decrescente per  $k \rightarrow +\infty$ . Si ha

$$\begin{aligned} a_{k+1} \leq a_k &\Leftrightarrow \frac{(k+1)-4}{(k+1)^2+1} \leq \frac{k-4}{k^2+1} \\ &\Leftrightarrow k^3 - 3k^2 + k - 3 \leq k^3 - 2k^2 - 6k - 8 \\ &\Leftrightarrow k^2 - 7k - 5 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Leftrightarrow k \geq 8. \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere che la serie considerata è convergente.

**ESEMPIO 4.27**

Studiamo la convergenza assoluta e semplice di

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2^x - 3)^k \sin\left(\frac{k^2}{k^3 + 3}\right)$$

al variare di  $x \in \mathbb{R}$ . Si osservi che

$$\sin\left(\frac{k^2}{k^3 + 3}\right) = \sin\left(\frac{1}{k}(1+o(1))\right) = \frac{1}{k}(1+o(1)) \text{ per } k \rightarrow +\infty \quad (4.46)$$

quindi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (2^x - 3)^k \sin\left(\frac{k^2}{k^3 + 3}\right) = 0 \Leftrightarrow |2^x - 3| \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2^x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Perciò la serie non converge se  $x \notin [1, 2]$ . Se  $1 < x < 2$ , allora  $-1 < 2^x - 3 < +1$  e per ogni  $k > 0$  risulta

$$\left| (2^x - 3)^k \sin\left(\frac{k^2}{k^3 + 3}\right) \right| \leq |2^x - 3|^k$$

ovvero, per il confronto con la serie geometrica, la serie converge assolutamente e semplicemente per ogni  $x \in (1, 2)$  (si potrebbe anche usare il criterio della radice per dimostrare la convergenza assoluta). Se  $x = 2$ , la serie diventa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{k^2}{k^3 + 3}\right)$$

che, per la (4.46) e il criterio del confronto, non converge semplicemente né assolutamente. Se  $x = 1$  si ottiene la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sin\frac{k^2}{k^3 + 3}$$

che, per quanto visto precedentemente, non è assolutamente convergente. Si verifica facilmente che la successione  $\{\sin(k^2/(k^3 + 3))\}$  è definitivamente decrescente per  $k \rightarrow +\infty$

(la funzione  $\sin$  è crescente in un intorno dell'origine e  $k^2/(k^3 + 3)$  è definitivamente decrescente per  $k \rightarrow +\infty$ ) e ha limite zero; quindi, per il criterio di Leibniz, la serie converge semplicemente.

Consideriamo la serie a termini di segno alterno  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  con

$$a_k = \frac{k + \sin k}{k^2 \log k + k}, \quad k \geq 1.$$

La condizione necessaria per la convergenza è banalmente verificabile. Per evitare lo studio della monotonia di  $\{a_k\}$ , è conveniente scrivere

$$a_k = \frac{1}{k \log k + 1} + \frac{\sin k}{k^2 \log k + k} := b_k + c_k, \quad k \geq 1.$$

È facile stabilire che  $\{b_k\}$  è decrescente, quindi per il criterio di Leibniz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k \quad \text{è convergente (semplicemente).}$$

Per quanto riguarda  $\{c_k\}$  risulta:

$$|c_k| \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{definitivamente per } k \rightarrow +\infty$$

e quindi  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$  è assolutamente convergente. Allora per la (4.28) anche la serie di partenza risulta (semplicemente) convergente.

## ESEMPIO 4.28

Nel prossimo esempio si affronta il problema di come stimare l'errore che si commette approssimando la somma di una serie convergente con una sua somma parziale.

## Stima dell'errore

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{10^k} \right)^k$$

converge semplicemente e assolutamente; approssimando la sua somma  $s$  con la somma parziale

$$s_9 = \sum_{k=1}^9 (-1)^k \left( \frac{1}{2} - 10^{-k} \right)^k = -0.24318\dots$$

l'errore commesso vale

$$s - s_9 = \sum_{k=10}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2} - 10^{-k} \right)^k$$

Poiché  $\left\{ (2^{-1} - 10^{-k})^k \right\}$  è decrescente e convergente a zero, si ricava dalla (4.45) che

$$|s - s_9| \leq \left( \frac{1}{2} - 10^{-10} \right)^{10} \leq \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \leq 0.001.$$

Per stimare l'errore in serie a termini positivi, ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} - 10^{-k} \right)^k,$$

non si può utilizzare il criterio di Leibniz. D'altra parte, per il teorema del confronto,

## ESEMPIO 4.29



$$0 < s - s_9 \leq \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} \leq 0.002$$

dove abbiamo applicato la formula (4.34) per la serie geometrica. Si noti che anche nel caso precedente si poteva ricorrere alla serie geometrica, considerando la convergenza assoluta e la disuguaglianza (4.40):

$$\begin{aligned} |s - s_9| &= \left| \sum_{k=10}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2} - 10^{-k} \right)^k \right| \\ &\leq \sum_{k=10}^{\infty} \left| (-1)^k \left( \frac{1}{2} - 10^{-k} \right)^k \right| \leq \sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 0.002 \end{aligned}$$

ma in questo caso la stima secondo il criterio di Leibniz è più precisa.

### ESERCIZIO 4.13

Dire quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^2 - 1}{k^3 + 1} \operatorname{tg} \frac{1}{k}$ ;                  | e) $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{k^3 + 1} \right)$ ; |
| b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\log(1 - 2k + k^3) - \log(k^3 - k))$ ;                                    | f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(k\pi/2)}{k}$ ;   |
| c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \cos \left( \frac{1}{k} \right) - 1 \right) \log \frac{k^2}{k+1}$ ; | g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \log(1 + k^2)}$ .  |
| d) $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{k+1}{2k+1} \right)^{\sqrt{k}}$ ;                              |   |

### ESERCIZIO 4.14

Dire se le seguenti serie numeriche sono, rispettivamente, semplicemente e assolutamente convergenti:

- |  |   |
|--|---|
| a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1 - \sin \frac{1}{k}}{\sqrt[k]{k}}$ ; | c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{arctg}(k^2 - 8)}{\sqrt{k}}$ ;                        |
| b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\log(1 + k^2)}{k}$ ;                  | d) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} k \right)^k \operatorname{arctg} \frac{k}{k^3 + 1}$ . |

### ESERCIZIO 4.15

Dire per quali  $x \in \mathbb{R}$  le seguenti serie sono convergenti:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - xe^{\frac{1}{k}}}{k}$ ; | d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+k}}{1+k+x^2k^2}$ ;   |
| b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k^2 + 3k + 1}$ ;   | e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sin x^2)^k}{\sqrt{1+k}}$ ; |
| c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ke^{xk}}{k+1}$ ;            | f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^2 + 3} (\sin x)^k$ .    |

### ESERCIZIO 4.16

Dire per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-4)^4 (2 \sin x)^k}{\sqrt{k}}$  è, rispettivamente, semplicemente e assolutamente convergente.

## 4.10 Riordinamenti

**Guida**

Il paragrafo è opzionale.

A causa del numero *infinito* di termini di una serie, occorre particolare attenzione se si effettuano *operazioni sulle serie*, altrimenti banali nel caso di somme finite. È il caso per esempio del *riordinamento*, che può essere pensato come una generalizzazione della proprietà commutativa della somma, ossia di formule del tipo

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_3 + a_5 + a_2 + a_4 + a_1.$$

### DEFINIZIONE 4.26

La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  si dice un **riordinamento** di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  se esiste una funzione biiettiva  $j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tale che  $b_k = a_{j(k)}$ .

Si noti che, poiché  $j$  è suriettiva, il riordinamento  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  contiene *tutti* i termini di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ; inoltre, poiché  $j$  è iniettiva, il riordinamento contiene ogni termine  $a_k$  non più di una volta. Ovviamente, poiché  $j$  è biiettiva, si ha che se  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  è un riordinamento di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  allora anche  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  lo è per  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

Al contrario delle somme finite, non è vero che se  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  converge alla somma  $s$  allora ogni suo riordinamento converge alla stessa somma  $s$ . Facciamo un esempio.

Per il criterio di Leibniz, la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  è convergente. È facile dimostrare che la sua somma,  $s$ , è minore di  $5/6$ :

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{5/6} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{<0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} \dots < \frac{5}{6}.$$

Consideriamo il seguente riordinamento:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} \dots$$

e dimostriamo che non converge alla stessa somma  $s$ .

Per assurdo supponiamo che il riordinamento sia convergente e abbia somma  $s < 5/6$ . Allora le sue somme parziali,  $s_n$ , convergono a  $s$  e, in particolare, la sottosuccessione  $\{s_{3n}\}$  converge a  $s$ , ovvero

$$s_{3n} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) \rightarrow s < \frac{5}{6} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} s_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}_{5/6} + \sum_{k=2}^n \underbrace{\left( \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right)}_{>0} > 5/6 \end{aligned}$$

perché, per ogni  $k$ ,

### ESEMPIO 4.30

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} = 0.$$

Si è giunti così a una contraddizione.

La patologia osservata nell'esempio precedente non è presente per le serie assolutamente convergenti.

#### TEOREMA 4.27

Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  assolutamente convergente e  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  un suo riordinamento. Allora  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  converge assolutamente e  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

**Osservazione.** Dal Teorema 4.27 segue in particolare che  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$ , perché  $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|$  è un riordinamento di  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ .

#### Dimostrazione

Sia  $j: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la funzione biettiva tale che  $b_k = a_{j(k)}$  per  $k \in \mathbb{N}$ . Preso  $N \in \mathbb{N}$ , esiste  $M_N \geq N$  tale che i primi  $M_N + 1$  termini delle serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{j(k)}$ , contengano gli  $N + 1$  termini  $a_0, a_1, \dots, a_N$ . Preso  $n \geq M_N$ , anche le somme parziali  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  e  $t_n = \sum_{k=0}^n a_{j(k)}$  hanno i termini  $a_0, a_1, \dots, a_N$  in comune, quindi

$$|s_n - t_n| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \quad \text{per ogni } n \geq M_N.$$

Essendo  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  assolutamente convergente,  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \rightarrow 0$  per  $N \rightarrow +\infty$ , quindi  $t_n$  converge a  $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Il seguente teorema è notevole e implica che l'ipotesi della convergenza assoluta non è solo sufficiente ma anche necessaria.

#### Dimostrazione

#### TEOREMA 4.28 Teorema di Riemann

Se  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  converge semplicemente ma non assolutamente, allora:

(i) per ogni  $s \in \mathbb{R}$  esiste un riordinamento,  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ , di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  tale che  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = s$ ;

(ii) esiste un riordinamento di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  che diverge;

(iii) esiste un riordinamento di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  che è irregolare.



## 4.11 Prodotto di Cauchy di due serie

Il paragrafo è opzionale.

Presi due polinomi di grado  $n$ ,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

$$Q_n(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

$a_n, b_n \neq 0$ , il loro prodotto è un polinomio di grado  $2n$ ,

$$P_n(x)Q_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{2n}x^{2n} \quad (4.47)$$

e i suoi coefficienti sono

$$c_0 = a_0b_0$$

$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$$

$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$$

$$c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$$

$\vdots$

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}b_2 + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$$

$\vdots$

$$c_{2n-2} = a_{n-2}b_n + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_{n-2}$$

$$c_{2n-1} = a_{n-1}b_n + a_nb_{n-1}$$

$$c_{2n} = a_nb_n$$

ovvero

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \quad \text{per ogni } k = 0, 1, \dots, n$$

(si noti che  $c_k = \sum_{j=k-n}^n a_j b_{k-j}$  se  $k = n+1, \dots, 2n$ ). Preso  $x = 1$ , risulta

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \left( \sum_{k=0}^n b_k \right) = \sum_{k=0}^{2n} c_k.$$

Tale relazione suggerisce la seguente definizione di prodotto di due serie.

### DEFINIZIONE 4.29

Si dice **serie prodotto** o **prodotto di Cauchy** delle serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

dove

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}. \quad (4.48)$$

Vale il seguente teorema.

Dimostrazione

**TEOREMA 4.30**

Se  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  sono due serie convergenti e se almeno una delle due è assolutamente convergente, allora la serie prodotto è convergente e la sua somma è uguale al prodotto delle somme delle due serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$$

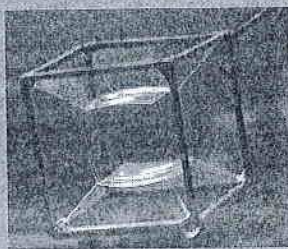
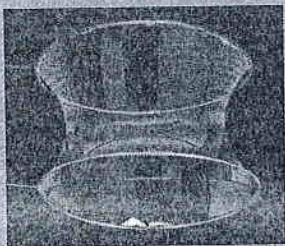
Come già visto per i riordinamenti delle serie, anche in questo caso la convergenza assoluta gioca un ruolo importante. Infatti è possibile trovare esempi di due serie convergenti semplicemente ma *non* assolutamente per le quali la serie prodotto non converge al prodotto delle somme delle due serie.



## FILO ROSSO

### Bolle di sapone e insiemi compatti

Vari problemi, spesso di notevole rilevanza applicativa, si presentano come *problemi di minimizzazione* (ne abbiamo già accennato nei capitoli 2 e 4). In ambito economico è naturale minimizzare il costo di processi produttivi e nella fisica i cosiddetti *principi variazionali*, noti da secoli, portano automaticamente a problemi di minimizzazione. Facciamo un esempio concreto: *quale forma assume una bolla di sapone in equilibrio?* Da considerazioni fisiche non troppo difficili – il concetto di tensione superficiale – risulta che, tra le forme ammissibili che la bolla può assumere, quella la cui superficie ha area minima, se esiste, è certamente una posizione di equilibrio. Per esempio, se lentamente si separano due cerchi, quando ci si ferma la bolla che si ottiene è quella la cui superficie ha area minima: la “catenoide” (si veda la figura a sinistra).



Queste affermazioni sono volutamente vaghe, a partire dalla definizione precisa di “superficie” e della sua “area”. Ma visto che gli strumenti presentati in questo libro non basterebbero comunque a dimostrare l’esistenza della superficie minima, per una volta non ci preoccupiamo del rigore matematico.

Per intuire come affrontare un problema di minimizzazione, consideriamo l’esempio già introdotto nel filo rosso (capitolo 2):

$$f(x) = x^6 + ((2x + 1)^2 - 5)^2.$$

La funzione è inferiormente limitata:  $m = \inf f \geq 0$ . Ci si chiede se  $m$  è anche il minimo di  $f$  in  $\mathbb{R}$ :

esiste  $a \in \mathbb{R}$  tale che  $f(a) = m$ ?

Poiché  $m$  non è un punto isolato dell’immagine di  $f$  (sarà chiaro nel prossimo filo rosso), per la definizione di estremo inferiore esiste una *successione minimizzante*:  $m < f(a_n) < m + \frac{1}{n}$  per ogni  $n$ , ovvero

$$f(a_n) \rightarrow m \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Quello che si spera è che gli elementi di  $\{a_n\}$  “approssimino” un punto di minimo,  $a \in \mathbb{R}$ , di  $f$ . Affinché ciò accada, basterebbe sapere che:

- 1) la successione  $\{a_n\}$  è convergente, ovvero  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- 2) se (1) è vera, allora  $f(a) = m$ .

Nei casi concreti, raramente è possibile verificare (1). Fortunatamente, è sufficiente un’affermazione decisamente più debole:

1') la successione  $\{a_n\}$  ha una sottosuccessione convergente, ovvero esiste  $\{a_{k_n}\}$  tale che  $a_{k_n} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Per successioni a valori reali, sappiamo già (Teorema 4.7) che (1') è vera se la successione  $\{a_n\}$  è limitata, cosa molto più semplice da verificare rispetto a (1). Per esempio, con le informazioni ottenute nel filo rosso del Capitolo 2 possiamo già concludere che

$$a_n \in K := [-2, 2] \text{ definitivamente per } n \rightarrow +\infty,$$

ovvero  $\{a_n\}$  è limitata e quindi vale (1'). Della domanda (2) ci occuperemo nel prossimo filo rosso.

Per poter tornare alla nostra bolla di sapone ci serve un’osservazione importante. In questo capitolo introduciamo la nozione di insieme *compatto*, ovvero tale che

*ogni successione  $\{a_n\} \subset K$  ha una sottosuccessione convergente, e il limite appartiene a  $K$ .*

A prima vista questo concetto può sembrare molto teorico, ma la condizione (1') mostra che non lo è per niente.



Ora la bolla di sapone. Per verificare la (1') nel caso dell'esempio semplice, ci è bastata la limitatezza della successione; più in generale, il fatto che i sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}$  sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati. Ma questa affermazione è falsa in spazi più complicati, come lo spazio

$X = \{\text{superfici che hanno come bordo due cerchi}\}.$

Prendiamo per buono che sia possibile formulare un problema di minimizzazione con  $X$  al posto di  $\mathbb{R}$  e con  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  che associa ad ogni superficie  $x \in X$  la sua area. Chiaramente  $f$  è limitata inferiormente:  $f(x) \geq 0$  per ogni superficie  $x \in X$ . Ma a quel punto la successione minimizzante sarà una successione di superfici  $a_n \in X$ ! Quindi, per formulare (1'), servirà definire la "distanza tra due superfici" e gli "intorni" di una superficie. Questo in effetti è possibile (intuitivamente non è così difficile im-

maginare una successione di superfici che hanno come limite un'altra superficie), ma il punto è un altro: l'unica speranza di verificare (1') è dimostrare che una successione minimizzante è contenuta in un insieme compatto di  $X$ ! In insiemi complicati come  $X$ , la caratterizzazione degli insiemi compatti (che dipenderà dal concetto di distanza e interni prescelto) è la parte più delicata di tutto il procedimento.

La conclusione: un concetto apparentemente teorico, come la compattezza di un insieme, risulta essere uno dei concetti di maggior rilevanza applicativa dell'analisi matematica moderna.

PS: Ricordate il tasso di interesse composto istantaneamente? All'inizio del capitolo mostriamo varie conseguenze del limite notevole che definisce il numero  $e$ : in particolare, vediamo che un tasso nominale più realistico,  $r \in (0, 1)$ , composto istantaneamente, dopo un anno rende  $C_f = e^r$ .

## 5.1 Ulteriori limiti notevoli

Nei Paragrafi 3.5 e 3.6 abbiamo ottenuto alcuni primi limiti notevoli. La definizione del numero  $e$  come limite di una successione convergente, ovvero

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (5.1)$$

(si veda la Definizione 4.4), ci permette di ricavare ulteriori limiti notevoli che sono alla base del calcolo differenziale.

Ricordando che  $[x]$  indica la parte intera di un numero reale  $x$ , osserviamo che valgono le disuguaglianze

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

La (5.1) implica che

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{-1} \rightarrow e \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

e analogamente

$$\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \rightarrow e \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Pertanto, segue dal teorema del confronto che

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \quad (5.2)$$

Per risolvere la forma indeterminata  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  per  $x \rightarrow -\infty$  si utilizza la sostituzione  $y = -x \rightarrow +\infty$ :

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y \rightarrow e$$

ovvero

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \quad (5.3)$$

Come facile conseguenza delle (5.2) e (5.3) si ha:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e} \quad (5.4)$$

Infatti, ponendo  $y = 1/x \rightarrow \pm\infty$  per  $x \rightarrow 0^\pm$ , segue dalle (5.2) e (5.3) che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

La (5.4) implica che  $\frac{1}{x} \log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \log e = 1$  (ricordiamo che  $\log$  indica il logaritmo naturale, cioè in base  $e$ ):

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1} \quad (5.5)$$

Per risolvere la forma indeterminata  $\frac{e^x - 1}{x}$  per  $x \rightarrow 0$  si pone  $y = e^x - 1$ :  $y \rightarrow 0$

per  $x \rightarrow 0$  e  $x = \log(1+y)$ , quindi  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)}$  e, per la (5.5),

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \quad (5.6)$$

Le (5.6) e (5.5) possono essere riscritte come

$$e^x = 1 + x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

e

$$\log(1+x) = x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \quad (5.8)$$

Sostituendo  $x$  con  $\alpha x$  ( $\alpha \neq 0$ ) nella (5.7), si ottiene

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

(se  $\alpha = 0$  l'uguaglianza è banale). Per  $a > 0$ , si può porre  $\alpha = \log a$  nella (5.9) in tal modo si ottiene

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + x \log a(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad \text{se } a > 0. \quad (5.11)$$

Infine verifichiamo che

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.13)$$

Per  $x \rightarrow 0$ , si ha infatti

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= e^{\alpha \log(1+x)} \\ &\stackrel{(5.9)}{=} 1 + \alpha \log(1+x)(1 + o(1)) \quad (\text{poiché } \log(1+x) \rightarrow 0) \\ &\stackrel{(5.8)}{=} 1 + \alpha x(1 + o(1))(1 + o(1)). \end{aligned}$$

Segue subito dai limiti notevoli (5.2), (5.3) e (5.4) che per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x \rightarrow e^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty \quad (5.14)$$

e

$$(1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^\alpha \quad \text{per } x \rightarrow 0. \quad (5.15)$$

### ESEMPIO 5.1

Utilizziamo le nozioni acquisite per calcolare alcuni limiti:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(5x^2 - 3x + 2^x)}{\sin(3x)}$ ;

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^\alpha - 3^\alpha}{x^{3-x} - 1}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\log(1 + 2x^6)}}{x^\alpha - x^{8-\alpha}}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ .

a) Poiché  $5x^2 - 3x + 2^x \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ , possiamo applicare la (5.8) con  $5x^2 - 3x + 2^x - 1 (\rightarrow 0)$  sostituito a  $x$ :

$$\log(5x^2 - 3x + 2^x) = (5x^2 - 3x + 2^x - 1)(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

D'altra parte, per la (5.10) si ha  $2^x - 1 = x \log 2(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow 0$ ; perciò

$$5x^2 - 3x + 2^x - 1 = 5x^2 - 3x + x \log 2(1 + o(1)) = (\log 2 - 3)x(1 + o(1))$$

per  $x \rightarrow 0$ . Infine, dalla (3.36) si ottiene  $\sin(3x) = 3x(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow 0$ . In conclusione

$$\frac{\log(5x^2 - 3x + 2^x)}{\sin(3x)} = \frac{(\log 2 - 3)x(1 + o(1))}{3x(1 + o(1))} \rightarrow \frac{1}{3} \log 2 - 1 \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

b) Per  $\alpha = 0$  il limite vale banalmente 0. Per  $\alpha \neq 0$ , osserviamo che

$$x^\alpha - 3^\alpha = 3^\alpha \left( \left( \frac{x}{3} \right)^\alpha - 1 \right) = 3^\alpha \left( \left( 1 + \frac{x}{3} - 1 \right)^\alpha - 1 \right).$$

Quindi, ponendo  $y = \frac{x}{3} - 1 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 3$  e utilizzando la (5.12), si ottiene



$$\begin{aligned}x^\alpha - 3^\alpha &= 3^\alpha \left( \alpha \left( \frac{x}{3} - 1 \right) (1 + o(1)) \right) \\ &= \alpha 3^{\alpha-1} (x-3) (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 3.\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}x^{3-x} - 1 &= e^{(3-x)\log x} - 1 \stackrel{(5.7)}{=} (3-x)\log x (1 + o(1)) \\ &= (3-x)\log 3 (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 3.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^\alpha - 3^\alpha}{x^{3-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha 3^{\alpha-1} (x-3) (1 + o(1))}{(3-x)\log 3 (1 + o(1))} = -\frac{\alpha 3^{\alpha-1}}{\log 3}.$$

c) Chiaramente  $\sqrt{\log(1+2x^6)} \rightarrow 0^+$  per  $x \rightarrow 0^+$  e, per la (5.8), si ha:

$$\sqrt{\log(1+2x^6)} = \sqrt{2x^6(1+o(1))} = \sqrt{2}x^3(1+o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

D'altra parte, per  $x \rightarrow 0^+$

$$x^\alpha - x^{8-\alpha} = \begin{cases} x^\alpha(1+o(1)) & \text{se } \alpha < 4 \\ -x^{8-\alpha}(1+o(1)) & \text{se } \alpha > 4. \end{cases}$$

Pertanto per  $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{\sqrt{\log(1+2x^6)}}{x^\alpha - x^{8-\alpha}} = \begin{cases} \sqrt{2}x^{3-\alpha}(1+o(1)) & \text{se } \alpha < 4 \\ \sqrt{2}x^{\alpha-5}(1+o(1)) & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\log(1+2x^6)}}{x^\alpha - x^{8-\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \text{ oppure } \alpha > 5 \\ \sqrt{2} & \text{se } \alpha = 3 \text{ oppure } \alpha = 5 \\ +\infty & \text{se } 3 < \alpha < 5, \alpha \neq 4. \end{cases}$$

Calcolare i seguenti limiti:

a)  $\frac{e^{2x \sin(3x)} - 1}{1 - \cos x}$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;

b)  $\frac{\sin^2(x^2 - 3x + 2)}{\cos(x^3 - 1) - 1}$  per  $x \rightarrow 1$ ;

c)  $\frac{x^\alpha + x^{-2}}{\log(1 + e^{\alpha x})}$  per  $x \rightarrow +\infty$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

d)  $\frac{\log\left(\frac{e + e^x}{2}\right) - 1}{x^\alpha - x^{-2\alpha}}$  per  $x \rightarrow 1$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 4^+} [\log(4e^{x-4} - x) - \log(4x - 16)]$ ;

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \log\left(\frac{1}{3^{1/x}}\right) - \frac{1}{x} \log\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)(1 - 2x)\right) \right)$ ;

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 3x^2 - x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 9})$ ;

h)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n - 1/n} - \sqrt{n}}{(e^{1/n} - 1)^{3/2}}$ ;

i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos(n^{-\alpha}))^n$ , al variare di  $\alpha \in (0, +\infty)$ .

### ESERCIZIO 5.1

### 5.1.1 Funzioni iperboliche e loro inverse

Seno e coseno  
iperbolico

Utilizziamo la funzione esponenziale  $e^x$  per introdurre alcune funzioni usate spesso nelle applicazioni. Definiamo per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (5.16)$$

(si legge “**seno iperbolico** di  $x$ ” e “**coseno iperbolico** di  $x$ ”). Le funzioni  $x \mapsto \sinh x$  e  $x \mapsto \cosh x$ , con dominio  $\mathbb{R}$ , si dicono **funzioni iperboliche**. Vediamo alcune proprietà (i grafici sono riportati in Figura 5.1). La funzione  $\sinh x$  è dispari mentre la funzione  $\cosh x$  è pari:

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre

$$\sinh 0 = 0, \quad \cosh 0 = 1$$

e

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \quad (5.17)$$

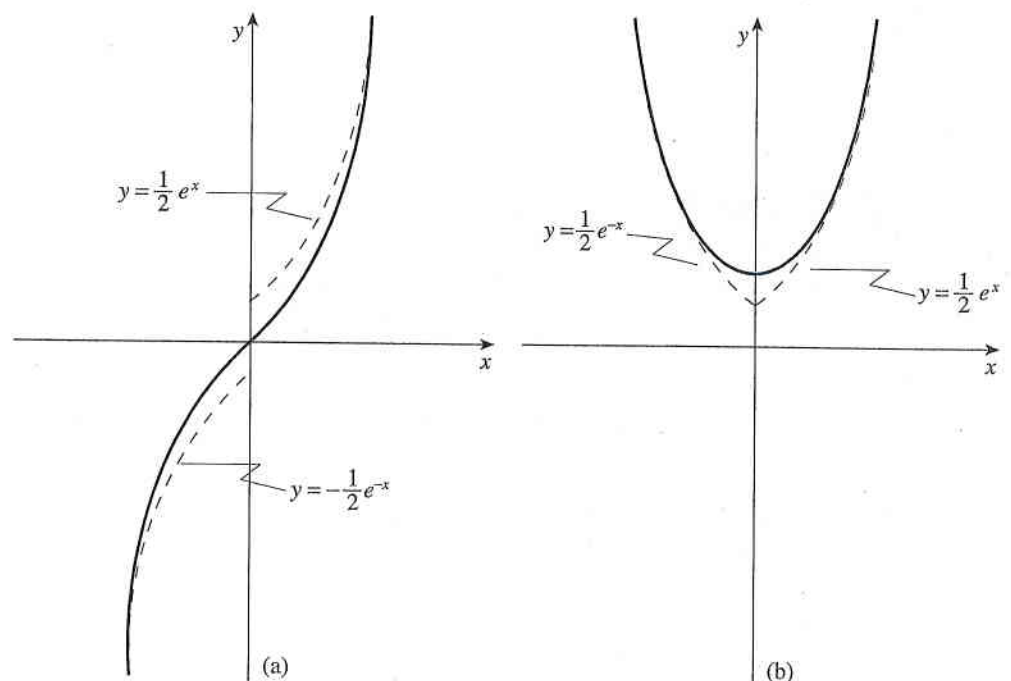
Infatti,

$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \\ &= e^x e^{-x} = 1. \end{aligned}$$

Si osservi che

$$\sinh x = \frac{1}{2}e^x + o(1) \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{1}{2}e^x + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

**Figura 5.1** Le funzioni  $x \mapsto \sinh x$  (a) e  $x \mapsto \cosh x$  (b), con il comportamento per  $x \rightarrow \pm\infty$ .



e

$$\sinh x = -\frac{1}{2}e^{-x} + o(1) \quad \text{e} \quad \cosh x = \frac{1}{2}e^{-x} + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

La funzione  $\sinh x$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ , essendo la somma delle due funzioni strettamente crescenti  $\frac{1}{2}e^x$  e  $-\frac{1}{2}e^{-x}$ , e quindi è invertibile in  $\mathbb{R}$ . In questo caso, per ogni  $y \in \mathbb{R}$  si può risolvere analiticamente l'equazione  $\sinh x = y$  e ottenere la formula per la funzione inversa: dato  $y \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\begin{aligned} \sinh x = y &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Si noti che  $\sqrt{1+y^2} > \sqrt{y^2} = |y|$ ; perciò  $y + \sqrt{1+y^2} > 0$  e  $y - \sqrt{1+y^2} < 0$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ . Quindi

$$\sinh x = y \Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

ovvero l'inversa di  $x \mapsto \sinh x$  in  $\mathbb{R}$  è la funzione

$$\text{settsinh } x := \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (5.18)$$

(si legge **settore seno iperbolico**; si veda Figura 5.2).

La funzione  $\cosh x$  è pari; perciò non è invertibile in  $\mathbb{R}$ , lo è invece in  $[0, +\infty)$ . Infatti, ragionando come sopra, dato  $y \geq 1$  si determina un'unica soluzione  $x \geq 0$  dell'equazione  $\cosh x = y$  ed è data dalla formula

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

quindi l'inversa di  $\cosh x$  in  $[0, +\infty)$  è la funzione

$$\text{settcosh } x := \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1 \quad (5.19)$$

(si legge **settore coseno iperbolico**; si veda Figura 5.3).

Funzioni iperboliche  
inverse

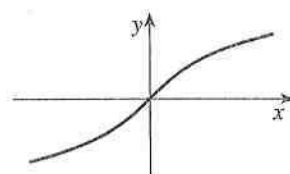


Figura 5.2  
 $x \mapsto \text{settsinh } x$

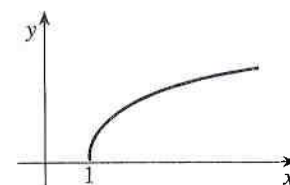


Figura 5.3  
 $x \mapsto \text{settcosh } x$

## 5.2 Asintoto orizzontale, obliquo, verticale

### DEFINIZIONE 5.1

Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di  $+\infty$  ( $-\infty$ ).

(i) Se  $f$  ammette limite finito  $b \in \mathbb{R}$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ), ovvero se

$$f(x) = b + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (-\infty) \quad (5.20)$$

la retta di equazione  $y = b$  si dice **asintoto orizzontale** per  $f$ .

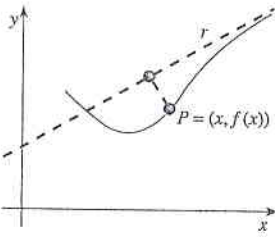
(ii) Se esistono  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , tale che

$$f(x) = ax + b + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad (-\infty) \quad (5.21)$$

la retta di equazione  $y = ax + b$  si dice **asintoto obliquo** per  $f$ .

L'interpretazione geometrica di (5.21) (analoga è quella di (5.20)) è illustrata nella Figura 5.4. Dalla formula per la distanza di un punto da una retta (si veda il corso di geometria) applicata alla retta  $r$  di equazione  $y = ax + b$  e al punto  $P$  di coordinate  $(x, f(x))$ , risulta





**Figura 5.4** Asintoto obliquo per  $f$ :  
 $d(P, r) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

$$d(r, P) = \frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

e la (5.21) è equivalente a  $d(r, P) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ).

Per determinare gli eventuali asintoti obliqui di una funzione osserviamo che la (5.21) è equivalente alle due condizioni

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{x} \rightarrow a \in \mathbb{R} \\ f(x) - ax \rightarrow b \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{ per } x \rightarrow +\infty \text{ } (-\infty) \quad (5.22)$$

(la facile verifica di “(5.21)  $\Leftrightarrow$  (5.22)” è lasciata per esercizio).

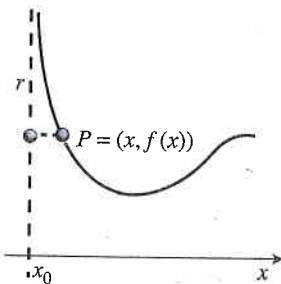
### ESEMPIO 5.2

- a) La funzione  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  ha asintoti obliqui  $y = x$  per  $x \rightarrow +\infty$  e  $y = -x$  per  $x \rightarrow -\infty$ . Infatti (consideriamo il caso  $x \rightarrow +\infty$ , essendo la funzione pari il caso  $x \rightarrow -\infty$  è immediato),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \right) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0.$$

- b) La funzione  $f(x) = \log(e^{2x} - 1)$  ha asintoto obliquo  $y = 2x$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Infatti

$$\begin{aligned} \log(e^{2x} - 1) &= \log\left(e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)\right) \\ &= \log(e^{2x}) + \log\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = 2x + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$



**Figura 5.5** Asintoto verticale per  $f$ :  
 $d(P, r) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0^+$ .

### DEFINIZIONE 5.2

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $f$  definita in un intorno destro e/o sinistro di  $x_0$  (eventualmente escluso il punto  $x_0$ ). Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty) \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty) \quad (5.23)$$

la retta  $r$  di equazione  $x = x_0$  si dice **asintoto verticale** di  $f$ .

Come si osserva nella Figura 5.5, se vale la (5.23) allora  $d(P, r) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow x_0^+(x_0^-)$ .

### ESEMPIO 5.3

- a) La funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) ammette asintoto verticale  $x = 0$  e asintoto orizzontale  $y = 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ .  
 b) La funzione  $f(x) = \log x$  ha asintoto verticale  $x = 0$ , ma non ha asintoto orizzontale o obliquo.  
 c) La funzione  $f(x) = \operatorname{tg} x$  ha asintoti verticali  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

### EERCIZIO 5.2

Determinare, se esistono, gli asintoti orizzontali, obliqui e verticali delle seguenti funzioni:

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ ;

c)  $f(x) = \log_3 \left( \frac{x + 1}{x - 1} \right)$ ;

b)  $f(x) = e^{\frac{x^2 - 4}{x}}$ ;

d)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$ ;

$$e) f(x) = \frac{x^5 - x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$h) f(x) = 5x + 2 - \sqrt{25x^2 + 12};$$

$$f) f(x) = xe^{\frac{10x}{x^2+9}};$$

$$i) f(x) = 5x + 2 - \sqrt{25x^2 + 12x}.$$

$$g) f(x) = \frac{1}{x+7} \log(e^{3x^2} - 2);$$

## 5.3 I simboli di Landau

Nel Capitolo 4 abbiamo definito il simbolo  $o(1)$  senza però motivare la presenza dell'“argomento”, 1. La questione si illustra bene in formule: per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f(x) = o(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1} = f(x) \rightarrow 0.$$

È quindi naturale generalizzare la nozione di  $o(1)$  come segue:

### DEFINIZIONE 5.3

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$  (con  $g(x) \neq 0$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ ). Allora

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow x_0. \quad (5.24)$$

Il simbolo  $o(g(x))$  (si legge “o piccolo di  $g(x)$ ”) è noto come uno dei **simboli di Landau**. La sua definizione è del tutto analoga se  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  è un punto di accumulazione sinistro (destro) per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$ : basta sostituire  $x \rightarrow x_0$  con  $x \rightarrow x_0^-$  ( $x \rightarrow x_0^+$ ).

Se due funzioni  $f$  e  $g$  sono entrambe infinitesime (o entrambe infinite) per  $x \rightarrow x_0$ ,  $f(x) = o(g(x))$  significa che  $f$  è un infinitesimo di ordine superiore (o un infinito di ordine inferiore) rispetto a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ .

- a)  $x^3 = o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ ;
- b)  $x^2 = o(x^3)$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- c)  $x^2 = o(2^x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- d)  $(\log_3 x)^2 = o(x^{\frac{1}{100}})$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- e)  $1 - \cos x = o(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ .

### ESEMPIO 5.4

Sono di grande utilità pratica alcune **regole “aritmetiche”** relative a  $o(\cdot)$ . Le esponiamo, per semplicità di scrittura, nel caso in cui  $x \rightarrow 0^+$  oppure  $x \rightarrow +\infty$  (i casi  $x \rightarrow x_0^\pm$  e  $x \rightarrow -\infty$  seguono per traslazione e/o simmetria).

Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; allora, per  $x \rightarrow 0^+$  o  $x \rightarrow +\infty$ , si ha:

- a)  $C \cdot o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$  per ogni  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (e ovviamente  $0 \cdot o(x^\alpha) = 0$ );
- b)  $x^\beta \cdot o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta})$ ;
- c)  $o(x^\beta) \cdot o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta})$ ;
- d)  $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$  nel senso che se  $f(x) = o(x^\alpha)$ ,  $h(x) = o(f(x))$  e  $f(x) \neq 0$  definitivamente, allora  $h(x) = o(x^\alpha)$ .

Per quanto riguarda la somma di  $o(\cdot)$ , dobbiamo invece distinguere i due casi:

$$e1) o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\gamma), \quad \gamma = \min\{\alpha, \beta\} \quad \text{se } x \rightarrow 0^+;$$

$$e2) o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\gamma), \quad \gamma = \max\{\alpha, \beta\} \quad \text{se } x \rightarrow +\infty.$$

Le verifiche di (a)-(d) sono praticamente immediate e vengono lasciate allo studente. Per verificare (e1) si procede come segue: supponendo (a meno di scambiare  $f$  con  $g$ ) che  $\gamma = \alpha \leq \beta$ , si ha  $x^{\beta-\alpha} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0^+$ , e quindi

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= o(x^\alpha) \\ g(x) &= o(x^\beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(x) \pm g(x)}{x^\alpha} = \frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha} + \frac{o(x^\beta)}{x^\beta} \cdot x^{\beta-\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

**ESEMPIO 5.5**

a)  $x - \sin x = o(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Infatti

$$x - \sin x = x - x(1 + o(1)) = x - x - x \cdot o(1) = -x \cdot o(1) = o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

b)  $1 - \cos(2x) + x^2(1 + \log(1+x)) = 3x^2 + o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0^+$ . Infatti

$$1 - \cos(2x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^2)(1 + o(1)) = 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

$$x^2(1 + \log(1+x)) = x^2(1 + x + o(x)) = x^2 + x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

da cui, sommando, si ottiene

$$1 - \cos(2x) + x^2(1 + \log(1+x)) = 3x^2 + \underbrace{o(x^2) + x^3 + o(x^3)}_{=o(x^2)} = 3x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Ragionando come nell'Esempio precedente è possibile riscrivere in forma equivalente tutti i limiti notevoli incontrati finora: per esempio,

$$\begin{aligned} a^x &= 1 + x \log a + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (a \in (0, +\infty)), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Nel Capitolo 7 si generalizzeranno tali espressioni e se ne forniranno interpretazioni sia analitiche che geometriche.

Oltre al simbolo  $o(\cdot)$ , per indicare le relazioni di confronto tra funzioni si usano altri due simboli.

a) “ $O(\cdot)$ ” (si legge “O grande di  $\cdot$ ”): se  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  è un punto di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$  (con  $g(x) \neq 0$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ ), allora

$$f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ è definitivamente limitata per } x \rightarrow x_0.$$

In particolare,  $f(x) = O(1)$  per  $x \rightarrow x_0$  indica che  $f$  è definitivamente limitata per  $x \rightarrow x_0$ . Per il simbolo  $O(\cdot)$  valgono proprietà identiche alle (a)-(e).

b) “ $\sim$ ” (si legge “asintotico a”): se  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  un punto di accumulazione per  $\text{dom } f \cap \text{dom } g$  (con  $g(x) \neq 0$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ ), allora

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \text{ per } x \rightarrow x_0.$$



a)  $\sin x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ ;

b)  $1 - \cos x \begin{cases} = O(x^2) & \text{per } x \rightarrow 0 \\ \sim \frac{1}{2}x^2 & \text{per } x \rightarrow 0; \end{cases}$

c)  $\operatorname{tg} x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ ;

d)  $x \sin(1/x) = O(x)$  per  $x \rightarrow 0$ : infatti  $\sin(1/x)$  è limitata (anche se non ammette limite per  $x \rightarrow 0$ ).

## ESEMPIO 5.6

Si osservi che se  $f$  e  $g$  sono tali che  $f/g \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$  ed  $\ell \neq 0$ , allora sono asintotiche a meno della costante moltiplicativa  $\ell$ , ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\ell \cdot g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) \sim \ell \cdot g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Si osservi anche che scrivere  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$  è del tutto equivalente a scrivere  $f(x) = g(x)(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow x_0$ :

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Tuttavia c'è una differenza essenziale: il simbolo " $\sim$ " non coincide con il simbolo " $=$ " e perciò non si può in generale utilizzare per svolgere i calcoli, ma solo successivamente, "a conti fatti". Contravvenire a questa semplice norma conduce facilmente ad errori, come mostra il seguente esempio.



Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x^{3/2}} = \frac{1}{2}.$$

Infatti, utilizzando la (5.12),

$$\frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x^{3/2}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Tuttavia, poiché  $\sqrt{x+x^2} \sim \sqrt{x}$  per  $x \rightarrow 0^+$ , si potrebbe pensare di utilizzare questa informazione durante i calcoli: ma

$$\text{è falso che } \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x^{3/2}} \sim \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x^{3/2}} = 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

e ovviamente conduce a una risposta errata: il limite non è 0 ma  $1/2$ .

## ESEMPIO 5.7

Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false:

a)  $\log(1+x) - \frac{1}{\log x} = x = o(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;

b)  $\log(1+x) - e^{1/x} + x = 2x + o(x)$  per  $x \rightarrow 0^-$ ;

c)  $\cos(x^2) - \sqrt{1-x^4} = o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0$ ;

d)  $e^{6x-3} - 6 - 6x = o\left(x - \frac{1}{2}\right)$  per  $x \rightarrow \frac{1}{2}$ .

## ESERCIZIO 5.3

## ESERCIZIO 5.4

Determinare, nei casi in cui è possibile, i seguenti limiti:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - g(x)}{x^4}$ , con  $f(x) = o(x^2)$  e  $g(x) = o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0^+$ ;
- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{x^4}$ , con  $f(x) = o(x^2)$  e  $g(x) = o(x^4)$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha + 1}$ , con  $f(x) = o(x^3)$  per  $x \rightarrow +\infty$ , al variare di  $\alpha \in (0, +\infty)$ ;
- d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1 - \sin(g(x))}{x^\alpha}$ , con  $f(x) = o(x)$  e  $g(x) = o(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## ESERCIZIO 5.5

Disporre le seguenti funzioni in ordine di infinito o infinitesimo crescente per  $x \rightarrow 0^+$ :

- a)  $e^{-1/x}$ ,  $\log(1+x^3)$ ,  $(x)^{1/\sqrt{x}}$ ,  $\sqrt{1+x^2} - \cos x$ ;
- b)  $x^{-\arcsin(\frac{1+x}{1-x})}$ ,  $\left(\frac{\sqrt{x+x^2}}{\operatorname{arctg}(x)}\right)^3$ ,  $x^{-\sqrt{2}}$ .

## Guida

Il paragrafo è opzionale. Se si intende svolgerlo, si suggerisce di farlo prima delle applicazioni del Teorema di Peano (Paragrafo 7.12.1).

## 5.4 Ordini di infinitesimo e infinito

È particolarmente utile (si pensi al calcolo dei limiti) “misurare” la velocità con cui un infinitesimo (infinito) tende a zero (infinito) rispetto a un infinitesimo (infinito) che scegliamo come *campione*.

## DEFINIZIONE 5.4

Siano  $f$  e  $g$  infinitesimi (infiniti) per  $x \rightarrow x_0$ , con  $g(x) \neq 0$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$ . Se esistono

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^\alpha} = \ell \quad (5.25)$$

si dice che per  $x \rightarrow x_0$   $f$  è di ordine  $\alpha$  rispetto all'infinitesimo (infinito) campione  $g$ .

Nella definizione si sottointende che  $(g(x))^\alpha$  sia ben definita. Per i limiti destro e sinistro si dà la stessa definizione, sostituendo  $x \rightarrow x_0$  rispettivamente con  $x \rightarrow x_0^+$  e  $x \rightarrow x_0^-$ . Notiamo anche che la condizione (5.25) si può riscrivere come

$$f(x) = \ell (g(x))^\alpha (1 + o(1)) \text{ per } x \rightarrow x_0.$$

Quasi sempre si scelgono come infinitesimo (o infinito) campione opportune funzioni lineari di  $x$  o il loro reciproco: in tali casi si dice semplicemente che  $f$  è di ordine  $\alpha$  per  $x \rightarrow x_0$ , omettendo di specificare il campione. Naturalmente la funzione  $g(x)$  che funge da campione deve essere infinitesima (o infinita) per  $x \rightarrow x_0$  e  $(g(x))^\alpha$  deve essere ben definita. Quindi:

Le usuali funzioni campione

	$f$ infinitesima	$f$ infinita
$x \rightarrow +\infty$	$g(x) = 1/x$	$g(x) = x$
$x \rightarrow -\infty$	$g(x) = -1/x$	$g(x) = -x$
$x \rightarrow x_0^+, x_0 \in \mathbb{R}$	$g(x) = x - x_0$	$g(x) = \frac{1}{x - x_0}$
$x \rightarrow x_0^-, x_0 \in \mathbb{R}$	$g(x) = x_0 - x$	$g(x) = \frac{1}{x_0 - x}$

Il caso in cui  $x \rightarrow x_0$  (sia da destra sia da sinistra) e  $g(x) = x - x_0$  (o  $g(x) = 1/(x - x_0)$ ) ha senso solo in casi particolari, per esempio se l'ordine è un intero; tuttavia compare spesso nelle applicazioni: per esempio,  $\sin(x - 2)$  ha ordine di infinitesimo 1 (rispetto al campione  $(x - 2)$ ) per  $x \rightarrow 2$ .

Per le successioni, la scelta dei campioni usuali è del tutto analoga al caso in cui  $x \rightarrow +\infty$ :

	$a_n$ infinitesima	$a_n$ infinita
$n \rightarrow +\infty$	$g_n = \frac{1}{n}$	$g_n = n$

## ESEMPIO 5.8

- a)  $\sin x$  è infinitesimo di ordine 1 (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow 0$ ;  
 b)  $1 - \cos x$  è infinitesimo di ordine 2 (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow 0$ ;  
 c)  $x^2 + x^3$  è infinitesimo di ordine 2 (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow 0$ ;  
 d)  $x^2 + x^3$  è infinito di ordine 3 (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ ;  
 e)  $x^2 + x^3$  è infinitesimo di ordine 1 (rispetto a  $x + 1$ ) per  $x \rightarrow -1$ ;  
 f)  $(e^x - 1)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) è infinitesimo di ordine  $\alpha$  (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow 0^+$ ;  
 g)  $1 - \cos x + \sin x$  è infinitesimo di ordine 1 (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow 0$ ;  
 h)  $\log(1 + \sqrt{x}) + x^2 + 3x^{\frac{5}{2}}$  è infinitesimo di ordine  $1/2$  (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow 0^+$ .  
 i)  $\sqrt{x^4 + x^3} - x^2$  è infinito di ordine 1 (rispetto a  $x$ ) per  $x \rightarrow +\infty$ ;  
 j)  $1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$  è infinitesimo di ordine 4 (rispetto a  $1/n$ ) per  $n \rightarrow +\infty$ ;  
 k)  $\frac{\sqrt{n+1}}{n^5 + n^3}$  è infinitesimo di ordine  $9/2$  (rispetto a  $1/n$ ) per  $n \rightarrow +\infty$ .

In generale non è detto che sia possibile determinare l'ordine rispetto alle funzioni campione usuali. Per esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{per ogni } a > 1 \text{ e } \alpha > 0$$

quindi *non esiste* alcun  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tale che  $a^x$  abbia ordine  $\alpha$  rispetto all'infinito campione  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{per ogni } \alpha, \beta > 0 \text{ e } b > 1$$

perciò *non esiste*  $\alpha$  per cui tale limite sia un numero reale diverso da zero; ovvero non si può determinare l'ordine di infinito di  $(\log_b x)^\beta$  rispetto al campione  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ .



Neppure la funzione  $\sin x/x$ , infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$ , ha ordine (rispetto a  $1/x$ ): infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-1} \sin x \begin{cases} = 0 & \text{se } \alpha < 1 \\ \neq & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

(si veda l'Esempio 3.8a).

### ESEMPIO 5.9

Determiniamo gli ordini di infinitesimo o di infinito di alcune funzioni:

- a)  $\log(5x^2 - 19)$  per  $x \rightarrow 2$ ;  
 b)  $1 - \sqrt[3]{\cos x}$  per  $x \rightarrow 0$ ;  
 c)  $(\cos x)^{\frac{1}{x}} - 1$  per  $x \rightarrow 0$ ;  
 d)  $\frac{1}{e^{4 \arcsin(2x)} - 1}$  per  $x \rightarrow 0^-$ ;  
 e)  $x^{\operatorname{arctg} x}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

a) Risulta  $5x^2 - 19 \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 2$ , quindi  $\log(5x^2 - 19)$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow 2$ . Ponendo  $5x^2 - 19 = 1 + y$ , ovvero  $y = 5x^2 - 20$ , si ha che  $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 2$  e

$$\begin{aligned} \log(5x^2 - 19) &= \log(1 + y) \stackrel{(5.8)}{=} y(1 + o(1)) = (5x^2 - 20)(1 + o(1)) \\ &= 5(x - 2)(x + 2)(1 + o(1)) = 20(x - 2)(1 + o(1))(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 2. \end{aligned}$$

Perciò  $\log(5x^2 - 19)$  è un infinitesimo di ordine 1 per  $x \rightarrow 2$ .

b) La funzione  $1 - \sqrt[3]{\cos x}$  è infinitesima per  $x \rightarrow 0$ . Poiché  $\cos x \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ , è naturale utilizzare la (5.12) con  $x = 1/3$  e  $(\cos x - 1)$  al posto di  $x$ . Così facendo risulta, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt[3]{\cos x} &= 1 - \sqrt[3]{1 + (\cos x - 1)} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{3}(\cos x - 1)(1 + o(1))\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{6}x^2(1 + o(1))(1 + o(1))\right) = \frac{1}{6}x^2(1 + o(1)), \end{aligned}$$

quindi  $1 - \sqrt[3]{\cos x} \rightarrow 0$  è un infinitesimo di ordine 2 per  $x \rightarrow 0$ .

c)  $(\cos x)^{\frac{1}{x}}$  è una forma indeterminata del tipo  $[1^\infty]$  per  $x \rightarrow 0$ ; ricordando la (3.32) si scrive

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(\cos x)};$$

per la (5.8), per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$\log(\cos x) = \log(1 + \cos x - 1) = (\cos x - 1)(1 + o(1)) = -\frac{1}{2}x^2(1 + o(1)).$$

Quindi, per la (5.7),

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{-\frac{1}{2}x(1+o(1))} - 1 = -\frac{1}{2}x(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ovvero  $(\cos x)^{\frac{1}{x}} - 1$  è un infinitesimo di ordine 1 per  $x \rightarrow 0$ .

d) Si noti che  $\arcsin(2x) \rightarrow 0^-$  per  $x \rightarrow 0^-$ , quindi  $e^{4 \arcsin(2x)} - 1 \rightarrow 0^-$  e

$$\frac{1}{e^{4 \arcsin(2x)} - 1} \rightarrow -\infty \quad \text{per } x \rightarrow 0^-.$$

Per determinare l'ordine di infinito, ricordiamo che  $\arcsin y = y(1 + o(1))$  per  $y \rightarrow 0$  (si veda la (3.40)). Quindi, per la (5.7),

$$\frac{1}{e^{4 \arcsin(2x)} - 1} = \frac{1}{8x(1 + o(1))} = \frac{1}{8x}(1 + o(x)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^-$$

ovvero  $\frac{1}{e^{4 \arcsin(2x)} - 1}$  è un infinito di ordine 1 per  $x \rightarrow 0^-$ .

e) Scriviamo  $x^{\operatorname{arctg} x} = e^{\operatorname{arctg} x \log x}$ . Ricordando che

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} \right)$$

(si veda la (2.14)) e che  $\operatorname{arctg} y = y(1 + o(1))$  per  $y \rightarrow 0$ , si ha

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} x \log x &= \frac{\pi}{2} \log x - \frac{1}{x} \log x (1 + o(1)) \\ &= \frac{\pi}{2} \log x + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$x^{\operatorname{arctg} x} = e^{\frac{\pi}{2} \log x + o(1)} = x^{\frac{\pi}{2}} e^{o(1)} = x^{\frac{\pi}{2}} (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi  $x^{\operatorname{arctg} x}$  è un infinito di ordine  $\frac{\pi}{2}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Riconsideriamo la funzione infinita nell'Esempio 5.9e. Si potrebbe pensare che sia ovvio che  $\pi/2$  sia l'ordine di infinito per  $x \rightarrow +\infty$  di  $x^{\operatorname{arctg} x}$ , in quanto  $\operatorname{arctg} x \rightarrow \pi/2$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Avvertiamo lo studente che questo in generale è falso; cioè

$$f(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \not\Rightarrow x^{f(x)} \text{ ha ordine di infinito } \ell \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

Per esempio,  $x^{1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}}}$  non ha ordine di infinito 1 per  $x \rightarrow +\infty$ , anche se  $1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}} \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow +\infty$ ; in effetti è un infinito di ordine superiore a  $x$  (lo studente lo verifichi). Quanto detto si può ripetere nel caso di infinitesimi.



Determinare, se esiste, l'ordine di infinito o infinitesimo per  $x \rightarrow +\infty$  rispetto al campione  $x$  o  $\frac{1}{x}$  delle seguenti funzioni:

a)  $x \log_2 x$ ;

b)  $\operatorname{arctg} \frac{3}{x}$ ;

c)  $\frac{\log_3(x^2 + 1) - \log_3 x}{\log_3(2x)} (x^2 + x \sin x - \cos x) \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1-x}}$ ;

d)  $x^\alpha + \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;

e)  $(1 + x^\alpha) \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right)$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

#### ESERCIZIO 5.6

## ESERCIZIO 5.7

Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo o di infinito delle seguenti funzioni:

- a)  $\frac{e^{2\sqrt{1/n}} - 1}{\sin \sqrt[4]{3/n}}$  per  $n \rightarrow +\infty$ ;
- b)  $\frac{\operatorname{tg} \sqrt[4]{x-1}}{e^{\sqrt{x-1}} - 1}$  per  $x \rightarrow 1^+$ ;
- c)  $\log(1 + 2x^2)$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- d)  $\log(1 + 2x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ ;
- e)  $\frac{5x^2 - 1}{x^3 + 1} \operatorname{arctg}(x \log x) (1 - e^{\cos \frac{1}{x}})$  per  $x \rightarrow +\infty$ ;
- f)  $(n^\alpha + 2) \log \left( \frac{n+1}{n} \right)$  per  $n \rightarrow +\infty$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;
- g)  $\frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{\operatorname{arctg}(x^\alpha)}$  per  $x \rightarrow +\infty$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ;
- h)  $\log \left( \frac{x^2 + x^\alpha}{1 + x + x^2} \right) + 2x^{2\alpha}$  per  $x \rightarrow +\infty$ , al variare di  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Guida

Il teorema ponte è utilizzato per la dimostrazione del Teorema di Cauchy per EDO (Paragrafo 17.2.2). Per funzioni di più variabili l'enunciato viene ripetuto, senza dimostrazione, nel Capitolo 10.

## Dimostrazione

## Teorema "ponte"

## 5.5 Non esistenza di limiti

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ , e supponiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$ ; allora, se  $\{a_n\}$  è una qualunque successione a valori in  $X \setminus \{x_0\}$  che converge a  $x_0$ , anche la funzione composta  $f(a_n)$  converge a  $\ell$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Il seguente teorema fornisce anche l'implicazione contraria, ed è perciò anche noto come **teorema ponte** (un "ponte" tra limiti di funzioni e limiti di successioni):  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e solo se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \ell$  per ogni successione  $\{a_n\}$  a valori in  $X \setminus \{x_0\}$  e convergente a  $x_0$ .

## TEOREMA 5.5

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $X$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* \quad (5.26)$$

se e solo se per ogni successione  $\{a_n\}$  a valori in  $X \setminus \{x_0\}$  e convergente a  $x_0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \ell \in \mathbb{R}^*. \quad (5.27)$$

Si noti che l'esclusione di  $x_0$  come valore di  $\{a_n\}$  è necessaria perché il limite (5.26) non fornisce alcuna informazione sull'eventuale valore  $f(x_0)$ .

L'implicazione  $\Rightarrow$  del teorema ponte fornisce il principale strumento per provare la non esistenza di un limite: infatti, segue dal teorema che se esistono due successioni

$$a_n \rightarrow x_0, \quad b_n \rightarrow x_0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad \text{con } a_n, b_n \in X \setminus \{x_0\}$$

tali che

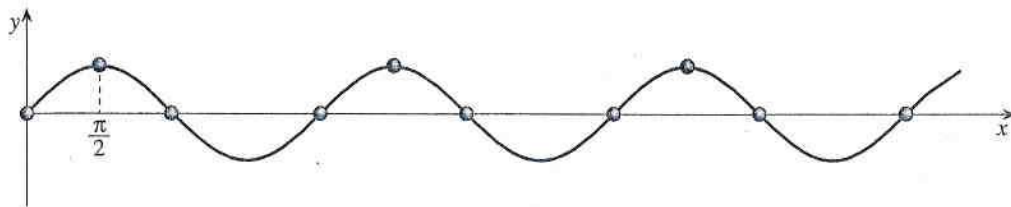
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n)$$

allora non esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .



Nel Paragrafo 3.2 abbiamo dimostrato che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  non esiste. Il teorema ponte rende la dimostrazione particolarmente facile: scegliendo  $a_n = n\pi \rightarrow +\infty$  e  $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \rightarrow +\infty$ , si ottiene (si veda Figura 5.6)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n\pi = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right).$$



## ESEMPIO 5.10

**Figura 5.6** I punti

$(a_n, \sin a_n)$   
e  $(b_n, \sin b_n)$

con  $a_n = n\pi$  e

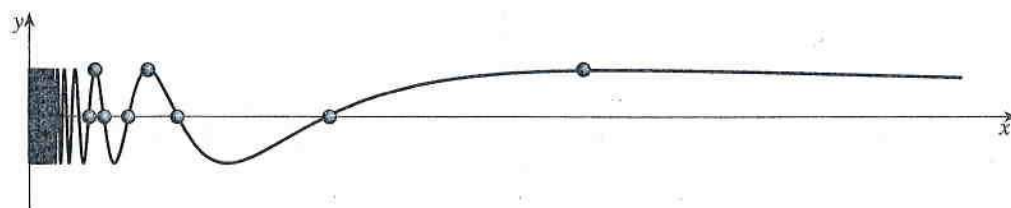
$$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{N}.$$

Se  $\alpha \leq 0$ , non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ . Infatti, posto  $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ , scegliendo  $a_n = 1/(n\pi) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$f(a_n) = \left( \frac{1}{n\pi} \right)^\alpha \sin(n\pi) = 0 \quad \forall n > 0$$

mentre scegliendo  $b_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$f(b_n) = \left( \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \right)^\alpha \sin \left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$



## ESEMPIO 5.11

**Figura 5.7** I punti

$\left( a_n, \frac{1}{20} \sin \frac{1}{a_n} \right)$

e  $\left( b_n, \frac{1}{20} \sin \frac{1}{b_n} \right)$ ,

con  $a_n = 1/(n\pi), n \geq 1$ ,

$$\text{e } b_n = 1/\left( \frac{\pi}{2} + 2n\pi \right),$$

$n \in \mathbb{N}$ .

## 5.6 Insiemi compatti

### DEFINIZIONE 5.6

$K \subset \mathbb{R}$  si dice **compatto per successioni** o **sequenzialmente compatto** se ogni successione a valori in  $K$  ha una sottosuccessione convergente a un elemento di  $K$ .

Riferendoci a un insieme “compatto per successioni”, quasi sempre diremo semplicemente “insieme compatto”. In effetti, in matematica esistono altre possibili definizioni di insieme compatto; tuttavia, esse sono tutte equivalenti nel caso dello spazio  $\mathbb{R}$  (e anche di  $\mathbb{R}^N$ ). Non ci soffermeremo, perciò, su questo argomento.

Il concetto di compattezza per successioni è molto naturale se si pensa alle applicazioni. Spesso è troppo difficile determinare esplicitamente la soluzione di un certo problema, e si usano per esempio i calcolatori per trovare delle “approssimazioni”,  $x_n$ , di una eventuale soluzione (che non si conosce e forse neanche esiste...). Si vorrebbe capire se si tratta veramente di una approssimazione. Se tutti gli elementi  $x_n$  appartengono a un insieme *compatto*,  $K$ , si può estrarre una sottosuccessione  $\{x_{k_n}\}$  convergente a un elemento  $x \in K$ . Allora  $x$  è un candidato naturale per essere soluzione del problema in esame; se lo è, le  $x_{k_n}$  sono effettivamente approssimazioni di

### Guida

Per funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , il concetto di insieme compatto (per successioni) è utilizzato per dimostrare il Teorema di Weierstrass su insiemi compatti (Paragrafo 6.5) e le proprietà delle funzioni uniformemente continue (Paragrafo 6.6). Nel Capitolo 10 si ripetono sia la definizione che la caratterizzazione (senza dimostrarla) di insieme compatto di  $\mathbb{R}^n$ .

tale soluzione (se si sa anche a priori che il problema non può avere più di una soluzione, tutta la successione  $x_n$  convergerà a  $x$ ).

In  $\mathbb{R}$  gli insiemi compatti per successioni sono gli insiemi chiusi e limitati:

**TEOREMA 5.7**

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}$ . Allora

$K$  è compatto  $\Leftrightarrow K$  è chiuso e limitato.

**Dimostrazione**

Verifichiamo anzitutto che un insieme  $K \subseteq \mathbb{R}$  compatto è necessariamente chiuso e limitato. Se per assurdo  $K$  non è limitato superiormente, allora

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste  $x_n \in K$  tale che  $x_n > n$

(per esempio se  $K = [3, +\infty)$  si può prendere  $x_n = n + 4$ ); la successione  $\{x_n\}$  diverge, quindi anche ogni sua sottosuccessione, in contraddizione con la compattezza di  $K$ . Analogamente si esclude che  $K$  sia illimitato inferiormente. Se, ancora per assurdo,  $K$  non è chiuso, ciò significa che  $\mathcal{C}K$  non è aperto, ovvero

esiste  $x_0 \in \mathcal{C}K$  tale che  $\mathcal{U} \not\subset \mathcal{C}K$  per ogni intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$ .

Ciò equivale a dire che esiste  $x_0$  tale che

$x_0 \notin K$  e  $\mathcal{U} \cap K \neq \emptyset$  per ogni intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$ .

In particolare, ricordando la definizione di intorno, per ogni  $n \geq 1$  esiste

$$x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap K, \quad x_n \neq x_0.$$

È chiaro che la successione  $x_n$  converge a  $x_0$  per  $n \rightarrow +\infty$ , quindi anche ogni sua sottosuccessione converge a  $x_0$  (si veda il Teorema 4.6). Poiché la successione è a valori in  $K$  e  $K$  è compatto, la Definizione 5.6 implica che  $x_0 \in K$ , che è assurdo. Perciò  $K$  è chiuso.

Per provare il viceversa, sia  $K \subset \mathbb{R}$  chiuso e limitato e sia  $\{a_n\} \subset K$  una qualsiasi successione. Poiché  $K$  è limitato anche  $\{a_n\}$  è limitata, quindi (per il Teorema 4.7) ha una sottosuccessione  $\{a_{k_n}\}$  convergente ad  $a \in \mathbb{R}$ :

per ogni intorno  $\mathcal{V}$  di  $a$ ,  $a_{k_n} \in \mathcal{V}$  definitivamente per  $n \rightarrow \infty$ .

Se per assurdo  $a \notin K$ , allora  $a \in \mathcal{C}K$ , che è aperto; perciò esiste un intorno  $\mathcal{V}$  di  $a$  contenuto in  $\mathcal{C}K$ , ovvero  $\mathcal{V} \cap K = \emptyset$ . Ciò contraddice la formula precedente (poiché  $\{a_{k_n}\} \subset K$ ), quindi  $a \in K$ . Dall'arbitrarietà della successione  $\{a_n\}$  segue che  $K$  è compatto.

**ESERCIZIO 5.8**

Dirò quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono compatti:

a)  $[1, 3] \cup [4, 5]$ ;

e)  $\{100\}$ ;

b)  $\left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ;

f)  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x^4 \leq 100\}$ ;

c)  $[1, 3] \setminus \{2\}$ ;

g)  $\left\{ \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ .

d)  $\mathbb{N}$ ;



## FILO ROSSO Verso l'analisi numerica

L'argomento principe del capitolo è la continuità (si veda la Definizione 6.1): genericamente, una funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se ammette limite finito in  $x_0$  e tale limite coincide con  $f(x_0)$ . Vedremo per esempio che tutti i polinomi sono continui in  $\mathbb{R}$  (quindi, per la  $f$  del precedente filo rosso, la proprietà (2) è vera). Come conseguenza, potremo anche affermare che le funzioni continue portano intervalli in intervalli (quindi per la  $f$  del precedente filo rosso  $m = \inf f$  non è un punto isolato). Di seguito ci occupiamo dell'idea cruciale che sta alla base di tale conseguenza: il *teorema degli zeri*.

Lo sviluppo moderno di computer potenti (hardware) e di sofisticati algoritmi matematici tradotti in programmi efficaci (software) ci permette di approssimare con grandissima precisione la soluzione di problemi formulati in termini matematici, anche quelli di complessità notevolissima. Basta pensare quanto sia aumentata l'affidabilità delle previsioni meteorologiche, basata sull'approssimazione della soluzione di problemi matematici di evidente complessità. Senza alcun dubbio la forza applicativa della matematica è destinata ad aumentare.

Un algoritmo è un procedimento che fornisce una successione  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  che converge ad una soluzione  $x_0$  del problema. Supponiamo di voler determinare uno zero di  $g$ , ovvero una soluzione dell'equazione

$$g(x) := 6x^5 + 32(2x^3 + 3x^2 - x - 1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In questo capitolo incontriamo un primo esempio di algoritmo per approssimare uno zero di  $g$ : il *metodo di bisezione*. Partiamo osservando che  $g$  è continua in  $[0, 1]$  e

$$g(0) = -32 < 0, \quad g(1) = 102 > 0.$$

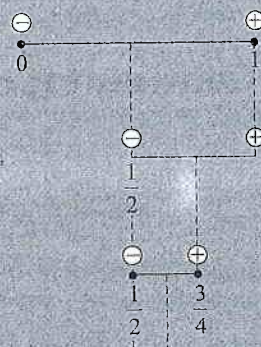
Il cambiamento di segno di  $g$  (continua!) agli estremi dell'intervallo fa supporre che  $g$  debba avere almeno uno zero in  $[0, 1] =: [a_0, b_0]$ . Per localizzarlo si divide l'intervallo  $[0, 1]$  in due intervalli di lunghezza uguale,  $[0, 1/2]$  e  $[1/2, 1]$ . Osservando che

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{253}{16} < 0,$$

nell'intervallo  $[1/2, 1]$  si mantiene la struttura precedente:  $g$  cambia segno negli estremi, quindi in  $(1/2, 1)$  dovrebbe esserci uno zero. Perciò si pone  $[a_1, b_1] := [1/2, 1]$  e si ripete il procedimento: valutando  $g$  nel punto medio del nuovo intervallo,  $x = 3/4$ , si ha

$$g(3/4) = \frac{13529}{512} > 0,$$

quindi poniamo  $[a_2, b_2] := [1/2, 3/4]$  per garantire il cambiamento di segno negli estremi, e così via. A meno di non essere così fortunati da incontrare uno zero lungo la strada, otterremo una successione di intervalli  $[a_n, b_n]$ , di ampiezza sempre più piccola, ai cui estremi  $g$  (che è continua!) cambia segno e che perciò dovrebbe contenere uno zero di  $g$ .



$n$	$a_n$	$b_n$
0	0	1
1	0.5	1
2	0.5	0.75
3	0.5	0.625
4	0.5625	0.625
5	0.59375	0.625
6	0.609375	0.625
7	0.609375	0.617188
8	0.613281	0.617188
9	0.613281	0.615234
10	0.614258	0.615234
11	0.614258	0.614746

Come vedremo in modo rigoroso, questo metodo effettivamente identifica uno zero di  $g$ :  $x_0 := \sup a_n = \inf b_n$ . Inoltre è facile trovare una stima per l'errore che si commette approssimando la soluzione  $x_0$  con  $a_n$ :

$$0 \leq x_0 - a_n < (b_0 - a_0)2^{-n} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Questo approccio algoritmico conduce in modo naturale a una serie di problemi per ottimizzare la procedura. Per esempio: come e con quali criteri sce-



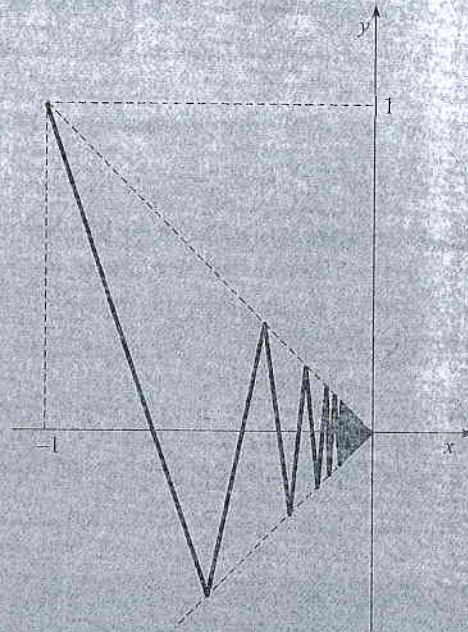
gliere il metodo di approssimazione? Come determinare le approssimazioni in modo “veloce”, “efficace”? Tipicamente si tratta di problemi dell’*Analisi Numerica*, il settore della Matematica – non trattato in questo testo – che si occupa della risoluzione numerica (cioè approssimata, essenzialmente utilizzando calcolatori) di problemi anche assai complicati.

In questo senso diciamo subito che l’algoritmo basato sul metodo della bisezione è piuttosto lento: nel caso della funzione  $g$  esistono degli algoritmi decisamente più veloci, ma si basano sul concetto di derivata. Ne vedremo uno nel prossimo filo rosso.

P.S. Come mai abbiamo scelto  $[0,1]$  come intervallo iniziale? Altre scelte conducono ad altri punti di minimo? Anche a queste domande risponderà il Capitolo 7 (si veda l’Esempio 7.27).

P.P.S. Spesso si dà la seguente idea intuitiva di continuità: se tracciando il grafico di una funzione  $f$  dal punto  $(x_0, f(x_0))$  al punto  $(x_1, f(x_1))$  non si stacca la penna dal foglio, allora  $f$  è continua in  $[x_0, x_1]$ . L’analogia è certamente appropriata per la comprensione iniziale del concetto, ma attenzione, è

solo un’analogia. Infatti esistono funzioni il cui grafico ha bisogno di un tempo infinito per essere tracciato, come quello riportato in Figura (si tratta del grafico di una funzione continua in  $[-1, 0]$  definita e studiata nell’Esempio 12.7).



## 6.1 Continuità: definizione e proprietà elementari

### DEFINIZIONE 6.1

Sia  $f : \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in X$ . Se  $x_0$  è un punto isolato di  $X$ ,  $f$  si dice **continua** in  $x_0$ . Se  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $X$ ,  $f$  si dice **continua** in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (6.1)$$

La parte essenziale della definizione è ovviamente la (6.1), ovvero il caso in cui  $x_0 \in X$  è di accumulazione; dire che una funzione è continua in un punto isolato del suo dominio è solo un’utile convenzione.

Segue immediatamente dalla definizione che la continuità di una funzione  $f$  in un punto  $x_0$  è equivalente alle seguenti affermazioni:

$$\text{per ogni intorno } \mathcal{V} \text{ di } f(x_0) \text{ esiste un intorno } \mathcal{U} \text{ di } x_0 \text{ tale che} \quad (6.2)$$

$$f(x) \in \mathcal{V} \text{ per ogni } x \in X \cap \mathcal{U}$$

(si noti che non è più necessario escludere  $x = x_0!$ );

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x \in X, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (6.3)$$

Inoltre, ricordando la (4.1), se  $f$  è continua in  $x_0$  allora

per ogni successione  $\{x_n\}$  a valori in  $X$ , convergente a  $x_0$ , si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad (6.4)$$

(in effetti è vera anche l'implicazione inversa, ovvero la (6.4) implica la continuità di  $f$ : si veda il teorema ponte).

Segue dalle proprietà dei limiti delle funzioni elementari che le funzioni trigonometriche  $\sin x$  e  $\cos x$  e la funzione esponenziale  $a^x$  ( $a > 0$ ) sono continue in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ ; sono inoltre continue in ogni punto del loro dominio naturale le funzioni  $\log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ),  $\operatorname{tg} x$  e  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ).

## ESEMPIO 6.1

La funzione parte intera,  $f(x) = [x]$  per  $x \in \mathbb{R}$ , è continua in ogni punto  $x \notin \mathbb{Z}$  (si veda la Figura 2.8); la funzione segno,  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  per  $x \in \mathbb{R}$ , è continua per  $x \neq 0$  (si veda la Figura 2.9).

## ESEMPIO 6.2

## DEFINIZIONE 6.2

Una funzione si dice **continua da destra** (**da sinistra**) in un punto  $x_0 \in \operatorname{dom} f$  di accumulazione destro (sinistro) per il suo dominio se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \right).$$

Ovviamente, se  $x_0 \in \operatorname{dom} f$  è punto di accumulazione destro e sinistro per  $\operatorname{dom} f$ , allora

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow f \text{ è continua da destra e da sinistra in } x_0.$$

Tornando all'esempio precedente, la funzione parte intera è continua da destra, ma non da sinistra: infatti in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{Z}$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [x] = [x_0] \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} [x] = [x_0] - 1 \neq [x_0] \quad \text{se } x_0 \in \mathbb{Z}.$$

Invece la funzione segno non è continua da destra né da sinistra in  $x = 0$ .

## ESEMPIO 6.3

Dalla definizione di continuità e dalle proprietà elementari dei limiti segue che se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0 \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ , allora sono continue in  $x_0$  anche le funzioni

$$f \pm g, \quad cf \quad (c \in \mathbb{R}), \quad f \cdot g, \quad f/g \quad (\text{se } g(x_0) \neq 0), \quad |f|, \quad f_+, \quad f_-. \quad (6.5)$$

Segue dalla (6.5) che i polinomi, le funzioni razionali

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}, \quad \operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : b_m x^m + \dots + b_0 \neq 0\},$$

e le funzioni iperboliche ( $\sinh x$  e  $\cosh x$ ) sono continue in ogni punto del loro dominio.

## ESEMPIO 6.4

Ovviamente continua a valere la **proprietà della permanenza del segno**.



**TEOREMA 6.3**

Se  $f: \mathbb{R} \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0 \in X$  e  $f(x_0) > 0$  ( $< 0$ ), allora esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  tale che  $f(x) > 0$  ( $< 0$ ) per ogni  $x \in \mathcal{U} \cap X$ .

Segue dal Teorema 3.22 che anche la composizione di due funzioni continue è continua.

**TEOREMA 6.4**

Siano  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: Y \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è continua in  $x_0 \in X$  e  $g$  è continua in  $f(x_0) \in Y$ , allora la funzione composta  $g \circ f: x \mapsto g(f(x))$  è continua in  $x_0$ .

Segue dal Teorema 6.4 che le funzioni massimo e minimo,

$$\max\{f, g\}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad \min\{f, g\}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{f(x), g(x)\},$$

sono continue (si veda Figura 6.1).

Concludiamo il paragrafo con il concetto di *continuità in un insieme*.

**DEFINIZIONE 6.5**

Sia  $f: \mathbb{R} \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice **continua in  $X$**  se  $f$  è continua in ogni  $x_0 \in X$  e si scrive

$$f \in C(X) \quad \text{oppure} \quad f \in C^0(X).$$

Segue dagli Esempi 6.1 e 6.4 che tutte le funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni razionali, trigonometriche e iperboliche) sono continue nel loro dominio naturale.

**ESEMPIO 6.5**

Dalla (6.5) e dal Teorema 6.4 segue che la funzione

$$f(x) = \sin \sqrt{\frac{x}{x^2 - 2}}$$

è continua nel suo dominio naturale  $\text{dom } f = (-\sqrt{2}, 0] \cup (\sqrt{2}, \infty)$ , ovvero  $f \in C(\text{dom } f)$ . Si noti in particolare che  $f$  è continua in  $x = 0$ : siccome 0 è punto di accumulazione sinistro per il dominio, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0).$$

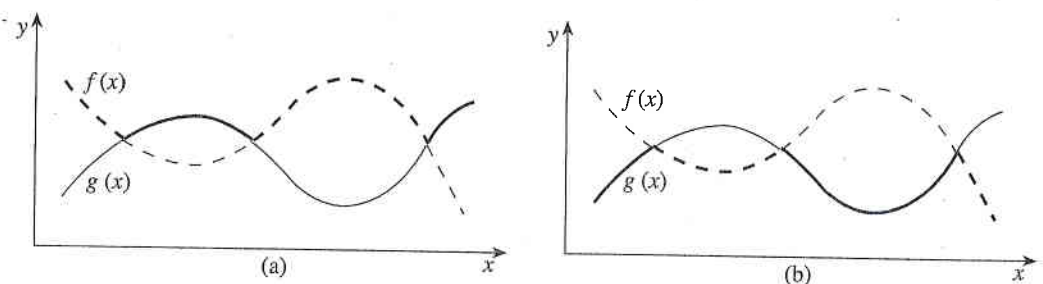
**ESEMPIO 6.6**

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} px - 4 & \text{se } x \geq 2 \\ 3x & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad (p \in \mathbb{R})$$

è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ , continua da destra in  $x = 2$ , continua in  $x = 2$  se e solo se  $2p - 4 = 3 \cdot 2$ , ovvero se  $p = 5$ .

**Figura 6.1** In colore, le funzioni  $\max\{f, g\}(x)$  (a) e  $\min\{f, g\}(x)$  (b).





Dire per quali  $p \in \mathbb{R}$  le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio:

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin(x+p) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} px - 2 & \text{se } x \geq -1 \\ 3x^2 - 4x + 5 & \text{se } x < -1; \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ \min\{p, x^4 + 2\} & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

## ESERCIZIO 6.1

## 6.2 Punti di discontinuità

## DEFINIZIONE 6.6

Siano  $f: \mathbb{R} \supset X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in X$ . Se  $f$  non è continua in  $x_0$ ,  $x_0$  si dice **punto di discontinuità** di  $f$ , e in tal caso si dice che:

(i)  $f$  ha una **discontinuità eliminabile** in  $x_0$  se esiste finito  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0);$$

(ii)  $f$  ha una **discontinuità di prima specie** o **di salto** in  $x_0$  se esistono finiti  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x);$$

(iii)  $f$  ha una **discontinuità di seconda specie** in  $x_0$  negli altri casi.

Alcuni casi di discontinuità sono illustrati in Figura 6.2. Nel caso (ii) la quantità

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

si chiama **salto di  $f$**  in  $x_0$  e  $x_0$  si chiama **punto di salto di  $f$** . Se  $I$  è un intervallo limitato, una funzione  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua a tratti** in  $I$  se ha  $N$  punti di salto  $x_1, \dots, x_N \in I$  ed è continua in  $I \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$ .

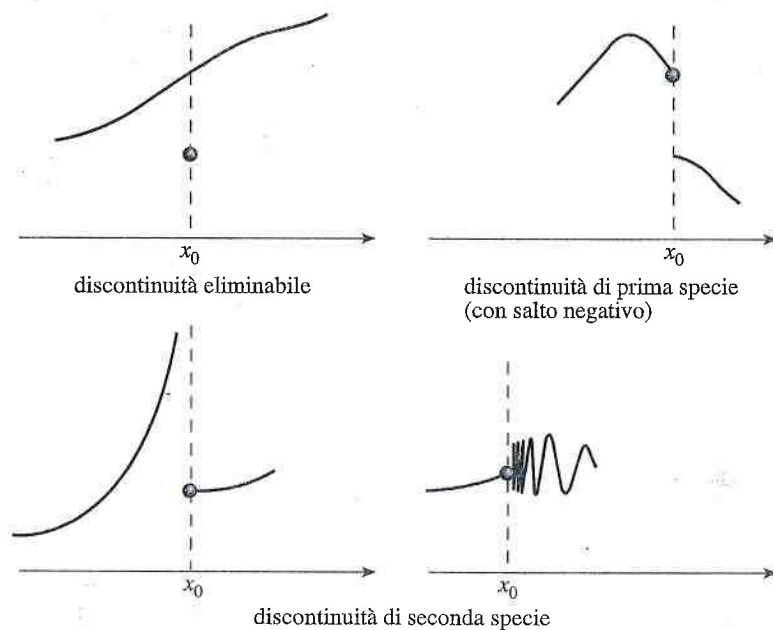
Salto di  $f$ 

Figura 6.2 Esempi di discontinuità.

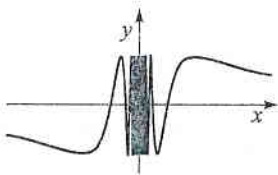
**ESEMPIO 6.7**

Figura 6.3

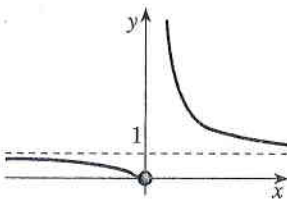


Figura 6.4

Le funzioni  $g$  e  $h$  dell'Esempio 6.7c

a) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità eliminabile in  $x = 0$ : si potrebbe "eliminare" la discontinuità in 0 cambiando il solo valore di  $f$  in  $x = 0$ :  $f(0) = 1$  anziché  $f(0) = 0$ .

b) La funzione  $x \mapsto \operatorname{sgn} x$  ha una discontinuità di prima specie in  $x = 0$ , mentre le funzioni  $x \mapsto [x]$  e  $x \mapsto x - [x]$  presentano una discontinuità di prima specie in ogni  $n \in \mathbb{Z}$  (si noti che tali funzioni sono continue da destra ma non da sinistra in  $n \in \mathbb{Z}$ ; si veda l'Esempio 2.9 e l'Esempio 2.11). Anche la funzione dell'Esempio 6.6 ha una discontinuità di prima specie in  $x = 2$  se  $p \neq 5$ .

c) La funzione

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di seconda specie in  $x = 0$ , così come la funzione (si veda Figura 6.4)

$$h(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(si noti che  $e^{1/x} \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  e  $e^{1/x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0^-$ , ovvero  $h$  è continua da sinistra in  $x = 0$ ).



La funzione  $x \mapsto \frac{1}{x}$  non è discontinua in 0: poiché 0 non è un punto del dominio, non ha senso parlare di (dis)continuità di  $f$  in 0.

**ESEMPIO 6.8**

Funzione di Dirichlet

La funzione di Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ha, per la proprietà di densità in  $\mathbb{R}$  dei numeri razionali e dei numeri irrazionali (si vedano le (1.4) e (1.5)), una discontinuità di seconda specie in ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

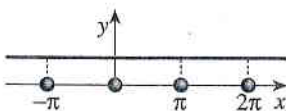
**ESEMPIO 6.9**

Figura 6.5

La funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è continua nei punti  $x$  tali che  $\sin x \neq 0$ , ovvero  $x \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), e ha una discontinuità eliminabile in  $x = k\pi$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$  (si veda Figura 6.5).

Le funzioni *monotone* definite in un intervallo non possono avere discontinuità di seconda specie.

**TEOREMA 6.7**

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotona in  $I$ . Allora  $f$  può avere punti di discontinuità solo di prima specie (o eliminabili, se sono agli estremi dell'intervallo).

**Dimostrazione**

Per l'esistenza di limiti di funzioni monotone (si veda il Teorema 3.21), per ogni punto *interno*  $x_0$  di  $I$  esistono finiti il limite destro e il limite sinistro di  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ ; se coincidono,  $f$  è continua in  $x_0$ , se invece sono diversi,  $f$  ha una disconti-

nuità di prima specie. Nel caso in cui  $f$  sia definita in un estremo di  $I$ , per esempio nell'estremo destro  $b$ , allora esiste finito  $\ell = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ . Se  $\ell = f(b)$  la funzione è continua in  $b$ , altrimenti ha una discontinuità eliminabile in  $b$ .

Non è difficile provare che, *nel caso di una funzione monotona, i punti di discontinuità sono al più un'infinità numerabile* (si veda l'Esempio 2.21).

## ESERCIZIO 6.2

Determinare i punti di discontinuità delle seguenti funzioni e stabilirne la natura:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 1 & \text{se } x = \pm 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\log x}{x^2-1}\right) & \text{se } x > 0, x \neq 1 \text{ (al variare di } a \in \mathbb{R}\text{);} \\ a & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 24x^2 - ax - 9 & \text{se } x > 2 \\ 3x - 5 & \text{se } x \leq 2 \end{cases} \text{ (al variare di } a \in \mathbb{R}\text{);}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{3}{x-1} \cos\left(\frac{1}{\log x}\right);$$

$$\text{e) } f(x) = e^{\frac{1}{x}} \sin x;$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

## 6.3 Teorema degli zeri

Il risultato che dimostreremo in questo paragrafo è alla base del metodo grafico, che abbiamo descritto in modo intuitivo nel Capitolo 2 nello studio delle (dis)equazioni.

Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Un punto  $x_0 \in X$  si dice **zero** di  $f$  se  $f(x_0) = 0$ . Il prossimo teorema afferma che se  $f \in C([a, b])$  cambia segno agli estremi dell'intervallo, allora ha almeno uno zero nell'intervallo  $[a, b]$ . La dimostrazione si basa sul *metodo di bisezione* che abbiamo introdotto nel filo rosso: si tratta di un metodo *costruttivo*, che fornisce anche valori approssimati dello zero.

### TEOREMA 6.8 Teorema degli zeri

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $f(a)f(b) < 0$  (ovvero:  $f(a)$  e  $f(b)$  non sono nulli e hanno segno opposto). Allora  $f$  ammette almeno uno zero in  $(a, b)$ : esiste  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

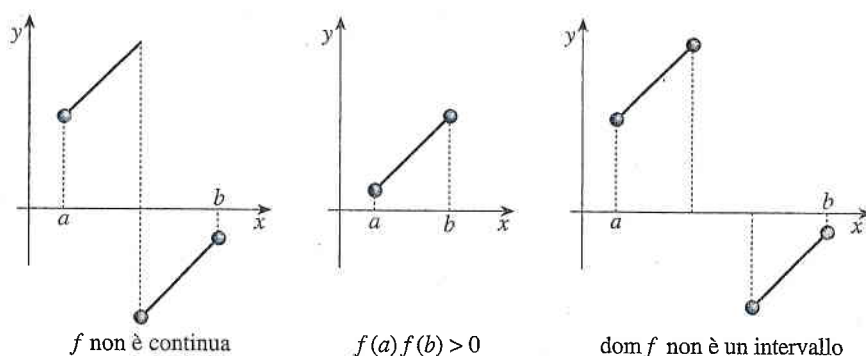
Le ipotesi del teorema degli zeri sono essenziali (o, come spesso si dice, ottimali), come mostrano i controesempi riportati in Figura 6.6.

#### Dimostrazione

Supponiamo (a meno di scambiare  $f$  con  $-f$ ) che  $f(a) < 0$  e  $f(b) > 0$ . Poniamo  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  e  $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ . Se  $f(c_0) = 0$  abbiamo finito; se  $f(c_0) < 0$ , poniamo  $a_1 = c_0$  e  $b_1 = b_0$ ; se  $f(c_0) > 0$  poniamo  $a_1 = a_0$  e  $b_1 = c_0$ . In questo modo



**Figura 6.6**  
Controesempi al teorema degli zeri.



$f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$  e possiamo iterare il procedimento: al passo  $n$ , dato l'intervallo  $[a_n, b_n]$ , poniamo  $c_n = (a_n + b_n)/2$  e scegliamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} = c_n & \quad \text{e} \quad b_{n+1} = b_n & \text{se } f(c_n) < 0, \\ a_{n+1} = a_n & \quad \text{e} \quad b_{n+1} = c_n & \text{se } f(c_n) > 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

mentre se  $f(c_n) = 0$  abbiamo finito. Segue dalla (6.6) che

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \quad \text{per ogni } n; \quad (6.7)$$

osserviamo inoltre che

$$b_{n+1} - a_{n+1} \stackrel{(6.6)}{=} \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \dots = 2^{-n-1}(b - a) \quad \text{per ogni } n. \quad (6.8)$$

La (6.7) afferma che le successioni  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  sono monotone e limitate (da  $b$  e  $a$ , rispettivamente), quindi ammettono limite finito:  $a_n \rightarrow x_0, b_n \rightarrow x_1$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  nella (6.8) si deduce che  $x_1 = x_0$ :

$$x_1 - x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-n}(b - a) = 0.$$

Resta da provare che  $f(x_0) = 0$ . Poiché  $f$  è continua e  $f(a_n) < 0$  per ogni  $n$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(x_0) \leq 0.$$

Allo stesso modo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(x_1) = f(x_0) \geq 0.$$

Quindi  $0 \leq f(x_0) \leq 0$ , ovvero  $f(x_0) = 0$ , e il teorema è dimostrato.

Il teorema degli zeri si generalizza immediatamente.

#### COROLLARIO 6.9

Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue in  $[a, b]$  e tali che

$$f(a) > g(a) \quad \text{e} \quad f(b) < g(b)$$

oppure

$$f(a) < g(a) \quad \text{e} \quad f(b) > g(b).$$

Allora esiste almeno una soluzione  $y \in (a, b)$  dell'equazione  $f(x) = g(x)$ .

Basta infatti applicare il teorema degli zeri alla funzione continua  $f(x) - g(x)$  per ottenere la tesi (lo studente verifichi che le condizioni del teorema degli zeri sono soddisfatte).

Il prossimo esempio mostra, come annunciato, che il teorema degli zeri e il suo corollario forniscono una base teorica al metodo grafico

Il metodo grafico

ESEMPIO 6.10

Vogliamo determinare intervalli che contengano soluzioni dell'equazione

$$\log|x| = \operatorname{tg} x.$$

Dai grafici di  $\log|x|$  e  $\operatorname{tg} x$  tracciati in Figura 6.7 (si ricordi che  $\operatorname{dom}(\log|x|) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\operatorname{dom}(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R} \setminus \{x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ) si può intuire che ogni intervallo del tipo  $I_k = (\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi + \pi)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) contiene almeno una soluzione dell'equazione; cerchiamo di dimostrarlo.

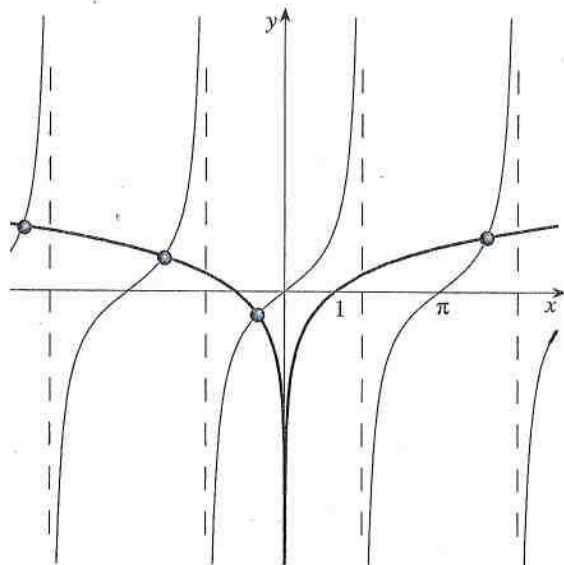


Figura 6.7

Preso  $k \in \mathbb{Z}$ , si osservi che

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2 + k\pi)^+} \operatorname{tg} x = -\infty < \lim_{x \rightarrow (\pi/2 + k\pi)^+} \log|x| < +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2 + k\pi + \pi)^-} \operatorname{tg} x = +\infty > \lim_{x \rightarrow (\pi/2 + k\pi + \pi)^-} \log|x| > -\infty.$$

Quindi, per la definizione di limite, esistono  $\pi/2 + k\pi < a < b < \pi/2 + k\pi + \pi$  tali che

$$\operatorname{tg} a < \log|a| \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} b > \log|b|.$$

Se  $k \neq -1$  (escludiamo cioè l'intervallo  $(-\pi/2, \pi/2)$ ), le funzioni  $\operatorname{tg} x$  e  $\log|x|$  sono continue in  $[a, b]$  e, per il Corollario 6.9, esiste almeno una soluzione  $y \in (a, b)$  dell'equazione. Se  $k = -1$  si può ripetere l'argomento nell'intervallo  $(-\pi/2, 0)$  (anziché  $(-\pi/2, \pi/2)$ ), come suggerito dal grafico.

Il ragionamento seguito nell'esempio precedente porta al seguente risultato.

#### TEOREMA 6.10 Teorema dei valori intermedi

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo (non necessariamente chiuso e limitato) e sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$ . Allora  $f$  assume in  $I$  tutti i valori compresi tra  $\sup_I f$  ( $\leq +\infty$ ) e  $\inf_I f$  ( $\geq -\infty$ ), ovvero

$$\forall y \in (\inf_I f, \sup_I f) \exists x \in I : f(x) = y.$$

**Dimostrazione**

Sia  $\inf_I f < y < \sup_I f$ . Per la definizione di estremo superiore e inferiore esistono  $a, b \in I$  tali che  $f(a) < y < f(b)$ . Ora il risultato segue dal teorema degli zeri applicato alla funzione  $f(x) - y$  nell'intervallo  $[a, b]$  (se  $a < b$ ) o  $[b, a]$  (se  $a > b$ ).

Un altro modo per formulare il risultato contenuto nel Teorema 6.10 è il seguente.

**COROLLARIO 6.11**

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $I$ . Allora l'immagine  $f(I)$  è un intervallo.

**Monotonia e invertibilità**

Un'ulteriore applicazione del teorema degli zeri riguarda la relazione tra monotonia e invertibilità. Come già osservato nel Capitolo 2 (Teorema 2.16), una funzione strettamente monotona è invertibile, ma in generale il viceversa è falso. Per esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

è invertibile e non monotona in  $[0, 2]$  (si noti che  $f$  non è continua in  $[0, 2]$ ). Se però  $f$  è continua in un intervallo, allora anche il viceversa è vero.

**TEOREMA 6.12**

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e invertibile in  $I$ . Allora  $f$  è strettamente monotona in  $I$ .

**Dimostrazione**

Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia monotona in  $I$ , cioè che esistano  $x, y, z \in I$  tali che  $x < y < z$  e, per esempio,  $f(y) > f(x) > f(z)$ , come visualizzato in Figura 6.8 (gli altri casi si trattano in modo del tutto analogo). Per il Corollario 6.9 applicato nell'intervallo  $(y, z)$ , esiste  $x_0 \in (y, z)$  tale che  $f(x_0) = f(x)$ . Ma allora  $f$  non è iniettiva, una contraddizione.

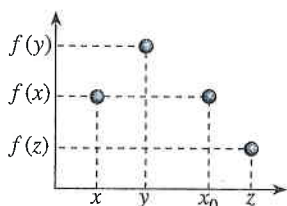


Figura 6.8

In conclusione,

$$\text{se } f \text{ è continua e definita in un intervallo, allora} \\ \text{invertibilità di } f \Leftrightarrow \text{stretta monotonia di } f \quad (6.9)$$

**ESERCIZIO 6.3**

Dire se le seguenti equazioni hanno almeno una soluzione in  $I$ :

- $\log x + \cosh(2x) = 0, \quad I = (0, +\infty);$
- $1 - 2^{-x} = \frac{a}{x}, \quad I = (2, +\infty), \quad \text{al variare di } a \in \mathbb{R};$
- $x^6 + 2x^5 - 3x^2 - x = 1 - \sqrt{2}, \quad I = \mathbb{R}.$

**6.4 Continuità delle funzioni inverse**

La funzione inversa di una funzione continua e invertibile non è sempre continua. Vediamolo attraverso un esempio.

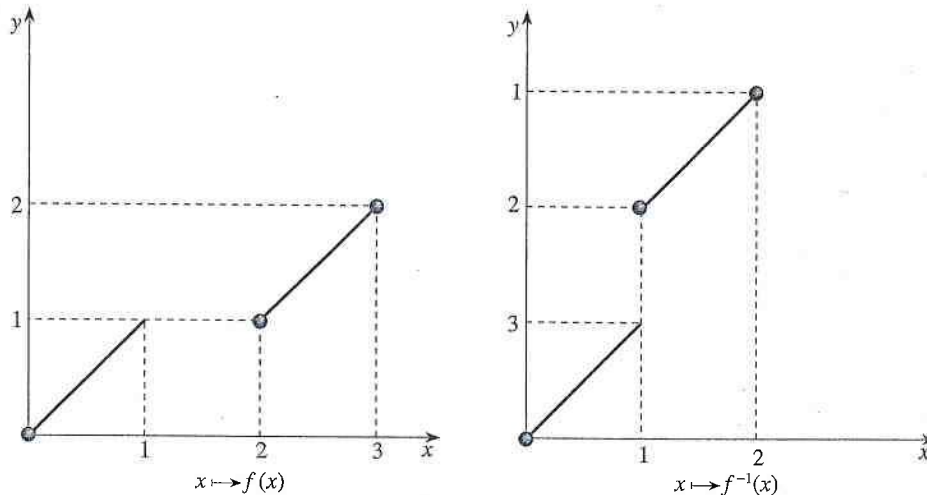


Sia

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Allora  $f$  è iniettiva e continua nel suo dominio  $[0, 1) \cup [2, 3]$ , ma la sua inversa  $f^{-1}$  non è continua da sinistra in 1, si veda Figura 6.9.

## ESEMPIO 6.11



**Figura 6.9** La funzione dell'Esempio 6.11 e la sua inversa.

Infatti, per garantire la continuità della funzione inversa di una funzione continua e invertibile, servono opportune condizioni sul suo dominio.

**TEOREMA 6.13** Continuità della funzione inversa

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$ , sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua e invertibile in  $X$  e sia  $f^{-1} : f(X) \rightarrow \mathbb{R}$  l'inversa di  $f$  in  $X$ . Se

$X$  è un **intervallo** oppure  $X$  è un **insieme compatto**

allora  $f^{-1}$  è continua nel suo dominio  $f(X)$ .

Ricordiamo che  $X \subseteq \mathbb{R}$  è compatto se e solo se  $X$  è chiuso e limitato.

**Dimostrazione**

Consideriamo il caso in cui  $X$  è un intervallo, e rimandiamo il caso in cui  $X$  è un compatto al sito internet). Per il Corollario 6.11 e il Teorema 6.12,  $f$  è strettamente monotona in  $X$  e  $f(X)$  è un intervallo. Allora anche l'inversa  $f^{-1}$  è una funzione strettamente monotona definita sull'intervallo  $f(X)$ . Per il Teorema 6.7, gli eventuali punti di discontinuità di  $f^{-1}$  sono di salto. Ma in tal caso la sua immagine, ovvero  $X$ , non potrebbe essere un intervallo.

**Dimostrazione**

Per il Teorema 6.13, le funzioni  $x \mapsto \arcsin x$ ,  $x \mapsto \arccos x$  e  $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ , essendo definite come funzioni inverse di funzioni continue in un intervallo, sono continue nel loro dominio.

**ESEMPIO 6.12**

Dire per quali  $a$  le seguenti funzioni sono invertibili nei loro domini e studiare per tali valori di  $a$  la continuità della funzione inversa nel suo dominio:

**ESERCIZIO 6.4**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > a \end{cases} \quad (a > 0); \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 4\operatorname{arctg}(2x^2) & \text{se } x > 0 \\ x + a & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

**Guida**

Il paragrafo tratta il Teorema di Weierstrass prima su intervalli e poi su un insieme compatto. Chi non possiede la nozione di insieme compatto può non affrontare la seconda parte.

### 6.5 Funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato

Abbiamo ripetutamente osservato che estremo superiore e massimo di una funzione sono concetti distinti; in particolare, l'estremo superiore esiste sempre (eventualmente  $+\infty$ ) mentre il massimo può non esistere. Il *teorema di Weierstrass*, un risultato centrale, assicura l'esistenza del massimo e del minimo se  $f$  è continua in un intervallo chiuso e limitato:

**TEOREMA 6.14** Teorema di Weierstrass per intervalli chiusi e limitati

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$ . Allora

- (i) esistono  $M := \max_{[a,b]} f$  e  $m := \min_{[a,b]} f$ ;
- (ii)  $f([a, b]) = [m, M]$ .

Diamo subito alcuni *controesempi* per sottolineare che le tre condizioni del teorema, ovvero la *continuità* della  $f$  e la *chiusura* e la *limitatezza* dell'intervallo, sono essenziali.

**ESEMPIO 6.13**

a) (intervallo non chiuso)

Sia  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \frac{1}{x}$ . Allora  $f$  è continua ma non limitata e non esiste  $\max_{(0,1]} f$ .

Sia  $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g : x \mapsto 2x$ . Allora  $g$  è continua e limitata ma non esiste  $\min_{(0,1]} g$ .

b) (intervallo non limitato)

Sia  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g : x \mapsto 2x$ . Allora  $g$  è continua ma non è limitata e non esiste  $\max g$ .

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto \arctg x$ . Allora  $f$  è continua e limitata ma non esistono  $\max_{\mathbb{R}} f$  e  $\min_{\mathbb{R}} f$ .

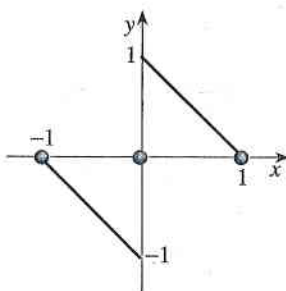
c) (funzione non continua)

Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f : x \mapsto -x + \operatorname{sgn} x$  (si veda Figura 6.10). Allora  $f$  è limitata ma non esistono  $\max_{[-1,1]} f, \min_{[-1,1]} f$ .

Sia  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora  $g$  non è limitata superiormente in  $[0, 1]$  e quindi non esiste  $\max_{[0,1]} g$ .



**Figura 6.10**  
 $x \mapsto -x + \operatorname{sgn} x$ .

In effetti il Teorema 6.14 è un caso particolare di un risultato molto più generale, in cui al posto di un intervallo chiuso e limitato si considera un *insieme compatto*. Ricordiamo (si veda Paragrafo 5.6) che un insieme  $K$  è compatto se e solo se da ogni successione a valori in  $K$  si può estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento di  $K$ , e che in  $\mathbb{R}$  gli insiemi compatti sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati (ma non necessariamente intervalli!).

**TEOREMA 6.15** Teorema di Weierstrass per insiemi compatti

Sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $K$  compatto. Allora  $f(K)$  è compatto; in particolare, esistono  $\max_K f$  e  $\min_K f$ .

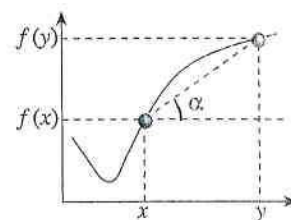
La dimostrazione, nella sua semplicità, mette in evidenza la potenza e la naturalezza del concetto di insieme compatto.



**Dimostrazione**

Consideriamo una qualunque successione  $\{y_n\}$  a valori in  $f(K)$ . Sia  $x_n \in K$  tale che  $f(x_n) = y_n$ . Allora  $\{x_n\}$  è una successione a valori nell'insieme compatto  $K$ , quindi esiste una sottosuccessione  $\{x_{k_n}\}$  convergente ad  $x \in K$ . Essendo  $f$  continua in  $x$ , per la (6.4)  $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \rightarrow f(x) \in f(K)$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Abbiamo quindi trovato una sottosuccessione di  $\{y_n\}$  convergente a un elemento  $f(x)$  di  $f(K)$ . Per l'arbitrarietà della successione  $\{y_n\}$ , l'insieme  $f(K)$  è compatto.

Poiché  $f(K)$  è compatto, è chiuso e limitato: per il Teorema 3.11 esistono il massimo e il minimo.



**Figura 6.11** Rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \operatorname{tg} \alpha.$$

## 6.6 Continuità lipschitziana, continuità uniforme

Il *rapporto incrementale*  $P(x, y)$  di una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$P(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad x, y \in X, x \neq y,$$

rappresenta il *coefficiente angolare* del segmento congiungente i punti  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  del grafico di  $f$  (si veda Figura 6.11). Le funzioni  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  il cui rapporto incrementale è limitato indipendentemente dalla scelta di  $x \neq y$  meritano un nome.

**DEFINIZIONE 6.16**

Una funzione  $f : \mathbb{R} \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **lipschitziana** in  $X$  se esiste una costante  $L \geq 0$  (detta *costante di Lipschitz*) tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in X. \quad (6.10)$$

Chiaramente, una funzione lipschitziana è continua: se  $L$  è la costante di Lipschitz, allora per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $x_0 \in X$  risulta  $|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \varepsilon$  se  $|x - x_0| < \delta := \frac{\varepsilon}{L}$ . Si noti che per una funzione lipschitziana la scelta di  $\delta$  dipende da  $\varepsilon$  ma non da  $x_0$ .

- a) Sono ovviamente lipschitziane le funzioni lineari e la funzione  $g(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Anche la funzione  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , è lipschitziana (con  $L = 1$ ):

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq |x - y|.$$

- b) La funzione  $f(x) = x^2$  è lipschitziana nell'intervallo  $(-a, a)$  con  $L = 2a$ : infatti  $|x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2a|x - y|$  per ogni  $x, y \in (-a, a)$ . Si noti che la stessa funzione non è lipschitziana in  $\mathbb{R}$  (come si può facilmente intuire dal suo grafico, si veda Figura 6.12): infatti

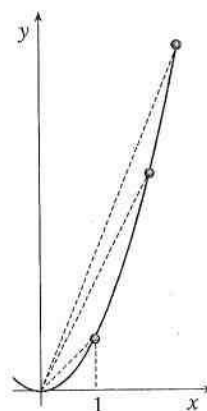
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x \quad \text{per ogni } x \neq 0,$$

quindi il rapporto incrementale di  $f$  in  $x$  e  $0$  tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

La funzione  $x \mapsto \sqrt{x}$  non è lipschitziana: il suo rapporto incrementale in  $x$  e  $0$  vale  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  (si veda Figura 6.13).

**Guida**

La nozione di lipschitzianità si utilizza nel Teorema di Cauchy per EDO (ma il concetto è ripetuto). La nozione di continuità uniforme si utilizza per dimostrare l'integrabilità di funzioni continue (Teoremi 8.6, 14.14 e 18.7), il passaggio al limite sotto integrale (Teorema 11.9) e la rettificabilità di curve regolari (Teorema 12.10).

**ESEMPIO 6.14**

**Figura 6.12**  $x \mapsto x^2$ .

**ESEMPIO 6.15**



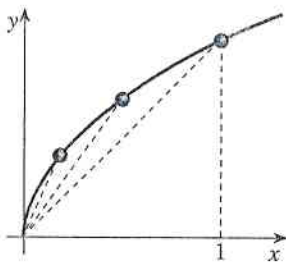


Figura 6.13  
 $x \mapsto \sqrt{x}$ .

Pur non essendo lipschitziana in  $[0, 1]$ , la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  verifica comunque la proprietà osservata in precedenza: “la scelta di  $\delta$  nella definizione di continuità in un punto  $x_0$  non dipende da  $x_0$ ”. A questo scopo dimostriamo prima che

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} \quad \text{per ogni } x, y \geq 0. \quad (6.11)$$

Infatti, poiché  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ ,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \sqrt{|x-y|} \leq \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \sqrt{|x-y|}$$

dove abbiamo utilizzato che  $|x-y| \leq |x| + |-y| = x+y$  se  $x, y \geq 0$  (per la disuguaglianza triangolare (1.8)). Rimane da dimostrare che  $\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq 1$ , ovvero, elevando al quadrato, che

$$\frac{x+y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \leq 1.$$

Ma  $\frac{x+y}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \frac{x+y}{x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y}} \leq \frac{x+y}{x+y} = 1$ , quindi abbiamo dimostrato la (6.11).

Siano ora  $x_0 \geq 0$  e  $\varepsilon > 0$ . Per la (6.11), con  $y = x_0$ ,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon \quad \text{se } x \geq 0 \quad \text{e} \quad |x - x_0| < \delta := \varepsilon^2 \quad (6.12)$$

che mostra l’asserita “indipendenza di  $\delta$  dal punto  $x_0$ ” per la funzione  $x \mapsto \sqrt{x}$ . Tale proprietà è formalizzata nel concetto di *uniforme continuità*.

#### DEFINIZIONE 6.17

Una funzione  $f : \mathbb{R} \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **uniformemente continua in  $X$**  se

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x, y \in X, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (6.13)$$

Scegliendo  $\delta = L^{-1}\varepsilon$ , dove  $L$  indica la costante di Lipschitz, si ottiene subito che le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue. Per esempio  $x \mapsto x^2$  è uniformemente continua in  $(-a, a)$  (si veda l’Esempio 6.14). D’altra parte, per la (6.12), anche  $x \mapsto \sqrt{x}$  è uniformemente continua in  $[0, +\infty)$  pur non essendo lipschitziana in  $[0, +\infty)$ .

Confrontiamo la definizione di continuità uniforme in  $X$  con quella di continuità:  $f$  è continua in  $X$  se  $f$  è continua in ogni  $y \in X$ , ovvero se

per ogni  $\varepsilon > 0$  e per ogni  $y \in X$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$x \in X, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nel caso di continuità uniforme in  $X$ ,  $\delta$  dipende soltanto da  $\varepsilon$ , cioè  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , mentre nel caso di continuità (semplice) in  $X$ ,  $\delta$  dipende in generale sia da  $\varepsilon$  sia dal punto  $y \in X$ , cioè  $\delta = \delta(\varepsilon, y)$ . Perciò la proprietà di continuità uniforme è più forte di quella di continuità:

$$f \text{ è uniformemente continua in } X \Rightarrow f \in C(X).$$

Il viceversa non è sempre vero: una funzione continua in  $X$  non è sempre uniformemente continua in  $X$ , come evidenziato dal seguente esempio.

L'Esempio 6.14 suggerisce di considerare la funzione  $f(x) = x^2$ , che ovviamente è continua in  $\mathbb{R}$ . Proviamo che non è uniformemente continua scegliendo nella definizione  $\varepsilon = 1$ : se per assurdo esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|f(x) - f(y)| < 1 \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta,$$

scegliendo  $y = x - \delta/2$  si ottiene

$$\left| f(x) - f\left(x - \frac{\delta}{2}\right) \right| = \left| x^2 - \left(x - \frac{\delta}{2}\right)^2 \right| = \left| 2x - \frac{\delta}{2} \right| \frac{\delta}{2} < 1$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Si giunge così a un assurdo per  $x$  sufficientemente grande.

Anche funzioni continue e limitate possono non essere uniformemente continue.

La funzione

$$f(x) = \sin(x^4)$$

il cui grafico è riportato nella Figura 6.14, è continua e limitata in  $[0, +\infty)$  ma non è ivi uniformemente continua (lo studente controlli).

In generale, stabilire se una funzione continua su un insieme è anche uniformemente continua può essere piuttosto complesso. Pur non entrando nei dettagli di una trattazione sistematica, enunciamo alcuni risultati.

Il primo, di fondamentale importanza, afferma che negli insiemi compatti le proprietà di continuità e uniforme continuità sono equivalenti.

#### TEOREMA 6.18 Teorema di Heine-Cantor

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}$  compatto e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f$  è uniformemente continua in  $K$ .

Prima di commentare e dimostrare il teorema di Heine-Cantor, elenchiamo alcune condizioni necessarie per la continuità uniforme.

#### TEOREMA 6.19

Sia  $f : \mathbb{R} \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua in  $X$ . Allora  $f$  è limitata in ogni sottoinsieme limitato  $A \subseteq X$  (in particolare, se  $X$  è limitato allora  $f$  è limitata in  $X$ ).

In particolare, il Teorema 6.19 implica che una funzione che ha asintoti verticali non è uniformemente continua. Per esempio, la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  non è uniformemente continua in  $(0, 1)$ .

Il prossimo risultato fornisce una stima sull'eventuale comportamento all'infinito di una funzione uniformemente continua.

#### TEOREMA 6.20

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente continua in  $X$ . Allora esistono  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  tali che

$$|f(x)| \leq \alpha|x| + \beta \quad \text{per ogni } x \in X.$$

In particolare, una funzione definita in  $(a, +\infty)$  ( $(-\infty, a)$ ) e ivi uniformemente continua non può essere un infinito di ordine superiore a  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ). Ritroviamo così quanto già stabilito per  $f(x) = x^2$  in  $\mathbb{R}$ . Per questa ragione, neanche la funzione  $g(x) = x \log x$  è uniformemente continua in  $(1, +\infty)$ .

#### ESEMPIO 6.16

#### ESEMPIO 6.17

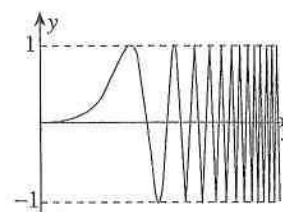


Figura 6.14  
 $x \mapsto \sin(x^4)$ ,  $x \geq 0$ .

Dimostrazione

Dimostrazione

Si noti che, come mostra l'Esempio 6.17, entrambi i teoremi forniscono condizioni solo necessarie.

Il teorema di Heine-Cantor mette ulteriormente in evidenza il ruolo centrale giocato dal concetto di compattezza nell'analisi matematica. Infatti il teorema è falso per insiemi non compatti: la funzione  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$  è continua in  $(0, +\infty)$  ma non è uniformemente continua né in  $(0, 1]$  (avendo  $f$  un asintoto verticale in  $x = 0$ ) né in  $[1, +\infty)$  (essendo  $f$  un infinito di ordine superiore a  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ ).

Nel Capitolo 8 vedremo un esempio dell'importanza del teorema di Heine-Cantor nella teoria del calcolo integrale. Riportiamo la sua dimostrazione perché, nella sua semplicità, illustra bene l'utilizzo della definizione di compattezza.

#### Dimostrazione del teorema di Heine-Cantor

Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia uniformemente continua in  $K$ . Questo significa (negando la Definizione 6.17, lo studente verifichi) che esiste un  $\varepsilon_0 > 0$  tale che

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in K : |x_\delta - y_\delta| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0.$$

Scegliendo  $\delta = 1/(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e scrivendo  $x_n$  e  $y_n$  anziché  $x_{1/(n+1)}$  e  $y_{1/(n+1)}$ , si ottengono due successioni  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  a valori in  $K$  tali che

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad \text{e} \quad |x_n - y_n| < 1/(n+1). \quad (6.14)$$

Per la compattezza di  $K$ , si può estrarre da  $\{x_n\}$  una sottosuccessione  $\{x_{k_n}\}$  convergente a un punto  $x \in K$ :  $x_{k_n} \rightarrow x$  per  $n \rightarrow +\infty$ . In effetti anche  $y_{k_n} \rightarrow x$  per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} |y_{k_n} - x| &= |(y_{k_n} - x_{k_n}) + (x_{k_n} - x)| \leq |y_{k_n} - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| \\ &< \frac{1}{n+1} + |x_{k_n} - x| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Per la continuità di  $f$  nel punto  $x$ ,  $f(x_{k_n}) \rightarrow f(x)$  e  $f(y_{k_n}) \rightarrow f(x)$  per  $n \rightarrow +\infty$ , quindi  $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Ciò contraddice la (6.14) e dimostra il teorema.



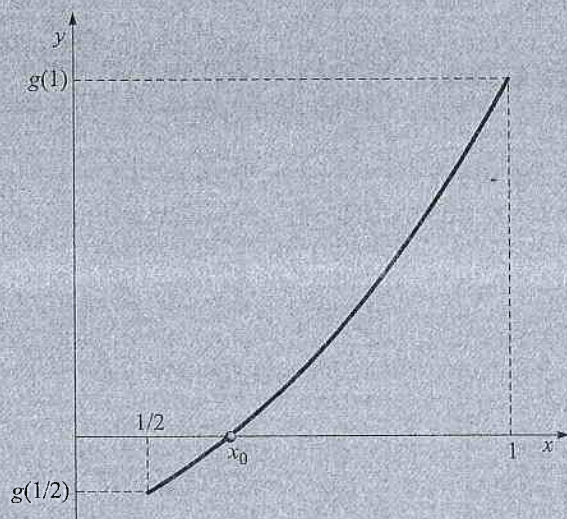
## FILO ROSSO Il metodo di Newton

In questo capitolo svilupperemo il *calcolo differenziale*, lo strumento per eccellenza per lo studio qualitativo e quantitativo del grafico di una funzione. Nell'Esempio 7.27 vedremo come utilizzarlo per ottenere informazioni più precise sul problema posto nel Filo rosso del Capitolo 2: trovare il minimo in  $\mathbb{R}$  del potenziale

$$f(x) = x^6 + 16(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1).$$

Vedremo in particolare che esiste un unico punto  $x_0$  di minimo assoluto; inoltre  $x_0 \in (1/2, 1)$ ,  $f(x_0) \in (0, 1)$ , e  $x_0$  è l'unico zero della *derivata* di  $f$  nell'intervallo  $(1/2, 1)$ , cioè del polinomio

$$g(x) = 6x^5 + 32(2x^3 + 3x^2 - x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Nel Filo rosso del Capitolo 6 abbiamo introdotto un primo *algoritmo*, basato sul metodo di bisezione e sulla continuità di  $g$ , per approssimare  $x_0$ . Vediamo adesso come la *derivabilità* di  $g$  ci permetta di sviluppare un algoritmo decisamente più veloce, il cosiddetto **metodo di Newton**.

Il punto di partenza è il significato geometrico della derivata di  $g$ ,  $g'(x)$ , nel punto  $x$ :  $g'(x)$  è il

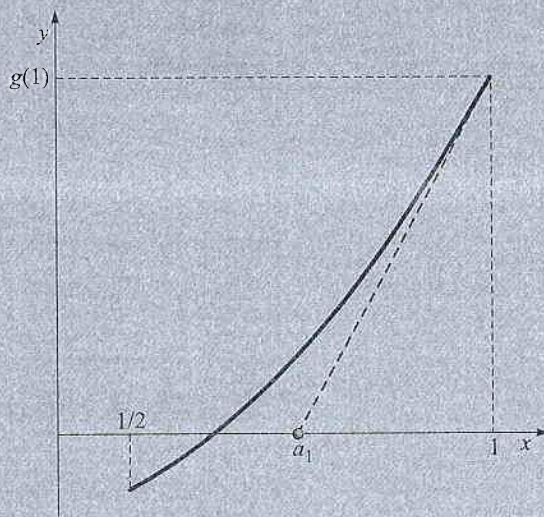
*coefficiente angolare della retta tangente al grafico di  $g$  nel punto  $(x, g(x))$* . Nel corso del capitolo (si veda in particolare l'Esempio 7.27) impareremo ad ottenere una formula per la derivata di  $g$ ,

$$g'(x) = 30x^4 + 32(6x^2 + 6x - 1), \quad x \in \mathbb{R},$$

e, più in generale, a determinare la forma del grafico di  $g$  nell'intervallo  $[1/2, 1]$ : sia  $g$  che  $g'$  sono strettamente crescenti in  $[1/2, 1]$  (in particolare, la retta tangente al grafico di  $g$  in  $(x, g(x))$  è sempre più ripida con l'aumentare di  $x \in [1/2, 1]$ ).

L'algoritmo comincia così: preso  $a_0 = 1$ , la retta tangente al grafico di  $g$  in  $(1, g(1))$  ha equazione  $y = g(1) + g'(1)(x - 1)$ . Sia  $(a_1, 0)$  il punto di intersezione della retta tangente con l'asse orizzontale:

$$a_1 = 1 - \frac{g(1)}{g'(1)} = 1 - \frac{102}{382} = \frac{140}{191} \approx 0.732984.$$



Geometricamente (si veda la figura precedente) è ovvio che  $a_1$  è compreso tra  $x_0$  e  $a_0$ :  $1/2 < x_0 < a_1 < a_0 = 1$ .

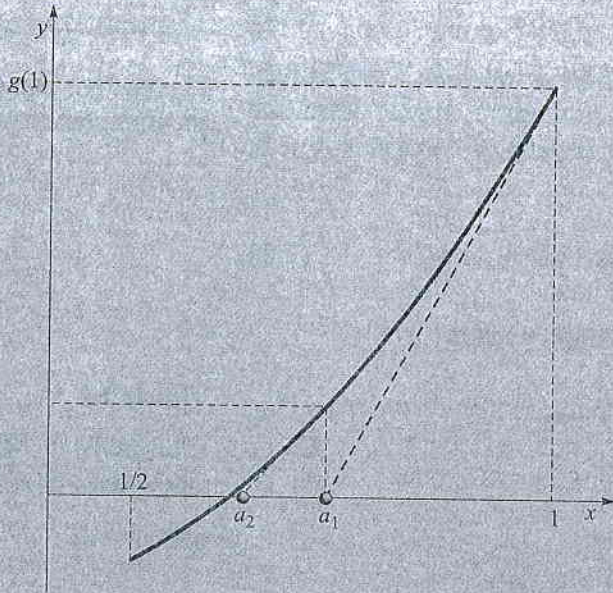
Ora si ricomincia da capo, sostituendo  $a_1$  a  $a_0 = 1$ : si considera la retta tangente al grafico di  $g$  in  $(a_1, g(a_1))$ , di equazione



$$y = g(a_1) + g'(a_1)(x - a_1),$$

e se ne prende il punto di intersezione con l'asse orizzontale,  $(a_2, 0)$  (si veda la Figura seguente):

$$a_2 = a_1 - \frac{g(a_1)}{g'(a_1)} \approx 0.630534 \in (x_0, a_1).$$



Continuando così, si ottiene una successione di approssimazioni  $a_n$  di  $x_0$ , definita ricorsivamente:

$$a_0 = 1,$$

$$a_n = a_{n-1} - \frac{g(a_{n-1})}{g'(a_{n-1})} \in (x_0, a_{n-1})$$

$$\text{per } n = 1, 2, \dots \quad (\star)$$

Poiché la successione è decrescente e inferiormente limitata (da  $x_0$ ), essa è convergente ad  $a$ . Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  nella  $(\star)$ , si ottiene  $a = a - g(a)/g'(a)$ : poiché  $g'(a) > g'(1/2) > 0$ , l'espressione ha senso ed è vera se e solo se  $g(a) = 0$ . Perciò  $a = x_0$ .

Nella seguente tabella sono riportate le stime per eccesso ottenute con il metodo di bisezione (partendo dall'intervallo  $[1/2, 1]$ ) e i valori ottenuti con il metodo di Newton:

n	Bisezione	Newton
	$b_n$	$a_n$
0	1	1
1	0.75	0.732984293193717277486910994764397
2	0.625	0.630533918895683647094962716049036
3	0.625	0.615066258725037604669484123326056
4	0.625	0.614727612991510851742263079384254
5	0.625	0.614727452430377637137332945502295
6	0.617188	0.614727452430341552828306748880187
7	0.617188	0.614727452430341552828306747057659
8	0.615234	0.614727452430341552828306747057659

Confrontandole, si intuisce facilmente che questo algoritmo, detto *metodo di Newton*, è abissalmente "più veloce" di quello di bisezione. Precisare e quantificare questo concetto è compito dell'analisi numerica, con cui si può anche stimare la distanza del "valore approssimato" del minimo assoluto,  $f(a_n)$ , dal valore effettivo,  $f(x_0) = \min f$ .

## 7.1 Retta tangente, derivata

Siano  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in I$ . Cerchiamo di definire il concetto di retta tangente (non verticale) al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ . Innanzitutto si richiede che una tale retta passi per  $(x_0, f(x_0))$ : perciò l'equazione corrispondente si può scrivere nella forma

$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

L'idea è quella di ottimizzare, se possibile, la scelta del coefficiente angolare  $m$  (si veda la Figura 7.1). A tale scopo introduciamo il concetto di *migliore approssimazione lineare* di  $f$  in  $x_0$ .



**DEFINIZIONE 7.1**

La funzione  $x \mapsto f(x_0) + m(x - x_0)$  si dice **migliore approssimazione lineare** di  $f$  in  $x_0$  se

$$f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (7.1)$$

Il concetto è chiaro: la quantità

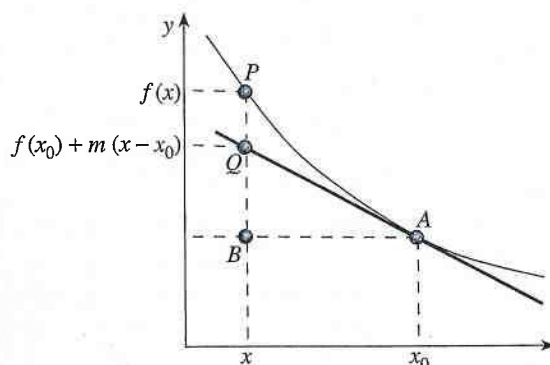
$$E_1(x) := f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0)) \quad (7.2)$$

si interpreta come l'**errore** che si commette approssimando la funzione  $f$  con la funzione lineare  $x \mapsto f(x_0) + m(x - x_0)$ ; tale funzione sarà la migliore approssimazione lineare se l'errore è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al campione  $x - x_0$  per  $x \rightarrow x_0$ :

$$\frac{E_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (7.3)$$

Geometricamente, come illustrato in Figura 7.2, questo significa che

$$\frac{\text{lunghezza di } PQ}{\text{lunghezza di } AB} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$



Graficamente è intuitivo (si veda Figura 7.1) che, se esiste la retta di migliore approssimazione lineare, essa è unica: infatti, prese due di tali rette con coefficienti angolari  $m_1$  e  $m_2$ , sottraendo i corrispondenti errori si ottiene allo stesso tempo

$$\begin{aligned} & [f(x) - (f(x_0) + m_1(x - x_0))] - [f(x) - (f(x_0) + m_2(x - x_0))] \\ &= \begin{cases} (m_2 - m_1)(x - x_0) & \text{(calcolo diretto)} \\ o(x - x_0) & \text{per } x \rightarrow x_0 \text{ (per la (7.1))} \end{cases} \end{aligned}$$

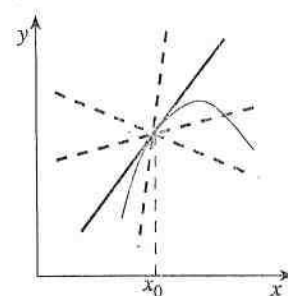
che è possibile solo se  $m_1 = m_2$ . Perciò la migliore approssimazione lineare è unica, ed è quindi naturale chiamare il suo grafico **retta tangente** (non verticale) al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ .

**DEFINIZIONE 7.2**

Siano  $I$  un intervallo,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$  e  $m \in \mathbb{R}$ . La retta di equazione  $y = f(x_0) + m(x - x_0)$  si dice **retta tangente** non verticale al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  se

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (7.4)$$

Per brevità, nel seguito, useremo l'espressione "retta tangente a  $f$  in  $x_0$ " intendendo con questo la retta tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ .



**Figura 7.1** Migliore approssimazione lineare.

**Figura 7.2**

$$\frac{\text{lunghezza di } PQ}{\text{lunghezza di } AB} \rightarrow 0$$

per  $x \rightarrow x_0$ .



Si noti che la (7.3) e la (7.4) sono equivalenti, e possono essere riscritte anche come

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m. \quad (7.5)$$

Perciò la retta tangente non verticale esiste se e solo se esiste finito il limite nella (7.5), detto anche *derivata* di  $f$  in  $x_0$  e indicato con  $f'(x_0)$ .

#### DEFINIZIONE 7.3

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice **derivabile** in  $x_0 \in I$  se esiste finito il limite

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (7.6)$$

In tal caso  $f'(x_0)$  si dice **derivata** di  $f$  in  $x_0$ .

Formalizziamo l'equivalenza tra la (7.4) e la (7.5) nel seguente teorema.

#### TEOREMA 7.4

Siano  $I$  un intervallo,  $x_0 \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se esiste la retta tangente non verticale al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ . In tal caso  $f'(x_0)$  è il coefficiente angolare (o pendenza) della retta tangente, la cui equazione è quindi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (7.7)$$

Dimostrazione

Si osservi che la (7.6) è equivalente a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0, \quad (7.8)$$

ovvero

$$E_1(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (7.9)$$

In effetti, anche dalla stessa (7.6) si comprende facilmente che  $f'(x_0)$  è la pendenza della retta tangente a  $f$  in  $x_0$ : la derivata è il limite del **rapporto incrementale** di  $f$ ,

$$P(x, x_0) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \neq x_0),$$

cioè della pendenza del segmento congiungente i punti  $(x, f(x))$  e  $(x_0, f(x_0))$  (si veda Figura 7.3).

Ponendo  $h = x - x_0$ , si ottiene una formulazione equivalente della (7.6) che utilizzeremo spesso:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (7.10)$$

In questo caso  $h$  rappresenta l'incremento dell'ascissa e  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  l'incremento dell'ordinata (si veda Figura 7.4).

Il rapporto incrementale  $P(x+h, x) = (f(x+h) - f(x))/h$  si dice anche *velocità media* oppure *tasso di variazione media* di  $f$  rispetto a  $x$  tra  $x$  e  $x+h$ . Perciò il suo limite, la derivata di  $f$  in  $x$ , si dice anche *velocità* o *tasso di variazione istantaneo* di  $f$  rispetto a  $x$ . Infatti la derivata è lo strumento per eccellenza per quantificare il cambiamento (istantaneo) di una funzione, e perciò è di importanza fondamentale sia nella matematica sia nelle scienze applicate. Per esempio, se una particella che si muove lungo una retta si trova al tempo  $t$  nel punto  $x = x(t)$ , la derivata  $x'(t)$  della funzione  $t \mapsto x(t)$  è la velocità della particella al tempo  $t$ .

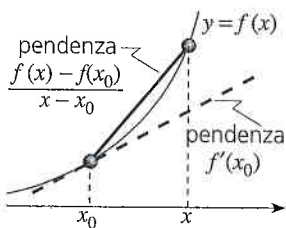


Figura 7.3

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

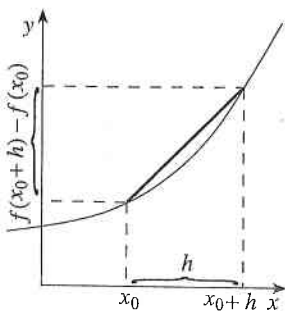


Figura 7.4

Spesso, nelle applicazioni, si usano altre notazioni per la derivata  $x'(t)$ , come

$$\frac{dx}{dt}(t), \quad \frac{dx(t)}{dt}, \quad \frac{d}{dt}x(t), \quad Dx(t), \quad \dot{x}(t).$$

a) Una funzione costante ha derivata nulla:

$$f(x) = c \in \mathbb{R} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

b) Una funzione lineare ha derivata costante: dati  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = ax + b \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = a \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

c) La funzione quadratica  $f(x) = x^2$  ha come derivata  $2x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

d) Per calcolare la derivata di  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ), si osservi che, per la formula del binomio di Newton (si veda la (1.B.1)),

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n,$$

quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \right) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

e) La funzione  $f(x) = e^x$  ha come derivata  $e^x$ . Infatti, per il limite notevole (5.6),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Useremo anche la notazione

$$(ax + b)' = a, \quad (x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2). \quad (7.11)$$

Se  $f'(x_0) \neq 0$ , la nozione di derivabilità si può riscrivere anche come

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0, \quad (7.12)$$

ma si osservi che (7.12) non è vera se  $f'(x_0) = 0$ . Altrimenti ne seguirebbe che ogni funzione con derivata prima nulla in un punto è costante, che è ovviamente falso (si veda l'Esempio 7.1c:  $(x^2)' = 0$  in  $x = 0$ ).

La (7.12) suggerisce una prima applicazione del concetto di migliore approssimazione lineare che ci sarà utile in seguito: se  $f'(x_0) \neq 0$ , allora  $f(x) - f(x_0)$  cambia segno attraversando  $x_0$  (si veda Figura 7.5). Più precisamente, vale il seguente lemma.

#### LEMMA 7.5

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  con  $f'(x_0) \neq 0$ . Allora

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\begin{cases} > 0 & \text{se } x > x_0 \\ < 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} && \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0 \text{ se } f'(x_0) > 0, \\ f(x) - f(x_0) &\begin{cases} < 0 & \text{se } x > x_0 \\ > 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} && \text{definitivamente per } x \rightarrow x_0 \text{ se } f'(x_0) < 0. \end{aligned}$$

#### ESEMPIO 7.1

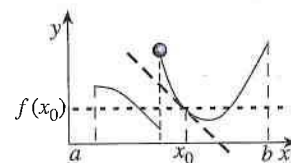


Figura 7.5

**Dimostrazione**

La seconda affermazione segue dalla prima scambiando  $f$  con  $-f$ , e possiamo quindi supporre che  $f'(x_0) > 0$ . È sufficiente moltiplicare la (7.12) per  $x - x_0$ : si ha infatti

$$\begin{aligned}(f(x) - f(x_0))(x - x_0) &= f'(x_0)(x - x_0)^2(1 + o(1)) \\ &\geq \frac{1}{2}f'(x_0)(x - x_0)^2 > 0 \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0,\end{aligned}$$

che coincide con la tesi.



Il seguente esempio mostra che non tutte le funzioni continue in un punto  $x_0$  sono derivabili in  $x_0$ .

**ESEMPIO 7.2**

La funzione  $f(x) = |x|$  non è derivabile in  $x = 0$ : infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

quindi non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .

È invece vero il viceversa.

**TEOREMA 7.6**

Siano  $I$  un intervallo,  $x_0 \in I$  e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

**Dimostrazione**

Praticamente immediata: se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , segue dalla (7.8) che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0).$$

Si può parlare, come per la continuità, della derivabilità di una funzione in un insieme; dobbiamo solo richiedere, per poter utilizzare la Definizione 7.1 di derivata, che tale insieme sia “composto da intervalli”.

**DEFINIZIONE 7.7**

Sia  $f: \mathbb{R} \supseteq \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $X \subseteq \text{dom } f$  tale che ogni  $x \in X$  appartiene a un intervallo contenuto in  $\text{dom } f$ . La  $f$  si dice **derivabile in  $X$**  se è derivabile in ogni  $x \in X$ .

Se  $f$  è derivabile in  $X$ , la sua derivata è definita in ogni punto di  $X$ . Perciò possiamo considerare  $f'$  come una funzione  $f': x \mapsto f'(x)$  da  $X$  in  $\mathbb{R}$ .



**DEFINIZIONE 7.8**

Se, nelle ipotesi della Definizione 7.7, la derivata  $f'$  è continua in ogni punto di  $X$ ,  $f$  si dice di classe  $C^1$  in  $X$ , e si scrive  $f \in C^1(X)$ .

- a) È immediato verificare che le funzioni dell'Esempio 7.1 sono di classe  $C^1(\mathbb{R})$ .  
 b) La funzione  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  è derivabile in ogni  $x \in X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(x+h) - \operatorname{sgn} x}{h} \stackrel{x \neq 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

D'altra parte,  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty. \quad (7.13)$$

Quindi resta definita la funzione derivata  $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , e poiché  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ovviamente  $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

Concludiamo la sezione completando la nozione di retta tangente con il caso di tangenza verticale (si veda Figura 7.6).

**DEFINIZIONE 7.9**

Siano  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ . La retta di equazione  $x = x_0$  si dice **retta tangente verticale** al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  se  $f$  è continua in  $x_0$  e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty.$$

In tal caso, talvolta si scrive (con abuso di notazione)

$$f'(x_0) = +\infty \quad \text{oppure} \quad f'(x_0) = -\infty \quad (7.14)$$

anche se  $f$  non è derivabile in  $x_0$  nel senso della Definizione 7.3 (ricordiamo che per essere derivabile, il limite del rapporto incrementale deve esistere *finito*).

- a) La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ha retta tangente verticale in  $x = 0$ . Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty.$$

- b) Anche la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  ha retta tangente verticale in  $x = 0$ . Infatti, ricordando che la definizione di limite richiede che  $x \in \operatorname{dom} f$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

- c) La funzione  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  non ha retta tangente verticale in  $x = 0$ , pur essendo  $f'(0) = +\infty$  (si veda la (7.13)), poiché  $f$  non è continua in  $x = 0$  (ha una discontinuità di salto).

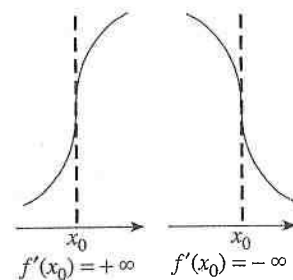
**ESEMPIO 7.3**

Figura 7.6

**ESEMPIO 7.4****ESERCIZIO 7.1**

Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati:

- a)  $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}} + x$  in  $P = (0, 0)$  e in  $Q = (1, 2)$ ;  
 b)  $f(x) = \sin(x-1) + (x-1)^2 + e^\pi$  in  $P = (1, e^\pi)$ ;  
 c)  $f(x) = \log(1+2x)$  in  $P = (2, \log 5)$ ;  
 d)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  in  $P = (3, \sqrt{10})$ .

## 7.2 Derivata destra e sinistra, punto angoloso, cuspide

In questo paragrafo ci occuperemo dei più comuni casi di “non derivabilità”. Conviene introdurre subito la nozione di derivata destra e sinistra.

### DEFINIZIONE 7.10

Siano  $I$  un intervallo,  $x_0 \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se esiste finito il limite

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

allora  $f'_+(x_0)$  si dice **derivata destra** di  $f$  in  $x_0$ . Analogamente, se esiste finito il limite

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

allora  $f'_-(x_0)$  si dice **derivata sinistra** di  $f$  in  $x_0$ .

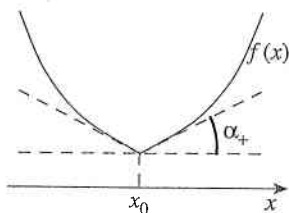


Figura 7.7

$$f'_+(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_+$$

### ESEMPIO 7.5

a) La funzione  $f(x) = |x|$  ha sia la derivata destra,  $f'_+(0) = 1$ , sia la derivata sinistra,  $f'_-(0) = -1$  (si veda l'Esempio 7.2).

b) La funzione  $f(x) = \sqrt{\max\{0, x\}}$  ha ovviamente derivata sinistra in  $x = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = 0 = f'_-(0)$$

ma non ha derivata destra:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty.$$

In questo caso, si scrive  $f'_+(0) = +\infty$ .

In modo analogo alla dimostrazione del Teorema 7.6, si verifica che se  $f$  è derivabile da destra (sinistra) in  $x_0$ , allora  $f$  è continua da destra (sinistra) in  $x_0$ .

**Osservazione.** Segue immediatamente dalle proprietà dei limiti che una funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x_0 \in (a, b)$  se e solo se esistono finiti  $f'_+(x_0)$  e  $f'_-(x_0)$  e sono uguali fra loro. Inoltre, abbiamo già visto che se  $f'_+(x_0)$  e  $f'_-(x_0)$  sono uguali ma non finiti, e la  $f$  è continua, allora  $f$  ha una retta tangente verticale in  $x_0$ .

Classifichiamo ora i casi in cui  $f'_+(x_0)$  e  $f'_-(x_0)$  non coincidono.

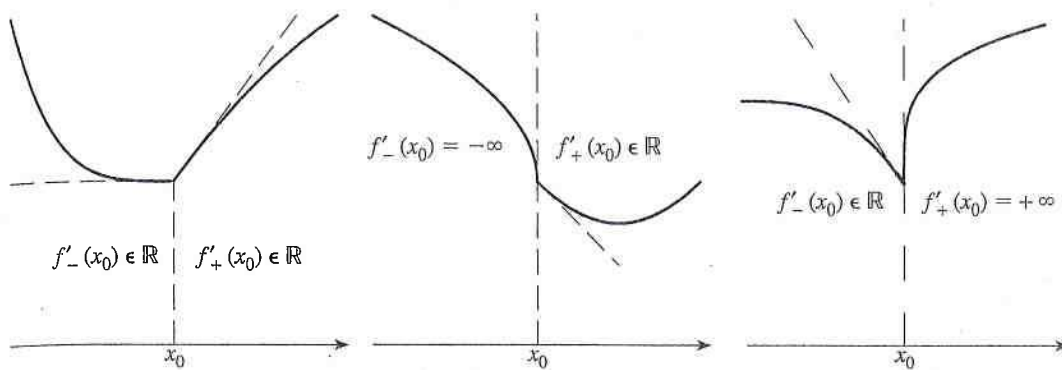
### DEFINIZIONE 7.11

Siano  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ . Se  $f$  è continua in  $x_0$ , esistono  $f'_+(x_0)$  e  $f'_-(x_0)$  e

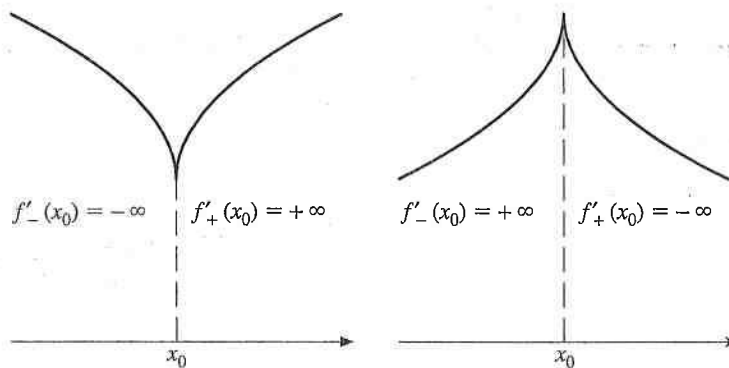
$$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$$

allora:

- (i) se almeno uno dei due esiste finito, il punto  $(x_0, f(x_0))$  si dice **punto angoloso** del grafico di  $f$ ;
- (ii) se  $f'_+(x_0) = +\infty$  e  $f'_-(x_0) = -\infty$ , o viceversa, il punto  $(x_0, f(x_0))$  si dice **cuspide**.



**Figura 7.8** Punto angolare  $(x_0, f(x_0))$ .



**Figura 7.9** Cuspide  $(x_0, f(x_0))$ .

Le Figure 7.8 e 7.9 illustrano i due casi e motivano la nomenclatura.

- a) La funzione  $x \mapsto |x|$  (si veda l'Esempio 7.5a) ha un punto angolare in  $(0, 0)$ .  
 b) La funzione  $f(x) = \sqrt{|x|}$  ha una cuspide in  $(0, 0)$ ; infatti

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sqrt{|x|}} = -\infty$$

(si osservi che  $x = -|x| = -(\sqrt{|x|})^2$  se  $x < 0$ ).

- c) La funzione  $f(x) = \sqrt{\max\{x, 0\}}$  ha un punto angolare in  $(0, 0)$  (si veda l'Esempio 7.5b).

#### ESEMPIO 7.6

Sia  $f(x) = |x|^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Determinare:

- a) i valori di  $\alpha$  per i quali  $f \in C^1(\mathbb{R})$ ;      c) i valori di  $\alpha$  per i quali  $f \in C^1(\text{dom } f)$ .  
 b) i valori di  $\alpha$  per i quali  $f$  ha una cuspide;

#### ESERCIZIO 7.2

## 7.3 Proprietà elementari della derivata

Cominciamo da una osservazione sulle simmetrie.

**Osservazione.** Se  $f$  è derivabile e pari (dispari), allora  $f'$  è dispari (pari) nel suo dominio. Infatti, se per esempio  $f$  è pari (ovvero  $f(x) = f(-x)$  per ogni  $x \in \text{dom } f$ ), si ha



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \stackrel{f \text{ pari}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}$$

$$\stackrel{h \mapsto -h}{=} \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -f'(x).$$

Quindi  $f'$  è derivabile in  $-x$  con  $f'(-x) = -f'(x)$ . Se  $f$  è dispari si procede allo stesso modo.

Continuiamo con l'“algebra delle derivate”.

“algebra delle derivate”

Dimostrazione

#### TEOREMA 7.12

Siano  $I$  un intervallo,  $x_0 \in I$  e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  e  $g$  sono derivabili in  $x_0$ , anche le funzioni  $\alpha f$  ( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ),  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$  e  $f/g$  (se  $g(x_0) \neq 0$ ) sono derivabili in  $x_0$ , e risulta

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0); \quad (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \quad (7.15)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad (7.16)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}. \quad (7.17)$$

Per capire per esempio la (7.16), utilizziamo l'equivalenza tra la (7.6) e la (7.8): per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &\quad \cdot (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)) \\ &= f(x_0)g(x_0) + (f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0))(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

Perciò  $m = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$  è il coefficiente angolare della retta tangente a  $fg$  in  $x_0$ , che sappiamo (per il Teorema 7.4) coincidere con la derivata (7.16).

Dimostrazione

#### TEOREMA 7.13

#### Derivata di una funzione composta o regola della catena

Siano  $I, J$  intervalli,  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow J$  e  $x_0 \in I$ . Se  $g$  è derivabile in  $x_0$  e se  $f$  è derivabile in  $g(x_0)$  allora la funzione composta  $f \circ g$  è derivabile in  $x_0$ , e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \quad (7.18)$$

Per capire la (7.18), limitiamoci al caso in cui  $g'(x_0) \neq 0$ . Per ipotesi,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0, \quad (7.19)$$

$$f(y) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(y - g(x_0)) + o(y - g(x_0)) \quad \text{per } y \rightarrow g(x_0). \quad (7.20)$$

Se  $g'(x_0) \neq 0$ , allora  $g(x) \neq g(x_0)$  definitivamente per  $x \rightarrow x_0$  e possiamo sostituire  $y$  con  $g(x)$  nella (7.20):

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Quindi, utilizzando la (7.19), si ottiene

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

che coincide con  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$  per l'equivalenza tra la (7.6) e la (7.8).

a) Utilizzando la (7.17) si ottiene  $(1/x') = -1/x^2$ . Perciò, per la regola della catena,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}. \quad (7.21)$$

Utilizzando direttamente la (7.17) si perviene allo stesso risultato (lo studente controlli).

b) Sia  $g(x) = 3x^2 + 5x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  e sia  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Ricordando l'Esempio 7.1,  $g$  e  $f$  sono derivabili in tutto  $\mathbb{R}$ . Quindi, per il Teorema 7.13,  $f \circ g : x \mapsto (3x^2 + 5x + 1)^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , risulta derivabile in tutti i punti  $x \in \mathbb{R}$  e

$$(f \circ g)'(x) = 3(3x^2 + 5x + 1)^2(3x^2 + 5x + 1)' = 3(3x^2 + 5x + 1)^2(6x + 5).$$

Osserviamo che  $(f \circ g)'$  è continua in  $\mathbb{R}$ , ovvero  $f \circ g \in C^1(\mathbb{R})$ .

## ESEMPIO 7.7

La funzione  $f(x) = e^{-x}$  è la composizione di  $x \mapsto -x$  e  $x \mapsto e^x$ . Ricordando che  $(e^x)' = e^x$ , si ha quindi

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}.$$

## ESEMPIO 7.8

Sia  $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Per calcolarne la derivata, si può procedere in tre modi:

a) considerando  $f$  come un quoziente di funzioni e utilizzando la (7.17), si ottiene

$$f'(x) = \frac{6x(x^2 + 1) - (3x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2};$$

b) considerando  $f$  come un prodotto di funzioni e utilizzando la (7.21), si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 1)'(x^2 + 1)^{-1} + (3x^2 - 1) \cdot ((x^2 + 1)^{-1})' \\ &= \frac{6x}{x^2 + 1} - \frac{2x(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}; \end{aligned} \quad (7.22)$$

c) osservando che  $f(x) = 3 - \frac{4}{x^2 + 1}$  e procedendo come in (b), si ottiene

$$f'(x) = -4((x^2 + 1)^{-1})' = \frac{8x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Lo studente verifichi che le tre espressioni coincidono.

## ESEMPIO 7.9

Ricordiamo che una funzione *continua* in un *intervallo* è invertibile se e solo se è strettamente monotona (si veda la (6.9)), e in tal caso l'inversa è una funzione continua (Teorema 6.13). Riguardo alla derivabilità di  $f^{-1}$ , vale il seguente risultato.

**TEOREMA 7.14** Derivata della funzione inversa

Siano  $I$  un intervallo,  $x_0 \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e strettamente monotona in  $I$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora l'inversa  $f^{-1}$  di  $f$  è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{dove } y_0 = f(x_0). \quad (7.23)$$

**Dimostrazione**

Ponendo  $y = f(x)$ , ovvero  $x = f^{-1}(y)$ , per la continuità di  $f$  e  $f^{-1}$  (si veda il Teorema 6.13),

$$y \rightarrow y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$$

quindi

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Il Teorema 7.14 continua a valere se  $f'(x_0) = +\infty$  oppure  $-\infty$ ; in tal caso la (7.23) diventa  $(f^{-1})'(y_0) = 0$ . Se invece  $f'(x_0) = 0$ ,  $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$  se  $f$  è strettamente crescente, e  $(f^{-1})'(y_0) = -\infty$  se  $f$  è strettamente decrescente (si veda Figura 7.10).

### ESEMPIO 7.10

Sia  $f(x) = 1 + x^3 + x^5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Le funzioni  $x \mapsto x^3$  e  $x \mapsto x^5$  sono strettamente crescenti in  $\mathbb{R}$ , perciò  $f(x)$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ . Inoltre  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$  e, per le (7.11) e (7.15),

$$f'(x) = 3x^2 + 5x^4 \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

e

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Quindi  $f^{-1}$  è derivabile in

$$\text{im } f \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3x^2 + 5x^4}, \quad y \neq 1, \quad y = 1 + x^3 + x^5.$$

Poiché  $f(1) = 3$ , risulta  $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{3+5} = \frac{1}{8}$ . Si osservi che  $(f^{-1})'(1) = +\infty$ .



Richiamiamo l'attenzione dello studente su un errore tipico, ovvero quello di *non* determinare il valore  $x_0$  tale che  $f(x_0) = y_0$  e di sostituire direttamente il valore  $y_0$  in  $f'$ .

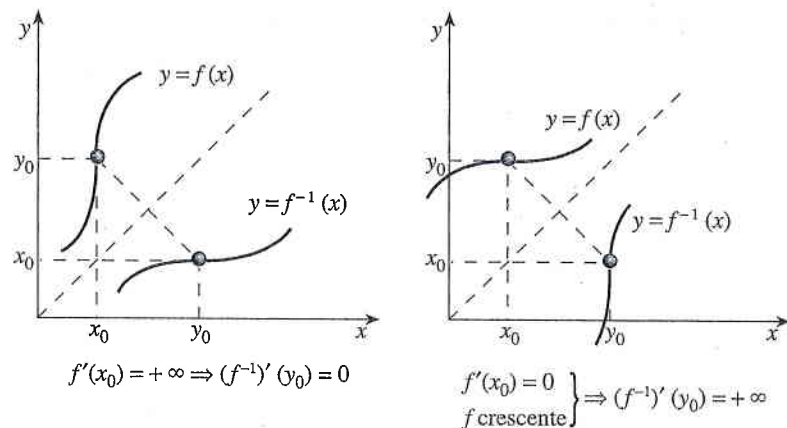
Così facendo, nell'esempio precedente si sarebbe ottenuto il valore *errato*  $(f^{-1})'(3) = 1/432$ .

### ESEMPIO 7.11

La funzione  $f(x) = \log x$  è l'inversa dell'esponenziale. Quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Figura 7.10





## 7.4 Derivate delle funzioni elementari

Nella seguente tabella abbiamo raccolto le derivate di alcune funzioni elementari, precisando per quali  $x$  è ben definita la derivata.

**Tabella 7.1**

$f(x)$	$f'(x)$	$\text{dom } f'$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \geq 0$ se $\alpha \geq 1$ , $x > 0$ se $\alpha < 1$
$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\log  x $	$1/x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$a^x (a > 0)$	$a^x \log a$	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a  x  (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x} \log_a e$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x} (= 1 + \text{tg}^2 x)$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$ x $	$\text{sgn } x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Abbiamo già visto che la derivata di  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) è  $nx^{n-1}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In effetti, per certi valori razionali di  $\alpha$  la formula  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  ha senso anche per valori negativi di  $x$ . Più precisamente, si può dimostrare che se

$$m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad n \text{ dispari}, \quad |m| \text{ e } n \text{ primi tra loro,}$$

allora

$$(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \begin{cases} \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } \frac{m}{n} < 1 \\ \text{per } x \in \mathbb{R} & \text{se } \frac{m}{n} \geq 1. \end{cases}$$

Per esempio

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \quad \forall x \neq 0, \quad (x^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Le formule nella Tabella 7.1 si basano sulla (7.10), sulle proprietà elementari delle derivate e sui limiti notevoli. Diamo un breve cenno alle dimostrazioni.

$$x^\alpha: \quad \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h} = x^{\alpha-1} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x} \rightarrow \alpha x^{\alpha-1}$$

per  $h \rightarrow 0$  per il limite notevole (5.13).

$e^x$ : si veda l'Esempio 7.1e.

$\sinh x$ :  $(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ , dove si è usato che  $(e^{-x})' = -e^{-x}$  (si veda l'Esempio 7.8).

Analogamente  $(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$ .

$\log_a |x|$ : 
$$\frac{\log_a |x+h| - \log_a |x|}{h} = \frac{1}{h} \log_a \left| \frac{x+h}{x} \right| = \frac{1}{h} \log_a (1+h/x)$$

$$= \frac{1}{h/x} \log_a (1+h/x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \log_a (1+h/x)^{\frac{1}{h/x}} \rightarrow \frac{1}{x} \log_a e$$
per  $h \rightarrow 0$ , per il limite notevole (5.4).

$a^x$ : Per la regola della catena si ha:

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} (x \log a)' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

$\sin x$ : 
$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2}{h} \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \rightarrow \cos x \text{ per } h \rightarrow 0.$$

Analogamente si dimostra che  $(\cos x)' = -\sin x$ .

$\operatorname{tg} x$ : 
$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 x \text{ oppure } \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$\arcsin x$ : Per definizione, la funzione  $\arcsin x$  è l'inversa di  $\sin x$  in  $[-\pi/2, \pi/2]$  che è ivi crescente e derivabile. Poiché  $(\sin x)' = \cos x \neq 0$  per  $x \in (-\pi/2, \pi/2)$  si ha, per il Teorema 7.14, che, posto  $y = \arcsin x$ ,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}, \text{ dove } -1 < x < 1. \text{ Essendo } \cos y > 0 \text{ in } (-\pi/2, \pi/2),$$

$$\cos y = |\cos y| = \sqrt{\cos^2 y} = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

quindi  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  per  $-1 < x < 1$ . Analogamente si dimostra che  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  per  $-1 < x < 1$ .

$\operatorname{arctg} x$ : Per definizione, la funzione  $\operatorname{arctg} x$  è l'inversa di  $\operatorname{tg} x$  in  $(-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\operatorname{tg} x$  è derivabile e strettamente crescente in  $(-\pi/2, \pi/2)$  e  $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x \geq 1$  per ogni  $-\pi/2 < x < \pi/2$ . Quindi, ponendo  $x = \operatorname{tg} y \in \mathbb{R}$ ,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

$|x|$ : Poiché  $|x| = x$  per  $x > 0$  e  $|x| = -x$  per  $x < 0$ , si ottiene  $(|x|)' = 1$  se  $x > 0$  e  $(|x|)' = -1$  se  $x < 0$ . Dall'Esempio 7.5a segue che  $|x|$  non è derivabile in  $x = 0$ , quindi  $\operatorname{dom}(|x|') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## 7.5 Calcolo delle derivate

In molti casi il calcolo delle derivate si riduce all'uso delle derivate delle funzioni elementari e delle proprietà elementari delle derivate; se tale riduzione non è possibile, si deve ricorrere alla definizione di derivata per studiare la derivabilità.

Sia  $f(x) = x^x = e^{x \log x}$  per  $x > 0$ . Per il Teorema 7.12 la funzione  $x \mapsto x \log x$  è derivabile per ogni  $x > 0$ , quindi, per il Teorema 7.13,  $f$  è derivabile per  $x > 0$  e

$$(x^x)' = e^{x \log x} (x \log x)' = x^x (\log x + 1).$$

Poiché l'espressione a destra è una funzione continua per  $x > 0$ , si ha che  $f \in C^1((0, \infty))$ .

## ESEMPIO 7.12

La funzione

$$f(x) = \frac{2^{x^2 + \sin(3x)} \sinh(x^5 - x^2 + 3)}{\log(x^2 + 5)}$$

è derivabile in  $\mathbb{R}$ , essendo formata da prodotto, quoziente e composizione di funzioni derivabili (si osservi che  $x^2 + 5 \geq 5$  e quindi  $\log(x^2 + 5) \neq 0$  per  $x \in \mathbb{R}$ ); usando le proprietà elementari delle derivate non è difficile scrivere una formula per  $f'(x)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2^{x^2 + \sin(3x)} \log 2 (2x + 3 \cos(3x)) \sinh(x^5 - x^2 + 3)}{\log(x^2 + 5)} \\ &+ \frac{2^{x^2 + \sin(3x)} (5x^4 - 2x) \cosh(x^5 - x^2 + 3)}{\log(x^2 + 5)} \\ &+ \frac{(-2x) 2^{x^2 + \sin(3x)} \sinh(x^5 - x^2 + 3)}{(x^2 + 5) \log^2(x^2 + 5)}. \end{aligned}$$

## ESEMPIO 7.13

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  e

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \quad \text{se } x \neq 0.$$

Non essendo continua in  $x = 0$ ,  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ . Quindi  $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , e dall'espressione di  $f'$  si deduce che  $f' \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

## ESEMPIO 7.14

Sia  $f(x) = \text{tg}(\sqrt{x})$ . Il suo dominio naturale è  $X = \left\{ x \geq 0, x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2, k \in \mathbb{N} \right\}$ . La funzione  $x \mapsto \text{tg } x$  è derivabile nel suo dominio, e la funzione  $x \mapsto \sqrt{x}$  è derivabile per  $x > 0$  (non per  $x = 0$ ). Quindi, per il Teorema 7.13,  $f$  è certamente derivabile in  $X \setminus \{0\}$ , e

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})}.$$

Se invece  $x = 0$  non si possono applicare le regole elementari di calcolo ma si deve considerare il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{tg}(\sqrt{x}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x \cos(\sqrt{x})} = +\infty$$

quindi  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ . Si ha pertanto  $\text{dom } f' = X \setminus \{0\}$  e  $f \in C^1(X \setminus \{0\})$ .

## ESEMPIO 7.15

Sia  $f(x) = \sin^3(\sqrt{x})$ , il cui dominio naturale è  $X = [0, \infty)$ . Ragionando come nell'esempio precedente,  $f$  risulta derivabile per  $x > 0$ , e ricordando che  $(x^3)' = 3x^2$ ,  $(\sin x)' = \cos x$  e

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ si ottiene}$$

## ESEMPIO 7.16



$$\begin{aligned} (\sin^3(\sqrt{x}))' &= 3 \sin^2(\sqrt{x})(\sin(\sqrt{x}))' = 3 \sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})(\sqrt{x})' \\ &= \frac{3 \sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } x > 0, \end{aligned}$$

da cui  $f \in C^1((0, \infty))$ . Per  $x = 0$  si deve invece studiare il limite del rapporto incrementale: poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^3(\sqrt{x}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^3 \sqrt{x} = 0$$

$f$  è derivabile anche in  $x = 0$  con  $f'(0) = 0$ . Quindi in questo caso  $\text{dom } f' = X$ . Per vedere se  $f \in C^1(X)$ , resta da valutare la continuità di  $f'$  in  $x = 0$ : poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin^2(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 0 = f'(0)$$

concludiamo che  $f \in C^1(X)$ .

**ESEMPIO 7.17**

Sia  $f(x) = x|x|$ ,  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ . Procediamo come sopra: la funzione  $x \mapsto |x|$  è derivabile per  $x \neq 0$ , quindi

$$(x|x|)' = |x| + x \operatorname{sgn} x = 2|x| \quad \text{se } x \neq 0.$$

Per  $x = 0$  calcoliamo

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x| - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Quindi  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$ , la formula  $(x|x|)' = 2|x|$  vale per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , e poiché  $f'(x) = 2|x| \rightarrow 0 = f'(0)$  per  $x \rightarrow 0$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$ .

**ESEMPIO 7.18**

Sia  $\alpha > 0$  e

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Allora

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} \quad \text{se } x > 0.$$

In  $x = 0$   $f$  è continua e il rapporto incrementale

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} \begin{cases} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{non ha limite per } x \rightarrow 0 & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Quindi  $f$  è derivabile in 0 se e solo se  $\alpha > 1$ , e in tal caso  $f'(0) = 0$ .

Osserviamo che, per  $\alpha = 2$ ,  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  è anche definita per  $x < 0$ , ossia  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ , e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

È immediato verificare che non esiste il limite di  $f'(x)$  per  $x \rightarrow 0$ . Quindi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è un esempio di funzione derivabile in tutto  $\mathbb{R}$  la cui derivata non è continua (poiché non esistono  $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x)$ ,  $f'$  ha una discontinuità di 2ª specie in  $x = 0$ ).

Determinare per le seguenti funzioni l'insieme di derivabilità e calcolare la derivata:

$$a) f(x) = \sqrt{1-x^2};$$

$$f) f(x) = \sqrt{\arcsin(\log x)};$$

$$b) f(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x^2} + e^{2x}};$$

$$g) f(x) = \log(\operatorname{arctg}^2 x - 1);$$

$$c) f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x^2-x}};$$

$$h) f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x}} \frac{\sin x}{1+\sin x};$$

$$d) f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{x+1};$$

$$i) f(x) = \left( \frac{|x^2-1|}{\sqrt{1+x^4}} (e^{x-1} - 1) \right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$e) f(x) = \sinh^2\left(\frac{1}{x+1}\right);$$

Stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili nel loro dominio e in caso affermativo calcolare, se esiste, la derivata della funzione inversa nel punto indicato:

$$a) f(x) = \sin \frac{x}{|x|+1} + 2x, \quad y = 1 + \sin \frac{1}{3};$$

$$b) f(x) = \log(\sqrt[3]{x}+1) + \sqrt[5]{x^3+1} + e^x, \quad y = 2;$$

$$c) f(x) = \arccos(x^3-1) - \frac{x}{x+2} - \frac{\pi}{2}, \quad y = -\frac{1}{3}.$$

## ESERCIZIO 7.3

## ESERCIZIO 7.4

## 7.6 Estremi locali e derivate

Dall'interpretazione della derivata come coefficiente angolare della retta tangente è facile intuire (si veda Figura 7.11) che se una funzione  $f$  derivabile in  $(a, b)$  ha un massimo o minimo locale in un punto interno  $x_0 \in (a, b)$ , allora la retta tangente di  $f$  in  $x_0$  deve essere orizzontale.

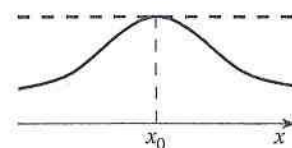


Figura 7.11

### TEOREMA 7.15 Teorema di Fermat

Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e se  $f$  ha un estremo locale in  $x_0$ , allora  $f'(x_0) = 0$ .

### Dimostrazione

Se  $f$  ha un estremo locale in  $x_0$ , allora  $f(x) - f(x_0)$  ha segno costante in un intorno di  $x_0$ . Per il Lemma 7.5, ciò può accadere solo se  $f'(x_0) = 0$ .

Nelle applicazioni è spesso fondamentale conoscere i punti in cui una certa funzione ha un estremo locale. Il precedente risultato afferma che i punti in cui si annulla la derivata sono dei validi candidati, e perciò meritano un nome.

### DEFINIZIONE 7.16

Un punto  $x_0$  si dice **punto critico** o **stazionario** di  $f$  se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) = 0$ .

Quindi il Teorema 7.15 si può riformulare dicendo che ogni punto di estremo locale interno al dominio di  $f'$  è un punto critico. Si osservi che il viceversa è falso, ossia non tutti i punti critici sono punti di estremo locale: infatti, per esempio,  $f(x) = x^3$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ , quindi non ha estremi locali; d'altra parte,  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$ , e  $f'(x) = 3x^2 = 0$  se  $x = 0$ .

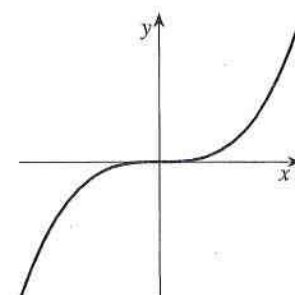


Figura 7.12  $x \mapsto x^3$ .



**Osservazione.** Le condizioni del teorema sono essenziali. Infatti,  $f$  può avere degli estremi nei punti in cui non è derivabile (per esempio,  $f : x \mapsto |x|$  ha un minimo in  $x = 0$ ); inoltre se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $[a, b]$  e ha un estremo in  $x = a$ , non è detto che  $f'(a)$  si annulli (per esempio,  $x \mapsto x + 1$  per  $x \in [0, 2]$  ha un minimo in 0 e un massimo in 2, ma  $f'(0) = f'(2) = 1 \neq 0$ ).

L'utilità del Teorema 7.15 per lo studio di una funzione  $f$  è quella di ridurre notevolmente il numero di punti in cui cercare eventuali estremi locali di  $f$ .

I possibili punti di estremo locale

#### COROLLARIO 7.17

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0$  un punto di estremo locale di  $f$  in  $I$ . Allora  $x_0$  verifica una delle delle seguenti condizioni:

- (i)  $x_0$  è un punto critico interno a  $I$ ;
- (ii)  $x_0$  è un estremo dell'intervallo;
- (iii)  $f$  non è derivabile in  $x_0$ .

#### ESEMPIO 7.19

Determiniamo i punti di estremo locale della funzione  $f(x) = (3 - |x^3 - 1|)/2$  per  $-1 \leq x \leq 2$ , ovvero

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 + (x^3 - 1)) = \frac{1}{2}(x^3 + 2) & \text{se } x^3 < 1 \quad (\Leftrightarrow x < 1), \\ \frac{1}{2}(3 - (x^3 - 1)) = \frac{1}{2}(4 - x^3) & \text{se } x^3 \geq 1 \quad (\Leftrightarrow x \geq 1). \end{cases}$$

Allora  $f$  è derivabile in  $[-1, 2] \setminus \{1\}$  e

$$f'(x) = \begin{cases} +\frac{3}{2}x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{3}{2}x^2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(si osservi che  $(1, 1)$  è un punto angoloso:  $f$  è continua in 1 e  $f'_+(1) = -3/2 \neq f'_-(1) = +3/2$ ). Quindi, per il Corollario 7.17,  $f$  potrebbe avere estremi locali nei seguenti punti:

- (i)  $x = 0$ , ovvero l'unico punto critico;
- (ii)  $x = -1$  oppure  $x = 2$ ;
- (iii)  $x = 1$ , cioè nel punto in cui  $f$  non è derivabile.

A questo punto (si veda Figura 7.13) si osserva che  $f$  è strettamente crescente in  $[-1, 1]$  (poiché  $f(x) = (x^3 + 2)/2$ ) e strettamente decrescente in  $[1, 2]$  (poiché  $f(x) = (4 - x^3)/2$ ). Perciò:

- (iv)  $x = 0$  non è punto di estremo;
- (v)  $x = -1$  e  $x = 2$  sono punti di minimo locale;
- (vi)  $x = 1$  è punto di massimo locale.

Si osservi che  $f$  è continua in  $[-1, 2]$ , quindi per il Teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluto. Perciò  $x = 1$  è punto di massimo assoluto (è l'unico candidato) e  $x = 2$  è punto di minimo assoluto ( $f(-1) = 1/2 > f(2) = -2$ ).

La seguente osservazione, geometricamente evidente (si veda la Figura 7.14) riguarda il caso di massimi e minimi assoluti negli estremi di un intervallo: sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e siano definiti  $f'_+(a)$  e  $f'_-(b)$  (eventualmente  $+\infty$  o  $-\infty$ ), allora

- (i)  $f$  ha un punto di massimo in  $a \Rightarrow f'_+(a) \leq 0$  [in  $b \Rightarrow f'_-(b) \geq 0$ ];
- (ii)  $f$  ha un punto di minimo in  $a \Rightarrow f'_+(a) \geq 0$  [in  $b \Rightarrow f'_-(b) \leq 0$ ].

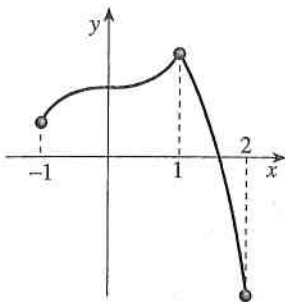


Figura 7.13 Estremi di  $x \mapsto \frac{1}{2}(3 - |x^3 - 1|)$  in  $[-1, 2]$ .

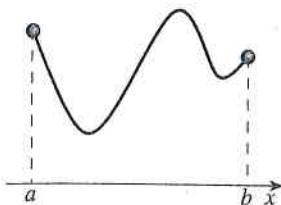


Figura 7.14 Punti di massimo locale in  $a$  e in  $b$ .



Determinare i punti di estremo locale delle seguenti funzioni nel loro dominio  $D$ :

a)  $f(x) = |1 - x^2| - 3$ ;

c)  $f(x) = \arccos(x^2 - x^4)$ .

b)  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ ;

ESERCIZIO 7.5

## 7.7 Teorema del valor medio e applicazioni

Il seguente teorema è di importanza fondamentale.

### TEOREMA 7.18 Teorema del valor medio o di Lagrange

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Allora esiste (almeno) un punto  $c \in (a, b)$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (7.24)$$

Geometricamente la (7.24) esprime l'esistenza di un punto  $c$  per il quale la retta tangente ad  $f$  in  $(c, f(c))$  è parallela al segmento congiungente i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$  (si veda la Figura 7.15).

Nel caso particolare in cui  $f(a) = f(b)$ , si ha il seguente teorema.

### TEOREMA 7.19 Teorema di Rolle

Sia  $f$  come nel Teorema 7.18 e tale che  $f(a) = f(b)$ . Allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $f'(c) = 0$ .

Le ipotesi dei Teoremi 7.18 e 7.19 non possono essere indebolite. In Figura 7.16 riportiamo alcuni controesempi in ognuno dei quali non viene verificata una delle ipotesi del teorema di Rolle.

Per dimostrare i due risultati, conviene partire dal secondo.

#### Dimostrazione del Teorema di Rolle

Poiché  $f$  è continua in  $[a, b]$  chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass esistono  $\max_{[a,b]} f$  e  $\min_{[a,b]} f$ . Sono possibili due casi.

- (i)  $\max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f = f(a) = f(b)$ , ovvero sia il massimo che il minimo sono assunti agli estremi. Quindi  $f$  è costante in  $[a, b]$  e  $f'(c) = 0$  per ogni  $c \in (a, b)$ .
- (ii)  $\max_{[a,b]} f > f(a) = f(b)$  oppure  $\min_{[a,b]} f < f(a) = f(b)$ , ovvero il massimo oppure il minimo sono assunti all'interno. Quindi  $f$  ha un punto di estremo in qualche punto  $c \in (a, b)$  e, per il Teorema 7.15, risulta  $f'(c) = 0$ .

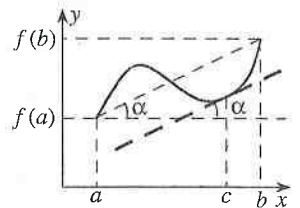
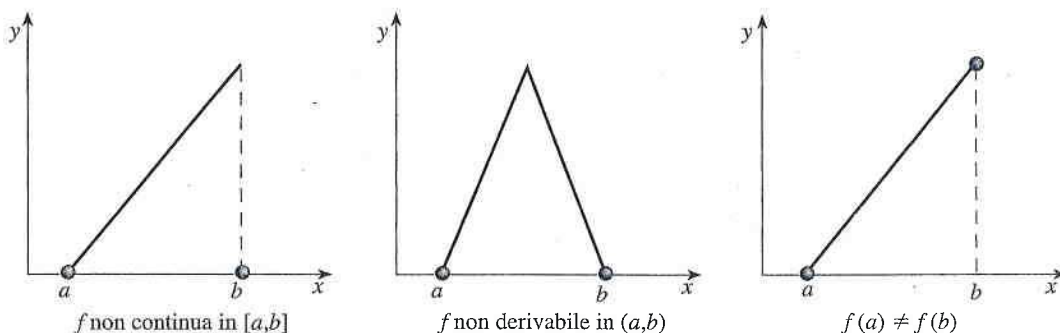


Figura 7.15

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Figura 7.16 Controesempi al Teorema di Rolle.

Per dimostrare il teorema di Lagrange, ci riconduciamo alle ipotesi del teorema di Rolle sottraendo la retta per  $(a, f(a)), (b, f(b))$ .

**Dimostrazione** del Teorema del valor medio

La funzione

$$h(x) = f(x) - \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle: infatti ha ovviamente la stessa regolarità, e inoltre  $h(a) = h(b) = 0$ . Esiste quindi  $c \in (a, b)$  tale che  $h'(c) = 0$ , ovvero  $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$ .

Prima di passare alle applicazioni, presentiamo una generalizzazione del teorema del valor medio che ci sarà utile in seguito.

**TEOREMA 7.20** Teorema di Cauchy

Siano  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue in  $[a, b]$  e derivabili in  $(a, b)$ . Allora esiste  $c \in (a, b)$  tale che

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c). \quad (7.25)$$

Se  $g(a) \neq g(b)$  e  $g'(c) \neq 0$  possiamo riscrivere la (7.25) come

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad (7.26)$$

In particolare, scegliendo  $g(x) = x$ , la (7.24) segue dalla (7.26).

**Dimostrazione** del Teorema di Cauchy

Anche il teorema di Cauchy può essere ricondotto a quello di Rolle, in modo tuttavia meno intuitivo: si verifica facilmente che la funzione

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x), \quad x \in [a, b],$$

soddisfa le ipotesi del Teorema 7.19: in particolare  $h(b) = h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$ . Perciò esiste  $c \in (a, b)$  tale che  $h'(c) = 0$ , ovvero  $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ .

### 7.7.1 Monotonia e derivata

La derivata è lo strumento per eccellenza per studiare la monotonia di una funzione. Si consideri una funzione  $f$  derivabile in un intervallo  $I$ . Se  $f$  è crescente, il rapporto incrementale è non negativo

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \text{per ogni } x, y \in I, x \neq y$$

e quindi lo è anche il suo limite  $y \rightarrow x$ : pertanto  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in I$ . In effetti è vero anche il contrario: se  $f' \geq 0$  in  $I$ , allora la funzione è crescente. Ciò però non è altrettanto ovvio, e si basa sul teorema del valor medio: presi due punti  $a < x_1 < x_2 < b$ , esiste  $c \in (x_1, x_2)$  tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$



e quindi  $f$  è crescente in  $(a, b)$ . Più precisamente, vale il seguente risultato.

**TEOREMA 7.21**

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $(a, b)$ . Allora

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Leftrightarrow f \text{ è crescente in } (a, b) \\ f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Leftrightarrow f \text{ è decrescente in } (a, b) \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ è strettamente crescente in } (a, b) \\ f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) &\Rightarrow f \text{ è strettamente decrescente in } (a, b). \end{aligned}$$

Segue immediatamente dal teorema che:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ derivabile in un intervallo } I \\ f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in I \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ è costante in } I. \quad (7.27)$$

**Osservazione.** L'implicazione  $\Leftarrow$  non è vera nelle ultime due tesi del Teorema 7.21. Per esempio,  $f(x) = x^3$  è strettamente crescente e derivabile in  $\mathbb{R}$ , ma  $f'(0) = 0 \neq 0$ . Sottolineiamo anche che tanto nel teorema quanto nella (7.27) è fondamentale che  $(a, b)$  sia un intervallo. Per esempio, sia  $f : X = (0, 1) \cup (2, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{se } x \in (0, 1) \\ x - 2 & \text{se } x \in (2, 3). \end{cases}$$

Evidentemente  $f$  è derivabile in  $X$  con  $f' > 0$ , ma  $f$  non è crescente in  $X$ .

Nel Paragrafo 7.6 abbiamo visto che gli zeri della derivata, ovvero i punti critici della funzione, sono dei "candidati" a essere punti di estremo, un'informazione utile per lo studio della funzione. Ora, lo studio del segno della derivata permette di analizzare la monotonia della funzione, consentendo, in molti casi, di stabilire la natura dei punti critici. Per esempio, sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $(a, b)$ , e sia  $x_0 \in (a, b)$  un punto critico di  $f$ . Se, come illustrato in Figura 7.17

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \text{per } x > x_0 \\ f'(x) < 0 \quad \text{per } x < x_0 \end{array} \right\} \text{ definitivamente per } x \rightarrow x_0$$

allora per qualche  $\varepsilon > 0$

$$f \text{ è strettamente } \begin{cases} \text{crescente in } (x_0, x_0 + \varepsilon) \\ \text{decrescente in } (x_0 - \varepsilon, x_0) \end{cases}$$

e quindi  $f$  ha un minimo locale (forte) in  $x_0$ .

Si osservi che, al contrario, una funzione derivabile con un minimo in  $x_0$  non è necessariamente crescente in un intorno destro di  $x_0$ ; per esempio (si veda Figura 7.18)

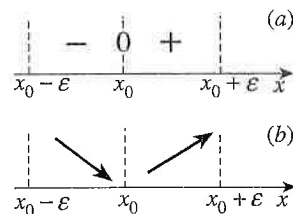
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in  $\mathbb{R}$  ( $f'(0) = 0!$ ) e ha dei minimi locali nei punti in cui  $f$  si annulla ( $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}!$ ):

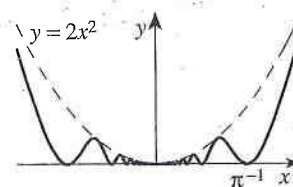
$$x = 0, \quad x = \frac{1}{n\pi} \quad (n \in \mathbb{Z});$$

non esiste però un intorno destro di  $x = 0$  nel quale  $f$  è crescente.

Dimostrazione



**Figura 7.17** a) Segno di  $f'$ ; b) monotonia di  $f$ .



**Figura 7.18**

$$x \mapsto 2x^2 \sin^2 \frac{1}{x}$$



**ESEMPIO 7.20**

- a) Determiniamo, se esistono, i punti di massimo e minimo locale e globale per  $f(x) = x^3(1-x)$  in  $\mathbb{R}$ . Si ha

$$f'(x) = x^2(3-4x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } x = \frac{3}{4}.$$

Poiché non ci sono punti di frontiera o di non derivabilità, dal Corollario 7.17 segue che gli estremi locali, se esistono, sono in  $x = 0$  o  $x = 3/4$ . Si ha

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4} \text{ e quindi } f \text{ è } \begin{cases} \text{crescente in } \left(-\infty, \frac{3}{4}\right] \\ \text{decrecente in } \left[\frac{3}{4}, +\infty\right). \end{cases}$$

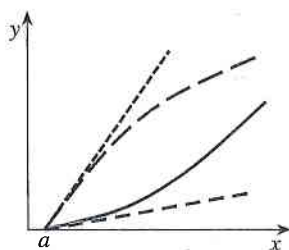
Pertanto  $x = 0$  non è un punto estremo, mentre  $x = 3/4$  è un punto di massimo locale. Poiché  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ , concludiamo che  $x = 3/4$  è un punto di massimo assoluto, e che  $\max_{\mathbb{R}} f = f(3/4)$ ,  $\inf_{\mathbb{R}} f = -\infty$ .

- b) Determiniamo i punti di massimo e minimo locale e globale per  $f(x) = x^3(1-x)$  in  $I = [-1, 1]$ . Poiché  $3/4 \in I$ , per (a) sappiamo che  $\max_I f = f(3/4)$ . Segue dalle proprietà di monotonia di  $f$  che i punti di frontiera  $x = -1$  e  $x = 1$  sono punti di minimo locale. Il minimo assoluto (che esiste per il Teorema di Weierstrass) si determina per confronto:  $f(-1) = -2 < 0 = f(1)$ , quindi  $\min_I f = f(-1)$ .

**ESERCIZIO 7.6**

Determinare i punti di massimo e minimo locale e globale per:

- a)  $f(x) = \cos(x^2)$  in  $\mathbb{R}$ ;  
 b)  $f(x) = 1/(1+x^2-x^6)$  in  $[0, 1]$ ;  
 c)  $f(x) = (1+x^2)e^{-1/(x-1)}$  in  $[0, 1) \cup (1, 2]$ ;  
 d)  $f(x) = |\arctg(\log x)|$  in  $(0, +\infty)$ .



**Figura 7.19**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ per } x \rightarrow a^+$$

**7.7.2 Teorema di de l'Hôpital**

Consideriamo due funzioni  $f$  e  $g$  continue e derivabili in  $[a, b)$ , con  $f(a) = g(a) = 0$

e  $g'(a) \neq 0$ . In tal caso possiamo risolvere il limite  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  (che è chiaramente

una forma indeterminata di tipo  $[0/0]$ ) osservando che  $f'(a)(x-a)$  e  $g'(a)(x-a)$  sono le migliori approssimazioni lineari di  $f(x)$  e  $g(x)$  per  $x \rightarrow a^+$  (si veda (7.8)): si ottiene infatti

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)(x-a) + o(x-a)}{g'(a)(x-a) + o(x-a)} = \frac{f'(a) + o(1)}{g'(a) + o(1)} \rightarrow \frac{f'(a)}{g'(a)} \text{ per } x \rightarrow a^+.$$

È quindi naturale chiedersi se le derivate di  $f$  e  $g$  possano essere utili per analizzare il limite di forme indeterminate  $\frac{f(x)}{g(x)}$  in casi più generali (forme indeterminate di tipo  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ , punto di accumulazione e/o limite non finito, minori ipotesi su  $f$  e  $g$ ). La risposta è basata sul teorema di Cauchy ed è contenuta nel seguente risultato.

**TEOREMA 7.22** Teorema di de l'Hôpital

Siano  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $(a, b)$  e  $\ell \in \mathbb{R}^*$ . Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \text{ oppure } +\infty \text{ oppure } -\infty,$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$e \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell. \quad (7.28)$$

Allora  $g(x) \neq 0$  definitivamente per  $x \rightarrow a^+$  e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \quad (7.29)$$

Risultati analoghi valgono per  $x \rightarrow b^-$  e per  $x \rightarrow x_0 \in (a, b)$ .

**Dimostrazione**

Dimostriamo il teorema nel caso in cui

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad (7.30)$$

(gli altri casi sono leggermente più complicati, ma non aggiungono alcun concetto essenziale, perciò li omettiamo).

Preliminarmente osserviamo che  $g$  non si annulla in  $(a, b)$ . Poiché  $g$  ha limite 0, è sufficiente provare che  $g$  è strettamente monotona, ovvero che è iniettiva, in  $(a, b)$ . Se così non fosse, esisterebbero  $x_1, x_2 \in (a, b)$  tali che  $g(x_1) = g(x_2)$ : per il teorema di Rolle, questo implicherebbe che  $g' = 0$  in un punto intermedio, in contraddizione con l'ipotesi.

1) Consideriamo prima il caso  $a > -\infty$ . Possiamo ridefinire  $f$  e  $g$  in  $a$  in accordo con la (7.30), ponendo  $f(a) = g(a) = 0$ . In tal modo  $f$  e  $g$  risultano continue in  $[a, b)$  e per ogni  $x \in (a, b)$  possiamo applicare il teorema di Cauchy nell'intervallo  $[a, x]$ : esiste  $c(x) \in (a, x)$  tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \quad (7.31)$$

Poiché  $c(x) \rightarrow a^+$  per  $x \rightarrow a^+$ , passando al limite per  $x \rightarrow a^+$  otteniamo la tesi.

2) Se invece  $a = -\infty$ , poniamo  $y = -1/x$  (ovvero  $x = -1/y$ ) e definiamo due nuove funzioni

$$\hat{f}(y) = f(-1/y), \quad \hat{g}(y) = g(-1/y), \quad y \in (0, y_0)$$

( $(0, y_0)$  è un opportuno intorno destro di 0; per esempio  $y_0 = 1/\max\{1, |b|\}$ ).

Per la regola della catena,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dy} \hat{f}(y)}{\frac{d}{dy} \hat{g}(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{y^2} f' \left( -\frac{1}{y} \right)}{\frac{1}{y^2} g' \left( -\frac{1}{y} \right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f' \left( -\frac{1}{y} \right)}{g' \left( -\frac{1}{y} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell.$$

È immediato verificare che  $\hat{f}$  e  $\hat{g}$  soddisfano anche le altre ipotesi del teorema (con  $(a, b) = (0, y_0)$ ). Ci siamo perciò ricondotti al caso (1), che abbiamo appe-

na dimostrato: quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\hat{f}(y)}{\hat{g}(y)} = \ell$$

e tornando alla variabile  $x$  si ottiene il risultato.

Discutiamo l'applicazione del teorema attraverso alcuni esempi.

### ESEMPIO 7.21

Per determinare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x},$$

una forma indeterminata del tipo  $[\infty / +\infty]$ , vorremmo usare il teorema di de l'Hôpital in un intorno di  $+\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1}.$$

Il simbolo  $\stackrel{?}{=}$  indica che non si sa ancora se è lecito applicare il teorema: si potrà togliere “?” solo dopo aver verificato l'esistenza del secondo limite! In questo esempio il secondo limite è banalmente uguale a zero, quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

### ESEMPIO 7.22

Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{\sin^2(4x)}$$

è una forma indeterminata del tipo  $[0/0]$ . Applicando il teorema di de l'Hôpital si perviene a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{\sin^2(4x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x)}{8 \sin(4x) \cos(4x)}.$$

Anche questo limite è una forma indeterminata del tipo  $[0/0]$ . Se si vuole utilizzare nuovamente il teorema di de l'Hôpital conviene “semplificare” il limite, notando che  $\cos(4x) \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1}{\sin^2(4x)} &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x)}{8 \sin(4x) \cos(4x)} \\ &\stackrel{?}{=} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(3x)}{8 \sin(4x)} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(4x)} \right) \\ &\stackrel{?}{=} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-9 \cos(3x)}{32 \cos(4x)} \right) \cdot 1 = -\frac{9}{32}. \end{aligned}$$

Solo a posteriori è possibile giustificare i vari passaggi, e quindi togliere i simboli “?”.

### ESEMPIO 7.23

Verifichiamo utilizzando il teorema di de l'Hôpital che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0.$$

Poiché si tratta di una forma indeterminata del tipo  $[0 \cdot (-\infty)]$ , per poter applicare il teorema si deve riscrivere il limite come una forma indeterminata del tipo  $[0/0]$  oppure  $[\infty/\infty]$ :



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1} \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

Nel primo caso otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-1}$$

che è ancora una forma indeterminata (più complicata di quella originaria); invece

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Quindi in questo esempio conviene usare il secondo approccio, ma ovviamente la scelta va fatta caso per caso.

Per determinare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \log x}$$

possiamo applicare il teorema di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} = 0$$

(e si toglie il simbolo “?” solo a posteriori).

#### ESEMPIO 7.24

La facilità con cui sono stati calcolati alcuni limiti negli esempi precedenti potrebbe far pensare a una minor importanza dei limiti notevoli rispetto all'applicazione del teorema di de l'Hôpital. Per capire che ciò non è vero, basta pensare che per calcolare, per esempio,  $(\sin x)/x$  per  $x \rightarrow 0$ , utilizzando “de l'Hôpital” sfruttiamo il risultato  $(\sin x)' = \cos x$ , la cui dimostrazione richiede la conoscenza del limite notevole in questione. Inoltre, una buona conoscenza dei limiti notevoli permette di ridurre il calcolo di limiti di funzioni “complicate” a quello di funzioni più semplici, mentre spesso accade che la derivata di una funzione complicata sia una funzione ancora “peggiore”. Per esempio, il calcolo del limite di

$$\frac{\sin^4(\sqrt{x})}{\log(1+3x)\sqrt{\arctg(x^2)}} \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

attraverso il teorema di de l'Hôpital comporterebbe molti calcoli (e quindi molti rischi di errore!); tale limite si semplifica notevolmente utilizzando i limiti notevoli:

$$\frac{\sin^4(\sqrt{x})}{\log(1+3x)\sqrt{\arctg(x^2)}} = \frac{(\sqrt{x}(1+o(1)))^4}{3x(1+o(1))\sqrt{x^2(1+o(1))}}$$

da cui possiamo subito dedurre che il limite vale  $1/3$ .

Sottolineiamo alcune accortezze necessarie nell'applicazione del teorema di de l'Hôpital.

- 1) La non esistenza del limite di  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  non implica la non esistenza del limite di  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . Per esempio, se  $f(x) = x + \sin x$  e  $g(x) = x$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ma non esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x)$ .

- 2) Si può applicare il teorema di de l'Hôpital solo quando  $f$  e  $g$  sono entrambe infiniti oppure infinitesimi. Per esempio, se  $f(x) = 2 + x$  e  $g(x) = 1 + x^2$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{ma} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{2}.$$

- 3) Il teorema di de l'Hôpital *non* afferma che se  $\frac{f(x)}{g(x)}$  e  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  sono infiniti (infinitesimi) allora hanno lo stesso ordine. Per esempio, posti  $f(x) = \log x$  e  $g(x) = x$ , si ottiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log x}{x} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

ma  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\frac{f(x)}{g(x)}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Il teorema di de l'Hôpital può essere utilizzato per determinare il coefficiente angolare  $m$  dell'eventuale asintoto obliquo di una funzione; ricordiamo che se esiste finito

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  allora

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

quindi se esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \in \mathbb{R}$  allora

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1}.$$

Tuttavia, come mostra il seguente esempio, l'esistenza di  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  in  $\mathbb{R}$  è solo condizione sufficiente: sia

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \frac{\sin(x^2)}{x} \quad \text{se } x \neq 0$$

chiaramente  $y = x$  è asintoto obliquo per  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ), essendo  $f(x) = x + o(1)$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ), ma non esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ , poiché

$$f'(x) = 1 - \frac{\sin(x^2)}{x^2} + 2 \cos(x^2) = 1 + 2 \cos(x^2) + o(1).$$

Un'ulteriore applicazione del teorema di de l'Hôpital è il seguente risultato.

#### TEOREMA 7.23

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ . Se esiste (in  $\mathbb{R}^*$ )

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad (\text{rispettivamente } \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x))$$

allora

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad (\text{rispettivamente } f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)). \quad (7.32)$$

Infatti

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{1}.$$

Non è comunque difficile ottenere lo stesso risultato direttamente dal teorema del valor medio.

Il Teorema 7.23 è piuttosto utile: lo studente può facilmente determinare  $f'(0)$  negli Esempi 7.15, 7.16 e 7.17 applicando il Teorema 7.23 anziché calcolare direttamente il limite del rapporto incrementale. Si deve però osservare qualche cautela: anzitutto, nel Teorema 7.23 la continuità di  $f$  in  $a$  è essenziale (altrimenti, per esempio, dal teorema seguirebbe la derivabilità di  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  in  $x = 0$ ). Inoltre, l'Esempio 7.18 mostra che il viceversa del Teorema 7.23 è falso. Quindi, se il limite in (7.32) non esiste, non si può dedurre che  $f$  non è derivabile da destra in  $a$  (da sinistra in  $b$ ), ma si deve comunque ricorrere alla definizione, ovvero al calcolo del limite del rapporto incrementale.

Calcolare i seguenti limiti:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos(\sqrt{x}) - 2 + x}{x^2 - x^3};$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1^+(1^-)} (\cos(x-1) + \sin(x-1))^{\frac{1}{\arctan^2(x-1)}};$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right);$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\log^3 x - \log^2 x}}{x^2 + 3};$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 + x^2 + \log(1-x^2)};$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\log x}}{(\log x)^x};$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\log(1+x) - x};$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 2)e^{-\sqrt{\log x}}.$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{x}{x^2+1}} - x \sin \frac{1}{x} \right);$

### ESERCIZIO 7.7

## 7.8 Derivate successive

Abbiamo visto nel Paragrafo 7.1 che se  $X \subseteq \operatorname{dom} f$  è “composto da intervalli” (ovvero ogni  $x \in X$  appartiene a un intervallo contenuto in  $\operatorname{dom} f$ ), possiamo considerare  $f'$  come una funzione  $f' : x \mapsto f'(x)$  da  $X$  in  $\mathbb{R}$ . Se  $f'$  è derivabile in un punto  $x \in X$ , si dice **derivata seconda** di  $f$  in  $x$ , e si indica con il simbolo  $f''(x)$ , il valore

$$f''(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Derivata seconda

a) Se  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $f'(x) = 2x$  e  $f''(x) = (f'(x))' = (2x)' = 2$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

b) Se  $f(x) = \cos(\log x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ , allora  $f'(x) = -\sin(\log x)/x$ , e

$$f''(x) = \left( -\frac{\sin(\log x)}{x} \right)' = -\frac{\cos(\log x)}{x^2} + \frac{\sin(\log x)}{x^2}.$$

### ESEMPIO 7.25

Altri simboli per indicare  $f''(x)$  sono:

$$f^{(2)}(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x), \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x), \quad D^2 f(x), \quad \ddot{f}(x).$$



Per esempio, se  $x(t)$  è la posizione al tempo  $t$  di una particella lungo una guida rettilinea,  $\dot{x}(t)$  rappresenta la sua velocità, mentre  $\ddot{x}(t)$  misura la variazione istantanea della velocità, detta *accelerazione* della particella.

Poniamo per convenzione  $f^{(0)}(x) = f(x)$ , ovvero identifichiamo la funzione come la “derivata di ordine 0”. Procedendo induttivamente, possiamo dare la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 7.24**

Sia  $f$  una funzione la cui derivata  $n$ -esima  $f^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , è definita in un insieme  $X$  “composto da intervalli”. Se  $f^{(n)}$  è derivabile in  $x \in X$ , la sua derivata si dice *derivata  $(n+1)$ -esima di  $f$  in  $x$* , o *derivata di ordine  $n+1$  in  $x$* , e si scrive

$$f^{(n+1)}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}.$$

**ESEMPIO 7.26**

Verifichiamo che:

$$(a) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad n \geq 0;$$

$$(b) \quad f(x) = \log(1+x) \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}, \quad n \geq 1.$$

In entrambi i casi si procede per induzione. (a) è immediato, visto che  $f'(x) = e^x$ . (b) è vera per  $n=1$  (poiché per convenzione  $0! = 1$ ), e se è vera sino a  $n$ , derivando si ottiene  $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! (1+x)^{-n-1}$ .

La seguente formula generalizza la regola di derivazione del prodotto.

**COROLLARIO 7.25** Formula di Leibniz

Se  $f$  e  $g$  sono  $n$  volte derivabili in  $x_0$ , allora

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0). \quad (7.33)$$

Si può capire facilmente la formula di Leibniz ricordando il triangolo di Pascal-Tartaglia (si veda l'Appendice 1.B) e applicando  $n$  volte la (7.16):

$$(fg)' = f'g + fg';$$

$$\begin{aligned} (fg)'' &= (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' \\ &= f''g + 2f'g' + fg''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (fg)''' &= (f''g + 2f'g' + fg'')' = f'''g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg''' \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''; \end{aligned}$$

ecc.

Le classi  $C^n(X)$  e  $C^\infty(X)$

Se una funzione  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile  $n$  volte in  $X$  (perciò sono continue in  $X$  le funzioni  $f^{(k)}(x)$ ,  $k < n$ ) e la funzione  $f^{(n)}(x)$  è continua in  $X$ ,  $f$  si dice **di classe  $C^n$  in  $X$** , e si scrive  $f \in C^n(X)$ . Se  $f \in C^n(X)$  per ogni  $n$ , allora  $f$  si dice **di classe  $C^\infty$  in  $X$**  e si scrive  $f \in C^\infty(X)$ .

## 7.9 Funzioni convesse e concave

**DEFINIZIONE 7.26**

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo. Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **convessa (concava)** in  $I$  se per ogni  $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ , il segmento di estremi  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  non ha punti sotto (rispettivamente sopra) il grafico di  $f$ . Se inoltre il segmento non ha punti in comune con il grafico di  $f$  tranne i suoi estremi  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$ , la  $f$  si dice **strettamente convessa (strettamente concava)** in  $I$ .

La Definizione 7.26 è illustrata in Figura 7.22. Per esprimere analiticamente la convessità di una funzione, basta ricordarsi l'espressione del segmento  $s(x)$  di estremi  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$ . Quindi (si veda Figura 7.20):

$f$  è convessa (concava) in  $I$  se e solo se

$$f(x) \stackrel{(\geq)}{\leq} s(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (7.34)$$

per ogni  $x_1 < x_2$  in  $I$  e ogni  $x \in (x_1, x_2)$

con disuguaglianze strette nel caso di stretta convessità o concavità.

È immediato verificare che

$$f \text{ è convessa in } I \Leftrightarrow -f \text{ è concava in } I.$$

Perciò, nel seguito del paragrafo, ci riferiremo semplicemente alle funzioni convesse.

In generale, una funzione (strettamente) convessa in  $(a, b)$  non è necessariamente derivabile in  $(a, b)$ . Per esempio, le funzioni  $x \mapsto |x|$  e  $x \mapsto |x| + x^2$  sono rispettivamente convessa e strettamente convessa in  $\mathbb{R}$ , ma non sono derivabili in  $x = 0$  (si veda Figura 7.21). Nonostante ciò, esiste un fondamentale collegamento (geometricamente evidente, si veda la Figura 7.23) tra convessità e rapporto incrementale.

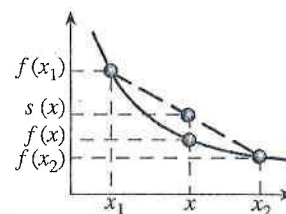


Figura 7.20

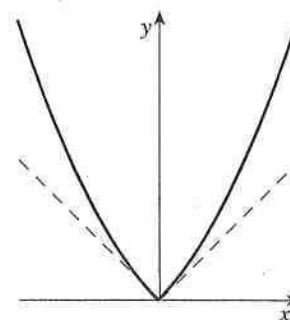


Figura 7.21  
 $x \mapsto |x| + x^2$

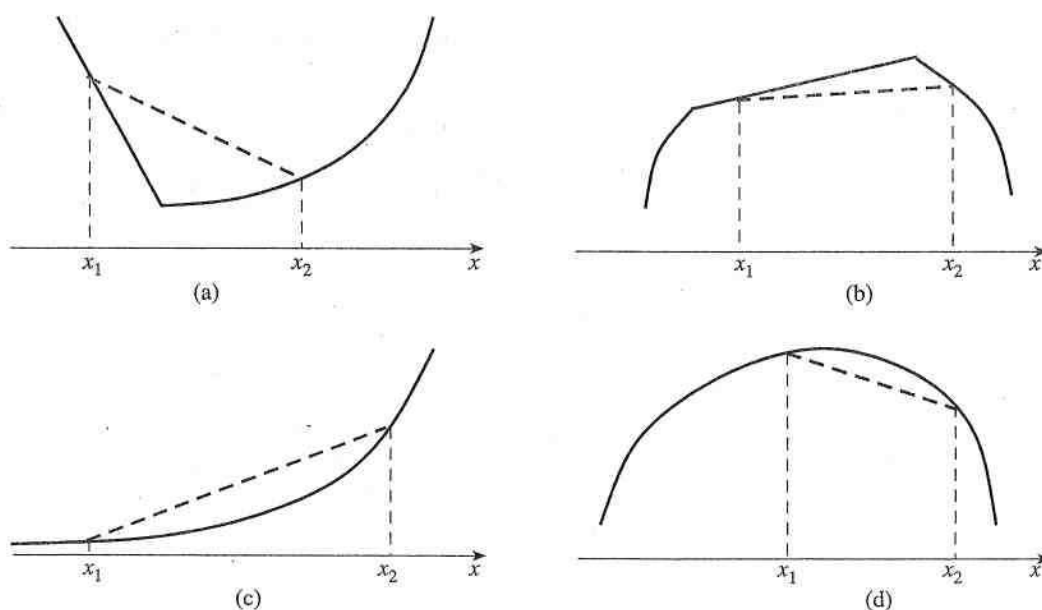
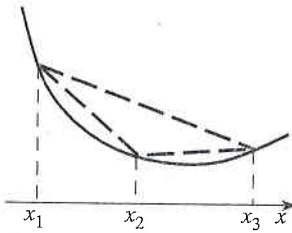


Figura 7.22 Funzione convessa (a), concava (b), strettamente convessa (c) e strettamente concava (d).



**Dimostrazione**



**Figura 7.23**

$$P(x_2, x_1) \leq P(x_3, x_1) \leq P(x_3, x_2)$$

**LEMMA 7.27**

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora  $f$  è (strettamente) convessa in  $(a, b)$  se e solo se per ogni  $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$

$$P(x_2, x_1) \stackrel{(<)}{\leq} P(x_3, x_1) \stackrel{(<)}{\leq} P(x_3, x_2)$$

dove  $P$  indica il rapporto incrementale (o pendenza) di  $f$ :

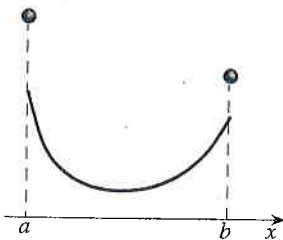
$$P(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad \forall x \neq y.$$

Il Lemma 7.27, che segue immediatamente dalla (7.34), afferma in particolare che fissato  $y \in (a, b)$ , la funzione

$$x \mapsto P(x, y), \quad x \neq y$$

è monotona crescente in  $x$ . Quindi, ricordando i risultati sui limiti di funzioni monotone (Teorema 3.21) e le nozioni acquisite nel Paragrafo 7.2, si dimostra facilmente il seguente risultato.

**Dimostrazione**



**Figura 7.24** Funzione convessa e discontinua.

**TEOREMA 7.28**

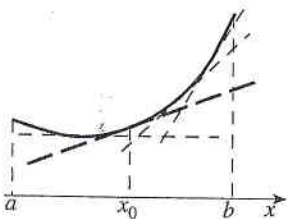
Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  (strettamente) convessa in  $(a, b)$ . Allora

- (i) per ogni  $x \in (a, b)$  esistono finiti  $f'_+(x)$  e  $f'_-(x)$ ;
- (ii)  $f'_+(x) \geq f'_-(x)$  per ogni  $x \in (a, b)$ ;
- (iii) le funzioni  $f'_+$  e  $f'_-$  sono (strettamente) crescenti in  $(a, b)$ ;
- (iv)  $f$  è continua in  $(a, b)$ .

Il Teorema 7.28 implica che gli eventuali punti di discontinuità di una funzione convessa possono essere solo gli estremi dell'intervallo (e ciò è possibile; si veda per esempio la Figura 7.24).

Nel Teorema 7.28 non si fa alcuna ipotesi sulla regolarità di  $f$ . Di seguito vediamo che se si ipotizza che  $f$  sia una o due volte derivabile in  $(a, b)$ , gli enunciati diventano più forti. Per esempio, se  $f$  è derivabile,  $f' = f'_+ = f'_-$  in  $(a, b)$ , e dal Lemma 7.27 segue l'equivalenza tra (a) e (b) enunciata nel seguente teorema.

**Dimostrazione**



**Figura 7.25**

**TEOREMA 7.29**

Se  $f$  è derivabile in  $(a, b)$ , le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- a)  $f$  è (strettamente) convessa in  $(a, b)$ ;
- b)  $f'$  è (strettamente) crescente in  $(a, b)$ ;
- c) per ogni  $x_0 \in (a, b)$  si ha

$$f(x) \stackrel{(>)}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (a, b), x \neq x_0.$$

Per (c), la retta tangente al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  si trova sotto il grafico di  $f$  in tutto  $(a, b)$  (si veda Figura 7.25). Ciò implica che una funzione strettamente convessa possiede al più un punto critico, e in tal caso il punto critico è un punto di minimo.

Se esiste anche la derivata seconda di  $f$  in  $(a, b)$ , segue dall'equivalenza tra (a) e (b) e dal Teorema 7.21 applicato alla funzione  $f'$  che il segno della derivata seconda è determinante per la convessità di  $f$ .



**TEOREMA 7.30** Derivata seconda e convessità

Se  $f$  è 2 volte derivabile in  $(a, b)$ ,

$$f \text{ è convessa in } (a, b) \Leftrightarrow f'' \geq 0 \text{ in } (a, b)$$

e

$$f'' > 0 \text{ in } (a, b) \Rightarrow f \text{ è strettamente convessa in } (a, b).$$

Il Teorema 7.30 è di grande utilità pratica; per esempio una funzione esponenziale  $x \mapsto a^x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) è strettamente convessa in  $\mathbb{R}$ , poiché  $(a^x)'' = (e^{x \log a})'' = (\log a)^2 a^x > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

I punti  $x$  in cui  $f$  è derivabile e *cambia la convessità di  $f$*  si dicono *punti di flesso per  $f$*  (si veda Figura 7.26).

**DEFINIZIONE 7.31**

Siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$  ed esista la retta tangente (eventualmente verticale) al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ . Il punto  $x_0$  si dice **punto di flesso** per  $f$  se esiste un intorno destro di  $x_0$  in cui  $f$  è convessa (concava) e un intorno sinistro di  $x_0$  in cui  $f$  è concava (convessa). Se  $f'(x_0) = +\infty$  oppure  $-\infty$ , si parla di **punto di flesso a tangente verticale**.

Per esempio, le funzioni  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  hanno un flesso in  $x = 0$ . Nel caso di  $g$  si tratta di un punto di flesso a tangente verticale.

**Osservazione.** Una funzione non è necessariamente due volte derivabile in un suo punto di flesso. Per esempio la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$  è derivabile in  $x = 0$  ( $f'(0) = 0$ ), non ammette derivate seconda in  $x = 0$  e ha un flesso in  $x = 0$ ;  $f$  è concava in  $(-\infty, 0)$  e convessa in  $(0, +\infty)$ .

Sia ora  $x_0$  un punto di flesso per  $f$ . Se, per esempio,  $f$  è convessa (concava) in un intorno sinistro (destro) di  $x_0$ ,  $f'$  risulta ivi crescente (decrescente). Quindi  $x_0$  è punto di massimo per  $f'$ . Essendo  $f'$  derivabile in  $x_0$ , per il Teorema 7.15 la sua derivata,  $f''$ , si annulla in  $x_0$ . Si arriva così al seguente risultato.

**TEOREMA 7.32**

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$  un punto di flesso per  $f$ . Se  $f$  è due volte derivabile in  $x_0$ , allora  $f''(x_0) = 0$ .

Ovviamente, l'annullarsi della derivata seconda in un punto  $x_0$  è condizione solo necessaria, e non sufficiente, affinché  $x_0$  sia punto di flesso. Per esempio  $f(x) = x^4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , verifica  $f''(0) = 0$  ma  $0$  è un punto di minimo, non di flesso.

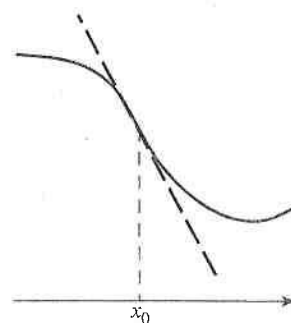
Studiare la convessità delle seguenti funzioni, determinandone gli eventuali punti di flesso:

a)  $f(x) = x^3(x-1)^2$  in  $\mathbb{R}$ ;

c)  $f(x) = 1 + (|x| - 1)^{1/3}$  in  $\mathbb{R}$ ;

b)  $f(x) = x^2(7 - 2 \log x)$  in  $(0, +\infty)$ ;

d)  $f(x) = (|x| - 1)^4$  in  $\mathbb{R}$ .

**Dimostrazione**

**Figura 7.26** Punto di flesso in  $x_0$ .

**ESERCIZIO 7.8****7.10 Studio di funzione**

I concetti fin qui introdotti permettono di “studiare una funzione”, ovvero di individuare l'andamento qualitativo del grafico di una funzione di cui si conosce l'espressione analitica. In questo paragrafo metteremo in evidenza i punti principali di tale studio attraverso un esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{3}|x| + \log\left(2\left(\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)\right). \quad (7.35)$$

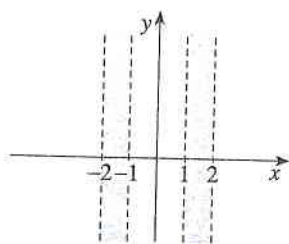


Figura 7.27 Il passo 1.

**Passo 1: dominio naturale  $D = \text{dom } f$ , continuità.**  
La funzione  $x \mapsto |x|$  è definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , quindi

$$\begin{aligned} \text{dom } f &= \text{dom}\left(\log\left(2\left(\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)\right)\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|-1}{|x|-2} > 0, |x| \neq 2\right\} \\ &= (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

Visualizziamo questa informazione come in Figura 7.27. Inoltre  $f$  è continua nel suo dominio essendo composta da funzioni continue.

**Passo 2: eventuali simmetrie e/o periodicità, studio del segno (se possibile).**  
La funzione in esame è pari (dipende da  $x$  solo attraverso il suo modulo). Quindi si può limitare lo studio a  $E = D \cap [0, \infty) = [0, 1) \cup (2, +\infty)$ , e il caso  $x < 0$  si otterrà per simmetria. Consideriamo quindi

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \log\left(2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right), \quad x \in E = [0, 1) \cup (2, +\infty). \quad (7.36)$$

Vediamo se è possibile determinare il segno di  $f$ :

$$\frac{1}{3}x \geq 0 \quad \text{per ogni } x \geq 0$$

e

$$\begin{aligned} \log\left(2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right) \geq 0 &\Leftrightarrow 2\frac{x-1}{x-2} \geq 1 \quad \text{e } x \in E \\ &\Leftrightarrow x \in (2, +\infty) \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Perciò la funzione è positiva per  $x > 2$ ,  $f(0) = 0$ , mentre non possiamo ancora dire nulla del segno in  $(0, 1)$ . Visualizziamo queste informazioni come in Figura 7.28.

**Passo 3: limiti nei punti di frontiera di  $D$  e nei punti di discontinuità, classificazione delle discontinuità e determinazione di eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.**

Abbiamo già osservato che  $f$  è continua in  $D$ . Dobbiamo quindi considerare (tenendo conto della simmetria):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad (7.37)$$

perciò le rette  $x = 1$  e  $x = 2$  sono asintoti verticali per il grafico di  $f$  (per simmetria, lo sono anche  $x = -1$ ,  $x = -2$ ). Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x + \log\left(2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)\right) = +\infty \quad (7.38)$$

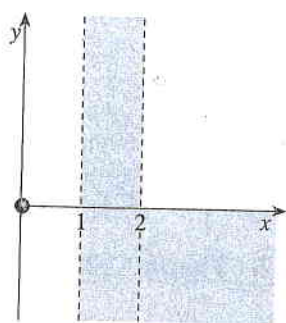


Figura 7.28 Il passo 2.

e poiché

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \log\left(2\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right) &= \frac{1}{3}x + \log 2 + \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \\ &= \frac{1}{3}x + \log 2 + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

la retta  $y = x/3 + \log 2$  è asintoto obliquo per  $x \rightarrow +\infty$  (per simmetria,  $y = -x/3 + \log 2$  è asintoto obliquo per  $x \rightarrow -\infty$ ). Visualizziamo queste informazioni in Figura 7.29.

**Passo 4: derivabilità e derivata prima, punti angolosi e cuspidi.**

La funzione in (7.36) è derivabile nel suo dominio  $E$ , perché composta da funzioni ivi derivabili. Ma non bisogna dimenticare che la (7.36) è solo una parte della funzione (7.40), la cui derivabilità in  $x = 0$  andrà perciò analizzata separatamente. Abbiamo quindi

$$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{(x-1)(x-2)} \quad \text{per } x \in (0, 1) \cup (2, +\infty) \quad (7.39)$$

mentre per  $x = 0$  utilizziamo il Teorema 7.23: si ha

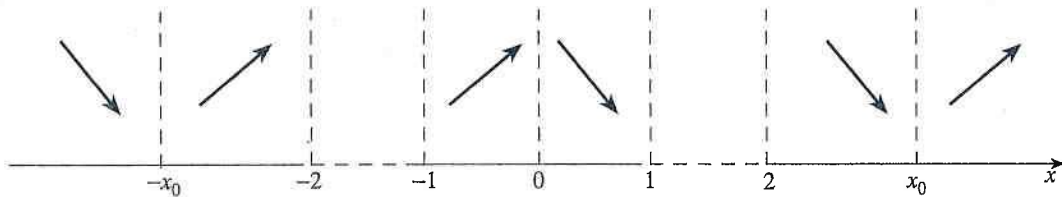
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{1}{6}.$$

Ricordando che se  $f$  pari allora  $f'$  è dispari (si veda il Paragrafo 7.3), si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1/6$ . Perciò  $f$  non è derivabile in  $x = 0$ ,  $\text{dom } f' = D \setminus \{0\}$ , e  $(0, 0)$  è punto angoloso per il grafico di  $f$ . Visualizziamo questa informazione tracciando la "retta tangente da destra" al grafico di  $f$  in  $x = 0$ , ovvero  $y = -x/6$ , come in Figura 7.30.

**Passo 5: intervalli di monotonia, eventuali punti di estremo (locali e/o assoluti), estremo superiore e inferiore.**

Ricordando il Corollario 7.17, i punti di estremo possono essere punti critici interni a  $\text{dom } f$ , oppure punti di frontiera di  $\text{dom } f$ , oppure punti in cui  $f$  non è derivabile. In questo caso, escludiamo subito i punti di frontiera di  $\text{dom } f$  perché non appartengono al dominio. Cerchiamo i punti critici di (7.36) nell'insieme  $(0, 1) \cup (2, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\stackrel{(7.39)}{\Leftrightarrow} (x-1)(x-2) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = x_0 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$



(si noti che  $(3 - \sqrt{13})/2 < 0$  e perciò non appartiene ad  $E$ ). Ricordiamo che non tutti i punti critici sono di estremo (si veda il Paragrafo 7.6). Per classificare la natura dei punti critici possiamo studiare il segno di  $f'$ :

$$\text{per } x > 0, \text{ si ha } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0.$$

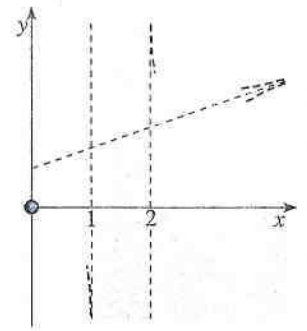


Figura 7.29 Il passo 3.

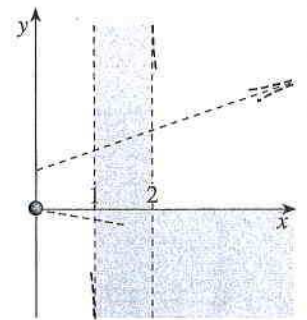


Figura 7.30 Il passo 4.

Figura 7.31 Il passo 5.



Perciò, per  $x > 0$ ,  $f$  è decrescente in  $(0, 1)$  e in  $(2, x_0)$  ed è crescente in  $(x_0, +\infty)$ , da cui  $x = x_0$  è punto di minimo per  $f$ . Resta da esaminare il punto di non derivabilità,  $x = 0$ : poiché  $f$  è pari e decrescente in  $(0, 1)$ ,  $f$  è crescente in  $(-1, 0)$  e quindi  $x = 0$  è punto di massimo locale per  $f$ . Concludiamo (ricordando (7.37)-(7.38) e la simmetria):

$$\begin{aligned} \sup f &= +\infty, & \inf f &= -\infty, \\ x = 0 & \text{ punto di massimo locale,} & x = \pm x_0 & \text{ punti di minimo locale,} \\ f & \text{ decrescente in } (-\infty, -x_0), & & \text{ in } (0, 1) \text{ e in } (2, x_0), \\ & f \text{ crescente in } (-x_0, -2), & & \text{ in } (-1, 0) \text{ e in } (x_0, \infty), \end{aligned}$$

e visualizziamo queste informazioni come in Figura 7.31.

**Passo 6: verifica, segno, grafico qualitativo nell'ipotesi di "minimo numero di flessi".**

Possiamo già tracciare un grafico qualitativo nell'ipotesi che il numero di cambi di concavità/concavità sia il minimo indispensabile. Per farlo, basta raccogliere coerentemente le informazioni ottenute nei passi precedenti. Ciò permette di assicurarci che tali informazioni non siano contraddittorie. Per esempio, se al quinto passo avessimo concluso che  $f$  è crescente in  $(0, 1)$ , ciò avrebbe contraddetto  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ , significando che abbiamo sbagliato qualcosa.

Per chiarire il senso di "minimo numero di flessi" osserviamo per esempio che i due andamenti in Figura 7.32 sono allo stato entrambi ammissibili, ma uno ha due flessi in più dell'altro. Osserviamo anche che dallo studio svolto finora emerge l'informazione sul segno di  $f$  che non eravamo riusciti a ottenere al passo 2: la funzione vale 0 in  $x = 0$  ed è decrescente, quindi è negativa in  $(0, 1)$ . Ottenere informazioni qualitative difficili o impossibili da ricavare algebricamente è uno degli scopi principali dello studio di funzione.

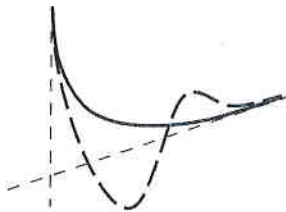


Figura 7.32 "Minimo numero di flessi".

**Passo 7: intervalli di concavità/concavità, eventuali punti di flesso.**

Per studiare la concavità o concavità di una funzione occorre studiare il segno della derivata seconda. Si osservi che  $\text{dom } f'' = \text{dom } f'$ ; derivando in (7.39) otteniamo

$$f''(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2(x-2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

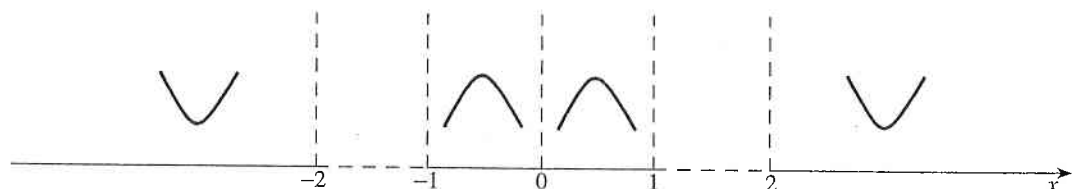
e quindi (ricordando la simmetria)

$$f \text{ convessa in } (-\infty, -2) \text{ e in } (2, +\infty), \quad f \text{ concava in } (-1, 0) \text{ e in } (0, 1).$$

Visualizziamo queste informazioni come in Figura 7.33.

Si noti che poiché  $\frac{3}{2} \notin \text{dom } f$ , non abbiamo punti di flesso in cui  $f$  è derivabile due volte. Inoltre non esistono punti di frontiera comuni agli intervalli di concavità e a quelli di convessità: pertanto la funzione non ammette punti di flesso. Sottolineiamo che abbiamo solo stabilito che  $f$  è concava in  $(-1, 0)$  e in  $(0, 1)$ . È naturale chiedersi se  $f$  è concava in  $(-1, 1)$ : in questo caso la risposta è affermativa poiché nel punto  $x = 0$  si ha  $f'_-(0) \geq f'_+(0)$ .

Figura 7.33 Il passo 7.



**CONCLUSIONE.**

Le informazioni sin qui ottenute ci permettono di disegnare un grafico qualitativo di  $f$ , come tracciato nella Figura 7.34. Si noti che, nella Figura 7.34, i rami del grafico relativi agli intervalli  $(-\infty, -2)$  e  $(2, +\infty)$  sono stati effettivamente disegnati al di sopra dei grafici degli asintoti obliqui: questo segue dal fatto che in questi intervalli la funzione è convessa.

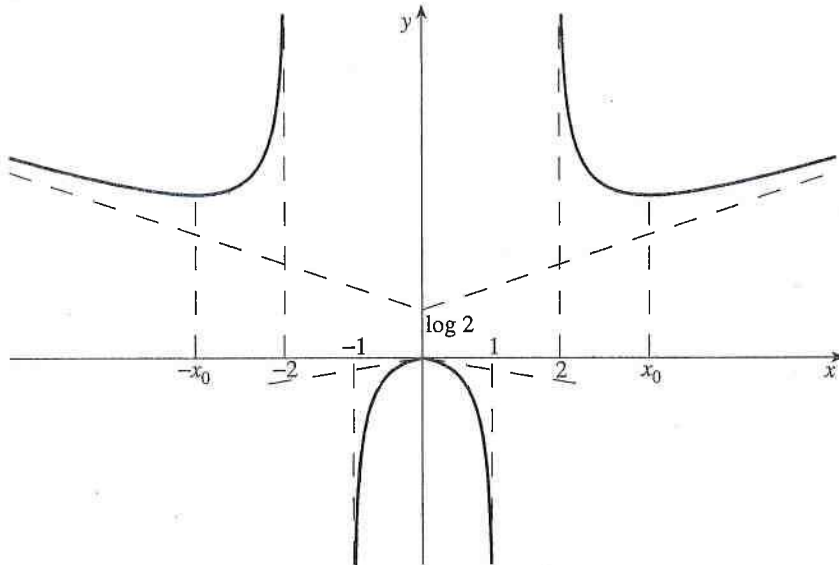


Figura 7.34  $x \mapsto \frac{|x|}{3} + \log\left(2\left(\frac{|x|-1}{|x|-2}\right)\right)$ .

Nel Capitolo 2 abbiamo già accennato che lo studio di una (dis)equazione o di una (dis)uguaglianza spesso si riduce allo studio di funzione. È quindi possibile applicare i metodi fin qui sviluppati: per esempio, per studiare la disequazione  $f(x) > g(x)$  può essere utile studiare le funzioni  $f$  e  $g$  indipendentemente, oppure la loro differenza  $f - g$ , oppure  $f/g$ .

Nel filo rosso abbiamo visto che è molto utile avere delle informazioni qualitative piuttosto precise anche su una funzione elementare come un polinomio. Nel prossimo esempio facciamo vedere come utilizzare lo studio di funzione per ottenerle.

#### ESEMPIO 7.27

Consideriamo il polinomio

$$f(x) = x^6 + ((2x + 1)^2 - 5)^2 = x^6 + 16(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1).$$

I primi passi illustrati in precedenza sono praticamente immediati:

- 1)  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  e  $f$  è continua in  $\mathbb{R}$ ;
- 2)  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (è somma di due quadrati che non si annullano contemporaneamente);
- 3)  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ ;
- 4)  $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$ , e per ogni  $x \in \mathbb{R}$  risulta

$$f'(x) = g(x) = 6x^5 + 8((2x + 1)^2 - 5)(2x + 1) = 6x^5 + 32(2x^3 + 3x^2 - x - 1).$$

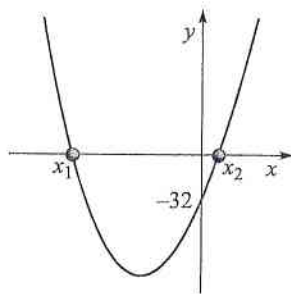
I passi successivi, invece, non sono banali. Essendo  $f$  derivabile, gli unici candidati ad essere punti di estremo locale di  $f$  sono gli zeri di  $g$ , e il segno di  $g$  determina la monotonia di  $f$ . Ma come si determinano zeri e segno di  $g$ ?

Si prova a studiare la funzione  $g$ . Ovviamente  $\text{dom } g = \mathbb{R}$ ,  $g$  è continua,  $g$  è derivabile in  $\mathbb{R}$ , e risulta

$$g(x) \rightarrow \pm\infty \text{ per } x \rightarrow \pm\infty, \quad g'(x) = h(x) = 30x^4 + 48(2x + 1)^2 - 80.$$

Ma così si torna al via: come si determinano segno e zeri di  $h$ ? Si procede come sopra sperando di recuperare informazioni (poiché si tratta di polinomi, la speranza è fondata):

$$h'(x) = 120x^3 + 192(2x + 1), \quad h''(x) = 360x^2 + 384.$$

Figura 7.35  $x \mapsto h(x)$ 

Fortunatamente  $h''(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , ovvero  $h$  è strettamente convessa. Segue immediatamente dalla definizione che una funzione strettamente convessa può avere al più 2 zeri. Nel caso di  $h$  gli zeri sono esattamente due,  $x_1$  e  $x_2$ : infatti

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty \quad \text{e} \quad h(0) = -32 < 0.$$

Inoltre  $x_1 < 0 < x_2$  (si veda Figura 7.35). Procedendo a ritroso e ricordando che  $h = g'$ , si ottiene che

$g$  è strettamente crescente in  $(-\infty, x_1)$  e in  $(x_2, +\infty)$

$g$  è strettamente decrescente in  $(x_1, x_2)$

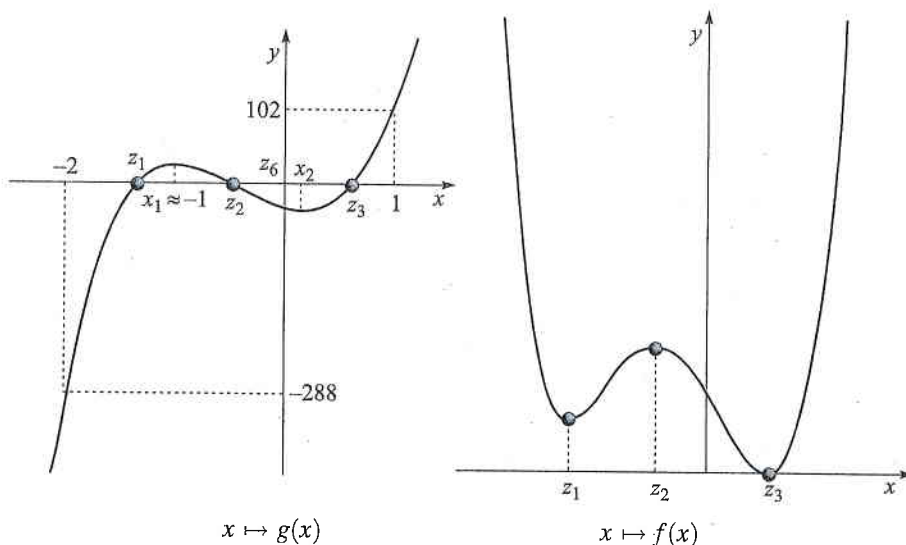
$\Rightarrow x_1$  è l'unico punto di massimo di  $g$  e  $x_2$  l'unico punto di minimo.

Per queste sue proprietà di monotonia  $g$  ha al più 3 zeri. Poiché

$$g(-2) = -288 < 0, \quad g(-1) = 26 > 0, \quad g(0) = -32 < 0, \quad g(1) = 102 > 0,$$

$g$  ha effettivamente tre zeri:  $z_1 \in (-2, -1)$ ,  $z_2 \in (-1, 0)$  e  $z_3 \in (0, 1)$  (si veda Figura 7.36; nella scala utilizzata, i punti  $x = -1$  e  $x = x_1$  sono indistinguibili).

Figura 7.36



Tornando ad  $f$ , chiaramente  $f' = g < 0$  in  $(-\infty, z_1) \cup (z_2, z_3)$  e  $f' > 0$  in  $(z_1, z_2) \cup (z_3, +\infty)$ , ovvero  $z_1$  e  $z_3$  sono i punti di minimo locale di  $f$  e  $z_2$  è un punto di massimo locale. Resta da determinare il punto di minimo assoluto (che esiste in quanto  $f$  è continua e inferiormente limitata e  $f(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Poiché  $z_1 < -1$ ,  $f(z_1) > z_1^6 > 1$ . D'altra parte si osservi che  $(2x+1)^2 - 5 = 0$  se  $2x = -1 \pm \sqrt{5}$ , quindi

$$\min_{\mathbb{R}} f \leq f\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right) = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\right)^6 < 1 < f(z_1).$$

Perciò  $z_3$  è il punto di minimo assoluto di  $f$  in  $\mathbb{R}$ :  $f(z_3) = \min_{\mathbb{R}} f$ . Si noti che, per il passo (2),  $f(z_3) > 0$  (nella scala utilizzata in figura tale proprietà non è distinguibile).

Rispetto al filo rosso del Capitolo 6, si osservi che la scelta dell'intervallo  $[0, 1]$  in cui impostare il metodo di bisezione è dovuta alla stima  $z_3 \in (0, 1)$ . Rispetto al filo rosso di questo capitolo, si osservi che  $g(1/2) = -15 - 13/16 < 0$ , quindi  $z_3 \in (1/2, 1)$ . Inoltre  $g$  è convessa in  $[1/2, 1]$  poiché  $g''(x) = h'(x) > 0$  se  $x \geq 0$ . Quindi  $g'$  è crescente in  $[1/2, 1] \subset [0, 1]$ : in particolare

$$g'(x) \geq g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{911}{8} > 0 \quad \text{in} \quad [1/2, 1].$$



Studiare le seguenti funzioni (precisando eventuali punti di estremo, intervalli di monotonia e di convessità/concavità, asintoti, punti angolosi, cuspidi, punti di flesso) e tracciarne un grafico qualitativo:

$$a) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2};$$

$$b) f(x) = xe^{-\frac{1}{x-1}};$$

$$c) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x + 2};$$

$$d) f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}};$$

$$e) f(x) = -(x+9)\sqrt{1 + \frac{2}{x}};$$

$$f) f(x) = \log(5e^{2x} - 4e^x - 1) - 2x;$$

$$g) f(x) = \frac{|\sin x - \cos x|}{\sin x + \cos x};$$

$$h) f(x) = \operatorname{arctg} \left| \frac{1 - \log x}{1 + \log x} \right|;$$

$$i) f(x) = \frac{|x-1|}{\log|x-1|};$$

$$j) f(x) = 2(x-1) \left| \log \left( 2 - e^{\frac{1}{3(x-1)}} \right) \right|.$$

ESERCIZIO 7.9

Studiare le seguenti funzioni (precisando eventuali punti di estremo, intervalli di monotonia, asintoti, punti angolosi, cuspidi) e tracciarne un grafico qualitativo nell'ipotesi di "minimo numero di flessi":

$$a) f(x) = \begin{cases} |x|^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases};$$

$$c) f(x) = \left| \arccos \left( \frac{2x+1}{1+x^2} \right) - \frac{\pi}{6} \right|;$$

$$b) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[5]{x^4}}{1+x^4};$$

$$d) f(x) = e^x \left( \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}|3x-8| \right)^{\frac{1}{3}}.$$

ESERCIZIO 7.10

Determinare il numero delle soluzioni delle seguenti equazioni:

$$a) e^x = 1 + \log(2+x);$$

$$d) \sin x = \log \left( 1 + \frac{1}{2}x \right);$$

$$b) e^x = x^2;$$

$$e) \sin^2 x + x^3 + 4x - 2e^{-x^2} = 0.$$

$$c) x^3 + x = \operatorname{arctg} x;$$

ESERCIZIO 7.11

## 7.11 Polinomio di Taylor

Il problema dell'*approssimazione* di una funzione in termini di funzioni più semplici, come i polinomi, e quindi la possibilità di descrivere alcune delle sue proprietà, è cruciale in molte questioni dell'analisi matematica. Un'ampia letteratura è dedicata a questo problema. In questo paragrafo presenteremo un metodo per descrivere l'andamento della funzione nell'intorno di un punto interno al dominio.

Siano  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $f$  è continua in  $x_0$ , allora

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \text{ per } x \rightarrow x_0; \quad (7.40)$$

se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0. \quad (7.41)$$

In altre parole, i polinomi  $T_0(x) := f(x_0)$  e  $T_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  sono le migliori approssimazioni, rispettivamente costante e lineare, di  $f(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ . Si noti che  $T_1(x)$  è un polinomio di grado  $\leq 1$ : di grado 1 se  $f'(x_0) \neq 0$  e di grado 0 se  $f'(x_0) = 0$ ; inoltre

$$T_0(x_0) = T_1(x_0) = f(x_0), \quad T_1'(x_0) = f'(x_0).$$

In effetti, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste un unico polinomio  $T_n(x)$  di grado  $\leq n$  tale che se  $f$  è derivabile  $n$  volte in  $x_0$ , allora

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0), \\ T'_n(x_0) &= f'(x_0), \\ &\vdots \\ T_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Per capirlo, osserviamo che ogni polinomio di grado  $\leq n$  può essere scritto nella forma

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k.$$

Derivandolo, si ottiene

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= \sum_{k=0}^n k a_k(x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^n k a_k(x - x_0)^{k-1}, \\ &\vdots \\ T_n^{(m)}(x) &= \sum_{k=m}^n k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-m+1) a_k(x - x_0)^{k-m}. \end{aligned}$$

Valutando  $T_n^{(m)}$  nel punto  $x_0$ , tutti gli addendi della sommatoria si annullano tranne quello di grado 0:  $T_n^{(m)}(x_0) = m! a_m$ . Perciò

$$T_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) \Leftrightarrow a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

e quindi l'unico polinomio di grado al più  $n$  che verifica la (7.42) è

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (7.43)$$

### DEFINIZIONE 7.33

Sia  $f$   $n$  volte derivabile in  $x_0$ . Il polinomio (7.43) si dice **polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f$  di centro  $x_0$** . Se  $x_0 = 0$ , si dice anche **polinomio di MacLaurin di ordine  $n$  di  $f$** .

Ove il contesto lo richieda, useremo la notazione  $T_n[f, x_0]$  per specificare che il polinomio  $T_n$  è relativo a  $f$  e centrato in  $x_0$ .

### ESEMPIO 7.28

Calcoliamo il polinomio di MacLaurin  $T_n(x)$  di alcune funzioni.

a) Se  $f(x) = e^x$ , allora

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n.$$

Infatti, segue dall'Esempio 7.26 che  $f^{(k)}(0) = 1$  per ogni  $k$ .

b) Se  $f(x) = \log(1+x)$ , allora

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Infatti, segue dall'Esempio 7.26 che  $f^{(k)}(0) = (-1)^k (k-1)!$  per ogni  $k \geq 1$ .

c) Se  $f(x) = \sin x$ , allora

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned}$$

Infatti, si ha  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\sin x$ ,  $f^{(3)}(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \sin x$  e da qui in poi la sequenza si ripete. Perciò

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Quindi

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ dispari}}}^{2n+2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \stackrel{k=2j+1}{=} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}.$$

d) Se  $f(x) = \cos x$ , allora

$$T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Per verificarlo si ragiona esattamente come in (c) (lo studente controlli).

Si noti che il *grado* di  $T_n$  in generale non coincide con il suo *ordine*,  $n$ : l'ordine  $n$  corrisponde al numero di derivate calcolate; ma se  $f^{(n)}(x_0) = 0$  allora il grado di  $T_n$  è strettamente minore di  $n$ . Per esempio, nel caso della funzione seno,  $T_{2n+2}$  ha ordine  $2n+2$  e grado  $2n+1$ .

Utilizzando la definizione, si possono facilmente stabilire alcune proprietà elementari di grande utilità: se  $f, g$  sono derivabili  $n$  volte nel punto  $x_0$ , e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora

$$T_n[\alpha f + \beta g, x_0] = \alpha T_n[f, x_0] + \beta T_n[g, x_0]; \quad (7.44)$$

$$T_n'[f, x_0] = T_{n-1}[f', x_0]. \quad (7.45)$$

In particolare, la (7.45) afferma che la derivata del polinomio di Taylor di ordine  $n$  di  $f$  è il polinomio di Taylor di ordine  $n-1$  di  $f'$  (si confrontino i polinomi di MacLaurin di  $\sin x$  e di  $\cos x$  nell'esempio precedente).

Per i polinomi di Taylor vale una formula analoga alle (7.40) e (7.41), precisamente quella data dal teorema di Peano.

#### TEOREMA 7.34 Teorema di Peano

Siano  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in (a, b)$ . Se  $f$  è  $n$  volte derivabile in  $x_0$ , il polinomio di Taylor di ordine  $n$  centrato in  $x_0$ ,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

è l'unico polinomio di grado  $\leq n$  tale che

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (7.46)$$

Inoltre  $T_n(x)$  è l'unico polinomio di grado  $\leq n$  che verifica

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per ogni } k = 0, 1, \dots, n.$$



La dimostrazione del teorema di Peano è sorprendentemente semplice ed è basata sul teorema di de l'Hôpital. Lo studente interessato la trova alla fine di questo paragrafo.

Il teorema di Peano può essere applicato anche nel caso in cui  $x_0 = a$  e  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile (da destra)  $n$  volte in  $a$  (analogamente se  $x_0 = b$ ).

Conviene riscrivere esplicitamente la tesi del Teorema di Peano nel caso di alcune funzioni elementari. Ciò che compare nell'uguaglianza a destra si dice usualmente *sviluppo di Taylor in  $x = 0$  (o sviluppo di McLaurin) di  $f$  di ordine  $m$* :  $m$  è l'esponente che compare nell'argomento di  $o$ -piccolo e coincide con l'ordine (non il grado) del polinomio corrispondente. Per  $x \rightarrow 0$ :

**Tabella 7.2** - Sviluppi di McLaurin

$$\begin{array}{ll}
 e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n) & \sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
 \log(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) & \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
 (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) & \sinh x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
 \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) & \cosh x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})
 \end{array}$$

Qui abbiamo usato la notazione

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

che nel caso  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq n$ , coincide con quella dei coefficienti binomiali. In particolare, scegliendo  $\alpha = -1$  e  $\alpha = 1/2$ , si ottiene che per  $x \rightarrow 0$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (7.47)$$

e

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)}{n! 2^n} x^n + o(x^n). \quad (7.48)$$

Gli sviluppi di McLaurin delle funzioni  $e^x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $\sin x$  e  $\cos x$  seguono immediatamente dal Teorema di Peano e dall'Esempio 7.28. Anche quelli delle funzioni  $(1+x)^\alpha$ ,  $\sinh x$  e  $\cosh x$  si ottengono facilmente allo stesso modo, cioè calcolando induttivamente le derivate e valutandole nel punto  $x = 0$  (lo studente controlli). Spesso, però, è conveniente utilizzare strumenti più generali per ricondursi ai casi noti. Il primo strumento utile che mostriamo è la composizione.

### ESEMPIO 7.29

Poiché  $x^2 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ , segue dallo sviluppo di McLaurin di  $e^x$  che

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^{2k} + o(x^{2n}) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \quad (7.49)$$

Quindi, per la tesi di unicità nel Teorema 7.34,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^{2k} = 1 + x^2 + \frac{1}{2} x^4 + \dots + \frac{1}{n!} x^{2n}$$

è il polinomio di MacLaurin di grado  $2n$  di  $e^{x^2}$ . Si noti che il calcolo diretto delle derivate di  $e^{x^2}$  per ricavare la (7.49) sarebbe piuttosto laborioso.

Nell'esempio successivo useremo la proprietà (7.45) per determinare i polinomi di MacLaurin di  $\operatorname{arctg} x$  e  $\arcsin x$ .

Verifichiamo lo sviluppo di McLaurin della funzione  $\operatorname{arctg} x$  (si veda Tabella 7.2). Poiché  $\operatorname{arctg} 0 = 0$ , il polinomio di MacLaurin di  $\operatorname{arctg} x$  di ordine  $2n + 2$  è del tipo

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2n+2} x^{2n+2}.$$

Derivando, si ottiene il polinomio di MacLaurin di grado  $2n + 1$  di  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ :

$$a_1 + 2a_2 x + \dots + (2n+2)a_{2n+2} x^{2n+1}.$$

D'altra parte, sostituendo  $x^2$  a  $x$  nella (7.47) e ragionando come nell'Esempio 7.29, tale polinomio deve coincidere con

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}$$

quindi  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = -1/3$ , ...,  $a_{2n} = (-1)^n / (2n+1)$ ,  $a_{2n+2} = 0$ , che conclude la verifica.

Analogamente, il polinomio di MacLaurin di ordine  $2n + 1$  di  $(1 - x^2)^{-1/2} = (\arcsin x)'$  è

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n! 2^n} x^{2n} \\ = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} x^{2n} \end{aligned}$$

(si è sostituito  $-x^2$  ad  $x$  nello sviluppo di McLaurin di  $(1+x)^{-1/2}$ , si veda Tabella 7.2) da cui si ricava il polinomio di MacLaurin di  $\arcsin x$ :

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \dots$$

$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

per  $x \rightarrow 0$ .

Anche la proprietà (7.44) può risultare molto utile.

Vogliamo determinare il polinomio di MacLaurin di ordine  $2n + 1$ ,  $T_{2n+1}$ , della funzione  $f(x) = \sin x + \operatorname{arctg} x$ . Per la (7.44), basta sommare i polinomi di ordine  $2n + 1$  di  $\sin x$  e  $\operatorname{arctg} x$ . Ricordando la Tabella 7.2, risulta quindi

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \frac{1 + (2k)!}{(2k)!} \right) x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Riesaminiamo l'Esempio 7.29; per determinare il polinomio di MacLaurin (di ordine  $2n$ ) di  $e^{x^2}$  si è sostituito  $x^2$  a  $x$  nello sviluppo di MacLaurin (di ordine  $n$ ) di  $e^x$ , dopo

### ESEMPIO 7.30

### ESEMPIO 7.31



aver controllato, però, che  $x^2 \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ . Sottolineiamo che questa verifica legittima la sostituzione (per la tesi di unicità del Teorema 7.34). Un errore piuttosto frequente che compie lo studente è di questo tipo: per determinare lo sviluppo di MacLaurin di  $e^{2x+3}$  di ordine 2, sostituisco  $2x+3$  a  $x$  nello sviluppo di MacLaurin di ordine 2 di  $e^x$ ; quindi, essendo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (7.50)$$

risulterebbe

$$e^{2x+3} = 1 + 2x + 3 + \frac{(2x+3)^2}{2} + o(x^2) = \frac{17}{2} + 8x + 2x^2 + o(x^2).$$

Chiaramente ciò è *falso*:

$$\text{per } x = 0 \quad e^3 \neq \frac{17}{2}.$$

La causa dell'errore è nel fatto che nella (7.50) ci si è dimenticati di "per  $x \rightarrow 0$ ": la (7.50) è valida solo per  $x \rightarrow 0$ , e quindi non si poteva sostituire  $2x+3$  nella (7.50) essendo  $2x+3 \rightarrow 3 \neq 0$  per  $x \rightarrow 0$ .

Il *modo corretto* di procedere è il seguente.

#### ESEMPIO 7.32

Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin di ordine 2 di  $f(x) = e^{2x+3}$ . Si scrive:

$$e^{2x+3} = e^3 e^{2x} = e^3 \left( 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2) \right) \quad \text{per } 2x \rightarrow 0$$

ovvero

$$e^{2x+3} = e^3 + 2e^3 x + 2e^3 x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

( $2x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow 0$ ).

Dovrebbe perciò risultare chiaro che, a maggior ragione, non potremo utilizzare la (7.50) per  $x \rightarrow +\infty$ :

$$e^x \neq 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

#### ESEMPIO 7.33

Si vuole determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 di  $f(x) = \log(\cos x)$ , ovvero l'unico polinomio  $P(x)$  di grado  $\leq 4$  che verifica  $\log(\cos x) = P(x) + o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0$ . Essendo  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1) = 0$ , possiamo scrivere

$$\log(\cos x) = \log(1 + (\cos x - 1)).$$

Osserviamo anzitutto che

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \quad (7.51)$$

In particolare  $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow 0$ . Poiché cerchiamo lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 di  $f(x)$ , è ragionevole considerare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 intorno a 0 della funzione logaritmo, cioè (si veda la Tabella 7.2)



$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \text{ per } y \rightarrow 0.$$

Posto  $y = \cos x - 1$  ( $y \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$ ) si ha:

$$\log(1 + (\cos x - 1)) = \cos x - 1 - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o((\cos x - 1)^2) \quad (7.52)$$

e sostituendo la (7.51) nella (7.52) risulta, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \log(1 + (\cos x - 1)) &= -\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \right)^2 + o(x^4). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Ora bisogna scegliere  $n$  nella (7.53), cioè decidere fino a quale ordine considerare lo sviluppo di  $\cos x - 1$  (intorno a zero): evidentemente  $n$  dovrà essere tale che  $o(x^{2n+1})$  sia anche  $o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0$ , così che  $o(x^{2n+1}) + o(x^4) = o(x^4)$ , quindi  $n = 2$ . Osservando che

$$\begin{aligned} \left( -\frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \right)^2 &= \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)^2 \\ &= \frac{x^4}{4} + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

possiamo concludere che

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Concludiamo il paragrafo con la dimostrazione del teorema di Peano.

#### Dimostrazione del Teorema 7.34

Cominciamo col dimostrare la (7.46), ovvero che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (7.54)$$

Per la (7.40) e la (7.41),  $T_0$  e  $T_1$  verificano la (7.54). Per induzione, supponiamo che per ogni funzione  $g$ , derivabile  $n - 1$  volte in  $x_0$ , valga la formula

$$g(x) = T_{n-1}[g, x_0](x) + o((x - x_0)^{n-1}) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Sostituendo a  $g$  la funzione  $f'$  e ricordando la proprietà (7.45) (il polinomio di Taylor di  $f'$  di ordine  $n - 1$  è  $T_{n-1}'(x)$ ), si ottiene dal teorema di de l'Hôpital che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T_{n-1}'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = 0.$$

Abbiamo così ottenuto la (7.54). Inoltre all'inizio del paragrafo abbiamo già verificato l'ultima parte del teorema di Peano. Quindi rimane da dimostrare che  $T_n$  è l'unico polinomio che verifica la (7.46). Sia  $P(x)$  un polinomio di grado  $\leq n$  tale che

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Allora, per la (7.46),

$$P(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (7.55)$$

Poiché  $P(x) - T_n(x)$  è un polinomio di grado  $\leq n$ , la (7.55) implica che  $P(x) - T_n(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , quindi i polinomi  $P(x)$  e  $T_n(x)$  coincidono.

**ESERCIZIO 7.12**

Determinare il polinomio di Taylor di ordine  $n$  e centro  $x_0$  delle seguenti funzioni:

- a)  $f(x) = \log(x^2 + x + 1)$ ,  $n = 2, x_0 = 0$ ;  
 b)  $f(x) = e^{x^2+x}$ ,  $n = 3, x_0 = 0$ ;  
 c)  $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ ,  $n = 3, x_0 = \pi^2$ ;  
 d)  $f(x) = \log(1 + \sin x)$ ,  $n = 4, x_0 = 0$ ;  
 e)  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ,  $n = 6, x_0 = 0$ .

**7.12 Applicazioni del teorema di Peano**

Derivate successive  
nei punti stazionari

Il teorema di Peano facilita in molti casi il calcolo di limiti nel caso di forme indeterminate. Prima di affrontare questo argomento, presentiamo una semplice applicazione che può risultare utile per lo studio di funzioni.

**TEOREMA 7.35**

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  volte derivabile in  $x_0 \in (a, b)$ ,  $n \geq 2$ , tale che

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora

$$n \text{ pari} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \text{ è punto di minimo locale forte se } f^{(n)}(x_0) > 0 \\ x_0 \text{ è punto di massimo locale forte se } f^{(n)}(x_0) < 0, \end{cases}$$

e

$$n \text{ dispari} \Leftrightarrow x_0 \text{ non è punto di estremo.}$$

Infatti, applicando il teorema di Peano alla funzione  $f$ , si ha che, per  $x \rightarrow x_0$ ,

$$f(x) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n(1 + o(1)),$$

quindi in un intorno sufficiente piccolo di  $x_0$  il comportamento di  $f$  è determinato da quello di  $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ .

Spesso si applica il risultato nel caso  $n = 2$ :

$$f'(x_0) = 0 \text{ e } f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ è punto di minimo locale forte}$$

e

$$f'(x_0) = 0 \text{ e } f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ è punto di massimo locale forte,}$$

mentre se  $f''(x_0) = 0$  non si può dire niente. Per esempio  $f(x) = x^4$  ha un punto di minimo locale forte in  $x = 0$  e  $f'(0) = f''(0) = 0$ , mentre  $g(x) = x^3$  non ha un estremo in  $x = 0$  e ugualmente  $g'(0) = g''(0) = 0$ .

**7.12.1 Limiti e ordini di infinitesimo/infinito**

Si potrebbe applicare tre volte il teorema di de l'Hôpital per calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - xe^x + x^2 \cos x}{x^3}$$

(l'allievo controlli), ma il calcolo è più rapido se si osserva che, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$$

$$-xe^x = -x \left( 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) = -x - x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$x^2 \cos x = x^2(1 + o(x)) = x^2 + o(x^3),$$

per cui sommando risulta

$$\frac{\sin x - xe^x + x^2 \cos x}{x^3} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{2}{3} + o(1) \rightarrow -\frac{2}{3} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Analogamente si calcola

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Ovviamente è importante capire (e imparare) dove è opportuno troncare lo sviluppo di Taylor. Negli esempi appena considerati, si verifica facilmente che troncando all'ordine precedente non si riesce a determinare il limite: per esempio,

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1 + o(x) - 1}{x^2} = \frac{o(x)}{x^2} = \frac{o(1)}{x} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

che non dice nulla sull'esistenza e sull'eventuale valore del limite.

Si osservi che con la stessa tecnica si ottengono informazioni sull'ordine di infinitesimo di una funzione:

$$\sin x - xe^x + x^2 \cos x = -\frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

quindi  $\sin x - xe^x + x^2 \cos x$  è un infinitesimo di ordine 3 rispetto al campione  $x$  per  $x \rightarrow 0$ .

Determiniamo, se esiste, l'ordine di infinitesimo per  $x \rightarrow +\infty$  di

$$f(x) = \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}.$$

In altre parole si tratta di determinare, se esiste,  $\alpha > 0$  tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x)$$

esiste, è finito ed è diverso da zero. Si noti che  $f(x)$  è infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$ :

$$f(x) = \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} \rightarrow 1 - 1 = 0 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Per determinarne l'ordine (se esiste), usiamo le formule

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

**ESEMPIO 7.34**



con  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  sostituito a  $t$  ( $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ ), e

$$\sqrt[3]{1+s} = 1 + \frac{1}{3}s + o(s) \quad \text{per } s \rightarrow 0$$

con  $\frac{1}{x}$  sostituito a  $s$  ( $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ ). Perciò

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + o \left( \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 \right) - 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{x} + o \left( \frac{1}{x} \right) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

ovvero

$$f(x) = -\frac{5}{6x} (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

Quindi l'ordine di infinitesimo esiste ed è  $\alpha = 1$ .

### ESEMPIO 7.35

Determiniamo, se esiste, l'ordine di infinitesimo per  $x \rightarrow -\infty$  di

$$f(x) = \sin \left( \arctg x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^3}.$$

In altre parole si tratta di determinare, se esiste,  $\alpha > 0$  tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\left( -\frac{1}{x} \right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha f(x)$$

esiste, è finito ed è diverso da zero. Si noti che  $f$  è infinitesima:

$$g(x) := \arctg x + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow -\infty.$$

Per capirne l'andamento preciso, osserviamo che dalla (2.14) segue che

$$\arctg x = -\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x < 0.$$

Quindi, poiché  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow -\infty$ ,

$$\begin{aligned} g(x) &= -\arctg \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = -\left( \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} \right)^3 + o \left( \left( \frac{1}{x} \right)^4 \right) \right) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{3x^3} (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \left( \frac{1}{3x^3} (1 + o(1)) \right) + \frac{1}{x^3} \\ &= \frac{1}{3x^3} (1 + o(1)) + o \left( \frac{1}{3x^3} (1 + o(1)) \right) + \frac{1}{x^3} \\ &= \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^3} + o \left( \frac{1}{x^3} \right) = \frac{4}{3x^3} (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

quindi l'ordine di infinitesimo esiste ed è  $\alpha = 3$ .

## ESEMPIO 7.36

Determiniamo, se esiste, l'ordine di infinito per  $x \rightarrow 0^+$  di

$$f(x) = \frac{1}{\log(\cos \sqrt{x})}.$$

In altre parole si tratta di determinare, se esiste,  $\alpha > 0$  tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x)$$

esiste, è finito ed è diverso da zero. Poiché  $\log(\cos \sqrt{x}) \rightarrow 0^-$  per  $x \rightarrow 0^+$ , si ha  $f(x) \rightarrow -\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ . Segue dall'Esempio 7.33 che

$$\log(\cos \sqrt{x}) = -\frac{1}{2}x + o(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

quindi l'ordine di infinito esiste ed è  $\alpha = 1$ :

$$f(x) = \frac{1}{\log(\cos \sqrt{x})} = \frac{1}{-\frac{1}{2}x(1+o(1))} = -\frac{2}{x}(1+o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

## ESEMPIO 7.37

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  determiniamo, se esiste, l'ordine di infinito/infinitesimo per  $x \rightarrow 0^+$  di

$$f_\alpha(x) = \frac{\log(1+x^\alpha)}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Anzitutto si deve stabilire se  $f_\alpha$  è infinita o infinitesima per  $x \rightarrow 0^+$ . Se  $\alpha > 0$ ,  $x^\alpha \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0^+$ , quindi

$$\log(1+x^\alpha) = x^\alpha - \frac{1}{2}x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+$$

e

$$f_\alpha(x) = x^{\alpha-1} - \frac{1}{2}x^{2\alpha-1} - x^{-\frac{1}{2}} + o(x^{2\alpha-1}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Se  $\alpha > 1/2$  il termine dominante per  $x \rightarrow 0^+$  è  $-x^{-\frac{1}{2}}$ , se  $0 < \alpha < 1/2$  quello dominante è  $x^{\alpha-1}$ , mentre  $x^{\alpha-1} - x^{-\frac{1}{2}} = 0$  se  $\alpha = 1/2$ ; quindi, per  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1)) & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(1+o(1)) & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ x^{\alpha-1}(1+o(1)) = x^{-(1-\alpha)}(1+o(1)) & \text{se } 0 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (7.56)$$

Se  $\alpha = 0$ ,  $x^\alpha = 1$  per ogni  $x > 0$  e

$$f_0(x) = \frac{\log 2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\log 2}{x}(1+o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Se  $\alpha < 0$ ,  $x^\alpha \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  e

$$f_\alpha(x) = \frac{\log(1+x^\alpha)}{x}(1+o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+ \quad (7.57)$$

( $x^\alpha \rightarrow +\infty$ , quindi non si può usare lo sviluppo di  $\log(1+y)$  per  $y \rightarrow 0$ ). Concludendo,  $f_\alpha$  è infinita per ogni  $\alpha \neq 1/2$ . Per stabilirne l'ordine dobbiamo determinare, se esiste,  $\beta > 0$  tale che il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta f(x)$$

esiste, è finito ed è diverso da zero. Ma questa informazione è già contenuta nelle (7.56) e (7.57): per la (7.56)  $\beta = 1/2$  se  $\alpha > 1/2$  e  $\beta = 1 - \alpha$  se  $\alpha \in (0, 1/2)$ ; per la (7.57) e le gerarchie di infiniti,  $\beta$  non esiste se  $\alpha < 1/2$ .

In conclusione, gli sviluppi di Taylor permettono di studiare l'andamento di molte funzioni per  $x$  che tende a qualche valore limite. Ciò consente di affrontare altri problemi, per esempio quello della convergenza delle serie.

**ESEMPIO 7.38**

Vogliamo determinare per quali valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{\cos \frac{3}{k^3}}{\cos \frac{2}{k^3}} \right)^{k^\alpha}$$

converge. Studiamo l'andamento preciso dei termini della serie:

$$a_k := \left( \frac{\cos \frac{3}{k^3}}{\cos \frac{2}{k^3}} \right)^{k^\alpha} = e^{k^\alpha (\log(\cos \frac{3}{k^3}) - \log(\cos \frac{2}{k^3}))}$$

Poiché  $\frac{1}{k^3} \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ , consideriamo lo sviluppo di MacLaurin di  $\log(\cos x)$  (si veda l'Esempio 7.33):

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

quindi

$$\begin{aligned} \log\left(\cos \frac{3}{k^3}\right) - \log\left(\cos \frac{2}{k^3}\right) &= -\frac{1}{2} \frac{9}{k^6} (1 + o(1)) + \frac{1}{2} \frac{4}{k^6} (1 + o(1)) \\ &= -\frac{5}{2k^6} (1 + o(1)) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

ovvero

$$a_k = e^{-\frac{5}{2}k^{\alpha-6}(1+o(1))} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Perciò

$$a_k \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \alpha > 6$$

e, se  $\alpha > 6$ ,

$$a_k = o(k^{-\lambda}) \quad \text{per } k \rightarrow +\infty \quad \forall \lambda > 0.$$

Dalla (4.36) e dal criterio del confronto segue quindi che

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \text{ è convergente } \Leftrightarrow \alpha > 6.$$

**ESERCIZIO 7.13**

Stabilire se le seguenti funzioni sono infiniti o infinitesimi e determinare, se esiste, l'ordine:

$$\text{a) } f(x) = \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) \log(1 + e^{-x}) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty;$$



$$b) f(x) = \frac{x(\log(x^2 + 3) - 2 \log|x|)}{e^{-|x|^{\frac{1}{2}}} - 1} \quad \text{per } x \rightarrow -\infty;$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\sin(x-1)} - \frac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)} \quad \text{per } x \rightarrow 1^+;$$

$$d) f(x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x - 2x^2 + e^{x^2} - 1}{x^{\frac{1}{3}} + e^{-\frac{1}{x}}} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+;$$

$$e) f(x) = \frac{(e^x - 1 - x)^{8/3}}{x^2 \cos x - \sin^2 x} \quad \text{per } x \rightarrow 0;$$

$$f) f(x) = \frac{1}{x^3} \log(x + e^{1/x}) \quad \text{per } x \rightarrow 0^+.$$

Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1 - \cos^2 x}{e^{2x-\pi} - 1 + \pi - 2x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \log(1+x^2) - \sin(\sqrt{3}x^2)}{x^2 \operatorname{tg}^2 x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+3) - \log x - 3 \sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x} - 1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} + \cos(\sqrt[4]{4x}) - 2}{\sin x};$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{x}{x^3 + 1}}\right) \log(1 + e^{x^3} + x);$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg}(x^4)}{\cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[9]{1+x^4} - 1}};$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log(x^2)} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\operatorname{arctg}(x-1)} \right);$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x}}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin x - x}};$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \sqrt{1 + \frac{x^3}{x+1}} - x \right) \log x}{x(x^{\frac{1}{x}} - 1) + \sqrt{x} \log^2 x}.$$

### ESERCIZIO 7.14

## 7.13 Approssimazione di funzioni con polinomi di Taylor

Il teorema di Peano riguarda una proprietà del polinomio di Taylor  $T_n(x)$  di una funzione  $n$  volte derivabile in  $x_0$  nel limite  $x \rightarrow x_0$ . Nelle applicazioni si utilizza spesso  $T_n(x)$  per approssimare il valore di  $f(x)$  per un certo valore (fissato!) di  $x$ . In tal caso si vuole stimare l'errore commesso:

$$E_n(x) := f(x) - T_n(x).$$

Il seguente esempio mostra che l'approssimazione non migliora necessariamente con l'aumentare dell'ordine, neanche se  $x$  è "molto vicino" a  $x_0$ .

Sia

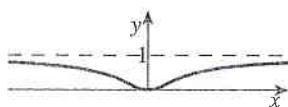
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(si veda Figura 7.37). Allora  $f$  è di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$  e

### Guida

Il paragrafo contiene la formula per il resto di Lagrange ed è richiamato nella trattazione delle serie di Taylor (Paragrafo 9.4) e delle funzioni di più variabili (Paragrafo 11.4).

### ESEMPIO 7.39

Figura 7.37  $x \mapsto e^{-1/|x|}$ .

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (7.58)$$

Infatti,  $f(x)$  è continua in  $x = 0$  e poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^2 e^{-y} = 0$$

segue dal Teorema 7.23 che  $f'_+(0)$  esiste e  $f'_+(0) = 0$ ; quindi, per la parità di  $f$  in  $\mathbb{R}$ ,  $f'(0) = 0$  e  $f'(x)$  è continua in  $x = 0$ ; ripetendo il procedimento con  $f'(x)$  sostituito a  $f(x)$ , si trova che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-2y^3 + y^4) e^{-y} = 0$$

e  $f''(0) = 0$ ; così proseguendo è possibile verificare che  $f^{(k)}(0) = 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  (per ogni  $k \in \mathbb{N}$  il limite di  $f^{(k)}(x)$  per  $x \rightarrow 0^+$  conduce a un limite per  $y \rightarrow +\infty$  di  $P_k(y)e^{-y}$  per qualche polinomio  $P_k(y)$ , quindi  $P_k(y)e^{-y} \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow +\infty$ ).

Per la (7.58), tutti i coefficienti del polinomio di MacLaurin  $T_n(x)$  di  $f(x)$  si annullano, quindi

$$T_n(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \geq 0,$$

ovvero  $E_n(x) \not\rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ :

$$E_n(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ e } n \geq 0.$$

Per trovare una stima per l'errore  $E_n$  cominciamo con il caso  $n = 0$ : sia  $f$  derivabile in  $[a, b]$ , siano  $x, x_0 \in [a, b]$ ,  $x \neq x_0$  e sia  $T_0(x) = f(x_0)$  il polinomio di Taylor (costante!) di centro  $x_0$  di ordine 0. Per il teorema del valor medio esiste un punto  $y$  compreso tra  $x_0$  e  $x$  tale che

$$E_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(y)(x - x_0). \quad (7.59)$$

Ovviamente non si conosce il valore preciso di  $y$ , ma spesso è possibile utilizzare l'informazione che  $y$  si trova tra  $x$  e  $x_0$  per trovare una stima per l'errore  $E_0(x)$ .

#### ESEMPIO 7.40

Una prima approssimazione, molto rozza, di  $\sqrt{17}$  è 4. Per avere una stima per l'errore commesso,  $\sqrt{17} - 4$ , possiamo utilizzare la funzione  $f(x) = 4\sqrt{1+x}$ , osservando che  $f(1/16) = 4\sqrt{17/16} = \sqrt{17}$ .

Poiché il polinomio di MacLaurin di ordine 0 di  $f(x)$  è  $T_0(x) = f(0) = 4$ , dalla (7.59) otteniamo

$$\sqrt{17} - 4 = E_0\left(\frac{1}{16}\right) = T_0\left(\frac{1}{16}\right) - f\left(\frac{1}{16}\right) = f'(y)\left(\frac{1}{16} - 0\right) = \frac{1}{8\sqrt{1+y}}$$

per qualche  $y$  compreso tra 0 e  $1/16$ . Poiché  $\sqrt{1+y} > 1$  nell'intervallo  $(0, 1/16)$ , si ha che

$$0 < \sqrt{17} - 4 < \frac{1}{8} = 0.125, \quad \text{ovvero } 4 < \sqrt{17} < 4.125.$$

Nell'esempio precedente si potrebbe tentare di migliorare l'approssimazione di  $\sqrt{17}$  utilizzando  $T_1(1/16)$ , dove  $T_1(x)$  è il polinomio di MacLaurin di ordine 1 di  $4\sqrt{1+x}$ . Per valutare anche in questo caso l'errore commesso,  $E_1(1/16) = \sqrt{17} - T_1(1/16)$ , serve una caratterizzazione di  $E_1(x)$  analoga a quella di  $E_0(x)$  contenuta nella (7.59). Il seguente teorema fornisce in effetti la caratterizzazione di  $E_n(x)$  per ogni ordine  $n$ .

**TEOREMA 7.36** Formula del resto di Lagrange

Siano  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in [a, b]$ . Se  $f$  è  $n$  volte derivabile in  $[a, b]$ ,  $n + 1$  volte derivabile in  $[a, b] \setminus \{x_0\}$  e  $f^{(n)}$  è continua in  $[a, b]$ , allora per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $x \neq x_0$ , esiste  $y$  compreso tra  $x$  e  $x_0$  tale che

$$f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y)(x-x_0)^{n+1} \quad (7.60)$$

dove  $T_n(x)$  è il polinomio di Taylor di ordine  $n$  e di centro  $x_0$  della funzione  $f(x)$ .

Quindi, utilizzando  $T_1(1/16) = 4.125$  come approssimazione di  $f(1/16) = \sqrt{17}$ , l'errore commesso è

$$E_2\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2} f''(y) \left(\frac{1}{16} - 0\right)^2 = -\frac{1}{512(1+y)^{\frac{3}{2}}}$$

per qualche  $y$  compreso tra 0 e  $1/16$ . Anche in questo caso basta osservare che  $(1+y)^{3/2} > 1$  per concludere che l'errore commesso è compreso tra  $-1/512$  e 0, quindi tra  $-0.002$  e 0:

$$-0.002 < \sqrt{17} - 4.125 < 0, \quad \text{ovvero} \quad -4.123 < \sqrt{17} < 4.125.$$

Il metodo seguito nell'esempio precedente mette in evidenza come risolvere il problema di non conoscere nella (7.60) il valore preciso di  $y$ , ma solo il suo intervallo di appartenenza. Se non ci interessa il segno dell'errore, come è spesso il caso nelle applicazioni pratiche, la seguente maggiorazione dell'errore commesso formalizza tale procedura:

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{y \in I} |f^{(n+1)}(y)| \quad (7.61)$$

dove  $I$  è l'intervallo di estremi  $x$  e  $x_0$ . Quindi il problema si riduce allo studio della funzione  $f^{(n+1)}$  nell'intervallo  $I$  (si noti che, fissati  $x$  e  $x_0$ , il fattore  $|x-x_0|^{n+1}$  è una costante).

Sia  $f(x)$  la funzione del esempio precedente,  $f(x) = 4\sqrt{1+x}$ , e sia  $T_n(x)$  il polinomio di MacLaurin di ordine  $n$  di  $f(x)$ . Vediamo se riusciamo a trovare  $n$  tale che

$$\left| \sqrt{17} - T_n\left(\frac{1}{16}\right) \right| \leq 10^{-10}.$$

Per la (7.61) basterebbe trovare  $n$  tale che

$$\frac{1}{16^{n+1}(n+1)!} \sup_{y \in (0, \frac{1}{16})} |f^{(n+1)}(y)| \leq 10^{-10}$$

ovvero

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n-1} 2^{4n+4} (n+1)!} \sup_{y \in (0, \frac{1}{16})} (1+y)^{-n-\frac{1}{2}} \leq 10^{-10}.$$

Poiché l'estremo superiore della potenza negativa di  $1+y$  è uguale a 1, basta scegliere  $n$  tale che

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1) 2^{5n+3}} \leq 10^{-10}.$$

Scegliendo  $n = 7$ , l'espressione a sinistra si riduce al numero

**Dimostrazione**

**ESEMPIO 7.41**



$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2^{40-2}} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 13}{2^{45}} = \frac{429}{512 \cdot 2^{36}} \leq \frac{1}{2^{36}},$$

che è minore di  $10^{-10}$ :

$$10^{10} \leq 2^{36} \iff \log_2 10 \leq 3.6 \iff 10 < 8 \cdot 1.4 < 8\sqrt{2} = 2^{3.5} < 2^{3.6}.$$

Quindi

$$T_7\left(\frac{1}{16}\right) - 10^{-10} < \sqrt{17} < T_7\left(\frac{1}{16}\right) + 10^{-10}.$$

Si osservi che per approssimare il numero  $\sqrt{17}$  si potrebbe anche tentare di utilizzare i polinomi di MacLaurin della funzione  $g(x) = \sqrt{1+x}$ , ma in tal caso si dovrebbe scegliere  $x = 16$ :  $g(16) = \sqrt{17}$ . Intuitivamente questa approssimazione è meno adatta: basta osservare che i polinomi di MacLaurin di ordine 0 e 1 valgono in  $x = 16$ , rispettivamente, 1 e 9, ben lontani da  $\sqrt{17}$ . Ma in effetti la situazione è ancora peggiore: lo studente interessato può facilmente controllare che, con la procedura seguita, in questo caso non si riesce ad approssimare  $\sqrt{17}$  con un errore inferiore a  $10^{-10}$  qualunque sia  $n$ ! La ragione di questo fenomeno verrà illustrata nel Capitolo 9.

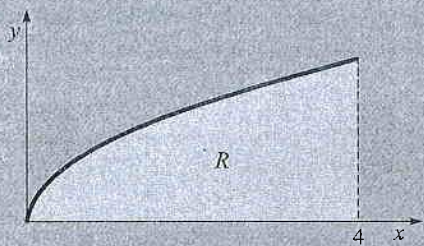
#### ESERCIZIO 7.15

- Sapendo che  $9! = 362\,880$  e ricordando che  $e < 3.2$ , determinare il valore approssimato di  $e$  con un errore minore di  $10^{-5}$ ;
- Determinare il valore approssimato di  $\sqrt{3} = 2\sqrt{1 - 1/4}$  con un errore minore di  $10^{-4}$ .

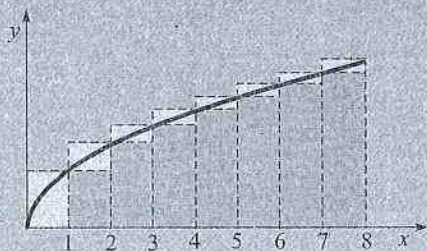
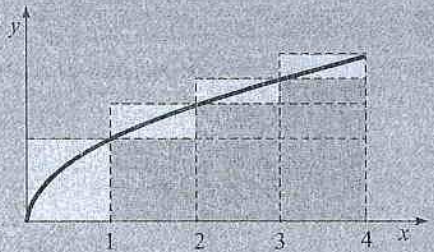
## FILO ROSSO Area, massa, baricentro...

Come abbiamo già visto varie volte, i Greci utilizzavano il metodo di esaustione per determinare l'area – ancora come concetto geometrico intuitivo – di una zona piana delimitata da configurazioni curvilinee (la quadratura del cerchio, la triangolazione della parabola, ecc.). Utilizziamolo per *definire* l'area di

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 4], 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$



È geometricamente naturale approssimare l'area di  $R$  (ancora da definire) per eccesso e per difetto con quella di un numero crescente di rettangoli sempre più stretti, riducendone in ogni passo la base tramite, ad esempio, una bisezione dei segmenti orizzontali.



Con riferimento alla figura, definiamo una successione crescente,  $\{s_n\}$ , di approssimazioni per difetto, ed una decrescente,  $\{S_n\}$ , di approssimazioni per eccesso. Poiché le successioni  $\{s_n\}$  e  $\{S_n\}$  sono, rispettivamente, limitate superiormente (per esempio da  $4\sqrt{4} = 8$ ) e inferiormente (per esempio da 0), ammettono limite finito. Inoltre, non è difficile verificare che

$$S_n - s_n = 4 \cdot 2^{-n} \sqrt{4} = 2^{3-n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Perciò le due approssimazioni per eccesso e per difetto convergono allo stesso limite, che è il candidato naturale ad essere definito come l'area di  $R$ :

$$\text{area } R := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

In questo capitolo rendiamo rigoroso e generale questo approccio introducendo il concetto di *integrale di Riemann*:

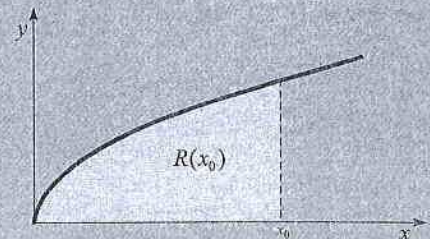
$$\text{area } R := \int_0^4 \sqrt{x} \, dx.$$

Si pone subito la domanda successiva: possiamo anche calcolare l'area? Per rispondere definiamo per ogni  $x_0 > 0$  il numero  $A(x_0)$  come

$$A(x_0) = \text{area } R(x_0),$$

dove

$$R(x_0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, x_0], 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$



Ovviamente  $A(4) = \text{area } R$  e  $A(0) = 0$ . Per ogni  $h > 0$ , si ha

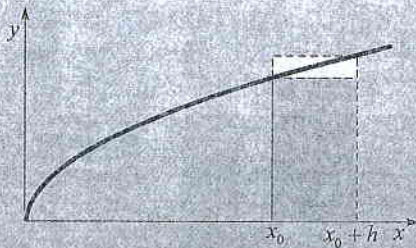
$$A(x_0 + h) - A(x_0)$$



$$= \text{area}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [x_0, x_0 + h], 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Chiaramente l'area  $A(x_0 + h) - A(x_0)$  può essere stimata da sotto e da sopra con l'area di un rettangolo di altezza  $\sqrt{x_0}$  (rispettivamente  $\sqrt{x_0 + h}$ ) e base  $h$ :

$$h\sqrt{x_0} < A(x_0 + h) - A(x_0) < h\sqrt{x_0 + h}.$$



Poichè la funzione  $\sqrt{x}$  è continua in  $x_0$ , dividendo per  $h$  si ottiene

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = \sqrt{x_0}.$$

Analogamente si dimostra che il limite per  $h \rightarrow 0^-$  è  $\sqrt{x_0}$ , quindi il limite del rapporto incrementale della funzione  $A(x)$  in  $x_0$  esiste ed è uguale a  $\sqrt{x_0}$ . Ma il limite del rapporto incrementale di  $A(x)$  è la derivata di  $A$  in  $x$ ,  $A'(x)$ , ovvero

$$A'(x_0) = \sqrt{x_0}.$$

In questo capitolo presenteremo questo risultato in una forma più generale: il *teorema fondamentale del calcolo integrale*. Effettivamente si tratta di un risultato di grandissima importanza, che lega la teoria degli *integrali di Riemann*, il concetto che generalizza in modo naturale il concetto di area, al calcolo differenziale. Nel nostro caso specifico c'è una sola funzione  $A(x)$  tale che  $A(0) = 0$  e  $A'(x) = \sqrt{x}$ :

$$A(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \Rightarrow A = A(4) = \frac{16}{3}.$$

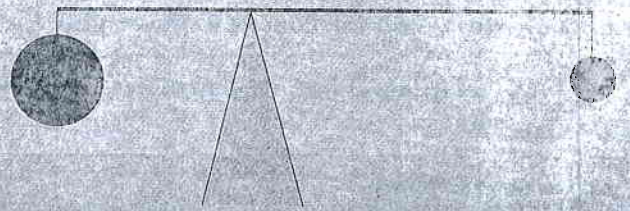
Sottolineiamo che molto spesso l'interpretazione di un integrale non è di carattere geometrico. Per esempio, per una barra sottile di lunghezza  $L$  può avere senso definire la densità di massa per unità di lunghezza: la *densità lineare*  $\rho(x)$ , definita nel punto  $x \in [0, L]$  come il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  della massa del tratto di barra compreso tra i punti  $x - \varepsilon$  e  $x + \varepsilon$  divisa per sua la lunghezza). Allora

$$M = \int_0^L \rho(x) dx,$$

definito cioè come l'area di

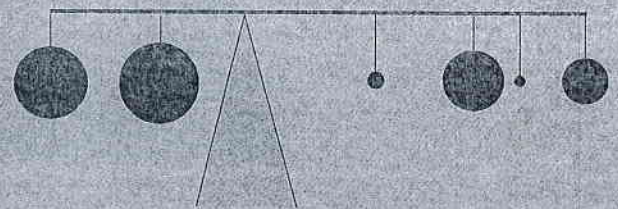
$$\{(x, y) : 0 \leq y \leq \rho(x), 0 \leq x \leq L\}.$$

è nient'altro che la *massa totale della barra* (per capirlo basta interpretare l'approssimazione per difetto e per eccesso con l'area dei rettangoli sempre più stretti, partendo dalla definizione di  $\rho(x)$ !).



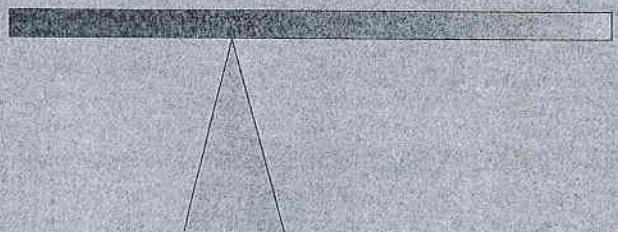
Un ultimo esempio: con riferimento alla figura, consideriamo una barra, di massa trascurabile, con due pesi di massa  $m_1$  e  $m_2$  appesi negli estremi  $x_1$  e  $x_2$ . Vogliamo trovare il *baricentro*  $x_b$ , il punto di sostegno che tiene la barra in equilibrio. Confrontando le forze esercitate nei punti di estremo, si richiede che  $m_1(x_b - x_1) = m_2(x_2 - x_b)$  ovvero

$$x_b = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$



È semplice generalizzare la formula per il baricentro al caso in cui in numero di pesi sia  $n$ : se la massa  $m_i$  è appesa nel punto  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), allora

$$x_b = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \text{dove } M := \sum_{i=1}^n m_i.$$



Quale sarà la formula per il baricentro della barra di lunghezza  $L$  e di densità lineare  $\rho(x)$ ? Ovviamente coinvolgerà gli integrali:

$$x_b = \frac{1}{M} \int_0^L x \rho(x) dx \quad M := \int_0^L \rho(x) dx.$$

Invitiamo lo studente a verificarlo (si veda l'Esercizio 8.1).



## 8.1 Definizione di integrale di Riemann

Il concetto di area è ben definito e ben noto per alcune figure geometriche elementari (rettangoli, cerchi, triangoli, rombi, parallelogrammi, trapezi ecc.). Nel caso dell'area della regione piana indicata in Figura 8.1 abbiamo invece un'idea solo intuitiva del concetto di area. Per definirlo analiticamente adatteremo una procedura naturale di approssimazione, utilizzando l'area di opportuni *plurirettangoli*, come indicato in Figura 8.2.

Per poter costruire le basi dei rettangoli, suddividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in intervalli più piccoli.

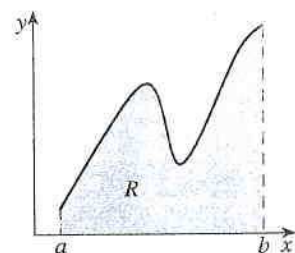


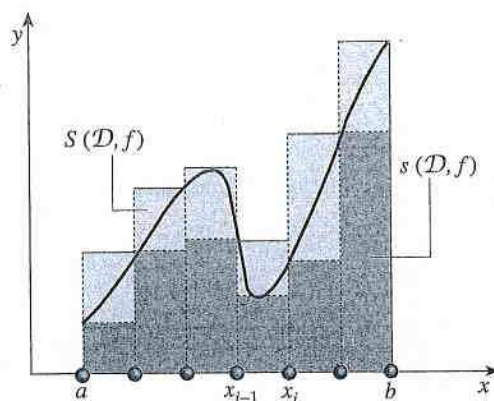
Figura 8.1

Figura 8.2 Una suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $[a, b]$  e i relativi plurirettangoli.

### DEFINIZIONE 8.1

Sia  $[a, b]$  ( $a < b$ ) un intervallo limitato. Si dice **suddivisione di  $[a, b]$** , e si indica con  $\mathcal{D}$ , un insieme finito  $\{x_i : i = 0, 1, \dots, n\} \subseteq [a, b]$  tale che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$



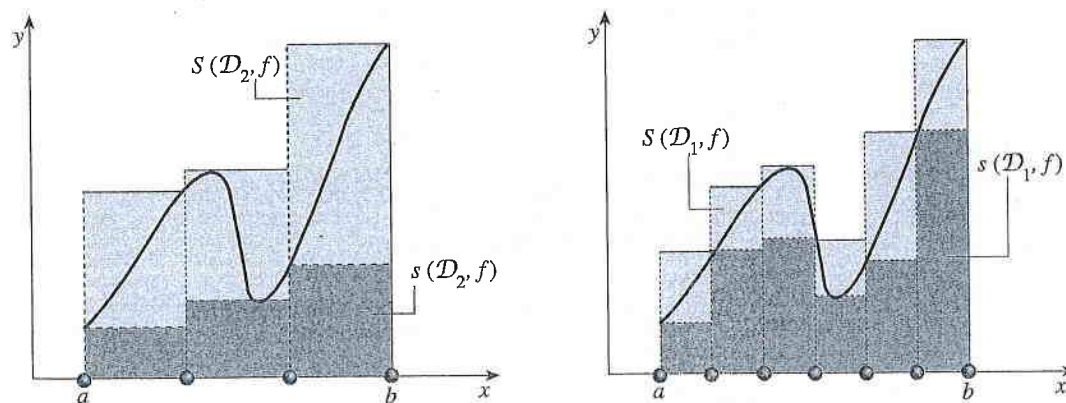
Chiaramente una suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $[a, b]$  costituita da  $n + 1$  elementi individua  $n$  intervalli  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (si veda Figura 8.2):

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \quad \text{e} \quad [a, b] = \bigcup_{i=1}^n I_i.$$

Date due suddivisioni  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  di  $[a, b]$ , diremo che  $\mathcal{D}_1$  è **più fine** di  $\mathcal{D}_2$  (o  $\mathcal{D}_2$  è **meno fine** di  $\mathcal{D}_1$ ) se

$$\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$$

Figura 8.3  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$  e i relativi plurirettangoli.



cioè se  $\mathcal{D}_1$  contiene almeno un punto in più di  $\mathcal{D}_2$  (si veda Figura 8.3). Date due suddivisioni  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$ , ne esiste sempre una più fine di entrambe (basta prenderne una

più fine di  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ). Un modo per “misurare” quanto sia fine una suddivisione è quello di considerare la sua **ampiezza**  $|\mathcal{D}|$ , ovvero il numero

$$|\mathcal{D}| := \max\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}.$$

**ESEMPIO 8.1**

Le suddivisioni  $\mathcal{D}_1 = \{0, 1/3, 1\}$  e  $\mathcal{D}_2 = \{0, 1/4, 2/3, 1\}$  di  $[0, 1]$  hanno ampiezza rispettivamente  $2/3$  e  $5/12$ . La loro unione,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \{0, 1/4, 1/3, 2/3, 1\}$  è più fine di entrambe e ha ampiezza  $1/3$ .

Per definire i plurirettangoli indicati in Figura 8.2, si sceglie una suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $[a, b]$  per individuare la base di ogni rettangolo. Ora serve una scelta opportuna delle altezze di ogni rettangolo. Nel caso di una funzione continua e non negativa definita in  $[a, b]$ , ci sono due scelte naturali: il massimo o il minimo della funzione (che esistono per il teorema di Weierstrass) in ogni sottointervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  relativo a  $\mathcal{D}$ . Ma poiché il concetto che vogliamo introdurre, l’“integrale”, non servirà solo per le funzioni continue e non negative, facciamo una scelta leggermente più generale. Sia quindi  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione *limitata* (non necessariamente non negativa né continua), e sia  $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una suddivisione di  $[a, b]$ ; allora sono ben definite e finite le seguenti quantità:

$$m_i := \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f, \quad M_i := \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.1)$$

**DEFINIZIONE 8.2**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata e  $\mathcal{D} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una suddivisione di  $[a, b]$ . Si dice **somma inferiore** di  $f$  relativa alla suddivisione  $\mathcal{D}$ , in simboli  $s(\mathcal{D}, f)$ , la quantità

$$s(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \quad (8.2)$$

e si dice **somma superiore** di  $f$  relativa alla suddivisione  $\mathcal{D}$ , in simboli  $S(\mathcal{D}, f)$ , la quantità

$$S(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}) \quad (8.3)$$

con  $m_i$  e  $M_i$  definiti dalla (8.1).

Se  $f$  è non negativa,  $s(\mathcal{D}, f)$  e  $S(\mathcal{D}, f)$  assumono un preciso significato geometrico:  $s(\mathcal{D}, f)$  è l’area del plurirettangolo  $\bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, m_i]$ , mentre  $S(\mathcal{D}, f)$  è l’area del plurirettangolo  $\bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, M_i]$ . Sempre se  $f \geq 0$ , possiamo scrivere

$$\bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, m_i] \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, M_i]$$

perciò l’area che cerchiamo di definire dovrà essere più grande di qualsiasi somma inferiore e più piccola di qualsiasi somma superiore.

Torniamo al caso generale. È evidente che per ogni suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $[a, b]$  risulta:

$$(b - a) \inf_{[a, b]} f \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq (b - a) \sup_{[a, b]} f \quad (8.4)$$

In particolare, le somme inferiori e le somme superiori sono limitate (indipendentemente dalla suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $[a, b]$ ). Inoltre vale il seguente risultato, di chiara interpretazione geometrica (si veda Figura 8.3).



**LEMMA 8.3**

Siano  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  due suddivisioni di  $[a, b]$ . Allora:

(i) se  $\mathcal{D}_1$  è più fine di  $\mathcal{D}_2$  risulta

$$s(\mathcal{D}_2, f) \leq s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f);$$

(ii)  $s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f)$ .

Dimostrazione

Utilizzando la parte (ii), si conclude che

$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) &:= \sup \{s(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \text{ suddivisione di } [a, b]\} \\ &\leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) := \inf \{S(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \text{ suddivisione di } [a, b]\}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Siano  $a = 0, b > 0$  e  $f(x) = x^2$ . Consideriamo solo le suddivisioni per le quali  $x_i - x_{i-1}$  è costante. L'insieme di tali suddivisioni è numerabile:

$$\mathcal{D}_n = \{x_i = ib/n, \quad i = 0, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_i - x_{i-1} = b/n.$$

Per ciascun  $n$  si ha

$$S_n := S(\mathcal{D}_n, f) = \sum_{i=1}^n \left( \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f \right) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{ib}{n} \right)^2 \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

che si sa calcolare esplicitamente (si veda l'Esercizio 1.17):

$$S_n = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{e analogamente} \quad s_n := s(\mathcal{D}_n, f) = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Poiché  $S_n$  è decrescente e  $s_n$  è crescente (lo studente controlli), si conclude che

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} S(\mathcal{D}_n, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{b^3}{3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s(\mathcal{D}_n, f).$$

Quindi, nel caso in esame,  $b^3/3$  è il candidato naturale per rappresentare l'area della regione  $R$ .

**ESEMPIO 8.2**

Riconsideriamo la Figura 8.3: con l'operazione di passaggio all'estremo superiore/inferiore stiamo prendendo suddivisioni sempre più fini, quindi, almeno intuitivamente, approssimazioni sempre migliori dell'"area" della regione  $R$ . Perciò, almeno nel caso di una funzione non negativa, se i due valori nella (8.5) coincidono allora tale valore comune, l'integrale di  $f$  in  $[a, b]$ , fornisce una definizione analitica dell'area di  $R$ :

**DEFINIZIONE 8.4**

Una funzione limitata  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **integrabile secondo Riemann** nell'intervallo (limitato)  $[a, b]$  se risulta

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

tale valore è detto **integrale di Riemann** di  $f$  in  $[a, b]$  ed è con il simbolo  $\int_a^b f(x) dx$ ; cioè

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f).$$

La  $f$  è detta **funzione integranda** e  $[a, b]$  **dominio di integrazione**.

Altre notazioni per l'integrale di una funzione in un intervallo  $I = [a, b]$  sono



$$\int_I f(x) dx, \quad \int_a^b f, \quad \int_I f.$$

L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo  $I = [a, b]$  si indica con  $\mathcal{R}(a, b)$  o  $\mathcal{R}(I)$ .

Segue immediatamente dalla (8.4) e dalla definizione di integrale che, se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ ,

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f. \quad (8.6)$$

Formalizziamo ora il concetto di area. Sia  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ ,  $f \geq 0$  in  $[a, b]$ , e sia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(si veda Figura 8.4). Allora si dice **area** di  $R$  il numero

$$\text{area } R := \int_a^b f(x) dx.$$

Si osservi che in questo caso le somme inferiori forniscono un valore dell'area approssimato per difetto, quelle superiori per eccesso. Tuttavia l'integrale di Riemann è stato definito anche per funzioni che cambiano segno, quindi è naturale chiedersi se abbia un significato geometrico anche in questo caso.

Consideriamo prima una funzione negativa, come in Figura 8.5. In tal caso

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}.$$

D'altra parte, se  $f$  è negativa allora  $-f(x) \geq 0$ , ed è quindi naturale considerare l'insieme

$$\tilde{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq -f(x)\}$$

(si veda Figura 8.6). Come vedremo nella parte (i) del Teorema 8.9,

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (-f(x)) dx = \text{area } \tilde{R}.$$

Poiché gli insiemi  $R$  e  $\tilde{R}$  sono equivalenti, è quindi naturale definire

$$\text{area } R := -\int_a^b f(x) dx, \quad \text{ovvero} \quad \int_a^b f(x) dx = -\text{area } R.$$

Quindi l'integrale di una funzione non positiva rappresenta *meno* l'area della regione  $R$ .

Consideriamo infine il caso generale. Come sappiamo, si può scrivere (si veda Figura 8.7)

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad \text{dove} \quad f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

Ragionando come prima (si veda il Teorema 8.9(i)) si verifica che

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_+(x) dx - \int_a^b f_-(x) dx = \text{area } R_+ - \text{area } R_-,$$

dove

$$R_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_{\pm}(x)\}.$$

### Integrale e area

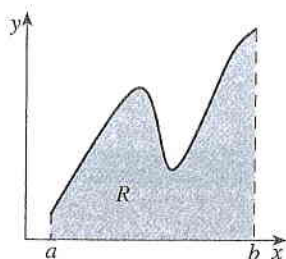


Figura 8.4

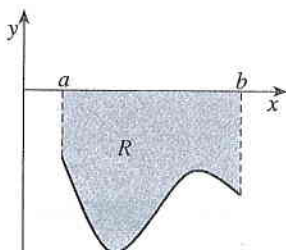


Figura 8.5

$$\int_a^b f = -\text{area } R$$

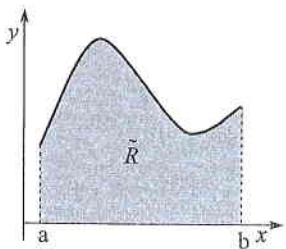


Figura 8.6

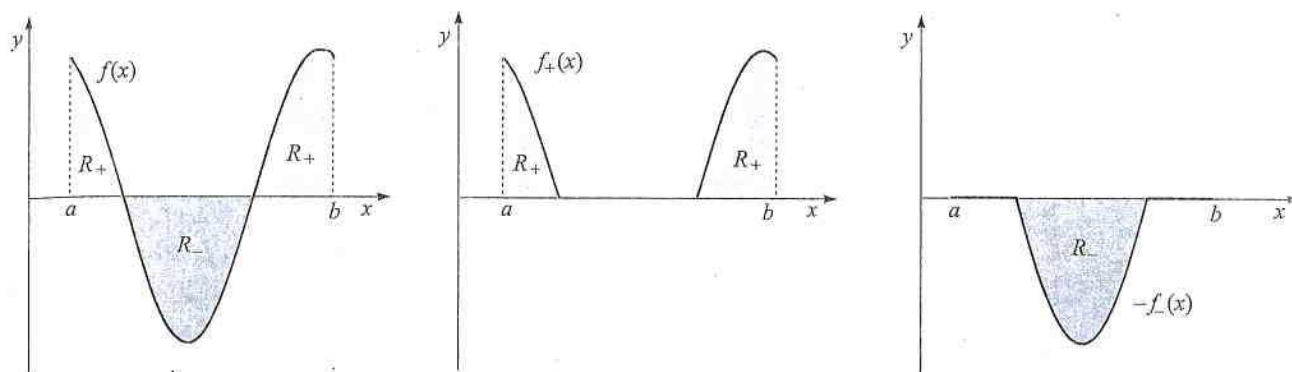


Figura 8.7  $\int_a^b f(x)dx = \text{area}(R_+) - \text{area}(R_-)$ .

Perciò, in conclusione, l'integrale di Riemann si interpreta geometricamente come l'area con segno: ogni area che si trova sotto l'asse delle  $x$  viene contata come negativa, e viceversa.

Esaminiamo alcune semplici funzioni rispetto al problema dell'integrabilità.

#### ESEMPIO 8.3

Le funzioni costanti sono integrabili su un qualsiasi intervallo  $[a, b]$ : se  $f(x) = c$  per ogni  $x \in [a, b]$  allora

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a) = s(\mathcal{D}, f)$$

ovvero

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

Non tutte le funzioni limitate sono integrabili secondo Riemann, come è evidenziato nel seguente esempio.

#### ESEMPIO 8.4

Consideriamo la **funzione di Dirichlet** nell'intervallo  $[0, 1]$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per la densità dei numeri razionali e dei numeri irrazionali in  $\mathbb{R}$ , si ha che per ogni suddivisione  $\mathcal{D}$  di  $[0, 1]$

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \quad \text{e} \quad S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

perciò  $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = 0 < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = 1$  e  $f$  non è integrabile.

Nel seguito parleremo di integrabilità di una funzione sottintendendo l'espressione "secondo Riemann".

## 8.2 Un criterio di integrabilità e classi di funzioni integrabili

Dalla caratterizzazione (1.10) e (1.11) dell'estremo superiore e inferiore e dalla definizione di integrale segue facilmente il seguente risultato.

## Dimostrazione

**TEOREMA 8.5**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Allora  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{D}_\varepsilon \text{ suddivisione di } [a, b] : S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon. \quad (8.7)$$

La condizione (8.7) permette di provare l'integrabilità di alcune classi di funzioni. Innanzitutto, le funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato sono ivi integrabili:

**TEOREMA 8.6**

Se  $f \in C([a, b])$ , allora  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ .

## Dimostrazione

Il risultato è una conseguenza del teorema di Heine-Cantor, secondo il quale  $f$  è anche uniformemente continua in  $[a, b]$ . Allora, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  per ogni  $x, y \in [a, b]$  con  $|x - y| < \delta_\varepsilon$ . In particolare, scegliendo una suddivisione  $\mathcal{D}_\varepsilon$  di ampiezza  $|\mathcal{D}_\varepsilon| < \delta_\varepsilon$ , risulta che

$$M_i - m_i = \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f - \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f - \min_{[x_{i-1}, x_i]} f < \varepsilon$$

dove abbiamo applicato il teorema di Weierstrass ad  $f$  in  $[x_{i-1}, x_i]$ . Perciò

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

che, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  e per il Teorema 8.5, prova la tesi.

Sempre applicando il Teorema 8.5 si può dimostrare il seguente risultato.

**TEOREMA 8.7**

Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è monotona, allora  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ .

## Dimostrazione

Supponiamo che  $f$  sia crescente (il caso opposto si tratta in maniera analoga). Si noti che  $f$  è limitata:  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  per ogni  $x \in [a, b]$ . Se  $f(a) = f(b)$ , allora  $f$  è costante e quindi integrabile (si veda l'Esempio 8.3). Altrimenti, fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\mathcal{D}_\varepsilon$  una suddivisione così fine che  $|\mathcal{D}_\varepsilon| < \varepsilon / (f(b) - f(a))$ . Osservando che  $f(x_{i-1}) \leq m_i \leq M_i \leq f(x_i)$ , si ha

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq |\mathcal{D}_\varepsilon| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = |\mathcal{D}_\varepsilon| (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

e l'integrabilità segue dal Teorema 8.5.

Enunciamo infine una semplice generalizzazione del Teorema 8.7.



**TEOREMA 8.8**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se  $f$  ha un numero finito di punti di discontinuità allora  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ .

Dimostrazione 

Sottolineiamo che quest'ultimo risultato può non valere se la funzione ha un numero *infinito* di punti di discontinuità: per esempio la funzione di Dirichlet, che è discontinua in ogni punto dell'intervallo di definizione, non è integrabile (si veda l'Esempio 8.4). D'altra parte, geometricamente non è sorprendente che un numero *finito* di punti di discontinuità non sia rilevante per il concetto di integrale; si pensi all'area di due rettangoli consecutivi, come in Figura 8.8.

Il concetto di integrale è stato introdotto attraverso le somme superiori e inferiori, ma è di grande utilità pratica, in particolare nel calcolo numerico degli integrali, considerare anche le **somme integrali di Riemann**,

$$\sigma(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^n \mu_i (x_i - x_{i-1})$$

dove  $\mu_i$  sono numeri compresi tra  $m_i$  e  $M_i$ :

$$\mu_i \in [m_i, M_i] \quad \text{per ogni } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ovviamente

$$s(\mathcal{D}, f) \leq \sigma(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f)$$

e si può dimostrare che, se  $f$  è integrabile in  $[a, b]$ , per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\left| \sigma(\mathcal{D}, f) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \mathcal{D} \text{ con } |\mathcal{D}| < \delta$$

indipendentemente dalla scelta dei valori  $\mu_i \in [m_i, M_i]$ .

Sia  $\rho \in C([0, L])$  la densità di massa lineare di una barra di lunghezza  $L$ . Presa una qualunque suddivisione  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = L$  di  $[0, L]$ , siano

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad m_i = \rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

e sia  $x_b^{(n)}$  il baricentro delle  $n$  masse  $m_i$  appese nei punti  $\xi_i$ :

$$x_b^{(n)} = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i m_i \right) / \left( \sum_{i=1}^n m_i \right)$$

(si veda il Filo rosso). Utilizzando le somme di Riemann, giustificare la formula per il baricentro della barra:

$$x_b = \frac{1}{M} \int_0^L x \rho(x) dx, \quad \text{dove } M := \int_0^L \rho(x) dx.$$

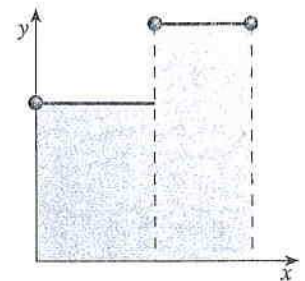


Figura 8.8

**ESERCIZIO 8.1**Dimostrazione 

## 8.3 Proprietà dell'integrale

Nei seguenti teoremi sono elencate alcune delle principali proprietà di cui gode l'operazione di integrazione.

**TEOREMA 8.9**

Siano  $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ . Allora:

(i) per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(a, b)$  e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

(ii) se  $f \leq g$  in  $[a, b]$ , risulta  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ ;

(iii) (proprietà di additività rispetto all'intervallo di integrazione) se  $c \in (a, b)$ , risulta  $f \in \mathcal{R}(a, c)$ ,  $f \in \mathcal{R}(c, b)$  e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \tag{8.8}$$

viceversa, se  $f \in \mathcal{R}(a, c)$  e  $f \in \mathcal{R}(c, b)$  si ha  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e vale la (8.8);

(iv)  $f_+, f_-, |f| \in \mathcal{R}(a, b)$  e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \tag{8.9}$$

Mentre gli enunciati (i), (ii) e (iii) sono facili da interpretare, può essere utile illustrare brevemente la disuguaglianza (8.9). Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ha segno costante in  $[a, b]$ , allora la (8.9) è banale e vale con il segno di uguaglianza:

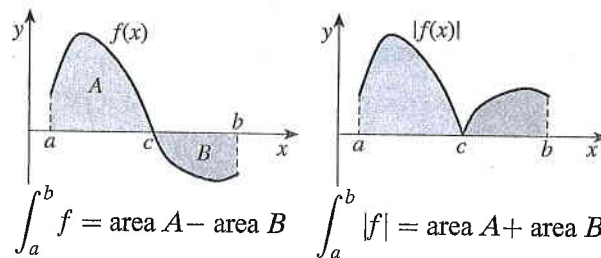
$$\int_a^b |f| = \int_a^b f \quad \text{se } f \geq 0, \quad \int_a^b |f| = - \int_a^b f \quad \text{se } f \leq 0.$$

Se invece  $f$  cambia segno, le "aree con segno" possono cancellarsi: per esempio, come illustrato in Figura 8.9, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $f \geq 0$  in  $[a, c]$  e  $f \leq 0$  in  $[c, b]$ , allora utilizzando (i) e (iii) si ottiene

$$\int_a^b f = \int_a^c |f| - \int_c^b |f|, \quad \text{mentre} \quad \int_a^b |f| = \int_a^c |f| + \int_c^b |f|.$$

e la (8.9) segue dalla disuguaglianza triangolare.

Figura 8.9



Anche il seguente risultato ha una facile interpretazione geometrica (si veda Figura 8.10).

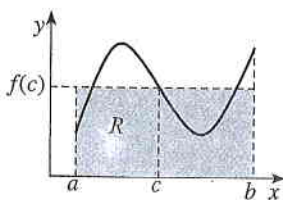


Figura 8.10

$$\text{area } R = \int_a^b f(x) dx$$

**TEOREMA 8.10** Teorema della media

Siano  $f \in \mathcal{R}(a, b)$ ,  $m = \inf_{[a, b]} f$  e  $M = \sup_{[a, b]} f$ . Allora

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M; \tag{8.10}$$

in particolare, se  $f$  è continua in  $[a, b]$  esiste  $c \in [a, b]$  tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$



**Dimostrazione**

La (8.10) è equivalente alla (8.6). Se inoltre  $f$  è continua in  $[a, b]$ , allora per il Teorema di Weierstrass assume tutti i valori compresi tra  $m$  e  $M$ : quindi, per la

(8.10), esiste  $c \in [a, b]$  tale che  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ , e la tesi segue moltiplicando per  $b-a$ .

La quantità  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  è detta **valor medio** di  $f$  sull'intervallo  $[a, b]$ . Se  $f$  è una funzione del tipo  $f: [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$  naturale, tale che

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{se } x \in [i-1, i) \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ \alpha_n & \text{se } x \in [n-1, n] \end{cases}$$

con  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , allora il valor medio di  $f$  nell'intervallo  $[0, n]$  coincide con la media aritmetica degli  $n$  numeri  $\alpha_i$ :

$$\frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Come vedremo, è molto conveniente poter scrivere  $\int_a^b f(x) dx$  anche se  $a \geq b$ ; si pone:

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx \quad \text{se } a > b \quad \text{e} \quad \int_a^a f(x) dx := 0.$$

Con questa convenzione, non è difficile verificare che se  $f$  è integrabile in un intervallo  $I$  allora risulta che per ogni  $a, b, c \in I$ , indipendentemente dal loro ordine,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (8.11)$$

Anche la (8.10) continua a valere indipendentemente dall'ordine di  $a$  e  $b$ , mentre la parte (ii) del Teorema 8.9 deve essere così modificata:

$$f \leq g \Rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g. \quad (8.12)$$

## 8.4 Funzioni integrali. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Il seguente concetto giocherà un ruolo centrale in questo paragrafo.

**DEFINIZIONE 8.11**

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $[a, b]$  e sia  $c \in [a, b]$ . La funzione  $F_c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definita come

$$F_c(x) := \int_c^x f(s) ds \quad \forall x \in [a, b] \quad (8.13)$$

si chiama **funzione integrale di  $f$  relativa al punto  $c$** .

Illustriamo questo concetto attraverso un semplice esempio.



**ESEMPIO 8.5**

Si vuole calcolare la funzione integrale  $F_2$  della funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x \in [1, 3] \\ 3 & \text{se } x \in (3, 4] \end{cases}$$

(si veda Figura 8.11a). Procediamo utilizzando le proprietà dell'integrale:

$$\text{se } x \in [1, 3], \text{ allora } F_2(x) = \int_2^x 1 \, ds = x - 2;$$

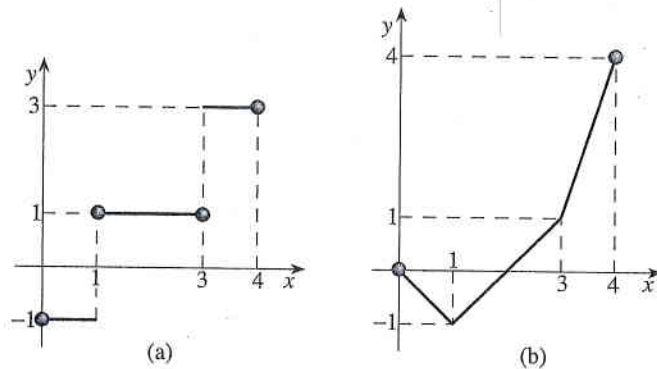
$$\text{se } x \in (3, 4], \text{ allora } F_2(x) = \int_2^3 1 \, ds + \int_3^x 3 \, ds = 1 + 3(x - 3);$$

$$\text{se } x \in [0, 1), \text{ allora } F_2(x) = \int_2^1 1 \, ds + \int_1^x (-1) \, ds = -1 - (x - 1).$$

Pertanto  $F_2$  è data da (si veda Figura 8.11b)

$$F_2(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [0, 1) \\ x - 2 & \text{se } x \in [1, 3] \\ 3x - 8 & \text{se } x \in (3, 4]. \end{cases}$$

**Figura 8.11** La funzione  $f$  dell'Esempio 8.5 (a) e la funzione integrale  $F_2$  (b).



Se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  la funzione integrale definita in (8.13) è continua (in effetti, lipschitziana). Infatti, poiché  $f$  è limitata, detto  $L = \sup_{[a, b]} |f|$ , si ottiene dalla (8.11) e dal Teorema 8.9 (iv) che per ogni  $x, x_0 \in [a, b]$

$$\left| \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} \right| = \left| \frac{\int_c^x f(s) \, ds - \int_c^{x_0} f(s) \, ds}{x - x_0} \right| = \left| \frac{\int_{x_0}^x f(s) \, ds}{x - x_0} \right| \leq L. \quad (8.14)$$

Il seguente risultato mostra che nei punti in cui  $f$  è continua, la funzione integrale è non solo lipschitziana ma anche derivabile e che la sua derivata è uguale al valore di  $f$  in quel punto. Come si intuisce dal nome, si tratta di un risultato di enorme importanza in quanto stabilisce una relazione tra integrali di Riemann e derivate.

**TEOREMA 8.12** Teorema fondamentale del calcolo integrale

Siano  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  e  $c \in [a, b]$ . Se  $f$  è continua in  $x_0 \in [a, b]$ , allora la funzione integrale  $F_c(x) = \int_c^x f(s) \, ds$  è derivabile in  $x_0$  e risulta

$$F'_c(x_0) = f(x_0). \quad (8.15)$$

In particolare, se  $f \in C([a, b])$ , allora  $F_c \in C^1([a, b])$  e  $F'_c(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

**Dimostrazione**

Come già visto in (8.14), il rapporto incrementale di  $F_c(x)$  è uguale al valor medio di  $f$  nell'intervallo compreso tra  $x$  e  $x_0$ :

$$\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s) ds$$

quindi basta dimostrare che il valor medio di  $f$  converge a  $f(x_0)$  per  $x \rightarrow x_0$ . Ma questo segue facilmente dalla continuità di  $f$  in  $x_0$ : per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{se } x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

allora, per la (8.12), per ogni  $x \in [a, b]$  tale che  $|x - x_0| < \delta$  si ha

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(s) ds \begin{cases} < \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) ds = f(x_0) + \varepsilon \\ > \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) ds = f(x_0) - \varepsilon \end{cases}$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

Riconsideriamo l'Esempio 8.5. Per definizione  $F_2(2) = 0$ ; per il Teorema 8.12,  $F_2$  è continua in  $[0, 4]$ , ed  $F_2'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in [0, 4] \setminus \{1, 3\}$ . Per quest'ultima proprietà, esistono  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$  tali che

$$F_2(x) = \begin{cases} C_1 - x & \text{se } x \in [0, 1) \\ C_2 + x & \text{se } x \in (1, 3) \\ C_3 + 3x & \text{se } x \in (3, 4]. \end{cases}$$

Imponendo che  $F_2(0) = 0$  si ottiene  $C_1 = 0$ , e imponendo la continuità in  $x = 1$  e  $x = 3$  si ottiene  $C_2 = -2$  e  $C_3 = -8$ .

Si osservi che la definizione (8.13) di funzione integrale si estende a funzioni  $f$  definite su intervalli aperti e/o illimitati  $(a, b)$ ,  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , purché  $c \in (a, b)$  e purché  $f$  sia integrabile in ogni sottointervallo di  $(a, b)$ :  $f \in \mathcal{R}(a', b')$  per ogni  $[a', b'] \subset (a, b)$ .

La funzione integrale  $F_0$  della funzione segno,  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , è ben definita, e si ha:

$$F_0(x) = \int_0^x f(x) dx = \begin{cases} -\int_x^0 (-1) dx = -x & \text{se } x < 0 \\ \int_0^x 1 dx = x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Pertanto  $F_0(x) = |x|$ . Si noti che  $F_0'(x) = \operatorname{sgn} x$  per  $x \neq 0$  (come affermato dal Teorema fondamentale del calcolo integrale), mentre  $F_0$  non è derivabile in  $x = 0$  (dove infatti le ipotesi del Teorema non sono verificate:  $\operatorname{sgn} x$  non è continua in  $x = 0$ ).

Calcolare la funzione integrale  $F_c(x)$  nei seguenti casi:

- a)  $c = 0, f(x) = \begin{cases} -5 & x \in [-2, 0) \\ 1 & x \in [0, 3]; \end{cases}$       b)  $c = 1, f(x) = \begin{cases} -5 & x \in [-2, 0) \\ 1 & x \in [0, 3]; \end{cases}$   
 c)  $c = 0, f(x) = H(x)$  (la funzione di Heaviside);

**ESEMPIO 8.6****ESEMPIO 8.7****ESECIZIO 8.2**

- d)  $c = -1, f(x) = \operatorname{sgn} x$ ;  
 e)  $c = 0, f(x) = \max\{[x], 0\}$  ( $[\cdot]$  denota la funzione parte intera).

### 8.4.1 Studio di funzioni integrali

Lo studio delle funzioni integrali è basato sul Teorema 8.12 e presenta alcune caratteristiche particolari che conviene illustrare attraverso esempi.

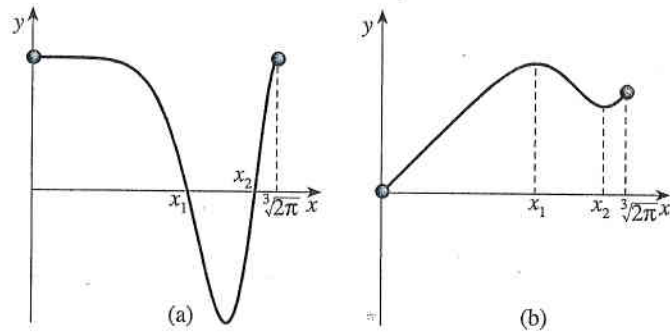
#### ESEMPIO 8.8

Si consideri la funzione

$$h(x) = \int_0^x \cos(s^3) ds \quad \text{per } 0 \leq x \leq \sqrt[3]{2\pi}.$$

Per il teorema precedente,  $h'(x) = \cos(x^3)$  per ogni  $0 \leq x \leq \sqrt[3]{2\pi}$ . Quindi i punti critici di  $h$  sono  $x_1 := \sqrt[3]{\pi/2}$  e  $x_2 := \sqrt[3]{3\pi/2}$ ;  $h$  è crescente in  $(0, x_1)$  e in  $(x_2, \sqrt[3]{2\pi})$  e decrescente in  $(x_1, x_2)$ , quindi  $x_1$  e  $\sqrt[3]{2\pi}$  sono punti di massimo locale per  $h$  e  $0$  e  $x_2$  sono punti di minimo locale (si veda Figura 8.12). Inoltre  $h''(x) = (\cos(x^3))' = -3x^2 \sin(x^3)$  per ogni  $0 < x \leq \sqrt[3]{2\pi}$ , quindi  $h$  è convessa in  $(\sqrt[3]{\pi}, \sqrt[3]{2\pi})$  e concava in  $(0, \sqrt[3]{\pi})$ . Per selezionare i punti di estremo assoluto, dovremmo calcolare o stimare i valori della funzione nei punti di estremo locale; ciò può risultare piuttosto complicato per una funzione integrale. In questo caso, come suggerisce la forma del grafico di  $\cos(x^3)$  (in particolare, l'area delle regioni piane da esso individuate), è possibile dimostrare, ma lo omettiamo, che  $h(x_2) > 0 = h(0)$  e che  $h(\sqrt[3]{2\pi}) < h(x_1)$ . Pertanto  $x = 0$  è il punto di minimo assoluto e  $x = x_1$  è il punto di massimo assoluto.

**Figura 8.12** Le funzioni  $x \mapsto \cos(x^3)$  (a) e  $x \mapsto \int_0^x \cos(t^3) dt$  (b).



Per studiare il comportamento di una funzione integrale  $F_c(x)$  nell'intorno del punto  $c$ , è molto utile ricorrere anche al Teorema 7.22 di de l'Hôpital.

#### ESEMPIO 8.9

Si vuole determinare, purché esista, il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^3} \quad \text{con } f(x) = \int_0^x (1 + \sin^2(\sqrt{s}) - e^s) ds.$$

Per il Teorema 8.12,  $f'(x) = 1 + \sin^2 \sqrt{x} - e^x$ . Si ha quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^3} &? \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sin^2 \sqrt{x} - e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(x^{1/2} - \frac{x^{3/2}}{6} + o(x^2)\right)^2 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{3x^2} \\ &= \frac{-\frac{5}{6}x^2 + o(x^2)}{3x^2} = -\frac{5}{18}. \end{aligned}$$



Come ogni altra funzione, sotto opportune condizioni una funzione integrale può essere composta con altre funzioni: in tal caso si ottengono funzioni in cui gli estremi di integrazione sono essi stessi delle funzioni. Vediamo un esempio.

Calcoliamo (se esiste) la derivata della funzione

$$g(x) = \int_{2x+1}^{\sin x} (2s^2 - 5s + 6) ds \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Posto

$$F_0(y) := \int_0^y (2s^2 - 5s + 6) ds \quad \text{per } y \in \mathbb{R},$$

per la (8.11) possiamo scrivere

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{2x+1}^0 (2s^2 - 5s + 6) ds + \int_0^{\sin x} (2s^2 - 5s + 6) ds \\ &= - \int_0^{2x+1} (2s^2 - 5s + 6) ds + \int_0^{\sin x} (2s^2 - 5s + 6) ds \\ &= -F_0(2x+1) + F_0(\sin x). \end{aligned}$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale  $F_0'(y) = 2y^2 - 5y + 6$  per ogni  $y \in \mathbb{R}$ , quindi, per la regola della catena,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -F_0'(2x+1)(2x+1)' + F_0'(\sin x)(\sin x)' = -2F_0'(2x+1) + F_0'(\sin x) \cos x \\ &= -2(2(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 6) + (2 \sin^2 x - 5 \sin x + 6) \cos x \\ &= -16x^2 + 4x - 6 + 2 \sin^2 x \cos x - 5 \sin x \cos x + 6 \cos x. \end{aligned}$$

In generale, se  $f \in C([a, b])$  e  $\alpha, \beta : X \rightarrow [a, b]$ , è ben definita la funzione

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s) ds, \quad x \in X.$$

Se inoltre  $\alpha$  e  $\beta$  sono derivabili in  $X$ , allora procedendo come nell'Esempio precedente si ottiene

$$g'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

a)  $\int_1^x \min\{\arctg^2 s, 1\} ds;$

b)  $\int_0^{1/(|x|+1)} e^{s^2} ds.$

Determinare i punti di massimo locale e i punti di minimo locale delle seguenti funzioni:

a)  $\int_0^x (s^2 - 3s + 2) ds;$

c)  $\int_{\sin x}^{2 \sin x} s^2 ds;$

b)  $\int_0^{x^2} (s^2 - 3s + 2) ds;$

d)  $\int_0^{x^4} \sin\left(\frac{\pi}{2} \sqrt[4]{s}\right) ds, x \in I = [-3, 3].$

ESEMPIO 8.10

ESERCIZIO 8.3

ESERCIZIO 8.4

## ESERCIZIO 8.5

Calcolare i seguenti limiti:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sin(s^2 - s) ds$ ;                      c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \int_c^{x^2} e^{s^2} ds, c \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} \left( -x - \frac{1}{6} x^6 + \int_0^x e^{s^5} ds \right), \alpha \in \mathbb{R}$ ;

## 8.5 Funzioni primitive - integrale indefinito

Se  $f \in C([a, b])$ , il Teorema 8.12 garantisce l'esistenza di almeno una funzione  $F$  (una funzione integrale) tale che la derivata di  $F$  è uguale a  $f$  in ogni punto di  $[a, b]$ . Le funzioni  $F$  che verificano questa proprietà si chiamano *primitive* di  $f$ .

## DEFINIZIONE 8.13

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Una funzione  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **primitiva** o **funzione primitiva** di  $f$  in  $I$  se  $F$  è derivabile in  $I$  e se

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in I.$$

In altre parole, il Teorema fondamentale del calcolo implica che ogni funzione continua in un intervallo  $I$  ammette una funzione primitiva in  $I$ .

## ESEMPIO 8.11

Una primitiva di  $x^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) in  $\mathbb{R}^+$  è  $x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$  (se  $\alpha \neq -1$ ). Se  $\alpha = -1$ , una primitiva di  $1/x$  in  $(-\infty, 0)$  e in  $(0, +\infty)$  è  $\log|x|$ .



Si osservi che **non tutte le funzioni  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  ammettono funzioni primitive**. L'esempio più immediato è la funzione segno:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Infatti, se per assurdo esiste una primitiva  $F$  di  $f$  in  $\mathbb{R}$ , allora, per il Teorema 7.23 deve essere

$$F'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$$

e analogamente  $F'_-(0) = -1$ . D'altra parte, per definizione di primitiva,  $F$  è derivabile in  $x = 0$ , quindi  $F'(0) = F'_+(0) = F'_-(0)$  che è assurdo. Ragionando allo stesso modo si dimostra facilmente che se una funzione ha una discontinuità di prima specie in un intervallo  $I$ , non ammette primitive in  $I$ .

Si osservi anche che **il concetto di primitiva e quello di funzione integrale non coincidono**. Ad esempio, come abbiamo appena visto, non esiste alcuna primitiva della funzione segno; d'altra parte la funzione integrale  $F_0(x)$  esiste e coincide con il valore assoluto di  $x$  (si veda l'Esempio 8.7).

È chiaro che se  $F(x)$  è primitiva di  $f(x)$  in un intervallo  $I$ , anche la funzione  $F(x) + C$  lo è per ogni costante  $C$ . In altre parole una primitiva, se esiste, non è unica. Il seguente risultato asserisce che in un intervallo la primitiva, se esiste, è unica a meno di una costante:

**TEOREMA 8.14**

Siano  $F$  e  $G$  funzioni primitive nell'intervallo  $I$  della medesima  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Allora esiste una costante  $C \in \mathbb{R}$  tale che

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Per dimostrarlo, è sufficiente porre  $H(x) = G(x) - F(x)$ , notare che  $H'(x) = 0$  e ricordare che se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora è costante (si veda la (7.27)).

Se  $f$  è continua in un intervallo  $I$  e  $c \in I$ , per il teorema precedente e per il teorema fondamentale del calcolo integrale le funzioni primitive  $f$  in  $I$  sono tutte e sole le funzioni

$$F_c(x) + C = \int_c^x f(s) ds + C \quad (8.16)$$

dove  $C$  è una qualsiasi costante reale.

Da questa osservazione si deduce immediatamente il seguente risultato.

**COROLLARIO 8.15**

Sia  $f \in C([a, b])$ . Se  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $[a, b]$  allora

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a) \quad (8.17)$$

**Dimostrazione**

La  $F$  è primitiva di  $f$ , quindi, per la (8.16), esiste una costante  $C \in \mathbb{R}$  tale che  $F(x) = F_a(x) + C$ . Poiché  $F_a(a) = 0$ , si ha in particolare  $F(a) = F_a(a) + C = C$  e  $F(b) = F_a(b) + C$ , ovvero

$$F(b) - F(a) = (F_a(b) + C) - C = F_a(b) = \int_a^b f(s) ds.$$

La differenza  $F(b) - F(a)$  si denota anche con simbologie più compatte:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b.$$

Il Corollario 8.15 fornisce lo strumento essenziale per il calcolo degli integrali di Riemann funzioni continue: conoscendo una primitiva  $F$  della funzione integranda  $f$ , il valore dell'integrale di  $f$  nell'intervallo  $(a, b)$  è la differenza dei valori di  $F$  nei due estremi dell'intervallo. Perciò, il Corollario 8.15 riconduce il calcolo di  $\int_a^b f(x) dx$  (con  $f$  continua) alla determinazione dell'insieme delle primitive di  $f$ . Questa osservazione motiva il seguente simbolo:

$$\int f(x) dx$$

denota l'insieme delle primitive (se esistono) della funzione  $f$ . Tale insieme viene detto **integrale indefinito** di  $f$  (talvolta la notazione  $\int f(x) dx$  viene usata anche per indicare una singola primitiva). Invece,  $\int_a^b f(x) dx$  si dice anche **integrale definito** di  $f$  in  $[a, b]$  (per distinguerlo semanticamente dall'integrale indefinito). L'integrale indefinito soddisfa le stesse regole di linearità dell'integrale definito:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$



In altre parole, se  $F$  è una primitiva di  $f$  e  $G$  è una primitiva di  $g$ , allora  $\alpha F + \beta G$  è una primitiva di  $\alpha f + \beta g$ .

Il problema cui ci si è ricondotti, ovvero la determinazione dell'insieme delle primitive, può tuttavia essere molto complesso; infatti, mentre la derivata di una funzione elementare è ancora una funzione elementare, non è affatto detto che le primitive di una funzione elementare siano esprimibili elementarmente o, come si dice in modo equivalente, non è detto che una funzione elementare sia integrabile elementarmente. Per esempio, non sono esprimibili elementarmente le primitive delle seguenti funzioni:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \sin(x^2).$$

Nella Tabella 8.1 sono riportate alcune funzioni e una loro primitiva; tale tabella può essere dedotta immediatamente dalla Tabella 7.1.

**Tabella 8.1**

$f(x)$	una primitiva di $f(x)$
$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log x $
$e^{\alpha x} \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$-\log \cos x $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

**ESEMPIO 8.12**

Si vuole calcolare

$$\int_3^4 e^{2x} dx.$$

Poiché una primitiva di  $e^{2x}$  è  $G(x) = e^{2x}/2$  (si veda la tabella), per la (8.17) risulta

$$\int_3^4 e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_3^4 = \frac{1}{2} (e^8 - e^6).$$

**ESEMPIO 8.13**

Si vuole calcolare l'integrale in  $[-1, 2]$  di

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per il Teorema 8.8,  $f \in \mathcal{R}(-1, 2)$ . Poiché la funzione  $f$  è definita diversamente per  $x \leq 0$  e  $x > 0$ , conviene scrivere:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx.$$

Per quanto osservato nel Paragrafo 8.2, poichè  $f(x)$  e  $e^x$  differiscono in  $[0, 2]$  solo nel punto 0, si ha

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 e^x dx.$$

Quindi, osservando che  $x^2/2$  è una primitiva di  $x$  e che  $e^x$  è una primitiva di  $e^x$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 e^x dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + [e^x]_0^2 \\ &= -0 + \frac{1}{2} + e^2 - 1 = e^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Calcolare i seguenti integrali definiti:

**ESERCIZIO 8.6**

a)  $\int_0^1 \left( 3 \sin x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx;$

d)  $\int_0^3 |2-x| dx;$

b)  $\int_{-2}^{-1} \frac{6}{x} dx;$

e)  $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| dx;$

c)  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \leq 0 \\ \cos x & \text{se } x > 0; \end{cases}$

f)  $\int_0^2 \max\{0, x^\pi - 1\} dx.$

## 8.6 Calcolo degli integrali

In questo paragrafo illustriamo alcune tecniche che permettono di determinare l'integrale definito e l'integrale indefinito per certe classi di funzioni.

### 8.6.1 Integrazione per parti

Sia  $f, g \in C^1([a, b])$ . Allora

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

da cui, integrando in  $[a, b]$ , si ha

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

che, per la (8.17), possiamo riscrivere nel modo seguente

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad (8.18)$$

Per gli integrali indefiniti tale relazione, detta **integrazione per parti**, diventa:

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \quad (8.19)$$

**ESEMPIO 8.14**

Usiamo la (8.19) per determinare una primitiva delle funzioni  $x \mapsto \log x$  (in  $\mathbb{R}^+$ ) e  $x \mapsto xe^x$  (in  $\mathbb{R}$ ). Cominciamo con la funzione  $\log x$ . Ponendo, nella (8.19),  $f'(x) = 1$  e  $g(x) = \log x$  si ha:

$$\begin{aligned}\int \log x \, dx &= \int 1 \cdot \log x \, dx = x \log x - \int x(\log x)' \, dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x(\log x - 1) + C \quad (C \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Per la seconda funzione, prendendo nella (8.19)  $f'(x) = e^x$  e  $g(x) = x$ , si ottiene:

$$\int e^x x \, dx = e^x x - \int e^x x' \, dx = e^x x - \int e^x \, dx = e^x(x - 1) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Si osservi che se avessimo scelto  $f'(x) = x$  e  $g(x) = e^x$  saremmo giunti a dover integrare una funzione più complicata di quella assegnata.

Applicando più volte la (8.18) come nell'Esempio 8.14, si possono facilmente calcolare anche integrali della forma

$$\int x^n \log x \, dx, \quad \int x \log^n x \, dx, \quad \int x^n e^x \, dx, \quad \int x^n \sin x \, dx, \quad \dots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**ESEMPIO 8.15**

Si vuole calcolare l'integrale definito

$$\int_0^\pi e^x \cos(3x) \, dx.$$

Determiniamo prima l'insieme delle primitive della funzione integranda. Integrando per parti (con  $f'(x) = e^x$  e  $g(x) = \cos(3x)$ ) si ottiene

$$\int e^x \cos(3x) \, dx = e^x \cos(3x) - \int e^x \cdot 3(-\sin(3x)) \, dx = e^x \cos(3x) + 3 \int e^x \sin(3x) \, dx$$

e ancora integrando per parti (con  $f'(x) = e^x$  e  $g(x) = \sin(3x)$ ) risulta

$$\int e^x \sin(3x) \, dx = e^x \sin(3x) - 3 \int e^x \cos(3x) \, dx.$$

Perciò

$$\int e^x \cos(3x) \, dx = e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x) - 9 \int e^x \cos(3x) \, dx.$$

L'ultimo termine a destra può essere raccolto a sinistra: perciò

$$10 \int e^x \cos(3x) \, dx = e^x \cos(3x) + 3e^x \sin(3x),$$

ovvero

$$\int e^x \cos(3x) \, dx = \frac{1}{10} e^x \cos(3x) + \frac{3}{10} e^x \sin(3x) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Pertanto

$$\int_0^\pi e^x \cos(3x) \, dx = \left[ \frac{1}{10} e^x \cos(3x) + \frac{3}{10} e^x \sin(3x) \right]_0^\pi = -\frac{1}{10} (e^\pi + 1).$$

Con procedimento analogo a quello seguito nell'Esempio 8.15 si possono determinare integrali indefiniti della forma



$$\int \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx \quad (\text{se } |\alpha| \neq |\beta|), \quad \int e^{\alpha x} \sin(\beta x), \quad \int e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$

$$\int \sin(\alpha x) \sin(\beta x) dx, \quad \int \cos(\alpha x) \cos(\beta x) dx$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Determinare i seguenti integrali indefiniti:

a)  $\int x^{13} \log x \, dx;$

d)  $\int e^x \sin 2x \, dx;$

b)  $\int \log^3 x \, dx;$

e)  $\int \sin^2 x \, dx.$

c)  $\int \sin(3x) \cos x \, dx;$

ESERCIZIO 8.7

Calcolare i seguenti integrali definiti:

a)  $\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x} dx;$

d)  $\int_0^{\pi/2} \cos x \cos(2x) dx;$

b)  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x \, dx;$

e)  $\int_{1/e}^e |\log x| dx.$

c)  $\int_0^{2\pi} \sin(3x) \cos(2x) dx;$

ESERCIZIO 8.8

### 8.6.2 Integrazione per sostituzione

Sia  $f \in C([a, b])$  e sia  $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi \in C^1([c, d])$  e  $\varphi([c, d]) = [a, b]$ . Allora esistono  $\alpha, \beta \in [c, d]$  tali che

$$\varphi(\alpha) = a \quad \varphi(\beta) = b.$$

Se  $F$  è una primitiva di  $f$  in  $[a, b]$ , per la regola della catena

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \text{per ogni } t \in [c, d]$$

ovvero  $F \circ \varphi$  è una primitiva di  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  in  $[c, d]$ ; quindi, per la (8.17),

$$\int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

cioè

$$\boxed{\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(s) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt} \quad (8.20)$$

Se  $\varphi$  è iniettiva in  $[c, d]$  possiamo riscrivere la (8.21) nella forma

$$\boxed{\int_a^b f(s) ds = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt} \quad (8.21)$$

Per gli integrali indefiniti possiamo scrivere formalmente la relazione

$$\int f(s) ds = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (8.22)$$

in cui si vede che la *sostituzione*  $s = \varphi(t)$  permette di passare da un'integrale all'altro:

$$s = \varphi(t), \quad \text{quindi} \quad \frac{ds}{dt} = \varphi'(t), \quad \text{ovvero} \quad "ds = \varphi'(t)dt".$$

Talvolta si riconosce nella funzione integranda la struttura dell'integrale a destra nella (8.22).

### ESEMPIO 8.16

Si vuole determinare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx \quad \text{e} \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx.$$

Notando che  $\cos x \, dx = (\sin x)' dx$ , applichiamo la (8.22) con  $t = x$  e  $s = \varphi(x) = \sin x$ : si ottiene

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int s^2 ds.$$

L'integrale a destra è elementare (si veda la Tabella 8.1):

$$\int s^2 ds = \frac{1}{3} s^3 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Ricordando che  $s = \sin x$  e sostituendo, si conclude che

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \sin^3 x + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Allo stesso modo, ponendo  $t = x$  e  $s = \varphi(x) = x^2$  (quindi  $\varphi'(x) = 2x$ ), si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \, ds = \frac{1}{2} \arcsin s + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

### ESEMPIO 8.17

Per sostituzione, si ottengono in modo immediato le seguenti primitive:

$$\int (\varphi(t))^\gamma \varphi'(t) dt = \begin{cases} \frac{(\varphi(t))^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C & \text{se } \gamma \neq -1 \\ \log \varphi(t) + C & \text{se } \gamma = -1 \end{cases}$$

Infatti, posto  $s := \varphi(t)$ , dalla (8.22) si ottiene

$$\int (\varphi(t))^\gamma \varphi'(t) dt = \int s^\gamma ds = \begin{cases} \frac{s^{\gamma+1}}{\gamma+1} + C & \text{se } \gamma \neq -1 \\ \log |s| + C & \text{se } \gamma = -1 \end{cases}$$

da cui segue la conclusione sostituendo  $s = \varphi(t)$ .

In generale, si applica la (8.22) effettuando una scelta opportuna della sostituzione, dettata spesso dalla struttura della funzione integranda.

Si vuole determinare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

L'idea è quella di operare una sostituzione per ricondursi all'integrale di una funzione razionale; è naturale allora porre  $\sqrt{x} = t$ , ovvero  $x = \varphi(t) = t^2$  e  $\varphi'(t) = 2t$ . Applicando la (8.22) con  $s = x$ , si ottiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{t+1} = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2t - 2 \int \frac{dt}{t+1}.$$

Osserviamo infine che il restante integrale è del tipo trattato nell'Esempio 8.17, con  $\varphi(t) = t+1$  e  $\gamma = -1$ . Perciò

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = 2t - 2\log|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\log|\sqrt{x+1}| + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

## ESEMPIO 8.18

Per il calcolo di integrali definiti, si avverte lo studente che nell'applicare la regola di integrazione per sostituzione spesso si dimentica di cambiare i valori degli estremi di integrazione giungendo così a risultati sbagliati. Come si osserva nel prossimo esempio, dopo aver operato il cambiamento di variabili i nuovi estremi di integrazione devono essere sostituiti a quelli originali.



## ESEMPIO 8.19

Per calcolare

$$\int_1^2 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}},$$

poniamo  $x = \log t = \varphi(t)$ . Poiché la funzione  $\varphi(t) = \log t$  è invertibile, e  $\varphi^{-1}(x) = e^x$ , i nuovi estremi di integrazione sono

$$\alpha = \varphi^{-1}(1) = e^1 = e, \quad \beta = \varphi^{-1}(2) = e^2.$$

Essendo  $\varphi'(t) = 1/t$ , risulta quindi

$$\int_1^2 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_e^{e^2} \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_e^{e^2} \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{arctg} t]_e^{e^2} = \operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e.$$

Si poteva giungere allo stesso risultato senza far intervenire direttamente la funzione  $\log t$ : notando che  $e^x dx = (e^x)' dx$  e procedendo come nell'Esempio 8.16, si ottiene

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arctg} s + C = \operatorname{arctg} e^x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

da cui

$$\int_1^2 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = [\operatorname{arctg} e^x]_1^2 = \operatorname{arctg} e^2 - \operatorname{arctg} e.$$

Si noti che se il dominio di integrazione  $I$  è simmetrico rispetto a  $x = 0$ , ovvero  $I = [-a, a]$ , allora

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx & \text{se } f \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } f \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Per verificarlo, basta scrivere

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$



ed effettuare la sostituzione  $x = -t$  nel primo integrale. Se ad esempio  $f$  è pari, si ottiene

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t) \cdot (-1) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(t) dt = \int_0^a f(x) dx.$$

**ESEMPIO 8.20**

Poiché la funzione integranda è pari e il dominio è simmetrico, si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|} + 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|} + 1} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + 1} dx.$$

Ricordando l'Esempio 8.18, si ottiene quindi

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|} + 1} dx = 4[\sqrt{x} - \log|\sqrt{x} + 1|]_0^1 = 4(1 - \log 2).$$

I metodi di integrazione per parti e per sostituzione possono essere combinati, come mostra il seguente esempio.

**ESEMPIO 8.21**

Si vuole determinare una primitiva in  $(0, +\infty)$  della funzione  $f(x) = \cos(\log x)$ . Per sostituzione, ponendo  $x = e^t$  (quindi  $t = \log x$ ), si ottiene

$$\int \cos(\log x) dx = \int e^t \cos t dt$$

che si integra per parti:

$$\int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = e^t \sin t + e^t \cos t - \int e^t \cos t dt.$$

Pertanto

$$\int e^t \cos t dt = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t) + C,$$

ovvero

$$\int \cos(\log x) dx = \frac{1}{2} x (\sin(\log x) + \cos(\log x)) + C.$$

**ESERCIZIO 8.9**

Determinare i seguenti integrali indefiniti:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int e^{\sqrt{x}} dx;$                      | c) $\int (x^5 \sin(4x^3) - e^{2x}) dx;$ |
| b) $\int \frac{e^{\frac{2}{2+x}}}{(2+x)^3} dx;$ | d) $\int x(7+4x^2)^{3/2} dx.$           |

**ESERCIZIO 8.10**

Determinare i seguenti integrali definiti:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int_{-2}^0 x \sin(x^2) e^{2x^2} dx;$                 | c) $\int_{-4}^4 \log(1 + \sqrt{ x }) dx;$     |
| b) $\int_1^e \frac{1}{x} \cos(\log x) \cos(\log x^3) dx;$ | d) $\int_{1/(2e)}^{1/e} \frac{dx}{x \log x}.$ |

### 8.6.3 Integrazione delle funzioni razionali

Ricordiamo che, per il Corollario 1.20, un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali,  $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  ( $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$ ), ammette un'unica scomposizione in fattori irriducibili in  $\mathbb{R}$ :

$$Q(x) = a_n (x - b_1)^{n_1} \dots (x - b_j)^{n_j} (x^2 + c_1 x + d_1)^{m_1} \dots (x^2 + c_k x + d_k)^{m_k} \quad (8.23)$$

dove  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, j$  sono le radici reali distinte di  $Q(x)$ , ciascuna con molteplicità  $n_i$ , e i polinomi  $x^2 + c_i x + d_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sono irriducibili in campo reale (ovvero  $x^2 + c_i x + d_i = (x - \lambda_i)(x - \bar{\lambda}_i)$ , con  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  di molteplicità  $m_i$ ); quindi

$$n = n_1 + \dots + n_j + 2m_1 + \dots + 2m_k.$$

Omettiamo la dimostrazione del seguente risultato.

#### TEOREMA 8.16 Scomposizione in fratti semplici

Siano  $P(x)$  e  $Q(x)$  due polinomi su  $\mathbb{R}$  tali che il grado di  $P(x)$  sia minore del grado di  $Q(x)$ , e sia (8.23) la rappresentazione di  $Q(x)$  in fattori irriducibili. Allora esiste un'unica rappresentazione di  $P(x)/Q(x)$  della forma

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - b_1} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x - b_1)^{n_1}} + \dots + \frac{A_{j1}}{x - b_j} + \dots + \frac{A_{jn_j}}{(x - b_j)^{n_j}} \\ & + \frac{C_{11}x + D_{11}}{x^2 + c_1x + d_1} + \dots + \frac{C_{1m_1}x + D_{1m_1}}{(x^2 + c_1x + d_1)^{m_1}} \\ & + \dots + \frac{C_{k1}x + D_{k1}}{x^2 + c_kx + d_k} + \dots + \frac{C_{km_k}x + D_{km_k}}{(x^2 + c_kx + d_k)^{m_k}}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Sia ora  $f(x)$  una funzione razionale, ovvero  $f(x) = R(x)/Q(x)$ , con  $R(x)$  e  $Q(x)$  polinomi su  $\mathbb{R}$ . Vogliamo determinare

$$\int f(x) dx.$$

**Passo 1** Ci riconduciamo al caso in cui il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, effettuando la divisione:

$$f(x) = S(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove  $S(x)$  e  $P(x)$  sono polinomi e il grado di  $P(x)$  è minore del grado di  $Q(x)$ . Ovviamente una funzione razionale è continua, quindi integrabile, in ogni intervallo  $[a, b] \subseteq \text{dom } f$ ; per le proprietà dell'i integrale, si ha

$$\int f(x) dx = \int S(x) dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Essendo noto  $\int S(x) dx$ , il problema della determinazione di  $\int f(x) dx$  è ricondotto a quello di  $\int P(x)/Q(x) dx$ .

**Passo 2** Determiniamo la scomposizione di  $P(x)/Q(x)$  in fratti semplici. In tal modo il calcolo di  $\int P(x)/Q(x) dx$  è ricondotto alla determinazione di integrali indefiniti della forma:

$$\int \frac{A}{(x-b)^n} dx, \quad \int \frac{Bx+E}{(x^2+cx+d)^m} dx \quad (8.25)$$

con  $x^2 + cx + d$  irriducibile.

**Passo 3** Determiniamo gli integrali nella (8.25). Ricordando l'Esempio 8.17,

$$\int \frac{A}{(x-b)^n} dx = \begin{cases} \frac{A}{1-n} (x-b)^{1-n} & \text{se } n \neq 1 \\ A \log |x-b| & \text{se } n = 1. \end{cases} \quad (8.26)$$

Per quanto riguarda  $\int \frac{Bx+E}{(x^2+cx+d)^m} dx$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+E}{(x^2+cx+d)^m} dx &= \int \frac{\frac{B}{2}(2x+c-c) + E}{(x^2+cx+d)^m} dx \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^m} dx + \int \frac{E-c\frac{B}{2}}{(x^2+cx+d)^m} dx; \end{aligned}$$

il primo integrale a secondo membro è della forma considerata nell'Esempio 8.17, quindi

$$\int \frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^m} dx = \begin{cases} \frac{(x^2+cx+d)^{1-m}}{1-m} & \text{se } m \neq 1 \\ \log(x^2+cx+d) & \text{se } m = 1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Rimane da analizzare

$$\int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^m}. \quad (8.28)$$

Cominciamo con il considerare un caso particolare:

$$\mathcal{I}_m := \int \frac{dx}{(x^2+1)^m}. \quad (8.29)$$

Se nella (8.29) prendiamo  $m = 1$ , ricordando la tabella delle primitive risulta

$$\mathcal{I}_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctg x.$$

Sia allora  $m \geq 2$ ; osservando che

$$\frac{1}{(x^2+1)^m} = \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^m} = \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}} - \frac{x^2}{(x^2+1)^m}$$

risulta

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{m-1}} - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^m} dx.$$



Applicando la regola di integrazione per parti all'ultimo integrale, abbiamo:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^m} = \frac{x(x^2 + 1)^{1-m}}{2(1-m)} - \frac{1}{2(1-m)} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{m-1}}$$

perciò si ottiene per  $m \geq 2$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^m} = \frac{x(x^2 + 1)^{1-m}}{2(m-1)} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{m-1}}$$

ovvero

$$\boxed{\mathcal{I}_m = \frac{x(x^2 + 1)^{1-m}}{2(m-1)} + \frac{2m-3}{2m-2} \mathcal{I}_{m-1}} \quad (8.30)$$

La (8.30) è una *formula ricorsiva* che permette di calcolare  $\mathcal{I}_2$  noto  $\mathcal{I}_1$ , quindi  $\mathcal{I}_3$  per mezzo di  $\mathcal{I}_2$  e così via.

Il caso generale (8.28) può essere ricondotto al caso (8.29) applicando la regola di integrazione per sostituzione: scrivendo

$$x^2 + cx + d = x^2 + cx + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} + d = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + d - \frac{c^2}{4}$$

e poiché  $d - \frac{c^2}{4} > 0$ , possiamo porre

$$t = \frac{x + \frac{c}{2}}{\sqrt{d - \frac{c^2}{4}}}, \quad \text{ovvero } x = t\sqrt{d - \frac{c^2}{4}} - \frac{c}{2}$$

da cui si ottiene

$$\boxed{\int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^m} = \left(d - \frac{c^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-m} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^m} dt \quad m = 1, 2, \dots} \quad (8.31)$$

In conclusione, dalle (8.26), (8.27), (8.30) risulta che *una primitiva di una funzione razionale è una combinazione di funzioni razionali e di funzioni del tipo  $\log(ax^2 + bx + c)$  e  $\arctg(px + q)$ .*

Si vuole determinare

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx.$$

Poiché il grado del numeratore ( $= 0$ ) è minore di quello del denominatore ( $= 3$ ), per la (8.24) cerchiamo  $A, B, C \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Con semplici calcoli risulta

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (A+B+C)x + A+C}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

quindi, per il principio di identità dei polinomi, deve essere

**ESEMPIO 8.22**

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ A + B + C & = 0 \\ A & + C = 1 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

Allora

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+x+1}$$

perciò

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{x}{x^2+x+1} dx \\ &= \log|x+1| - \int \frac{x}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Per determinare l'ultimo integrale, osserviamo che  $(x^2+x+1)' = 2x+1$ . Quindi, moltiplicando e dividendo per 2 e aggiungendo e togliendo 1 al numeratore, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+x+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Essendo  $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ , si ha

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

Quindi, posto  $t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ , si ottiene

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \int \frac{1}{t^2+1} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( x + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Rimettendo in ordine i vari pezzi, concludiamo:

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)} = \log|x+1| - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

### ESEMPIO 8.23

Sia da calcolare

$$\int \frac{x^5}{x^4-1} dx.$$

Dividendo  $x^5$  per  $(x^4-1)$  risulta

$$\frac{x^5}{x^4-1} = x + \frac{x}{x^4-1}$$

quindi

$$\int \frac{x^5}{x^4-1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{x^4-1} dx.$$

Esaminiamo l'ultimo integrale; poiché  $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ , si devono determinare  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{x}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

ovvero, dopo ovvi calcoli, tali che

$$x = x^3(A + B + C) + x^2(A - B + D) + x(A + B - C) + (A - B - D)$$

da cui si ricava

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = 0.$$

Quindi

$$\int \frac{x}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \log |x - 1| + \frac{1}{4} \log |x + 1| - \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{x^2 + 1}$$

ed essendo

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

otteniamo

$$\int \frac{x}{x^4 - 1} dx = \frac{1}{4} \log \left( \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1} \right).$$

#### ESEMPIO 8.24

Sia dato

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x)}.$$

Consideriamo  $Q(x) = x^2(1+x)$  e osserviamo che 0 è una radice di  $Q(x)$  con molteplicità 2; allora, ricordando la (8.24), si devono determinare  $A, B, C \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}.$$

Ragionando come negli esempi precedenti, si ricava

$$A = -1, \quad B = 1, \quad C = 1$$

da cui segue

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x)} = -\log |x| - \frac{1}{x} + \log |x + 1|.$$

Un metodo leggermente diverso per calcolare gli integrali di una funzione razionale, nel caso in cui il denominatore abbia radici multiple, è basato sulla *scomposizione di Hermite* (di cui omettiamo la dimostrazione):

#### TEOREMA 8.17 Scomposizione di Hermite

Siano  $P(x)$  e  $Q(x)$  due polinomi su  $\mathbb{R}$  tali che grado di  $P(x)$  sia minore di quello di  $Q(x)$ , e sia (8.23) la rappresentazione di  $Q(x)$  in fattori irriducibili; allora esiste un'unica rappresentazione di  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  della forma



$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{x-b_2} + \dots + \frac{A_j}{x-b_j} + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + c_1x + d_1} + \dots + \frac{C_kx + D_k}{x^2 + c_kx + d_k} + \frac{d}{dx} \left( \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} \right) \quad (8.32)$$

dove

$Q^*(x) = (x-b_1)^{n_1-1} \dots (x-b_j)^{n_j-1} (x^2 + c_1x + d_1)^{m_1-1} \dots (x^2 + c_kx + d_k)^{m_k-1}$   
 e  $P^*(x)$  è un polinomio di grado minore di quello di  $Q^*(x)$ .

### ESEMPIO 8.25

Si voglia calcolare

$$\int \frac{dx}{(2+x)^2(3+x)^2}$$

Utilizziamo la scomposizione di Hermite; si devono allora determinare  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  tali che

$$\frac{1}{(2+x)^2(3+x)^2} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{3+x} + \frac{d}{dx} \left( \frac{Cx + D}{(2+x)(3+x)} \right)$$

Sviluppando la derivata e svolgendo gli usuali calcoli si trova:

$$A = -2, \quad B = 2, \quad C = -2, \quad D = -5$$

da cui risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2+x)^2(3+x)^2} &= -\int \frac{2}{2+x} dx + \int \frac{2}{3+x} dx - \int \frac{d}{dx} \left( \frac{2x+5}{(2+x)(3+x)} \right) dx \\ &= -2 \log |2+x| + 2 \log |3+x| - \frac{2x+5}{(2+x)(3+x)} \\ &= \log \left( \frac{3+x}{2+x} \right)^2 - \frac{2x+5}{(2+x)(3+x)}. \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo a disposizione un metodo generale per integrare, in linea di principio, qualunque funzione razionale. Per questo motivo, spesso si cerca di utilizzare le regole di integrazione per parti o per sostituzione allo scopo di ricondursi al caso di funzioni razionali.

### ESEMPIO 8.26

Sia da calcolare

$$\int \log(2x^2 + 5x + 1) dx.$$

Osservando che la derivata della funzione integranda è una funzione razionale, è naturale utilizzare l'integrazione per parti:

$$\int \log(2x^2 + 5x + 1) dx = x \log(2x^2 + 5x + 1) - \int \frac{x(4x+5)}{2x^2 + 5x + 1} dx.$$

Osserviamo che

$$\frac{x(4x+5)}{2x^2 + 5x + 1} = 2 - \frac{5x+2}{2x^2 + 5x + 1}$$

e che

$$\frac{5x+2}{2x^2+5x+1} = \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right) \frac{1}{x + \frac{5-\sqrt{17}}{4}} + \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right) \frac{1}{x + \frac{5+\sqrt{17}}{4}}$$

Pertanto

$$\int \log(2x^2 + 5x + 1) dx = x \log(2x^2 + 5x + 1) - 2x + \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right) \log \left| x + \frac{5-\sqrt{17}}{4} \right| + \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right) \log \left| x + \frac{5+\sqrt{17}}{4} \right|$$

Analogamente possono essere trattati integrali della forma

$$\int P(x) \log(Q(x)) dx, \quad \int P(x) \operatorname{arctg}(Q(x)) dx$$

con  $P(x)$  e  $Q(x)$  polinomi.

#### ESERCIZIO 8.11

Determinare i seguenti integrali indefiniti:

a)  $\int \frac{x+1}{x^2+4} dx;$

d)  $\int \frac{dx}{x^4+1};$

b)  $\int \frac{x+3}{x^3-4x} dx;$

e)  $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2};$

c)  $\int \log(x^2+1) dx;$

f)  $\int \frac{e^x-3}{e^x+1} dx;$

#### ESERCIZIO 8.12

Calcolare i seguenti integrali:

a)  $\int_{-4}^{-1} \frac{x}{x^3-1} dx;$

c)  $\int_4^6 \frac{\log(x^2-1)}{(x-2)^3} dx;$

b)  $\int_1^{e-1} \frac{\log(x+1)+1}{(x+1)(\log^3(x+1)+9\log(x+1))} dx;$

d)  $\int_0^2 \log(|x^2-1|+1) dx.$

### 8.6.4 Alcune sostituzioni di base

L'uso di alcune sostituzioni particolari permette di ricondurre il calcolo degli integrali di certe classi di funzioni a quello di funzioni razionali.

In questo paragrafo,  $\tilde{R}(x, y)$  indica una generica funzione razionale di  $x$  e  $y$ .

1) *Integrali del tipo*  $\int \tilde{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad n = 2, 3, \dots$   
 Si pone

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{ovvero} \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d}. \quad (8.33)$$

Si vuole calcolare

$$\int \frac{1}{(x+6)\sqrt{x+2}} dx.$$

Con la sostituzione (8.33) si ha

#### ESEMPIO 8.27

$$t = \sqrt{x+2}, \quad \text{ovvero} \quad t^2 = x+2,$$

da cui si ottiene

$$x = t^2 - 2 =: \varphi(t), \quad \varphi'(t) = 2t, \quad x+6 = t^2 + 4.$$

Perciò si ottiene una funzione razionale, che si integra con i metodi descritti nel paragrafo precedente:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+6)\sqrt{x+2}} dx &= \int \frac{1}{(t^2+4)t} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{1}{t^2+4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{4}} dt \\ &\stackrel{t=2s}{=} \int \frac{1}{1+s^2} ds = \operatorname{arctg} s + C = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x+2}}{2} + C \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

2) *Integrali del tipo*  $\int \tilde{R}(\sin x, \cos x) dx$ .

Posto  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , cioè  $x = 2 \operatorname{arctg} t =: \varphi(t)$ , per le formule di bisezione (si veda l'Appendice 1.A) risulta

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}. \quad (8.34)$$

### ESEMPIO 8.28

Verifichiamo che

$$\int_0^{\pi/2} \min \left\{ 2, \frac{1}{\sin x} \right\} dx = \frac{\pi}{12} - \log \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right).$$

Si osserva che  $1/\sin x \leq 2$  in  $[0, \pi/2]$  se e solo se  $x \geq \pi/6$ . Perciò

$$\int_0^{\pi/2} \min \left\{ 2, \frac{1}{\sin x} \right\} dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx.$$

Il primo integrale è immediato e vale  $\pi/12$ . Per il secondo, operando la sostituzione (8.34) si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\operatorname{tg}(\pi/12)}^1 \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{\operatorname{tg}(\pi/12)}^1 \frac{1}{t} dt = -\log \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right|.$$

Si noti che il secondo integrale può essere trattato anche in un altro modo:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{(\cos x)'}{1 - \cos^2 x} dx$$

che può essere risolto con la sostituzione  $s = \cos x$  (lo studente controlli).

3) *Integrali del tipo*  $\int \tilde{R}(x, \sqrt{1-x^2}) dx$ .

Possono essere trattati con vari tipi di sostituzioni. Ne presentiamo due:

$$x = \cos t \quad (\text{oppure } x = \sin t); \quad (8.35)$$

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{cioè } x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \varphi(t), \quad \varphi'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}. \quad (8.36)$$

Con la sostituzione (8.35) ci si riconduce a un integrale del tipo (2): infatti



$$\int \tilde{R}(x, \sqrt{1-x^2}) dx = \int \tilde{R}(\cos t, |\sin t|)(-\sin t) dt.$$

Con la sostituzione (8.36) ci si riconduce invece all'integrale di una funzione razionale.

## ESEMPIO 8.29

Verifichiamo che

$$\int \sqrt{2-4x^2} dx = \frac{1}{2} (\arccos(\sqrt{2}x) - x\sqrt{2-4x^2}) + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Per ricondurci alla forma in (3), operiamo una prima sostituzione: posto  $x = \frac{y}{\sqrt{2}}$  risulta

$$\int \sqrt{2-4x^2} dx = \int \sqrt{2(1-y^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dy = \int \sqrt{1-y^2} dy.$$

Posto  $y = \cos t =: \varphi(t)$ , si ha  $\varphi'(t) = -\sin t$  e  $\sqrt{1-y^2} = |\sin t|$ . Se  $\sin t \geq 0$ , si ottiene quindi

$$\int \sqrt{1-y^2} dy = -\int \sin^2 t dt \quad \text{se } \sin t \geq 0.$$

In effetti, operando queste sostituzioni si può sempre ignorare il modulo e supporre che  $t \in (0, \pi)$ : se  $\sin t < 0$ , scegliendo  $y = -\cos t$  si ottiene la stessa uguaglianza tra i due integrali. Per l'integrale a destra si può utilizzare la sostituzione (8.34), oppure integrare per parti (si veda l'Esercizio 8.7). Si ottiene

$$\int \sqrt{1-y^2} dy = -\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2} (t - \sin t \cos t) + C$$

e sostituendo  $t = \arccos(\sqrt{2}x)$  si ottiene il risultato.

4) *Integrali del tipo*  $\int \tilde{R}(x, \sqrt{x^2+c}) dx, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ponendo  $t = -x + \sqrt{x^2+c}$ , si ha  $x^2+c = (x+t)^2$  e si ricava

$$x = \frac{-t^2+c}{2t} = \varphi(t), \quad \varphi'(t) = -\frac{c+t^2}{2t^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2+c} = \frac{t^2+c}{2t}. \quad (8.37)$$

## ESEMPIO 8.30

Si vuole verificare che

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+3}} = -\frac{1}{12} (-x + \sqrt{x^2+3})^2 - \frac{1}{2} \log(-x + \sqrt{x^2+3}) + C.$$

Operando la sostituzione (8.37), risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+3}} &= -\int \frac{1}{\frac{3-t^2}{2t} + \frac{3+t^2}{2t}} \cdot \frac{3+t^2}{2t^2} dt = -\frac{1}{6} \int \frac{3+t^2}{t} dt \\ &= -\frac{1}{12} t^2 - \frac{1}{2} \log|t| + C, \quad (C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

e sostituendo  $t = -x + \sqrt{x^2+3} (> 0)$  si ottiene il risultato.

Con la sostituzione introdotta per gli integrali della forma (3) e (4) possiamo, più in generale, trattare gli integrali di funzione del tipo:

$$\tilde{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c}), \quad a \neq 0.$$

Infatti, se  $a \neq 0$ , possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + c - \frac{b^2}{4a}$$

quindi, se  $a < 0$  abbiamo

$$ax^2 + bx + c = -\left(\sqrt{-ax} - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

(si noti che se  $a < 0$  deve essere  $4ac - b^2 < 0$  affinché  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  abbia senso, perciò  $c - \frac{b^2}{4a} > 0$ ), mentre se  $a > 0$

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Allora, se  $a < 0$ , ponendo  $y = \sqrt{-ax} - \frac{b}{2\sqrt{-a}}$  risulta

$$\int \tilde{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int \tilde{R}\left(\frac{y}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{c - \frac{b^2}{4a} - y^2}\right) \frac{1}{\sqrt{-a}} dy \quad (8.38)$$

che è un integrale del tipo (3) (si veda l'Esempio 8.28).

Se  $a > 0$ , detto  $y = \sqrt{ax} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$ , si ottiene

$$\int \tilde{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int \tilde{R}\left(\frac{y}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{y^2 + c - \frac{b^2}{4a}}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} dy \quad (8.39)$$

che è un integrale del tipo (4).

### ESEMPIO 8.31

Calcoliamo

$$\int x\sqrt{x^2 + 6x} dx.$$

Si potrebbe operare direttamente la sostituzione descritta in (8.39) e poi la (8.37), ma è possibile semplificare la funzione integranda come segue:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 + 6x} dx &= \int (x+3)\sqrt{x^2 + 6x} dx - 3 \int \sqrt{x^2 + 6x} dx \\ &= \frac{1}{3}(x^2 + 6x)^{3/2} - 3 \int \sqrt{x^2 + 6x} dx. \end{aligned}$$

Consideriamo l'ultimo integrale: posto  $y = x + 3$  si ha

$$\int \sqrt{x^2 + 6x} dx = \int \sqrt{y^2 - 9} dy.$$

Utilizziamo la (8.37): posto  $y = -\frac{t^2 + 9}{2t}$ , risulta allora

$$\begin{aligned} \int \sqrt{y^2 - 9} dy &= -\int \frac{t^2 - 9}{2t} \cdot \frac{t^2 - 9}{2t^2} dt = -\frac{1}{4} \int \left(t - \frac{18}{t} + \frac{81}{t^3}\right) dt \\ &= -\frac{1}{8} t^2 + \frac{9}{2} \log |t| + \frac{81}{8t^2} \end{aligned}$$

e, poiché  $t = -y + \sqrt{y^2 - 9}$ , si ottiene

$$\int \sqrt{y^2 - 9} \, dy = \frac{y}{2} \sqrt{y^2 - 9} + \frac{9}{2} \log (|\sqrt{y^2 - 9} - y|).$$

Concludendo, poiché  $y = x + 3$ , abbiamo

$$\int x \sqrt{x^2 + 6x} \, dx = \frac{1}{3} (x^2 + 6x)^{3/2} - \frac{3}{2} (x + 3) \sqrt{x^2 + 6x} - \frac{27}{2} \log (|\sqrt{x^2 + 6x} - x - 3|).$$

Lo studente verifichi che con i metodi descritti in questo paragrafo è possibile determinare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \sqrt{x^2 + c} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + c} + \frac{c}{2} \log (|x + \sqrt{x^2 + c}|)$$

$$\left( = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + c} - \frac{c}{2} \log (|-x + \sqrt{x^2 + c}|) \right)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + c}} \, dx = + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + c} - \frac{c}{2} \log (|x + \sqrt{x^2 + c}|)$$

$$\int \sqrt{c^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{c^2 - x^2} + \frac{c^2}{2} \arcsin \left( \frac{x}{c} \right)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} \, dx = - \frac{x}{2} \sqrt{c^2 - x^2} + \frac{c^2}{2} \arcsin \left( \frac{x}{c} \right).$$

## ESEMPIO 8.32

Determinare i seguenti integrali indefiniti:

a)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} \, dx;$

c)  $\int (x+1)\sqrt{1-x^2} \, dx;$

b)  $\int (x+1)\log(\sqrt{x}+2) \, dx;$

d)  $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

## ESERCIZIO 8.13

Calcolare i seguenti integrali:

a)  $\int_0^{16} \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx;$

d)  $\int_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \, dx;$

b)  $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} \, dx;$

e)  $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \, dx.$

c)  $\int_{-11/9}^{-1} \frac{(x+3)\arccos \sqrt{3x+4}}{\sqrt{3x+4}} \, dx;$

## ESERCIZIO 8.14



### 8.6.5 Alcune formule ricorsive e altre primitive

Abbiamo già incontrato un esempio di formula ricorsiva per gli integrali (si veda la (8.30)). Formule di questo tipo possono essere scritte, per esempio, per

$$\mathcal{I}_m := \int (\sin x)^m dx, \quad \mathcal{J}_m := \int (\cos x)^m dx, \quad \mathcal{I}_{m,n} := \int (\sin x)^m (\cos x)^n dx$$

con  $m, n \in \mathbb{N}$ . Consideriamo per esempio  $\mathcal{I}_m$ . Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_m &= \int (\sin x)^m dx = \int (\sin x)^{m-1} \sin x dx \\ &= -\cos x (\sin x)^{m-1} + (m-1) \int (\cos x)^2 (\sin x)^{m-2} dx \\ &= -\cos x (\sin x)^{m-1} + (m-1) \int (1 - (\sin x)^2) (\sin x)^{m-2} dx \\ &= -\cos x (\sin x)^{m-1} + (m-1) \mathcal{I}_{m-2} - (m-1) \mathcal{I}_m \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\mathcal{I}_m = -\frac{1}{m} \cos x (\sin x)^{m-1} + \frac{m-1}{m} \mathcal{I}_{m-2} \text{ per } m \geq 2;$$

ricordando che  $\mathcal{I}_0 = x$  e  $\mathcal{I}_1 = -\cos x$ , possiamo così ottenere le primitive di  $(\sin x)^m$  per ogni  $m \geq 2$ . Con lo stesso procedimento si verifica che

$$\mathcal{J}_0 = x, \quad \mathcal{J}_1 = \sin x \text{ e } \mathcal{J}_m = \frac{1}{m} \sin x (\cos x)^{m-1} + \frac{m-1}{m} \mathcal{J}_{m-2} \text{ per } m \geq 2;$$

e che

$$\mathcal{I}_{m,n} = -\frac{(\cos x)^{n+1} (\sin x)^{m-1}}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \mathcal{I}_{m-2,n}$$

(se qui si sceglie  $n = 0$ , si riottiene la formula ricorsiva per  $\mathcal{I}_m$ ).

Osserviamo comunque che nel caso in cui  $m$  (oppure  $n$ ) sia dispari si può calcolare direttamente  $\mathcal{I}_{m,n}$  applicando la regola di integrazione per sostituzione (si veda la (8.22)); per esempio:

$$\begin{aligned} \int (\sin x)^2 (\cos x)^3 dx &= \int (\sin x)^2 (\cos x)^2 \cos x dx \\ &= \int (\sin x)^2 (1 - (\sin x)^2) (\sin x)' dx \\ &= \frac{1}{3} (\sin x)^3 - \frac{1}{5} (\sin x)^5. \end{aligned}$$

#### ESERCIZIO 8.15

Determinare i seguenti integrali indefiniti:

a)  $\int (\cos x)^4 (\sin x)^2 dx;$

b)  $\int (\cos x)^4 (\sin x)^3 dx.$

## 8.7 Integrabilità in senso improprio

Il concetto di integrale secondo Riemann di una funzione  $f$  in un intervallo  $I$  è stato introdotto sotto le ipotesi fondamentali che  $f$  fosse una funzione limitata e  $I$  fosse un intervallo limitato. In questo paragrafo studieremo alcune estensioni di tale concetto ai casi in cui  $f$  e/o  $I$  non sono limitati. Cominciamo con il considerare alcuni esempi.

Sia  $f(x) = x^{-\alpha}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Come è ben noto,  $f$  è continua in  $\mathbb{R}^+$ , è integrabile in ogni intervallo  $[a, b]$  con  $0 < a < b$  e risulta

$$\int_a^b x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^b & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log x \Big|_a^b & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (8.40)$$

Fissiamo, per esempio,  $b = 1$ ; allora dalla (8.40) segue che per ogni  $a \in \mathbb{R}^+$

$$\int_a^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ -\log a & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha > 0 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (8.41)$$

Si osservi che il limite nella (8.41) è finito se  $\alpha < 1$ : è quindi possibile che il limite sia finito anche se la funzione integranda è infinita in  $(0, 1]$ . Fissiamo ora  $a = 1$  e facciamo variare  $b$ ; si ottiene:

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} & \text{se } 1-\alpha < 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8.42)$$

quindi il limite in (8.42) è finito se  $1-\alpha < 0$  pur avendo sostanzialmente considerato la funzione  $x^{-\alpha}$  nell'intervallo  $[1, +\infty)$ .

L'Esempio 8.33 chiarisce la seguente definizione.

### DEFINIZIONE 8.18

Sia  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , tale che  $f$  sia integrabile in  $[\omega, b]$  per ogni  $\omega \in (a, b]$ . Se esiste in  $\mathbb{R}^*$  il limite

$$\lim_{\omega \rightarrow a^-} \int_{\omega}^b f(x) dx \quad (8.43)$$

tale limite è detto **integrale improprio** o **generalizzato** di  $f$  in  $(a, b]$  e viene denotato con il simbolo  $\int_a^b f(x) dx$ . Se il limite (8.43) esiste finito, si dice che  $f$  è **integrabile in senso improprio** (o **generalizzato**) in  $(a, b]$  e che l'integrale improprio di  $f$  è **convergente** in  $(a, b]$ . Se  $\int_a^b f(x) dx = \pm\infty$  l'integrale improprio di  $f$  è detto **divergente** in  $(a, b]$ .

La definizione di integrabilità in senso improprio nell'intervallo  $[a, b)$  è del tutto analoga: in particolare,  $f$  è integrabile in senso improprio in  $[a, b)$  se esiste finito

$$\lim_{\gamma \rightarrow b^-} \int_a^{\gamma} f(x) dx.$$

### ESEMPIO 8.33

Dall'Esempio 8.33 si ottiene, secondo la Definizione 8.18, che

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ è integrabile in senso improprio in } \begin{cases} (0, 1] & \text{se } \alpha < 1 \\ [1, +\infty) & \text{se } \alpha > 1. \end{cases} \quad (8.44)$$

Geometricamente, ciò significa in particolare che l'area delle regioni evidenziate in Figura 8.13 è finita, nonostante tali regioni siano illimitate.

Nel caso critico  $\alpha = 1$ , le correzioni logaritmiche giocano un ruolo essenziale, come mostra il seguente esempio.

#### ESEMPIO 8.34

Studiamo al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$  l'integrabilità in senso improprio di

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} dx.$$

Si osservi che, se  $\beta > 0$ ,  $\frac{1}{x(\log x)^\beta}$  è un infinitesimo di ordine superiore ad 1 per  $x \rightarrow +\infty$  ma non ha ordine di infinitesimo. Risulta

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} dx &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_2^\omega \frac{1}{x(\log x)^\beta} dx \\ &= \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \log(\log \omega) - \log(\log 2) & \text{se } \beta = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{(\log \omega)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{se } \beta \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

da cui

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta} dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \\ \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1. \end{cases} \quad (8.45)$$

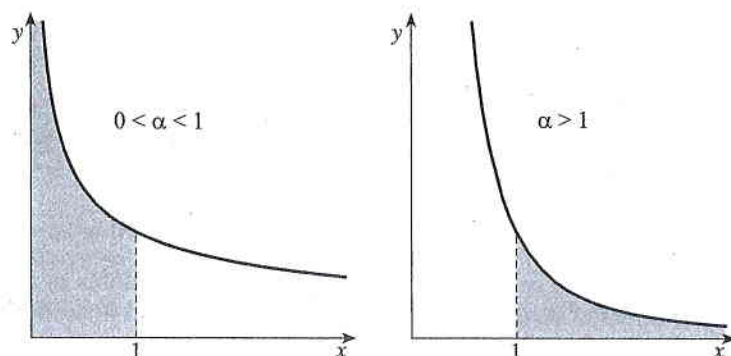
In modo del tutto analogo risulta che l'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x(-\log x)^\beta} dx \begin{cases} \text{converge se } \beta > 1 \\ \text{diverge se } \beta \leq 1. \end{cases} \quad (8.46)$$

Si noti che la definizione di integrabilità in senso improprio è effettivamente un'estensione di quella di integrabilità secondo Riemann; infatti se  $f \in \mathcal{R}(a, b)$  allora, ricordando che una funzione integrale è continua,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow b^-} \int_a^\omega f(x) dx = \lim_{\omega \rightarrow a^+} \int_\omega^b f(x) dx.$$

**Figura 8.13** Integrabilità in senso improprio della funzione  $x \mapsto x^{-\alpha}$  con  $\alpha > 0$ .





La definizione precedente si estende facilmente al caso in cui  $f$  sia definita in un intervallo aperto  $(a, b)$  o in un insieme del tipo  $[a, c) \cup (c, b]$  con  $c \in (a, b)$ :

- $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in senso improprio in  $(a, b)$  se, fissato  $c^* \in (a, b)$ ,  $f$  è integrabile in senso improprio in  $(a, c^*)$  e in  $[c^*, b)$ . In tal caso l'integrale improprio di  $f$  in  $(a, b)$  è

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^{c^*} f(x) dx + \int_{c^*}^b f(x) dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow a^+} \int_{\omega}^{c^*} f(x) dx + \lim_{\gamma \rightarrow b^-} \int_{c^*}^{\gamma} f(x) dx \end{aligned} \quad (8.47)$$

- $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in senso improprio in  $[a, b]$  se  $f$  è integrabile in senso improprio in  $[a, c)$  e in  $(c, b]$ ; in tal caso

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow c^-} \int_a^{\omega} f(x) dx + \lim_{\gamma \rightarrow c^+} \int_{\gamma}^b f(x) dx. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Segue dalle (8.47) e (8.48) che per studiare l'integrabilità in senso improprio di  $f$  nei corrispondenti intervalli si possono considerare direttamente i limiti in (8.47) e in (8.48). Sottolineiamo però che i limiti in (8.47) e in (8.48) devono essere presi in modo indipendente. Chiariamo questo fatto attraverso un esempio.



La funzione

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

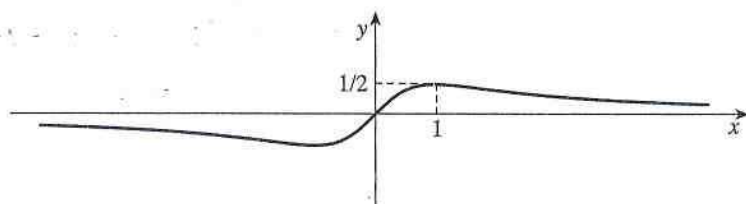
(si veda Figura 8.14) non è integrabile in senso improprio in  $\mathbb{R}$ , poiché non lo è in  $(-\infty, 0]$  (né in  $[0, +\infty)$ ). Infatti

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_a^b$$

e quindi

$$\lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^0 \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \log(1+\omega^2) = -\infty$$

$$\left( \text{analogamente } \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\gamma} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \log(1+\gamma^2) = +\infty \right).$$



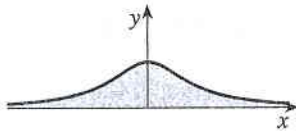
Osserviamo che se si fosse scelto  $\omega = -\gamma$ , quindi se avessimo posto in una certa relazione  $\omega$  e  $\gamma$ , si sarebbe ottenuto zero: ciò mette in evidenza la necessità di prendere i limiti in modo indipendente.

### ESEMPIO 8.35

Figura 8.14

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

Si noti che la non integrabilità in senso improprio di  $f$  in  $(-\infty, 0]$  è sufficiente a garantire la stessa conclusione in  $(-\infty, c^*]$  per ogni  $c^* \in \mathbb{R}$ : ciò segue dalla (iii) del Teorema 8.9.

**ESEMPIO 8.36****Figura 8.15**

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

La funzione  $f(x) = (1+x^2)^{-1}$  è integrabile in senso improprio in  $\mathbb{R}$ .

Per verificarlo, utilizziamo la (8.47):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \int_{\omega}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \int_0^{\gamma} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow -\infty} -\operatorname{arctg} \omega + \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \gamma = \pi. \end{aligned}$$

Perciò l'area della regione piana compresa tra  $y=0$  e il grafico di  $f$  è finita e vale  $\pi$  (si veda Figura 8.15).

Molte delle proprietà stabilite per l'integrale secondo Riemann possono essere estese alle funzioni integrabili in senso improprio in un intervallo: per esempio il Teorema 8.9, la (8.11), il teorema della media nel caso di intervallo di integrazione limitato, l'integrazione per sostituzione e il teorema fondamentale del calcolo integrale.

**ESEMPIO 8.37**

La funzione

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \sin\left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

è ben definita ed è una primitiva di  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Infatti possiamo scrivere

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 \sin\left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt + \int_1^x \sin\left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt.$$

Il primo integrale è un integrale improprio convergente (ovvero un numero reale; lo studente lo verifichi con i metodi del Paragrafo 8.7.2); il secondo è una funzione integrale cui si applica il teorema fondamentale del calcolo integrale. Perciò

$$F'(x) = 0 + \frac{d}{dx} \left( \int_1^x \sin\left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt \right) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right).$$

**ESERCIZIO 8.16**

Provare la convergenza dei seguenti integrali impropri e calcolarne il valore:

a)  $\int_0^b \log x \, dx$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$ ;

c)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

b)  $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

d)  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos^2 x \, dx$ .

**8.7.1 Criteri di convergenza: criterio del confronto**

Negli esempi 8.33-8.36 siamo riusciti a calcolare direttamente l'integrale improprio di  $f$  perché si conosceva una primitiva di  $f$ ; come sappiamo, però, non sempre questo è possibile (Esempio 8.37). Occorrono perciò dei criteri per studiare l'eventuale convergenza dell'integrale improprio; quelli che esporremo in questa sezione sono sostanzialmente relativi a funzioni non negative. Si tratta di una situazione particolarmente favorevole: infatti, se per esempio  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è non negativa e integrabile in  $[a, \omega]$  per ogni  $\omega \in [a, b)$ , allora la funzione integrale  $F(\omega) = \int_a^{\omega} f(x) dx$  è mono-

na e perciò esiste  $\lim_{\omega \rightarrow b^-} F(\omega)$ ; quindi il problema dell'integrabilità in senso improprio di  $f \geq 0$  in  $[a, b)$  è ricondotto a quello della limitatezza di  $F(\omega)$  in  $[a, b)$ . Discorsi analoghi si possono ripetere se  $f$  è non positiva (basta scambiare  $f$  con  $-f$ ). Enunciamo i criteri nel caso dell'intervallo  $[a, b)$ ; gli altri casi si deducono in modo ovvio scambiando  $x$  con  $-x$ . La dimostrazione è facile e completamente analoga a quella del criterio di confronto per le serie numeriche.

**TEOREMA 8.19**      **Criterio del confronto**

Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ , tali che  $f, g \in \mathcal{R}(a, \omega)$  per ogni  $\omega \in [a, b)$ . Sia  $x_0 \in [a, b)$  tale che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per ogni } x \in [x_0, b). \quad (8.49)$$

Allora se  $g$  è integrabile in senso improprio in  $[a, b)$  anche  $f$  lo è, mentre se  $f$  non è integrabile in senso improprio, neppure  $g$  lo è.

**Dimostrazione**

Si vuole studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(2 + \cos x)}.$$

Applichiamo il teorema del confronto: poiché  $2 + \cos x \geq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ha

$$0 \leq \frac{1}{x^2(2 + \cos x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

ed essendo  $1/x^2$  integrabile in senso improprio in  $[1, +\infty)$  (per la (8.44)), dal teorema del confronto segue la convergenza dell'integrale proposto.

**ESEMPIO 8.38**

La **funzione di Gauss** o **gaussiana**  $f(x) = e^{-x^2}$  (si veda Figura 8.16a) è integrabile in senso improprio in  $\mathbb{R}$ . Essendo pari, è sufficiente studiarla nell'intervallo  $[0, +\infty)$ . Poiché  $x^2 e^{-x^2} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ , esiste  $x_0 \in (0, +\infty)$  tale che

$$0 \leq e^{-x^2} = x^2 e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{per ogni } x \in (x_0, +\infty)$$

e la tesi segue dal teorema del confronto (con  $[a, b) = [0, +\infty)$  e  $g(x) = x^{-2}$ ).

**ESEMPIO 8.39**
**Funzione di Gauss**

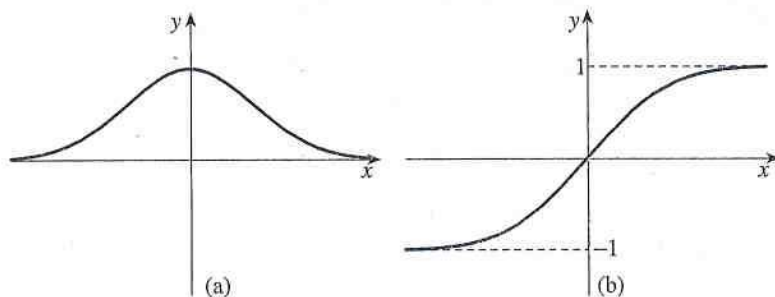
Vedremo nel Capitolo 14 che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (8.50)$$

La funzione integrale della gaussiana relativa all'origine, "normalizzata" in modo da avere asintoti orizzontali in  $y = \pm 1$ , è chiamata anche **funzione errore** (*error function*):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (8.51)$$

(si veda Figura 8.16b).



**Figura 8.16** La funzione di Gauss (a) e la funzione errore (b).



Il Teorema 8.19 può essere utilizzato per dimostrare la “divergenza” di un integrale improprio.

**ESEMPIO 8.40**

L'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log x} dx$$

è divergente. Infatti, ricordando che  $0 < \log x \leq x$  per ogni  $x > 1$ , si ha

$$0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\log x} \quad \forall x \geq 2$$

e, poiché  $1/x$  non è integrabile in senso improprio in  $[2, +\infty)$ , per il Teorema 8.19 neppure  $1/\log x$  lo è.

Dal teorema del confronto segue immediatamente il criterio del confronto asintotico.

**Dimostrazione****COROLLARIO 8.20** Criterio del confronto asintotico

Siano  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b \in (a, +\infty]$ , tali che  $f, g \in \mathcal{R}(a, \omega)$  per ogni  $\omega \in [a, b)$ . Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono definitivamente positive per  $x \rightarrow b^-$  e se

$$f(x) = g(x)(1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow b^-$$

allora

$$\int_a^b f(x) dx \text{ è convergente (divergente)} \Leftrightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ è convergente (divergente)}.$$

**ESEMPIO 8.41**

L'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\log x}} dx$$

è convergente. In questo caso il problema dell'integrabilità in senso improprio si pone per  $x \rightarrow 1^+$ ; essendo  $(\log x)^{-1/2} = (x-1)^{-1/2}(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow 1^+$ , per il l'integrale in esame è convergente se e solo se lo è  $\int_1^2 (x-1)^{-1/2} dx$ . Poiché

$$\int_1^2 (x-1)^{-1/2} dx = \int_0^1 x^{-1/2} dx$$

la convergenza segue dalla (8.44).

**ESEMPIO 8.42**

Si vuole stabilire per quali valori di  $\beta \in \mathbb{R}$  è convergente il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} dx.$$

Il problema dell'integrabilità in senso improprio si pone sia per  $x \rightarrow +\infty$  sia per  $x \rightarrow 0^+$ . Perciò è necessario spezzare l'integrale, cioè

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

e studiare separatamente l'integrabilità in  $(0, 1]$  e in  $[1, +\infty)$ . Cominciamo con il considerare  $(0, 1]$ ; ricordando che  $\sin x = x(1 + o(1))$  per  $x \rightarrow 0$ , si ha

$$\frac{(\sin x)^\beta}{x^2} = \frac{x^\beta}{x^2} (1 + o(1)) = x^{\beta-2} (1 + o(1)) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

perciò, per la (8.44) e per il criterio di confronto asintotico, l'integrale è convergente in  $(0, 1]$  se e solo se  $2 - \beta < 1$ , cioè  $\beta > 1$ . Dobbiamo ora stabilire per quali  $\beta > 1$  è convergente l'integrale in  $[1, +\infty)$ ; poiché per ogni  $\beta > 1$

$$0 \leq \frac{|\sin x|^\beta}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{in } [1, +\infty)$$

e  $\frac{1}{x^2}$  è integrabile in  $[1, +\infty)$ , applicando il teorema del confronto possiamo concludere che l'integrale proposto è convergente se e solo se  $\beta > 1$ .

Si potrebbe pensare che una funzione non negativa e integrabile in senso improprio in un intervallo del tipo  $[a, +\infty)$  (oppure  $(-\infty, b]$ ) sia necessariamente infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ). Questa affermazione è vera, per esempio, se  $f$  è monotona (o se  $f$  è uniformemente continua), ma è falsa in generale, come mostra il prossimo esempio.

Sia  $f : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } n \leq x < n + \frac{1}{n^3} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora per ogni  $n \geq 1$  (si veda Figura 8.17)

$$\int_n^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} n dx = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

quindi, per la (4.36),

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

D'altra parte  $f(x) \not\rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$  ( $f(x)$  non è neanche definitivamente limitata per  $x \rightarrow +\infty$ ).

#### ESEMPIO 8.43

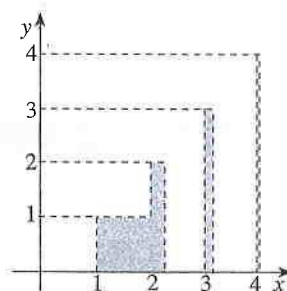


Figura 8.17

Dire quali dei seguenti integrali impropri sono convergenti:

a)  $\int_1^{+\infty} \frac{x + e^{-x}}{\sqrt{1+x^3+x^4}} dx;$

e)  $\int_2^4 \frac{\log \sqrt{x+1} + \sqrt{|x^2-3x|} - \log 2}{\sqrt{4-x-1}} dx;$

b)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x|} + \log x};$

f)  $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\log(1+x)\sqrt{1-e^{x-1}}} dx;$

c)  $\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x}} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+1} dx;$

g)  $\int_2^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \left( \frac{1}{\log \frac{3}{4} x} \right) \right)^2 dx;$

d)  $\int_0^{+\infty} (e^{\frac{x}{1+x}} - \cos x)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \left( \frac{1}{x+1} \right) dx;$

h)  $\int_0^1 \frac{(e^{-x+1} - 1)\sqrt{\sin x}}{(1-x)^{\frac{5}{4}}} dx.$

#### ESERCIZIO 8.17

Discutere al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a)  $I_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+e)^{|x|(\alpha-e)} dx$  (calcolare, se esiste,  $I_0$ );

#### ESERCIZIO 8.18

$$\begin{aligned} \text{b) } I_\alpha &= \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{9+5x} \log^\alpha(e^{x+1}+1)}{x} dx; & \text{d) } \int_1^2 \frac{(x-1)^{5\alpha}}{(x^\alpha-1)^{3/2}} dx, \alpha > 0. \\ \text{c) } &\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}(1+x^\alpha)} dx; \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 8.19**

Dimostrare che l'integrale improprio  $\int_{-1}^{+\infty} xe^{-x} \log(x+1) dx$  è convergente e calcolarne il valore (suggerimento: si determinino prima le funzioni primitive di  $f(x) = xe^{-x}$  in  $\mathbb{R}$ ).

**8.7.2 Assoluta integrabilità in senso improprio**

La funzione  $f(x) = x^{-2} \sin x$ , definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ , non è né non negativa né non positiva; quindi non è possibile applicare il criterio del confronto per studiare la sua integrabilità in  $[1, +\infty)$ . D'altra parte,  $0 \leq |f(x)| \leq x^{-2}$  per ogni  $x \geq 1$ , quindi  $|f(x)|$  è integrabile in senso improprio in  $[1, +\infty)$ . La  $f$  si dirà *assolutamente integrabile* in  $[1, +\infty)$ .

**DEFINIZIONE 8.21**

Sia  $I$  un intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è *assolutamente integrabile in senso improprio* in  $I$  se  $|f|$  è integrabile in senso improprio in  $I$ .

Il seguente teorema implica che  $f(x) = x^{-2} \sin x$  è anche integrabile in  $[1, +\infty)$ .

**TEOREMA 8.22**

Sia  $I$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in ogni intervallo chiuso e limitato  $J \subseteq I$ . Se  $f$  è assolutamente integrabile in senso improprio in  $I$ , allora è integrabile in senso improprio in  $I$  e risulta

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx. \quad (8.52)$$

**Dimostrazione**

Si consideri il caso  $I = [a, +\infty)$  (gli altri casi si trattano in maniera simile). Per ipotesi  $f$  è integrabile secondo Riemann in  $[a, \omega]$  per ogni  $\omega > a$ , quindi, per il Teorema 8.9 (iv), lo sono anche le funzioni  $f_+$  e  $f_-$ . Poiché  $0 \leq f_+(x)$ ,  $f_-(x) \leq |f(x)|$  per ogni  $x \geq a$ , per il teorema del confronto  $f_+$  e  $f_-$  sono integrabili in senso improprio in  $[a, +\infty)$ , quindi lo è anche  $f = f_+ - f_-$ . Inoltre si ha

$$\left| \int_a^{+\infty} f \right| = \left| \int_a^{+\infty} f_+ - \int_a^{+\infty} f_- \right| \leq \int_a^{+\infty} f_+ + \int_a^{+\infty} f_- = \int_a^{+\infty} |f|.$$

**ESEMPIO 8.44**

Si vuole stabilire l'eventuale convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin(1/x)}{x \log^2(x^2+x)} dx.$$

Chiaramente il problema della convergenza si pone solo per  $x \rightarrow 0^+$ . Poiché la funzione integranda cambia segno, vediamo se è assolutamente integrabile. Per  $x \rightarrow 0^+$ , si ha



$$0 \leq \frac{|\sin(1/x)|}{x \log^2(x^2 + x)} \leq \frac{1}{x \log^2(x(1 + o(1)))} = \frac{1}{x(\log x + o(1))^2}$$

$$= \frac{1}{x(\log x)^2(1 + o(1))}$$

da cui segue che

$$\frac{|\sin 1/x|}{x \log^2(x^2 + x)} \leq \frac{2}{x(\log x)^2} \quad \text{definitivamente per } x \rightarrow 0^+.$$

Perciò, essendo  $\frac{2}{x(\log x)^2}$  integrabile in senso improprio in  $(0, 1/2]$  (si veda l'Esempio 8.34), la funzione proposta è assolutamente integrabile in tale intervallo; quindi dal Teorema 8.22 segue la convergenza dell'integrale improprio considerato.

Nel caso dell'integrale secondo Riemann si ha che

$$f \in \mathcal{R}(a, b) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(a, b)$$

(si veda il Teorema 8.9 (iv)). Per l'integrale improprio questa proprietà non è valida in generale, cioè

$$f \text{ integrabile in senso improprio} \not\Rightarrow |f| \text{ integrabile in senso improprio.}$$

A tale proposito si consideri il seguente esempio.

#### ESEMPIO 8.45

La funzione  $f(x) = (\sin x)/x$  è integrabile, ma non assolutamente integrabile, in senso improprio in  $[0, +\infty)$ . Scriviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Poiché la funzione  $f(x) = (\sin x)/x$  è continua e limitata in  $(0, 1]$ , per provare l'integrabilità in senso improprio basta dimostrare la convergenza dell'integrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

Integrando per parti si ottiene:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\cos \omega}{\omega} + \cos 1 - \int_1^{\omega} \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

$$= \cos 1 - \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

poiché  $(\cos x)/x^2$  è assolutamente integrabile in  $[1, +\infty)$  ( $|\cos x|/x^2 \leq 1/x^2$ ), l'ultimo limite esiste finito. Resta così provata la convergenza dell'integrale considerato.

Per dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$$

osserviamo che

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x}$$

e proviamo la divergenza di  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ , da cui il risultato segue per il teorema del confronto. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \log \omega - \int_1^{\omega} \frac{\cos 2x}{2x} dx \right). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Ragionando come sopra, si verifica che  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$  è convergente (lo studente controlli). Perciò il limite nella (8.53) è  $+\infty$ .

Risultano convergenti, ma non assolutamente convergenti, i seguenti integrali:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

Lo studente può verificarlo operando una semplice integrazione per sostituzione ( $t = x^2$ ) e ragionando come nel caso appena trattato.

#### ESERCIZIO 8.20

Dire se i seguenti integrali impropri sono assolutamente convergenti:

a)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + x^3} dx;$

b)  $\int_0^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) \left( e^{-1/(x+1)} - 1 + \log\left(1 + \frac{1}{1+x}\right) \right) dx.$

#### ESERCIZIO 8.21

Provare che la funzione  $f(x) = (\cos x)/(\log x)$  è integrabile in senso improprio in  $[e, +\infty)$ .



## FILO ROSSO Verso la formula di Stirling

Per definizione, un integrale definito è approssimato da somme inferiori (per difetto) e superiori (per eccesso). Non deve quindi sorprendere che, come vedremo in questo capitolo, ci sia un *legame naturale tra integrali impropri e serie*.

Prima di affrontare il caso di serie e integrali impropri (Paragrafo 9.1), chiariamo il legame tra un integrale definito su un intervallo "molto grande" e una sommatoria con "molti" termini attraverso un esempio concreto, ossia: un' *approssimazione elementare di n!*:

$$\log(n!) = n \log n - n(1 + o(1)) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty. \quad (*)$$

Nel Capitolo 4 abbiamo già indicato una stima più precisa (ma meno elementare) di  $n!$ , la *formula di Stirling*, che passando ai logaritmi si lascia scrivere come

$$\log(n!) = n \log n - n + \log \sqrt{2\pi n} + o(1) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Per ricavare la (\*) partiamo dalla seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1) + \log n \\ &= \sum_{k=1}^n \log k. \end{aligned}$$

Poiché per ogni  $k$  si può scrivere  $\log k = k \log k - (k-1) \log k$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \log(n!) &= \sum_{k=1}^n k \log k - \sum_{k=1}^n (k-1) \log k \\ &= \sum_{k=1}^n k \log k - \sum_{k=0}^{n-1} k \log(k+1) \end{aligned}$$

$$= n \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k(\log(k+1) - \log k).$$

Poiché  $\log(k+1) - \log k = \int_k^{k+1} 1/t \, dt$ , si trova che

$$\begin{aligned} \log(n!) &= n \log n - \sum_{k=1}^{n-1} k \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, dt \\ &= n \log n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{[t]}{t} \, dt \\ &= n \log n - \int_1^n \frac{[t]}{t} \, dt, \end{aligned}$$

dove  $[t]$  indica la parte intera di  $t$ . Ricordando che  $t = [t] + \{t\}$ , dove  $\{t\}$  indica la mantissa (parte decimale) di  $t$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \log(n!) &= n \log n - \int_1^n \left(1 + \frac{\{t\}}{t}\right) dt \\ &= n \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\{t\}}{t} dt. \end{aligned}$$

Poiché

$$0 < \int_1^n \frac{\{t\}}{t} dt < \int_1^n \frac{1}{t} dt = \log n,$$

si ottiene

$$n \log n - n < \log(n!) < n \log n - n + 1 + \log n,$$

ovvero la (\*).

La seguente tabella dà un'impressione dalla precisione dell'approssimazione (\*) e di quella della formula di Stirling: tra parentesi l'errore relativo commesso,

$$\text{errore relativo} = \frac{|\text{valore esatto} - \text{valore approssimato}|}{\text{valore esatto}}$$



$n$	$\log(n!)$	$n \log n - n$	$n \log n - n + \log \sqrt{2\pi n}$
10	15.10441257	13.02585093 (< 14%)	15.09608201 (< 10 <sup>-1</sup> %)
50	148.4777670	145.6011503 (< 2%)	148.4761003 (< 10 <sup>-2</sup> %)
10 <sup>2</sup>	363.7393756	360.5170186 (< 1%)	363.7385422 (< 10 <sup>-3</sup> %)
10 <sup>3</sup>	5912.128178	5907.755279 (< 10 <sup>-1</sup> %)	5912.128095 (< 10 <sup>-5</sup> %)
10 <sup>4</sup>	82108.92784	82103.40372 (< 10 <sup>-2</sup> %)	82108.92783 (< 10 <sup>-7</sup> %)
10 <sup>5</sup>	1051299.222	1051292.546 (< 10 <sup>-3</sup> %)	1051299.222 (< 10 <sup>-10</sup> %)

## Guida

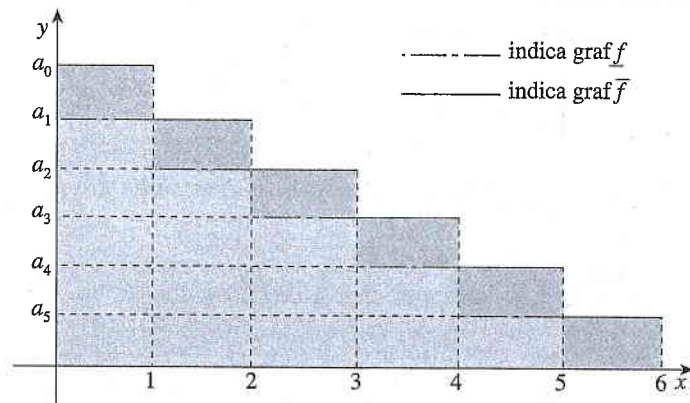
Il paragrafo è opzionale.

## 9.1 Serie numeriche e integrali impropri

Lo studente avrà probabilmente riscontrato una forte analogia tra molti dei concetti e dei criteri introdotti per gli integrali impropri e quelli introdotti per le serie numeriche. In effetti ogni serie numerica può essere pensata come un integrale improprio, (nella formula (9.3) sono illustrate due possibilità).

Figura 9.1

$$s_5 = \int_0^6 \bar{f}(x) dx = a_0 + \int_0^5 \underline{f}(x) dx.$$



Data una successione  $\{a_k\}$  a termini positivi definiamo due funzioni  $\bar{f}, \underline{f} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  costanti a tratti, come in Figura 9.1:

$$\begin{cases} \bar{f}(x) = a_k & \text{se } k \leq x < k+1 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \\ \underline{f}(x) = a_{k+1} & \text{se } k \leq x < k+1 \quad (\forall k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (9.1)$$

Segue direttamente dalla definizione che

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = \int_0^{n+1} \bar{f}(x) dx = a_0 + \int_0^n \underline{f}(x) dx \quad (9.2)$$

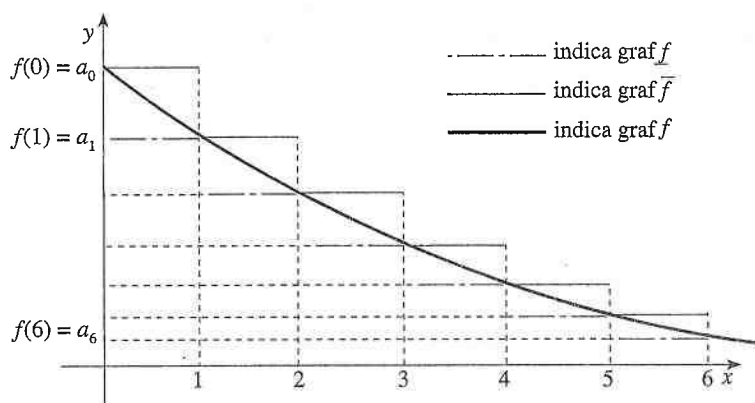
quindi, poiché la serie converge o diverge a  $+\infty$ , risulta

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \int_0^{+\infty} \bar{f}(x) dx = a_0 + \int_0^{+\infty} \underline{f}(x) dx. \quad (9.3)$$

In particolare vale

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è convergente} &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \bar{f}(x) dx \text{ è convergente} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \underline{f}(x) dx \text{ è convergente.} \end{aligned}$$

Figura 9.2



Per le serie a termini *positivi* e *decrescanti*, questa relazione tra serie e integrali impropri conduce ad un criterio di convergenza, la cui dimostrazione segue dal teorema del confronto per gli integrali impropri e dalla definizione di  $f$  e  $\underline{f}$  (si veda anche Figura 9.2).

**TEOREMA 9.1** Criterio integrale per serie a termini positivi

Siano  $k_0 \in \mathbb{N}$  e  $f: [k_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$f \geq 0 \text{ e } f \text{ è decrescente in } [k_0, +\infty).$$

Allora la serie numerica

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \text{ è convergente (divergente)}$$

se e solo se l'integrale

$$\int_{k_0}^{+\infty} f(x) dx \text{ è convergente (divergente).}$$

Nel caso di convergenza

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) - \sum_{k=k_0}^n f(k) \leq a_{n+1} + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \quad \forall n \geq k_0. \quad (9.4)$$

Dimostrazione 

Nel prossimo esempio ricaviamo, utilizzando il criterio integrale, le informazioni sulle serie armoniche generalizzate (e sul caso critico) che avevamo annunciato nell'Esempio 4.13 (si vedano le (4.36) e (4.37)) e ottenuto con il criterio della condensazione.

**ESEMPIO 9.1**

Prendiamo  $f(x) = x^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , e ricordiamo che  $f$  è integrabile in senso improprio in  $[1, +\infty)$  se e solo se  $\alpha > 1$  (si veda l'Esempio 8.33). Perciò, segue dal criterio integrale che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , è convergente se  $\alpha > 1$ . Poiché, come già sappiamo, la serie è divergente se  $\alpha \leq 1$ , si conclude che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ è convergente} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Nel caso critico  $\alpha = 1$ , prendiamo  $f(x) = 1/(x(\log x)^\beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Sappiamo (si veda l'Esempio 8.34) che  $f$  è integrabile in senso improprio in  $[2, +\infty)$  se e solo se  $\beta > 1$ . Perciò, segue dal criterio integrale che

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^\beta} \text{ è convergente} \Leftrightarrow \beta > 1.$$



Si può utilizzare la (9.4) per approssimare la somma di una serie. Per esempio, sia

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

ponendo  $n = 9$  nella (9.4), si ottiene

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k^2} + \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq s \leq \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{10^2} + \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

ovvero, poiché  $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 0.1$ ,

$$1.639 \leq s \leq 1.650.$$

### Guida

Successioni e serie a valori complessi si utilizzano per funzioni olomorfe e trasformate (Parte V).

## 9.2 Successioni e serie a valori complessi

Una **successione a valori complessi** non è altro che una funzione da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{C}$ :  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $z_n \in \mathbb{C}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Ad esempio, nella Figura 9.3 sono stati indicati alcuni punti dell'immagine della successione

$$z_n = \frac{5}{\sqrt{n+1}} e^{-\frac{1}{6}n\pi i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vogliamo estendere al caso complesso la teoria sviluppata nei capitoli precedenti per le successioni reali. A tale scopo cominciamo considerando per esempio la successione

$$\left\{ 1 + \frac{4}{n+1} + \left( 3 + \frac{2}{n+1} \right) i \right\}_{n \in \mathbb{N}} \\ = \left\{ 5 + 5i, \quad 3 + 4i, \quad \frac{7}{3} + \frac{11}{3}i, \quad 2 + \frac{7}{2}i, \quad \frac{9}{5} + \frac{17}{5}i, \quad \frac{5}{3} + \frac{10}{3}i, \dots \right\}.$$

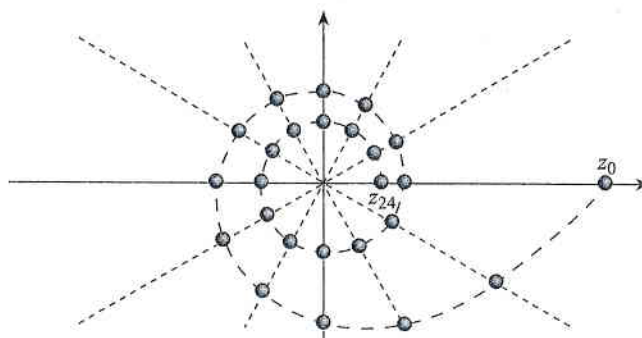
Per quanto riguarda il problema della definizione di limite, notiamo che le successioni reali  $1 + 4/(n+1)$  e  $3 + 2/(n+1)$  convergono a 1 e 3 per  $n \rightarrow +\infty$ . Appare quindi piuttosto naturale introdurre un concetto che selezioni il numero complesso  $1 + 3i$  quale limite della successione ora considerata.

In analogia con quanto fatto nel caso reale utilizzeremo sempre la seguente **distanza (euclidea) tra due numeri complessi**:

$$d_e(z, w) := |z - w| \quad \text{per ogni } z, w \in \mathbb{C}$$

ovvero, per la definizione (1.15) del modulo di un numero complesso,

**Figura 9.3** Immagine di successione a valori in  $\mathbb{C}$ .





$$d_\epsilon(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) = |(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}. \quad (9.5)$$

Tale distanza verifica le proprietà (i-iii) della Definizione 3.1 (ovviamente con  $\mathbb{C}$  sostituito a  $\mathbb{R}$ ) e ci permette di introdurre gli intorni sferici e il concetto di limite:

**DEFINIZIONE 9.2**

(i) Dati  $z \in \mathbb{C}$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ , si dice **intorno sferico** di  $z$  di raggio  $\epsilon$  l'insieme

$$B_\epsilon(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < \epsilon\}.$$

(ii)  $\ell \in \mathbb{C}$  si dice **limite della successione complessa**  $\{z_n\}$  e si scrive  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \ell$  se per ogni  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  si ha  $z_n \in B_\epsilon(\ell)$  definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ . In tal caso la  $\{z_n\}$  è detta **convergente**.

(iii) La successione complessa  $\{z_n\}$  si dice **divergente** se  $|z_n| \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$  e in tal caso si scrive  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$ .

È evidente che per la Definizione 9.2 (ii) risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} \ell \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} \ell$$

ovvero, posti  $z_n = a_n + ib_n$  e  $\ell = a + ib$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + ib_n) = a + ib \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b. \quad (9.6)$$

Quindi il calcolo del limite di una successione complessa può essere ridotto a quello dei limiti di due successioni reali. Nell'esempio considerato si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{4}{n+1} + i \left( 3 + \frac{2}{n+1} \right) \right) = 1 + 3i.$$

Naturalmente, vale anche la seguente caratterizzazione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n - \ell| = 0. \quad (9.7)$$

Consideriamo la successione

$$z_n = \left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^n + \left( \frac{i}{2} \right)^n.$$

Per utilizzare la (9.6), dobbiamo scomporre  $z_n$  nella sua parte reale e parte immaginaria: si ottiene

$$\operatorname{Re}(z_n) = a_n = \begin{cases} \left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^n + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \left( 1 - \frac{1}{3n} \right)^n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im}(z_n) = b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

**ESEMPIO 9.2**

Poiché  $a_n \rightarrow e^{-\frac{1}{3}}$  e  $b_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , concludiamo che  $z_n \rightarrow e^{-\frac{1}{3}}$  per  $n \rightarrow \infty$ . In effetti, nel caso in esame è più efficiente utilizzare la (9.7) (che però, si osservi, richiede di avere già un'intuizione su quale sia il limite). Si ha infatti, utilizzando la disuguaglianza triangolare,

$$0 \leq |z_n - e^{-\frac{1}{3}}| \leq \left| \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n - e^{-\frac{1}{3}} \right| + \left| \left(\frac{i}{2}\right)^n \right| = o(1) \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dal teorema del confronto (che è applicabile alla successione dei moduli essendo quest'ultima una successione reale) si conclude che  $|z_n - e^{-\frac{1}{3}}| \rightarrow 0$ , ovvero  $z_n \rightarrow e^{-\frac{1}{3}}$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

### ESEMPIO 9.3

Per  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $z_n$  la soluzione con parte immaginaria positiva di  $z^2/2 - z + n + 1 = 0$ ; vogliamo determinare il comportamento della successione  $\{i^n z_n\}$ . Scriviamo esplicitamente  $z_n$ : con un semplice calcolo si ottiene  $z_n = 1 + i\sqrt{2n+1}$ . Quindi  $\{i^n z_n\}$  diverge:

$$|i^n z_n| = |i^n| |z_n| = |z_n| = \sqrt{1 + (2n+1)} = \sqrt{2n+2} \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Il concetto di successione divergente mette in evidenza la particolarità del caso reale; la distinzione tra i limiti  $+\infty$  e  $-\infty$  è basata sull'ordinamento " $\leq$ ", e quindi non si può riprodurre in  $\mathbb{C}$ .<sup>(1)</sup> Sempre per la mancanza di ordinamento, non valgono nel caso complesso risultati sui limiti riguardanti permanenza del segno, confronto e monotonia. Comunque, molti altri concetti possono essere ancora definiti, sostituendo nelle corrispondenti definizioni il valore assoluto con la distanza complessa (9.5): limitatezza, punto di accumulazione, sottosuccessione e successione fondamentale. Per esempio,  $E \subseteq \mathbb{C}$  è detto **insieme limitato** se esiste  $M \in \mathbb{R}^+$  tale che  $|z| \leq M$  per ogni  $z \in E$ , ovvero se  $E \subseteq B_M(0)$  per qualche  $M \in \mathbb{R}^+$  (si confronti con la (3.2)). È possibile dimostrare che anche importanti risultati, quali il teorema di Bolzano-Weierstrass, il Teorema 4.7 e il criterio di Cauchy, continuano a valere in  $\mathbb{C}$  (sempre a patto di leggere il valore assoluto come distanza complessa).

Avendo introdotto il concetto di limite per le successioni complesse, possiamo definire il concetto di convergenza di **serie a termini complessi** in modo del tutto analogo al caso reale, attraverso il limite della successione delle somme parziali. Data una successione  $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ è convergente} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n z_k \right) = \sigma \in \mathbb{C},$$

e in tal caso  $\sigma$  si dice **somma** della serie. In modo del tutto analogo al caso reale, si deducono il criterio di Cauchy e la condizione necessaria,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ è convergente} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = 0,$$

che utilizzando la (9.7) può essere riformulata come segue:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ è convergente} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} |z_k| = 0.$$

In generale, posto  $z_k = a_k + ib_k$ , si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + ib_k) \text{ è convergente} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ sono convergenti.}$$

<sup>(1)</sup> La notazione  $z_n \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow +\infty$  può essere formalizzata, in analogia con quanto fatto nel caso reale, introducendo un'estensione dell'insieme  $\mathbb{C}$  ottenuta aggiungendo un elemento indicato con il simbolo  $\infty$ . Gli intorni di  $\infty$  sono  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  e gli insiemi  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \cup \{\infty\}$  ( $M > 0$ ).

## ESEMPIO 9.4

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i+k} - \frac{1}{i-k} + \frac{i}{k^3} \right)$$

è divergente. Infatti si ha

$$\frac{1}{i+k} - \frac{1}{i-k} + \frac{i}{k^3} = \frac{i-k-(i+k)}{(i+k)(i-k)} + \frac{i}{k^3} = +\frac{2k}{1+k^2} + \frac{i}{k^3} \sim +\frac{2}{k} + \frac{i}{k^3} \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

e quindi la serie della parte reale diverge (per confronto con la serie armonica).

Quasi sempre è estremamente complicato determinare la parte reale e immaginaria di  $z_k$ , ed è molto più naturale trattare la serie direttamente in  $\mathbb{C}$ . Poiché non ha senso parlare di segno dei termini della serie, diventa essenziale il concetto di assoluta convergenza. Analogamente al caso reale,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ è assolutamente convergente} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ è convergente}$$

(il modulo è inteso in senso complesso). La serie che compare a destra è a termini reali: perciò ad essa sono applicabili tutti i criteri noti per le serie a termini positivi. Dal criterio di Cauchy segue, come nel caso reale, il criterio di convergenza assoluta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k| \text{ è convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k \text{ è convergente.}$$

## ESEMPIO 9.5

Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik}}{(1+3ik)^2}$$

utilizzando il criterio di convergenza assoluta, ovvero studiando la serie dei moduli:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{e^{ik}}{(1+3ik)^2} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|e^{ik}|}{|1+3ik|^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+9k^2}.$$

Dal criterio del confronto (con la serie armonica generalizzata con  $\alpha = 2$ ) segue che tale serie è convergente: perciò la serie in esame è assolutamente convergente, e quindi convergente.

## ESEMPIO 9.6

Per  $b \in \mathbb{R}$ , studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} + ib \right)^k$$

utilizzando il criterio di convergenza assoluta, ovvero studiando la serie dei moduli:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \left( \frac{1}{2} + ib \right)^k \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{2} + ib \right|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4} + b^2 \right)^{k/2}.$$

Dal criterio della radice segue che tale serie è convergente se  $1/4 + b^2 < 1$ , ovvero se  $|b| < \sqrt{3}/2$ . In tal caso la serie in esame è assolutamente (e quindi semplicemente) convergente. Se  $b \geq \sqrt{3}/2$ , allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \left( \frac{1}{2} + ib \right)^k \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} + b^2 \right)^{k/2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } |b| > \sqrt{3}/2 \\ 1 & \text{se } |b| = \sqrt{3}/2. \end{cases}$$



Quindi la condizione necessaria è violata e la serie in esame non converge. Pertanto, si conclude che la serie in esame è convergente se e solo se  $b \in (-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ .

**Osservazione.** Come abbiamo osservato nel Paragrafo 1.4,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$  possono essere identificati come insiemi:  $x + iy \sim (x, y)$ . Vedremo nel Capitolo 10 che, con questa identificazione, la distanza euclidea in  $\mathbb{R}^2$  coincide con la (9.5); perciò, non stupirà lo studente che i concetti introdotti in questo paragrafo (distanza, intorno, limite), così come il teorema di Bolzano-Weierstrass, torneranno a essere utilizzati nel Capitolo 10 nel caso di  $\mathbb{R}^2$  e, più in generale, di  $\mathbb{R}^N$ .

### ESERCIZIO 9.1

Determinare il comportamento e, se esiste, il limite delle seguenti successioni:

a)  $z_n = \frac{n}{1 + in} e^{i \operatorname{arctg} n}$ ;

b)  $z_n = \log(e + n^{\alpha-2}) + i(1 - n^{1-\alpha})$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

c)  $z_n = \sqrt[n]{2} + i\sqrt[n]{n}$ ;

d)  $z_n = n \left( 1 - \left( 1 - \frac{2}{n} \right)^3 \right) e^{7in(1+\frac{1}{n})}$ .

### ESERCIZIO 9.2

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ik\pi}}{k}$ ;

c)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i-1)^k}{k}$ ;

b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i-1)^k}{k!}$ ;

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + ik^3) e^{k(2i-1)}$ .

### Guida

Le serie di potenze si utilizzano per le serie di Taylor (Paragrafo 9.4) e per le equazioni di Bessel (Paragrafo 17.5.4); inoltre sono richiamate per le serie di funzioni (Paragrafo 9.5.3). Le serie di potenze a valori complessi si utilizzano per funzioni olomorfe e trasformate (Parte V).

## 9.3 Serie di potenze

Nei capitoli precedenti abbiamo incontrato serie dipendenti da un parametro, al variare del quale abbiamo studiato il problema della convergenza; si pensi per esempio alla serie geometrica. Un caso di particolare rilevanza, anche per le applicazioni, è quello delle *serie di potenze*.

### DEFINIZIONE 9.3

Siano  $\{a_k\}$  una successione reale,  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  con  $x_0$  fissato. Si dice **serie di potenze** l'espressione

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k. \quad (9.8)$$

Si dice **insieme di convergenza** della serie l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \text{la serie (9.8) converge}\}.$$

Il primo problema che affronteremo in questo paragrafo è quello di stabilire per quali  $x$  la serie di potenze è convergente, ovvero di determinare il suo insieme di convergenza.

Banalmente la serie (9.8) converge per  $x = x_0$ ; come si può vedere nel prossimo esempio, esistono serie di potenze per le quali l'insieme di convergenza ha come unico elemento  $x_0$ .

La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$  converge solo per  $x = x_0 = 0$ . Infatti, se  $x \neq 0$ , i termini  $(kx)^k$  non vanno a zero per  $k \rightarrow +\infty$ .

**ESEMPIO 9.7**

Supponiamo ora che  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_1 - x_0)^k$  converga per qualche  $x_1 \neq x_0$ . Il seguente risultato è cruciale per la teoria delle serie di potenze.

**LEMMA 9.4**

Se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  converge per  $x = x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 \neq x_0$ , allora essa converge assolutamente per ogni  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ .

**Dimostrazione**

Per il Teorema 4.13, la successione  $\{a_k(x_1 - x_0)^k\}$  converge a 0 per  $k \rightarrow +\infty$ , quindi, essendo convergente, è limitata:  $|a_k(x_1 - x_0)^k| \leq M$  per qualche  $M > 0$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Perciò otteniamo che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$

$$|a_k(x - x_0)^k| = |a_k| |x_1 - x_0|^k \frac{|x - x_0|^k}{|x_1 - x_0|^k} \leq M \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k.$$

Posto  $q = |(x - x_0)/(x_1 - x_0)|$ , risulta che  $0 \leq q < 1$  se  $|x - x_0| < |x_0 - x_1|$ ; in tal caso segue dal teorema del confronto e dalla convergenza della serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} Mq^k$  che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(x - x_0)^k|$  converge, ovvero la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \text{ converge assolutamente se } |x - x_0| < |x_0 - x_1|.$$

Il Lemma 9.4 implica che l'insieme dei valori  $x$  per i quali la serie di potenze converge è un *intervallo simmetrico* intorno al punto  $x_0$ . Questa osservazione conduce in modo naturale al concetto di *raggio di convergenza*.

**DEFINIZIONE 9.5**

Si definisce **raggio di convergenza** della serie (9.8) il valore  $r := \sup_{x \in E} |x - x_0|$ , dove  $E$  è l'insieme di convergenza della serie.

Ovviamente  $r \in [0, +\infty]$  e ha la seguente proprietà.

**TEOREMA 9.6**

Sia  $r$  il raggio di convergenza della serie (9.8), allora:

- (i) la serie converge assolutamente per ogni  $x$  tale che  $|x - x_0| < r$ ;
- (ii) la serie non converge per  $x$  tale che  $|x - x_0| > r$ .

**Dimostrazione**

La (ii) segue immediatamente dalla definizione di raggio di convergenza, mentre la (i) segue facilmente dal Lemma 9.4. Infatti sia  $r > 0$  (se  $r = 0$  la tesi è banale); bisogna dimostrare che se  $x$  soddisfa  $|x - x_0| < r$  la serie converge assolutamente. Per la definizione di  $r$ , dalle proprietà dell'estremo superiore risulta che esiste  $x_1 \in E$  per il quale  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ . Dal Lemma 9.4 segue allora che



$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right|$  converge assolutamente.

### Osservazioni.



- a) Si noti che il Teorema 9.6 non fornisce alcuna informazione quando  $r \in \mathbb{R}^+$  e  $x - x_0 = \pm r$ . Di fatto, come vedremo nel prossimo esempio, questo caso va considerato separatamente per ciascuna serie di potenze in esame.
- b) Operando il consueto cambiamento di variabili  $\hat{x} = x - x_0$ , possiamo ricondurci al caso di serie di potenze con  $x_0 = 0$ . Nel seguito per semplicità di notazione considereremo serie di potenze della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

### ESEMPIO 9.8

- a) La serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  converge se  $|x| < 1$  e non converge se  $|x| \geq 1$ ; quindi il raggio di convergenza è  $r = 1$  e la serie non converge per  $x = \pm 1$ .
- b) Il raggio di convergenza della serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  è  $r = 1$ . Infatti utilizzando il criterio della radice o del confronto si vede che la serie è convergente per  $|x| < 1$  e non converge per  $|x| > 1$ . Se  $x = 1$ , ritroviamo la serie armonica, e quindi  $x = 1$  non appartiene all'insieme di convergenza, mentre se  $x = -1$  ritroviamo  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ , che converge per il criterio di Leibniz.
- c) La serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ha raggio di convergenza  $r = +\infty$ . Utilizzando il criterio del rapporto abbiamo infatti

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### Determinazione del raggio di convergenza

Dall'esempio precedente si intuisce uno stretto legame tra il raggio di convergenza di una serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  e il valore di  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  oppure di  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$  (qualora questi esistano). Infatti vale il seguente risultato:

### TEOREMA 9.7

Sia  $\{a_k\}$  una successione reale. Se esiste

(i)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in [0, \infty]$

oppure

(ii)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L \in [0, \infty]$ ,

allora la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ha raggio di convergenza

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{se } L = 0 \\ \frac{1}{L} & \text{se } L \in (0, \infty) \\ 0 & \text{se } L = +\infty. \end{cases}$$



**Dimostrazione**

Se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in [0, \infty]$$

applicando il criterio della radice alla serie  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$  si ottiene che per ogni  $x \neq 0$

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|} |x| \rightarrow \begin{cases} L|x| & \text{se } L < +\infty \\ +\infty & \text{se } L = +\infty, \end{cases}$$

quindi la serie di potenze converge assolutamente se  $L|x| < 1$  e non converge se  $L|x| > 1$ ; ovvero  $1/L$  è il raggio di convergenza della serie di potenze (ovviamente il raggio di convergenza è 0 se  $L = +\infty$  ed è  $+\infty$  se  $L = 0$ ). Nel caso (ii) si procede analogamente, utilizzando il criterio del rapporto.

**ESEMPIO 9.9**

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left( = \frac{1}{1-x} \text{ se } |x| < 1 \right) \Rightarrow r = 1$  (infatti  $a_k = 1$  e  $\sqrt[k]{a_k} = 1$  per ogni  $k$ );
- b)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k+b)!}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ ,  $\Rightarrow r = +\infty$  (infatti  $a_k/a_{k-1} = -x/(k+b) \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow +\infty$ );
- c)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^2)^k}{(2k)!} \Rightarrow r = +\infty$  (si procede come in (b) ponendo  $y = x^2$ );
- d)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^2)^k}{(2k+1)!} \Rightarrow r = +\infty$  (si procede come in (c));
- e)  $\sum_{k=0}^{\infty} (kx)^k \Rightarrow r = 0$  (si veda l'Esempio 9.7);
- f)  $\sum_{k=0}^{\infty} 5^k x^k \Rightarrow r = \frac{1}{5}$ .

Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r$ . Nell'intervallo  $(-r, r)$ , introduciamo la funzione  $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  definita come la somma della serie:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-r, r).$$

La  $f$  soddisfa ottime proprietà di regolarità: le enunciamo insieme a un paio di prime applicazioni.

**TEOREMA 9.8** Continuità della somma

Sia  $r > 0$  il raggio di convergenza della serie  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Allora  $f$  è continua in  $(-r, r)$ .

**Guida**

Le dimostrazioni dei Teoremi 9.8 e 9.9 sono in rete, ma chi svolge le serie di funzioni le trova nel Paragrafo 9.5.

**TEOREMA 9.9** Integrazione termine a termine

Sia  $r > 0$  il raggio di convergenza di  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Allora  $f$  è integrabile in  $[-r', r']$  per ogni  $r' < r$  e

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \quad \text{per ogni } x \in (-r, r). \quad (9.9)$$

**ESEMPIO 9.10**

Si consideri la serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ , che sappiamo avere raggio di convergenza 1 e somma  $\frac{1}{1+x}$ . Applicando il Teorema 9.9 otteniamo

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad |x| < 1.$$

Abbiamo così dedotto la convergenza in  $(-1, 1)$  della serie che compare a destra nella precedente uguaglianza intorno a  $x = 0$ .

Ponendo  $x^2$  al posto di  $x$  nella serie geometrica, abbiamo

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1$$

con lo stesso ragionamento risulta:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad |x| < 1.$$

L'esempio precedente mostra l'utilità del Teorema 9.9: il fatto che all'interno dell'intervallo di convergenza si possa integrare una serie di potenze termine a termine ci permette di calcolare la somma di altre serie. Analogamente la somma di una serie è derivabile e la sua derivata si ottiene derivando termine a termine.

**Dimostrazione****TEOREMA 9.10** Derivazione termine a termine

Sia  $r > 0$  il raggio di convergenza di  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$ . Allora  $f$  è derivabile in  $(-r, r)$  e  $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  per ogni  $x \in (-r, r)$ .

Applicando ripetutamente il Teorema 9.10 si ottiene che  $f \in C^k(((-r, r))$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , e

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

In particolare, posto  $x = 0$  si ottiene

$$f^{(k)}(0) = k! a_k.$$

Abbiamo così ottenuto il seguente risultato.

**COROLLARIO 9.11**

Se  $r > 0$  è il raggio di convergenza per  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ,  $x \in I_r = (-r, r)$ , allora  $f \in C^\infty(I_r)$  e  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ .

Perciò la *serie di Taylor* della funzione somma di una serie di potenze coincide con la serie di potenze di partenza nell'intervallo di convergenza. Alle *serie di Taylor* è dedicato il prossimo paragrafo.

**ESEMPIO 9.11**

Riconsideriamo la serie geometrica

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1.$$

Per il Teorema 9.10 risulta

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(-1)^{k+1} x^k$$

per ogni  $x \in (-1, 1)$ .

Per identificare i coefficienti del prodotto di due serie di potenze, possiamo seguire lo stesso ragionamento del Paragrafo 4.11 (basta evitare di fissare  $x = 1$  nella (4.47)).

Dal Teorema 4.30 e dal Teorema 9.6 segue immediatamente che: se  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  ha raggio di convergenza  $r_1 > 0$  e  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  ha raggio di convergenza  $r_2 > 0$ , allora la serie prodotto

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_k := \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

ha raggio di convergenza  $r \geq \min\{r_1, r_2\}$ , e

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \min\{r_1, r_2\}.$$

Può accadere che il raggio della serie prodotto sia più grande del minimo: per esempio, il prodotto delle serie  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  (di raggio  $r_1 = 1$ ) e  $1 - x$  (di raggio  $r_2 = +\infty$ ) è  $1 - x^2$ , che ovviamente ha raggio di convergenza  $+\infty$ . La limitazione  $|x| < \min\{r_1, r_2\}$  serve per dare senso a ciascuna delle due serie.

In molti problemi matematici e applicativi si considerano *serie di potenze a termini complessi*, ovvero espressioni della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{con } a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}. \quad (9.10)$$

Considerando la teoria sviluppata finora per le serie di potenze a termini reali, è evidente che essa si basa principalmente sull'utilizzo del concetto di convergenza assoluta. Quindi, per quanto già osservato alla fine del precedente paragrafo, la teoria si estende facilmente al caso complesso. In particolare è possibile introdurre il concetto di raggio di convergenza e risulta: data la serie di potenze  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  esiste  $r \in [0, +\infty]$ , detto raggio di convergenza, tale che la serie converge assolutamente se  $|z - z_0| < r$  e non converge se  $|z - z_0| > r$ . Anche il procedimento per determinare il raggio di convergenza rimane invariato. Per esempio, la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} (2k + 3ik^2) (z - 3i)^k$  ha raggio di convergenza  $r = 1/L$ , dove

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{2(k+1) + 3i(k+1)^2}{2k + 3ik^2} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{3ik^2 + (2+6i)k + 2+3i}{3ik^2 + 2k} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{3i + \frac{2+6i}{k} + \frac{2+3i}{k^2}}{3i + \frac{2}{k}} \right| = 1. \end{aligned}$$

Serie di potenze in  $\mathbb{C}$

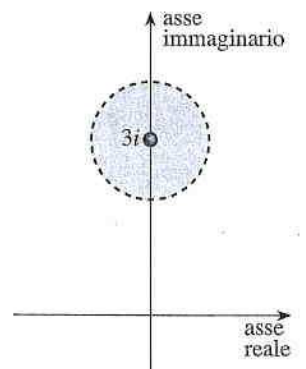


Figura 9.4 Insieme di convergenza in  $\mathbb{C}$ .



Allora  $r = 1$  e la serie di potenze converge assolutamente nel cerchio di raggio 1 e centro  $3i$ , ovvero per ogni  $z \in \mathbb{C}$  tale che  $|z - 3i| < 1$  (si veda Figura 9.4). La serie non converge se  $|z - 3i| > 1$ .

Si noti che per il caso complesso, il termine "raggio di convergenza" è particolarmente appropriato. Infatti se  $r$  è il raggio di convergenza della serie (9.10), geometricamente l'insieme in cui la serie converge assolutamente è il cerchio (nel piano complesso) di centro  $z_0$  e raggio  $r$ .

### ESERCIZIO 9.3

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (\log x)^{2k};$$

$$e) \sum_{k=1}^{\infty} k \log k (x - [x])^k;$$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (x^2 - 3x + 1)^k;$$

$$f) \sum_{k=1}^{\infty} (4 - x^2)^k (k^2 + 1)^{\frac{k^2+1}{k}};$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{k + 2} (\operatorname{tg} x)^k;$$

$$g) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1} (-e^x + 1)^k.$$

$$d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k5^k}{2^k + 3^k} (4 - |x + 2|)^k;$$

### Guida

Le serie di Taylor sono opzionali, ma sono richiamate nella trattazione di funzioni olomorfe e trasformate (Parte V).

## 9.4 Serie di Taylor

Sia  $f$  una funzione che ha derivate di ogni ordine:  $f \in C^\infty((a, b))$ . Allora, preso  $x_0 \in (a, b)$ , esiste il polinomio di Taylor di centro  $x_0$  di ogni ordine  $n$  di  $f$ ,  $T_n(x)$ , ed è naturale introdurre la **serie di Taylor** di  $f$  di centro  $x_0$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Si osservi che ogni serie di Taylor è una serie di potenze.

La funzione  $f$  si dice **sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0$  in  $I$**  se esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che

- la serie di Taylor di  $f$  di centro  $x_0$  è convergente in  $x$  per ogni  $x \in I$ ,
- la sua somma è  $f(x)$ .

Si osservi l'importanza della seconda condizione: la sola convergenza della serie di Taylor *non* implica che la somma sia  $f$ . Per convincersi, basta riconsiderare l'Esempio 7.39, in cui la somma è uguale a zero per ogni  $x \in \mathbb{R}$  mentre la funzione non è identicamente nulla.

Segue dalla definizione di somma di una serie convergente che  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0$  in  $I$  se e solo se

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x) \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \text{ per ogni } x \in I. \quad (9.11)$$

Una funzione  $f \in C^\infty((a, b))$  si dice **analitica** in  $(a, b)$  se per ogni  $x \in (a, b)$  esiste  $x_0 \neq x$  tale che la serie di Taylor di  $f$  di centro  $x_0$  è convergente ad  $f(x)$  in  $x$ .

### Funzione analitica

### ESEMPIO 9.12

La funzione  $f(x) = \sin x$  è analitica in  $\mathbb{R}$ . Verifichiamo che è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0 = 0$  in  $\mathbb{R}$ , ovvero, per la formula del polinomio di Taylor della funzione seno (si veda l'Esempio 7.29), che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \dots \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, per la formula del resto di Lagrange,

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + E_{2n+2}(x)$$

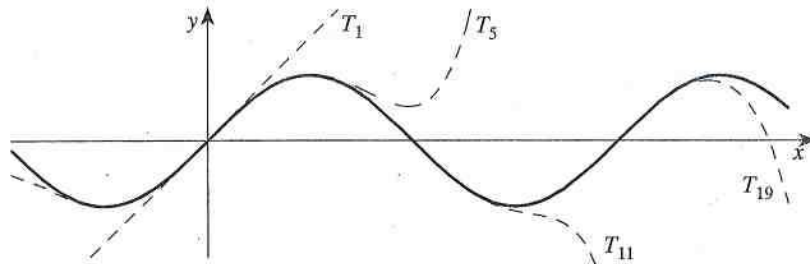
dove

$$E_{2n+2}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(y_n)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

e  $y_n$  è compreso tra 0 e  $x$ . Poiché la derivata di qualsiasi ordine della funzione seno è, a meno del segno, la funzione seno o la funzione coseno, si ha  $|f^{(2n+2)}(y_n)| \leq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ; pertanto

$$|E_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Poiché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (si veda la (4.6)), anche  $E_{2n+2}(x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  e la (9.11) è verificata. Ciò significa, come visualizzato in Figura 9.5, che i polinomi di Taylor  $T_n(x)$  di centro in  $x_0 = 0$  convergono a  $\sin x$  per  $n \rightarrow +\infty$  per qualunque  $x \in \mathbb{R}$ .



**Figura 9.5** La funzione  $f(x) = \sin x$  e alcuni suoi polinomi di Taylor di centro  $x_0 = 0$ .

Nell'esempio precedente abbiamo utilizzato la formula del resto di Lagrange, stimando l'errore, per dedurre che  $\sin x$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0 = 0$  in  $\mathbb{R}$ . Talvolta è invece più semplice utilizzare l'espressione della serie basandosi sul Corollario 9.11: se  $f$  è la somma di una serie di potenze convergente in  $I$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad \text{in } I,$$

allora tale serie coincide con la serie di Taylor in  $I$ .

Per esempio, segue dalla (4.33) che

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{per } -1 < x < 1 \quad (9.12)$$

quindi, la funzione  $(1-x)^{-1}$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0 = 0$  in  $(-1, 1)$ . Inoltre, sostituendo  $-x^2$  a  $x$  nella (9.12), si ottiene che

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} \quad \text{per } -1 < x < 1 \quad (9.13)$$

ovvero, anche  $(1+x^2)^{-1}$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0 = 0$  in  $(-1, 1)$ . Lo studente interessato può facilmente controllare che non sarebbe così semplice ottenere quest'ultimo risultato tramite la formula del resto di Lagrange, semplicemente perché le formule per le derivate di ordine superiore di  $(1+x^2)^{-1}$  sono piuttosto complesse.



Le proprietà (7.44) e (7.45) per i polinomi di Taylor possono essere generalizzate alle serie di Taylor. Inoltre, utilizzando il Teorema 9.10, si ottiene una relazione precisa tra l'analiticità di  $f$  e quella di  $f'$ .

**TEOREMA 9.12**

Siano  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  e  $g$  due funzioni sviluppabili in serie di Taylor di centro  $x_0$  in  $(a, b)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Indicando la serie di Taylor con  $T[f]$ , si ha che anche le funzioni  $\alpha f + \beta g$  sono sviluppabili in serie di Taylor di centro  $x_0$  in  $(a, b)$  e

$$T[\alpha f + \beta g] = \alpha T[f] + \beta T[g]. \quad (9.14)$$

Inoltre  $f$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0$  in  $(a, b)$  se e solo se lo è  $f'$  e

$$T[f'] = (T[f])'. \quad (9.15)$$

Dagli esempi di polinomi di Taylor dati nel Paragrafo 7.11 possiamo dedurre le serie di Taylor di centro  $x_0 = 0$  di alcune funzioni elementari. Le abbiamo elencate nel seguente teorema, indicando gli intervalli in cui le serie convergono e in cui il limite coincide con la funzione di partenza; si tratta quindi di intervalli in cui la funzione di partenza è analitica.

Sviluppi in serie di Taylor di funzioni elementari

**TEOREMA 9.13**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad \text{per ogni } x \in (-1, 1).$$

Il risultato per  $\sin x$  è stato dimostrato nell'Esempio 9.12, quelli per  $e^x$  e  $\cos x$  sono analoghi. I risultati per  $\sinh x$  e  $\cosh x$  si potrebbero dimostrare nello stesso modo, ma è più semplice utilizzare la (9.14) applicata a  $f(x) = e^x$  e  $g(x) = e^{-x}$  (ovviamente lo sviluppo in serie di  $e^{-x}$  segue da quello di  $e^x$  con  $-x$  sostituito a  $x$ ). Il risultato per  $(1+x)^\alpha$  segue da un risultato molto più profondo che discuteremo brevemente nel Capitolo 18 sulle funzioni complesse: solo nel caso particolare  $\alpha = -1$ , esso segue dalla (9.12) con  $-x$  sostituito a  $x$ . I risultati per  $\log(1+x)$  e  $\operatorname{arctg} x$  seguono dalla seconda parte del Teorema 9.12 e dagli sviluppi in serie di Taylor delle loro derivate: si veda l'Esempio 9.10.



Si vuole calcolare

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx. \quad (9.16)$$

Si ricorda che una primitiva delle funzioni  $\frac{\sin x}{x}$  non è esprimibile elementarmente.

Possiamo ricorrere al Teorema 9.13 per calcolare, o stimare, il valore dell'integrale (9.16).

Si ha

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

da cui, applicando il Teorema 9.9, otteniamo

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int_0^1 x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)}.$$

Il Teorema 9.13 fornisce una prima spiegazione sul perché, nell'approssimazione di  $\sqrt{17}$  affrontata nell'Esempio 7.41, abbiamo utilizzato la funzione  $4\sqrt{1+x}$  nel punto  $x = 1/16$  anziché la funzione  $\sqrt{1+x}$  nel punto  $x = 16$ . Per il Teorema 9.13, la funzione  $\sqrt{1+x}$  è sviluppabile in serie di Taylor di centro  $x_0 = 0$  solo nell'intervallo  $(-1, 1)$  a cui appartiene  $x = 1/16$  ma non  $x = 16$  (si veda Figura 9.6). Più precisamente, per ogni  $-1 < x < 1$

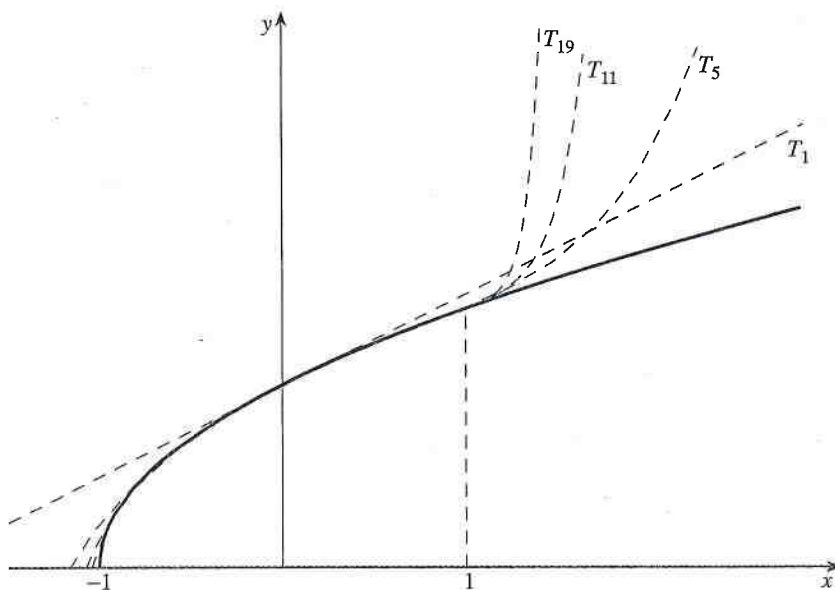
$$4\sqrt{1+x} = 4 + 2x - x^2 + \frac{3}{3!2}x^3 - \frac{3 \cdot 5}{4!2^2}x^4 + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n!2^{n-2}}x^n + \dots$$

quindi

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^8} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-3)}{n!2^{5n-2}}. \quad (9.17)$$

Posto

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{n!2^{5n-2}}$$



**Figura 9.6** La funzione  $f(x) = \sqrt{1+x}$  e alcuni suoi polinomi di Taylor di centro  $x_0 = 0$ .

la serie nella (9.17) è una serie numerica a termini di segno alternò, quindi è naturale considerare il criterio di Leibniz. Osserviamo che  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  e la successione  $|a_n|$  è decrescente:

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \Leftrightarrow 2n - 1 \leq (n + 1)2^5 \Leftrightarrow 0 \leq 30n + 33$$

e quest'ultima disuguaglianza è banalmente soddisfatta per ogni  $n$ .

Approssimare  $\sqrt{17}$  con il valore del polinomio di Taylor in  $x = 1/16$  è equivalente ad approssimarlo con la serie di Taylor in  $x = 1/16$  troncata dopo il termine contenente  $x^n$ ; per il criterio di Leibniz, il valore assoluto dell'errore commesso è inferiore al modulo del "primo termine omissso", ovvero minore di

$$\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{(n + 1)! 2^{5n+3}}.$$

Questa stima dell'errore coincide con quella ottenuta nell'Esempio 7.41 tramite la formula del resto di Lagrange.

### ESERCIZIO 9.4

Determinare lo sviluppo in serie di Taylor di centro  $x_0$  delle seguenti funzioni, determinando l'intervallo di convergenza:

- a)  $f(x) = e^{2x-1}$ ,  $x_0 = 1/2$ ;      d)  $f(x) = \log\left(x + \frac{1}{4}\right)$ ,  $x_0 = 3$ .  
 b)  $f(x) = e^{2x-1}$ ,  $x_0 = 0$ ;  
 c)  $f(x) = \log\left(x + \frac{1}{4}\right)$ ,  $x_0 = 0$ ;

### ESERCIZIO 9.5

Determinare il valore (sotto forma di somma di una serie) dei seguenti integrali:

- a)  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ ;      c)  $\int_0^{1/3} \frac{\log(1+x)}{x} dx$ .  
 b)  $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ ;

### ESERCIZIO 9.6

Stimare l'errore  $E_7(x) = \operatorname{arctg} x - T_7(x)$ , dove  $T_7(x)$  è il polinomio di MacLaurin di ordine 7 di  $\operatorname{arctg} x$ , nel punto  $x = 3/20$  (suggerimento: dimostrare che  $E_7(x) = \int_0^x E(t) dt$  per  $|x| < 1$ , dove  $E(x) = \frac{1}{1+x^2} - (1 - x^2 + x^4 - x^6)$  e osservare che  $E(x) = \frac{x^8}{1+x^2}$ ).

### Guida

Il paragrafo è opzionale.

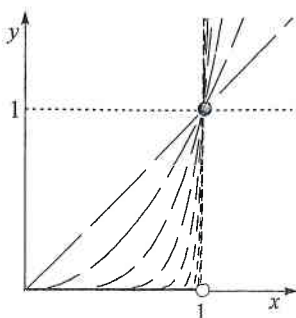


Figura 9.7

## 9.5 Successioni e serie di funzioni

### 9.5.1 Successioni di funzioni

Una *successione di funzioni*  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è una applicazione che ad ogni numero naturale  $n \in \mathbb{N}$  associa una funzione  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Abbiamo già incontrato questi oggetti in forma di successioni dipendenti da un parametro: ad esempio

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in X = [0, +\infty)$$

(si veda Figura 9.7). Per ogni  $x \geq 0$  fissato si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad (9.18)$$

Nell'insieme  $D = [0, 1]$  in cui il limite esiste finito, si pone

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

e si dice che la successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente alla funzione limite  $f$  in  $[0, 1]$ :

#### DEFINIZIONE 9.14

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni da  $X$  in  $\mathbb{R}$ . L'insieme

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{esiste finito } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right\}$$

si dice **insieme di convergenza** della successione  $\{f_n\}$ . La funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in D$$

si dice **funzione limite** o **limite puntuale** di  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$ , si dice che  $\{f_n\}$  converge puntualmente ad  $f$  in  $D$ , e si scrive  $f_n \rightarrow f$  in  $D$ .

In altre parole,  $D$  rappresenta il "dominio naturale" della funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , il limite puntuale della successione  $\{f_n\}$ .

#### ESEMPIO 9.14

a) La Definizione 9.14 si può riformulare dicendo che la successione  $f_n(x) = x^n$ , definita per  $x \in X = [0, +\infty)$ , converge puntualmente ad  $f(x) = [x]$  (la parte intera di  $x$ ) in  $D = [0, 1]$ .

b) La successione  $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}$ , definita per  $x \in \mathbb{R}$ , converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  alla funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

(si veda Figura 9.8a). Per verificarlo, si studia il limite per  $n \rightarrow +\infty$  considerando  $x \in \mathbb{R}$  come un parametro. Per  $x = 0$  si ha  $f_n(0) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi il limite è banale; per  $x \neq 0$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx^2}{1+nx^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{nx^2}} = 1.$$

c) La successione  $f_n(x) = 2^{-nx}$ , definita in  $\mathbb{R}$ , converge puntualmente in  $[0, +\infty)$  alla funzione

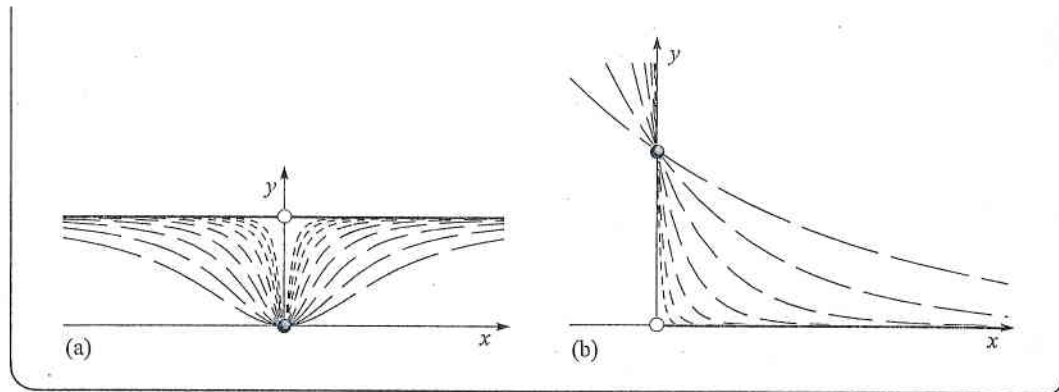
$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

ma non converge puntualmente in  $(-\infty, 0)$  (si veda Figura 9.8b). Infatti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{-nx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^{-x})^n = \begin{cases} 0 & \text{se } 2^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ 1 & \text{se } 2^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \\ +\infty & \text{se } 2^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < 0. \end{cases}$$



Figura 9.8



## ESERCIZIO 9.7

Determinare l'insieme di convergenza  $D$  e la funzione limite  $f$  delle seguenti successioni:

- |   |  |
|---|--|
| a) $f_n(x) = (1-x)x^n$ ;                      | e) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ ; |
| b) $f_n(x) = (\sin(nx))/n$ ;                  | f) $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$ ;              |
| c) $f_n(x) = x^2/(n+x^2)$ ;                   | g) $f_n(x) = (1-(x-n)^2)_+$ ;            |
| d) $f_n(x) = \operatorname{arctg}(x/(n+1))$ ; | h) $f_n(x) = 2-n(x-1)_+$ .               |

## 9.5.2 Convergenza uniforme

Le successioni considerate nell'Esempio 9.14 consistono di funzioni continue, mentre le funzioni limite presentano punti di discontinuità. Di seguito si introduce un concetto di convergenza più forte, che garantisce la continuità della funzione limite.

## DEFINIZIONE 9.15

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}$ , sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni da  $D$  in  $\mathbb{R}$  che converge puntualmente ad  $f$  in  $D$ , e sia  $E \subseteq D$ . Si dice che  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente ad  $f$  in  $E$ , e si scrive  $f_n \rightrightarrows f$  in  $E$ , se

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

La differenza è chiara: la convergenza ad  $f$  è puntuale in  $E$  se e solo se

per ogni  $x \in E$  e  $\varepsilon > 0$  esiste  $N = N(x; \varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  se  $n > N$ , mentre è uniforme in  $E$  se e solo se

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tale che  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  se  $n > N$  e  $x \in E$ .

In particolare

$$f_n \rightrightarrows f \text{ in } E \implies f_n \rightarrow f \text{ in } E.$$

Il concetto di convergenza uniforme risulta essere veramente più forte di quello di convergenza puntuale:

## ESEMPIO 9.15

La successione  $f_n(x) = x^n$  non converge uniformemente in  $[0, 1]$  al suo limite puntuale  $f$ : poiché  $|f_n(1) - f(1)| = |1 - 1| = 0$  per ogni  $n$ , e  $f(x) = 0$  se  $0 \leq x < 1$ , si ha

$$\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} x^n = \lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1 \quad \text{per ogni } n$$

(si è usata anche la monotonia della funzione  $x \mapsto x^n$ ). Quindi l'estremo superiore non tende a zero per  $n \rightarrow +\infty$ .

Viceversa,  $f_n(x) = x^n$  converge uniformemente ad  $f(x) = 0$  in  $E = [0, a]$  per ogni  $a \in (0, 1)$ :

$$\sup_{x \in [0, a]} |x^n - 0| = \sup_{x \in [0, a]} x^n = a^n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Il seguente risultato implica che neanche le altre successioni considerate nell'Esempio 9.14 convergono uniformemente a  $f$  nell'insieme di convergenza.

### TEOREMA 9.16

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni continue da  $E$  in  $\mathbb{R}$  che converge uniformemente ad  $f$  in  $E$ . Allora  $f$  è continua in  $E$ .

### Dimostrazione

Sia  $x_0 \in E$  un punto non isolato di  $E$  e sia  $\varepsilon > 0$ . Si vuole dimostrare che esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon \quad \text{se } x \in E \text{ e } |x - x_0| < \delta. \quad (9.19)$$

Per la convergenza uniforme della successione esiste  $N > 0$  tale che  $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$  per ogni  $x \in E$ , quindi, per la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &< 2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(x_0)| \end{aligned}$$

per ogni  $x \in E$ . Per la continuità della funzione  $f_N$  in  $x_0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$  se  $x \in E$  e  $|x - x_0| < \delta$ , quindi vale la (9.19) per tale scelta di  $\delta$ .

Anche se la successione di funzioni continue non converge uniformemente, il limite può essere continuo (ovvero, non vale "il viceversa" del Teorema 9.16):

Sia  $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ . Si ha

$$f_n \rightarrow 0 \quad \text{in } [0, 1] \quad \text{ma} \quad f_n \not\rightarrow 0 \quad \text{in } [0, 1].$$

Anzitutto  $f_n(0) = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Inoltre, per le gerarchie di infiniti,  $f_n(x) \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$  per ogni  $x > 0$ . Quindi  $f_n \rightarrow 0$  in  $[0, 1]$ . D'altra parte, la convergenza non è uniforme in  $[0, 1]$ . Per verificarlo, si deve valutare

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| \stackrel{f_n \geq 0}{=} \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x).$$

Si effettua un semplice studio della funzione  $f_n$ :  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ , e

$$f_n'(x) = n^2 e^{-nx} (1 - nx) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{n}.$$

Perciò  $f_n$  ha massimo assoluto in  $[0, +\infty)$ , assunto in  $x = 1/n$ :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e},$$

che non converge a 0 (diverge a  $+\infty$ ) per  $n \rightarrow +\infty$  (si veda Figura 9.9).

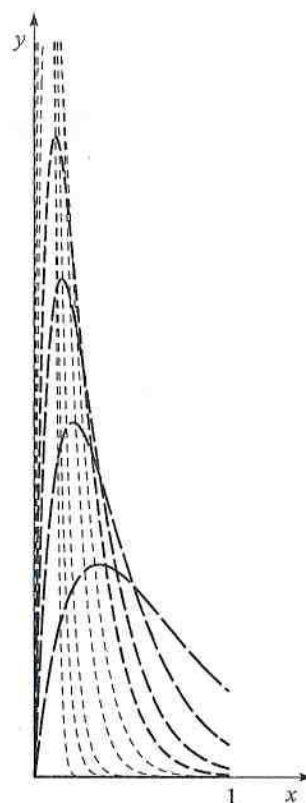


Figura 9.9

### ESEMPIO 9.16

Si osservi che, per la successione dell'Esempio precedente,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx = \int_0^n y e^{-y} dy = [- (1+y) e^{-y}]_0^n = 1 - (n+1) e^{-n}.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 1 \quad \text{mentre} \quad \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Ciò mostra che, in generale, le operazioni di limite e integrale non possono essere scambiate. La convergenza uniforme su un intervallo limitato permette di farlo:

#### TEOREMA 9.17

Siano  $-\infty < a < b < +\infty$  sia  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni continue da  $[a, b]$  in  $\mathbb{R}$  che converge uniformemente in  $[a, b]$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) dx.$$

#### Dimostrazione

Sia  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  e  $x \in [a, b]$ . Allora

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

per la convergenza uniforme di  $f_n$  a  $f$  in  $[a, b]$ .

#### ESEMPIO 9.17

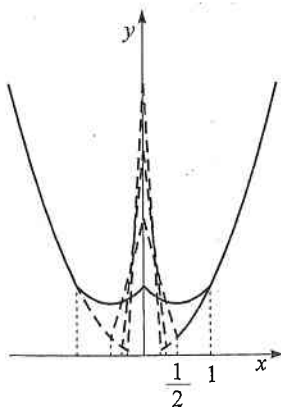


Figura 9.10

Sia  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 + n - n^2|x| & \text{se } -1 \leq nx \leq 1 \\ x^2 & \text{se } n|x| > 1. \end{cases}$$

Se  $x \neq 0$  allora  $n|x| > 1$ , ovvero  $f_n(x) = x^2$ , definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ ; perciò  $f_n(x) \rightarrow x^2$  per  $n \rightarrow +\infty$  per ogni  $x \neq 0$ . Invece  $f_n(0) = n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi l'insieme di convergenza è  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Per ogni  $a > 0$  si ha

$$f_n \rightrightarrows x^2 \text{ in } (-\infty, a] \cup [a, +\infty), \quad \text{mentre } f_n \not\rightrightarrows x^2 \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Infatti per ogni  $a > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che  $Na \geq 1$ ; quindi

$$n|x| \geq na \geq Na \geq 1 \text{ per ogni } n \geq N, |x| \geq a,$$

ovvero

$$\sup_{|x| \geq a} |f_n(x) - x^2| = \sup_{|x| \geq a} |x^2 - x^2| = 0 \quad \text{per ogni } n \geq N.$$

D'altra parte  $f_n(x) - f(x) = n - n^2|x|$  se  $x \in (-1/n, 1/n)$  e  $f_n(x) - f(x) = 0$  se  $|x| \geq 1/n$ , quindi

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} |f_n(x) - x^2| = \sup_{|x| \leq 1/n} (n - n^2|x|) = f(0) = n \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Si noti che, per il teorema precedente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-9}^{-3} f_n(x) dx = \int_{-9}^{-3} x^2 dx = 234.$$



D'altra parte

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^{1/n} (n - n^2 x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2}$$

$$\neq \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx.$$

Per ciascuna delle successioni dell'Esercizio 9.7:

- (i) dire se la successione converge uniformemente nel corrispondente insieme di convergenza  $D$ ;
- (ii) dire se la successione converge uniformemente in  $[0, 1]$ ;
- (iii) se la risposta a (i) e (ii) è negativa, determinare un insieme  $E$  in cui la convergenza è uniforme.

### Esercizio 9.8

## 9.5.3 Serie di funzioni

Una serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad f_k : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}$$

è un caso particolare di successione di funzioni: la successione delle somme parziali

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

è una successione di funzioni. Quindi i concetti di convergenza puntuale e uniforme si trasportano:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ converge puntualmente ad } s \text{ in } D \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad s_n \rightarrow s \text{ in } D$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ converge uniformemente ad } s \text{ in } D \quad \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad s_n \rightrightarrows s \text{ in } D.$$

Il limite puntuale  $s$  si dice anche *somma della serie*. I teoremi corrispondenti si traducono immediatamente al caso delle serie. In particolare:

### TEOREMA 9.18

$E \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f_k : E \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) una successione di funzioni continue in  $E$ . Se la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  converge uniformemente in  $E$ , allora la sua somma  $s(x)$  è continua in  $E$ . Se inoltre  $E = [a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ), allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx.$$

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4 x + k}}, \quad x \geq 0.$$

### ESEMPIO 9.18

Per  $k \rightarrow \infty$  si ha

$$\frac{1}{\sqrt{k^4 x + k}} = \begin{cases} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1 + o(1)}} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Per il criterio del confronto asintotico la serie converge puntualmente per ogni  $x > 0$  (poiché  $2 > 1$ ), mentre è divergente in  $x = 0$  (poiché  $1/2 < 1$ ), ovvero  $s_n(0) \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi l'insieme di convergenza è  $D = (0, +\infty)$ . La convergenza è uniforme in ogni intervallo  $[a, +\infty)$  con  $a > 0$ : scelto  $\varepsilon > 0$ , per il criterio del confronto e per la convergenza puntuale della serie in  $x = a$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 x + k}} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 a + k}} < \varepsilon \quad \text{se } n > N \text{ e } x \geq a.$$

In particolare la somma della serie,  $s(x)$  è continua in  $[a, +\infty)$  per ogni  $a > 0$ . Per l'arbitrarietà di  $a$ ,  $s$  è continua in  $(0, +\infty)$ .

### Serie di potenze

Una classe importante di serie di funzioni sono le serie di potenze,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ , per le quali si ritrovano i risultati dei Teoremi 9.8 e 9.9.

#### TEOREMA 9.19

Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$ . Allora per ogni  $0 < \rho < r$  la serie converge uniformemente in  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ . In particolare la somma è continua in  $(-r, r)$  e

$$\int_a^b \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k(x - x_0)^k, \quad x_0 - r < a < b < x_0 + r.$$

#### Dimostrazione

Per la convergenza assoluta della serie di potenze in  $x = x_0 + \rho$  (si veda il Teorema 9.6), per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot |x - x_0|^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot \rho^k < \varepsilon \quad \text{se } n > N \text{ e } |x - x_0| \leq \rho.$$

L'ultima parte segue direttamente dal Teorema 9.18.

### Convergenza totale

Dalla dimostrazione si capisce che anche la serie dei valori assoluti converge uniformemente in  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$  se  $0 < \rho < r$ . In effetti, la serie *converge totalmente* in  $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ : una serie di funzioni **converge totalmente** in  $E$  se esiste una successione reale  $M_k$  tale che

$$|f_k(x)| \leq M_k \quad \text{per ogni } x \in E \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} M_k \text{ è convergente.}$$

Ovviamente la convergenza totale implica quella uniforme.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + k^3)}$$

converge totalmente, quindi uniformemente, in  $\mathbb{R}$ . Per verificarlo, effettuiamo un semplice studio della funzione  $g_a(x) = |x|/(x^2 + a^2)$  ( $a > 0$ ):  $g$  è pari, non negativa, infinitesima per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $g(0) = 0$  e

$$g'(x) = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} \quad \text{per } x \geq 0.$$

Perciò  $\max_{\mathbb{R}} g(x) = g(a) = 1/(2a)$  (si veda Figura 9.11). Per  $a = k^{3/2}$  si ottiene  $M_k := \max_{\mathbb{R}} |x|/(x^2 + k^3) = \frac{1}{2} k^{-3/2}$ . Quindi la serie numerica  $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$  è convergente.

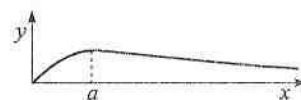


Figura 9.11

Esistono serie che convergono uniformemente ma non totalmente.

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{x^2 + k}$$

converge puntualmente in  $\mathbb{R}$  (per il criterio di Leibniz), ma non totalmente (la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} |x|/(x^2 + k)$  è divergente per ogni  $x \neq 0$ ). Per  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$ , consideriamo il valore assoluto della "coda" della serie: per la (4.45) si ha che

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{x^2 + k} \right| \leq \frac{|x|}{x^2 + n + 1}.$$

Dallo studio di funzione dell'esempio precedente (con  $a = \sqrt{n+1}$ ) si ottiene

$$\max_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{x^2 + n + 1} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \varepsilon \quad \text{se } n > 1/(4\varepsilon)^2,$$

quindi la serie converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ .

ESEMPIO 9.20

Vale la seguente caratterizzazione:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ converge uniformemente in } E \Leftrightarrow \begin{cases} \sup_E \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_E \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right| = 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

ESERCIZIO 9.9

Studiare la convergenza puntuale e uniforme in  $X$  di  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$  se:

- $X = \mathbb{R}; f_k(x) = k^{-2} \sin(kx)$ ;
- $X = [-1, 1]; f_k(x) = x^3/(x^2 + k^2)$ ;
- $X = \mathbb{R}; f_k(x) = x^3/(x^2 + k^2)$ ;
- $X = [0, +\infty); f_k(x) = (-1)^k x^2 e^{-x}/\sqrt{k}$ .

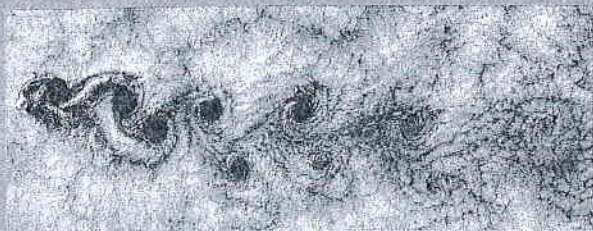


## FILO ROSSO

### Le funzioni discontinue sono artefatti matematici?

Le funzioni di più variabili, spesso a valori vettoriali, sono di uso frequente nelle applicazioni dell'analisi matematica. Basta pensare alle applicazioni "classiche" all'ingegneria. Le varie *forze* esercitate su un ponte sospeso sono in generale diverse in punti diversi del ponte e sono descritte da *campi vettoriali*, ovvero da funzioni a valori in  $\mathbb{R}^3$ . Analogamente, la *velocità* di un fluido intorno a un solido (l'aria intorno a un aereo, l'acqua intorno a un periscopio) o il *campo magnetico* prodotto da una corrente elettrica sono funzioni di più variabili spaziali ed eventualmente del tempo, ed assumono valori in  $\mathbb{R}^3$ .

Approfondiamo il concetto di velocità dell'aria intorno a un solido. L'aria è composta di molecole che possono collidere tra loro e con il solido. Spesso però si ignora la natura molecolare – discreta – dell'aria e si adottano le *ipotesi del continuo*: le proprietà dell'aria sono rappresentate da opportuni descrittori – densità, temperatura, pressione e velocità – immaginate come medie spazio-temporali di grandezze molecolari, effettuate su una scala opportuna. Tali descrittori sono quindi definiti in ogni punto dello spazio occupato dall'aria, e si suppone che siano funzioni continue. Perché allora i matematici, una volta introdotto il concetto di limite, non si limitano a studiare le funzioni *continue*?



Anzitutto si osservi che l'ipotesi del continuo non può sempre essere applicata. Nel caso specifico della velocità di un fluido intorno a un solido, la velocità può essere discontinua a causa di fenomeni di turbolenza: nella foto, un "vortice di von Karman" in-

torno all'isola Alexander Selkirk, nell'Oceano Pacifico). Anzi, per la stessa natura della turbolenza è del tutto naturale distinguere la velocità media dalla sua componente stocastica ("casuale") che ne rappresenta le forti fluttuazioni: in tal caso la velocità non può più essere descritta da una semplice funzione.

Un altro motivo per studiare funzioni anche non continue sono i fenomeni di scala. In aerodinamica un'onda d'urto è una sottile zona di forte variazione dei campi di pressione, temperatura, densità e velocità dell'aria. Tale sottile spessore, dell'ordine di  $10^{-6}$  cm, viene modellato matematicamente come una discontinuità. Chiaramente non è un artefatto matematico: un'onda d'urto viene *percepita* come una discontinuità (basta pensare alle onde sonore provenienti da una chitarra). Nella foto, l'onda d'urto creata dal volo supersonico di un jet si materializza: il vapore acqueo, compresso dall'onda d'urto, si condensa in goccioline che formano una nuvola conica.

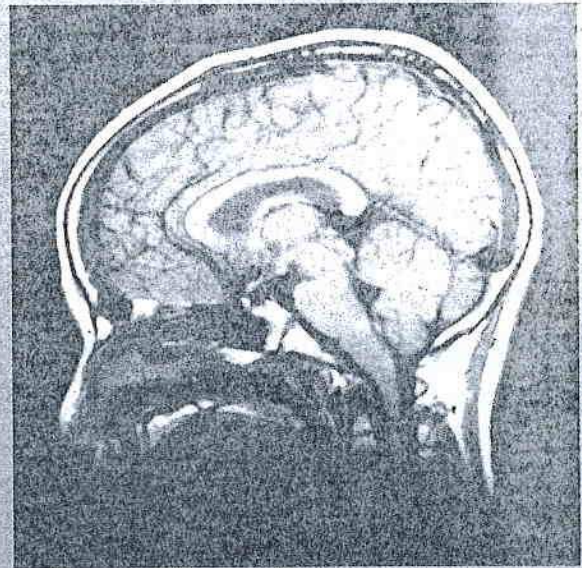


Proprietà di natura termodinamica come temperatura e pressione non hanno neanche un significato immediato a livello della singola molecola: quindi, ad esempio, è del tutto ragionevole trattare bruschi cambiamenti nella temperatura dell'acqua tra cor-



renti diverse nel mare come discontinuità della temperatura.

Ulteriori esempi comuni di discontinuità sono: il campo magnetico generato da un circuito elettrico che subisce una discontinuità temporale (sulla nostra scala!) quando si chiude l'interruttore del circuito; le immagini biomediche, in cui la matematica è indispensabile per ricostruire l'immagine dai dati fisici prodotti dalla macchina specifica (TAC, risonanza magnetica, ecografia ecc.) e spesso le discontinuità delle funzioni che rappresentano i dati corrispondono alla parte più interessante dell'immagine, come i contorni di un osso, di un organo, di una lesione, ecc..



## 10.1 Introduzione

In questo e nei prossimi capitoli consideriamo anzitutto funzioni reali di più variabili a *valori scalari*:

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad n > 1.$$

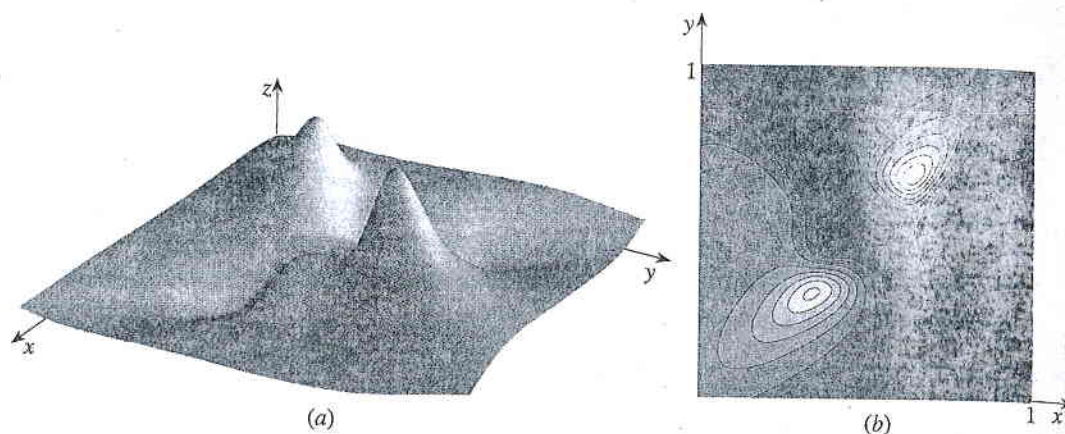
Per esempio,

$$f(x, y) = 3x^2y + 2 \sin(x \log y) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

sono funzioni, rispettivamente, di due e tre variabili i cui “domini naturali” sono, nell’ordine, gli insiemi  $\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  (il semipiano superiore) e  $\text{dom } g = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  ( $\mathbb{R}^3$  escluso l’origine). Queste funzioni sono naturali oggetti di studio: in una mappa geografica  $x$  e  $y$  indicano la latitudine e la longitudine,  $(x, y)$  individua la posizione sulla mappa (tipicamente  $(x, y)$  appartiene a un rettangolo  $X = [a, b] \times [c, d]$ ) ed  $f(x, y)$  può indicare, per esempio, il livello della superficie terrestre rispetto al livello del mare nel punto  $(x, y) \in X$ . Il grafico di  $f$ ,  $\text{graf } f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \text{dom } f\} \subseteq \mathbb{R}^3$ , si può rappresentare in un riferimento cartesiano di  $\mathbb{R}^3$ , come in Figura 10.1a, oppure tracciando alcune delle sue *curve di livello* (nel caso della mappa altimetrica dette isoipse), cioè insiemi del tipo  $\{(x, y) \in \text{dom } f : f(x, y) = C\}$  dove  $C \in \mathbb{R}$  indica una costante (si veda Figura 10.1b). Se invece  $f$  indica la pressione atmosferica nel punto  $(x, y)$ , allora il grafico di  $f$  rappresenta il campo di pressione e le sue curve di livello sono dette isobare.

Tratteremo la teoria delle funzioni di più variabili per valori generici di  $n$ , ma negli esempi sceglieremo spesso  $n = 2$  o  $n = 3$ . Questo comporta una inevitabile ambiguità nella notazione: un punto generico in  $\mathbb{R}^n$  sarà indicato con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  (o  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  ecc.), mentre di solito risulterà più comodo indicare un elemento di  $\mathbb{R}^2$  o di  $\mathbb{R}^3$  con  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$ . Va sottolineato che il caso di più di 3 variabili

**Figura 10.1** Una funzione  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ : grafico nel riferimento cartesiano (a) e curve di livello (b).



non è un artificio matematico. Per esempio, la temperatura  $T$  di un liquido contenuto in un contenitore cubico  $E = [0, 1]^3 \subset \mathbb{R}^3$  del quale un lato viene scaldato durante un certo intervallo temporale  $[t_0, t_1]$ , dipenderà sia dal punto  $(x, y, z) \in E$  sia dal tempo  $t \in [t_0, t_1]$ : quindi  $T$  è una funzione di 4 variabili e  $\text{dom } T = E \times [t_0, t_1]$ . E se si vuole capire come la temperatura dipende dal suo valore iniziale  $T_0$  (pensato costante), si aggiunge questo “parametro” del problema come una quinta variabile.

Una seconda classe importante è quella delle **funzioni a valori vettoriali** o **campi vettoriali**:  $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $n \geq 1$  e  $m > 1$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \text{ per } \mathbf{x} \in X$$

dove  $f_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sono  $m$  funzioni a valori scalari, da  $X$  in  $\mathbb{R}$ . Per esempio,

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) = (3x - 2z, 2z^2 - 3xy, 5y + 3z)$$

è una funzione da  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^3$  che associa a ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  l'elemento  $(3x - 2z, 2z^2 - 3xy, 5y + 3z)$  di  $\mathbb{R}^3$ . Se  $n = 1$  (ovvero le funzioni vettoriali di una variabile reale), gli esempi più semplici di funzioni vettoriali sono le *successioni a valori in  $\mathbb{R}^m$* , ovvero funzioni da  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{R}^m$ , e le *curve parametrizzate*, essenzialmente funzioni da un intervallo  $I$  a  $\mathbb{R}^m$ . Nell'ultimo caso si può pensare l'intervallo  $I$  come intervallo temporale e il valore  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  della funzione  $t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$  come la posizione al tempo  $t \in I$  di una particella che si muove nel piano ( $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ ) o nello spazio ( $\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ ), dove  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  indicano funzioni da  $I$  in  $\mathbb{R}$ . Anche con  $n > 1$  vi sono molti esempi che nascono in ambito applicativo. Per esempio, il campo gravitazionale che la Terra esercita su un satellite è una funzione che dipende dalle tre variabili che rappresentano la posizione del satellite relativa a quella della Terra, con valori in  $\mathbb{R}^3$ . Il funzionamento del pilota automatico di un aereo si basa sullo studio di una complicata funzione che ha come variabili  $n$  parametri che descrivono lo stato del sistema velivolo-ambiente (altitudine, direzione e intensità del vento, accelerazione del velivolo ecc.) e come valore le  $m$  quantità che servono per determinare il movimento dell'aereo. Ovviamente, quindi, sia  $n$  sia  $m$  saranno numeri molto grandi.

Per la loro particolare rilevanza, le curve saranno approfondite in un capitolo separato, il 12.

La teoria generale dei limiti e delle funzioni continue per funzioni di più variabili è completamente analoga a quella per le funzioni scalari di una variabile, e se ne fornisce una sintesi nei prossimi due paragrafi. Invece il calcolo dei limiti, benché si riconduca al caso  $m = 1$ , è più complicato: viene trattato con qualche dettaglio nel Paragrafo 10.4, concentrandosi in gran parte sui casi  $n = 2$  o  $n = 3$ .



## 10.2 Concetti di base

### 10.2.1 Dominio naturale

Le nozioni di dominio, dominio naturale, immagine, grafico, funzione composta, eccetera, sono state date per insiemi generali nel Capitolo 2 e quindi valgono anche per funzioni di più variabili. In particolare, il **dominio naturale** di una funzione  $\mathbb{R}^n \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$  è il più grande sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  per i cui elementi ha senso scrivere  $f(x)$ . Per determinarlo si utilizzano, come nel caso di una variabile reale, la nozione di funzione composta.

Si vuole determinare il dominio naturale della funzione

$$f(x, y) = e^{\frac{\log(x-y)}{x+3y}} \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$$

Per farlo, consideriamo separatamente le funzioni

$$g(x, y) = e^{\frac{\log(x-y)}{x+3y}} \quad \text{e} \quad h(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$$

Allora

$$\begin{aligned} \text{dom } g &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0, x + 3y \neq 0\}, \\ \text{dom } h &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \neq 0, \frac{x+y}{2x+y} \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, 2x + y > 0\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0, 2x + y < 0\}. \end{aligned}$$

Perciò il dominio di  $f$  è l'insieme rappresentato nella Figura 10.2:

$$\begin{aligned} \text{dom } f &= \text{dom } g \cap \text{dom } h \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y, 2x < -y\} \\ &\quad \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y, x \geq -y, x \neq -3y\}. \end{aligned}$$

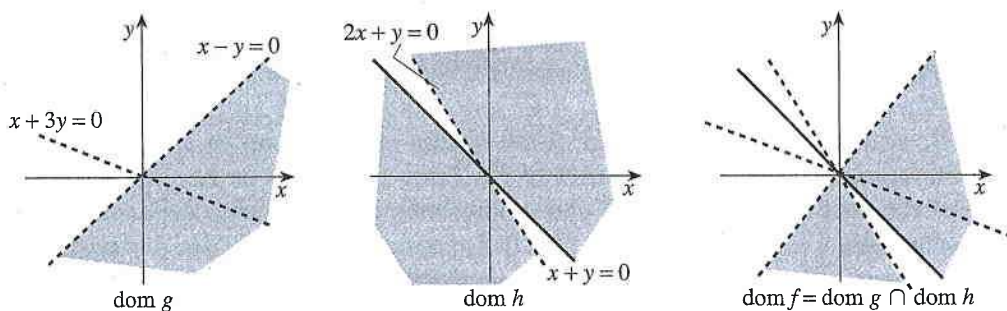


Figura 10.2 Il dominio di  $f$  dell'Esempio 10.1.

Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni reali di 2 variabili reali e rappresentarli graficamente in un riferimento cartesiano di  $\mathbb{R}^2$ :

a)  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ;

d)  $f(x, y) = \arccos(x^2 + y^2 - 4)$ ;

b)  $f(x, y) = \log_2(x^2 + y^2 - 4)$ ;

e)  $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x + y - 1}}$ .

c)  $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ ;

### ESERCIZIO 10.1

### 10.2.2 Distanza, intorni, insiemi aperti e chiusi

Elenchiamo brevemente alcune proprietà di base di  $\mathbb{R}^n$ , per un approfondimento delle quali rimandiamo all'appendice di algebra lineare disponibile sul sito internet dedicato al libro.

$\mathbb{R}^n$  è uno spazio vettoriale: dati  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sono definite le seguenti operazioni:

- **addizione:**  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- **moltiplicazione per uno scalare:**  $\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$
- **prodotto scalare:**  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ .

In letteratura, il prodotto scalare si indica anche con  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ . La **norma** (euclidea) o **modulo** di un punto  $\mathbf{x}$  e la **distanza** (euclidea) tra due punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono definite rispettivamente da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \quad \text{e} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

#### ESEMPIO 10.2

In  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} (-1, 3) + (7, 2) &= (6, 5), & 4(-1, 3) &= (-4, 12), & \langle (-1, 3), (7, 2) \rangle &= -7 + 6 = -1, \\ \|(-1, 3)\| &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, & d((-1, 3), (7, 2)) &= \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}. \end{aligned}$$

La distanza verifica le proprietà elencate nella Definizione 3.1. In particolare la norma e la distanza verificano la **disuguaglianza triangolare**:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \text{e} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Due elementi  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  si dicono **ortogonali** se  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ . Gli elementi

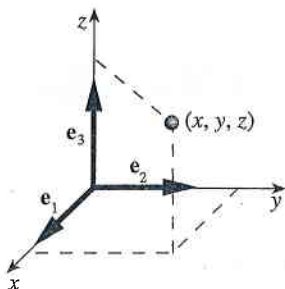
$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$$

sono a due a due ortogonali e verificano  $\|\mathbf{e}_i\| = 1$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ; l'insieme  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  costituisce quindi una particolare **base ortonormale** di  $\mathbb{R}^n$ , detta anche **base canonica** di  $\mathbb{R}^n$ , in quanto  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$  per ogni  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (si veda Figura 10.3). Utilizzando tale base per definire un riferimento cartesiano,  $\mathbb{R}^2$  si rappresenta geometricamente come il piano e  $\mathbb{R}^3$  come lo spazio. Per il teorema di Pitagora, quindi,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  coincide con l'usuale concetto di distanza nel piano o nello spazio; inoltre vale la formula

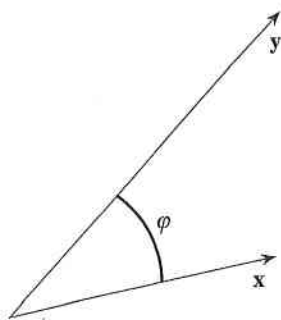
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi \tag{10.1}$$

dove  $\varphi$  indica l'angolo tra i due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  (si veda Figura 10.4). Si noti che  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$  se e solo se  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; ciò motiva la definizione del concetto di ortogonalità in  $\mathbb{R}^n$ .

Come nel caso  $n = 1$ , si utilizza la distanza per definire gli intorni sferici.



**Figura 10.3** La base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e un generico punto  $(x, y, z)$ .



**Figura 10.4** La formula (10.1).

**DEFINIZIONE 10.1**

Dati  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , si dice **intorno (sferico)** di  $\mathbf{x}$  di raggio  $\varepsilon$  (o **palla** di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$ ) l'insieme

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}.$$

L'insieme

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon\}$$

è detto **sfera di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$** .

In  $\mathbb{R}^2$ ,  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  non è altro che il cerchio di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$  privato della circonferenza, mentre  $S_\varepsilon(\mathbf{x})$  è la circonferenza di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$  (si veda Figura 10.5). Analogamente, in  $\mathbb{R}^3$   $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  è la palla di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$  privata della sfera di raggio  $\varepsilon$ , mentre  $S_\varepsilon(\mathbf{x})$  è la sfera di centro  $\mathbf{x}$  e raggio  $\varepsilon$ .

I punti di accumulazione e i punti isolati si definiscono come nel caso  $n = 1$ :

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice **punto di accumulazione** per  $E$  se per ogni intorno  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$  di  $\mathbf{x}$  esiste  $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{x}\}$ ;
- $\mathbf{x} \in E$  si dice **punto isolato** di  $E$  se non è di accumulazione per  $E$ .

Invece la nozione di insieme limitato è diversa, poiché  $\mathbb{R}^n$  non è un insieme ordinato se  $n > 1$ :

**DEFINIZIONE 10.2**

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **limitato** se esiste  $r > 0$  tale che  $E \subseteq B_r(\mathbf{0})$ , ovvero se esiste  $r > 0$  tale che  $\|\mathbf{x}\| < r$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ .

Se  $n = 1$ , tale definizione è equivalente alla caratterizzazione (3.2).

In  $\mathbb{R}^n$  continua a valere il teorema di Bolzano-Weierstrass.

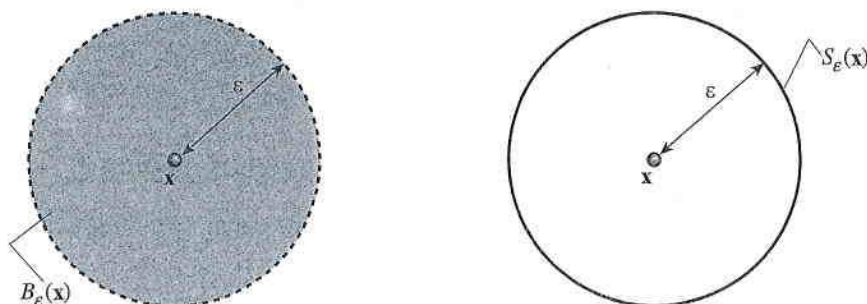
**TEOREMA 10.3****Teorema di Bolzano-Weierstrass**

Se  $E$  è un sottoinsieme limitato e infinito di  $\mathbb{R}^n$ , allora esiste almeno un punto di accumulazione per  $E$  in  $\mathbb{R}^n$ .

Dimostrazione 

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , e sia  $\complement E = \mathbb{R}^n \setminus E$ . Tutti i concetti topologici di base incontrati finora (a parte quello di insieme limitato) si definiscono e si verificano esattamente come nel caso  $n = 1$ , a patto di sostituire la nozione di distanza e intorno con quelle appena introdotte. Li ricordiamo per completezza:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice **punto interno** ad  $E$  se esiste un suo intorno  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon > 0$ , contenuto in  $E$ ;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  si dice **punto esterno** ad  $E$  se è punto interno a  $\complement E$ ;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  **punto di frontiera** per  $E$  se non è né interno né esterno ad  $E$ ;
- si dice **interno** di  $E$  l'insieme  $\overset{\circ}{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \text{ è punto interno ad } E\}$ ;



**Figura 10.5** Intorno sferico e sfera in  $\mathbb{R}^2$ .



- si dice **frontiera di  $E$**  l'insieme  $\partial E = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è punto di frontiera per } E\}$ ;
- si dice **chiusura di  $E$**  l'insieme  $\bar{E} = E \cup \partial E$ .

Si osservi che  $x \in \partial E$  se e solo se in ogni intorno di  $x$  si trovano sia punti di  $E$  sia punti di  $\complement E$ : quindi ogni punto isolato appartiene alla frontiera di  $E$ ; inoltre  $\partial E = \partial \complement E$ . Si osservi anche che sono punti di accumulazione sia i punti interni, sia i punti di frontiera non isolati, mentre i punti esterni non lo sono: perciò

$$\{x : x \text{ è di accumulazione per } E\} = \bar{E} \setminus \{x : x \text{ è un punto isolato di } E\}. \quad (10.2)$$

In particolare, un punto di accumulazione per  $E$  può non appartenere ad  $E$ , e viceversa un punto di  $E$  può non essere di accumulazione per  $E$ . Infine, valgono le seguenti proprietà:

$$\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}, \quad \mathring{E} \subseteq E \subseteq \bar{E}, \quad \bar{E} = \mathring{E} \cup \partial E.$$

Come nel caso  $n = 1$ , un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice:

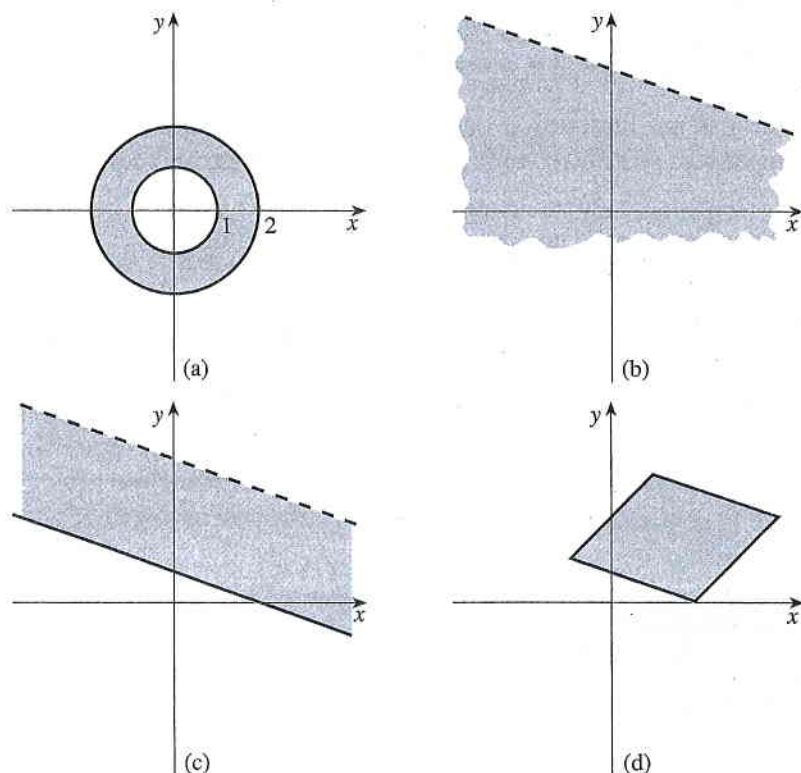
- **aperto** in  $\mathbb{R}^n$  se  $E = \mathring{E}$ , cioè se ogni elemento di  $E$  è punto interno ad  $E$ ;
- **chiuso** in  $\mathbb{R}^n$  se  $\complement E$  è aperto.

Gli insiemi  $\mathbb{R}^n$  e  $\emptyset$  sono sia aperti che chiusi, e sono i soli che verificano tale proprietà. Inoltre, l'unione e l'intersezione di due aperti (chiusi) è ancora un aperto (chiuso).

### ESEMPIO 10.3

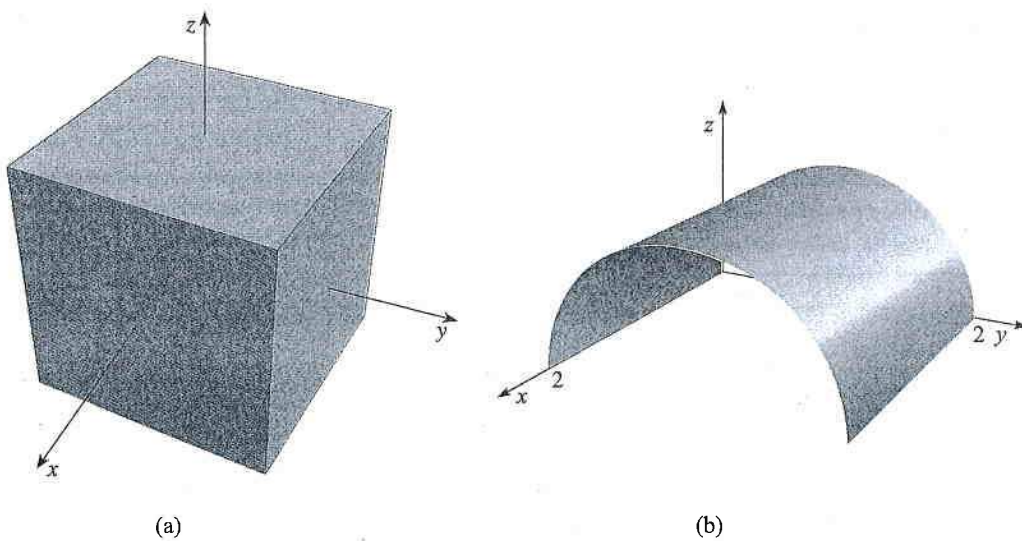
- L'anello circolare  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  è chiuso e limitato e la sua frontiera è l'unione delle due circonferenze di centro  $(0, 0)$  e, rispettivamente, di raggio 1 e 2 (Figura 10.6a).
- Il semipiano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y < 10\}$  è aperto, non è limitato e la sua frontiera è la retta di equazione  $x + 3y = 10$  (Figura 10.6b).
- La striscia di piano  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x + 3y < 10\}$  è un insieme non limitato; non è aperto né chiuso (Figura 10.6c).
- L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x + 3y \leq 10, -2 \leq x - y \leq 2\}$  è chiuso e limitato e la sua frontiera è il parallelogramma di vertici  $(2, 0)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(1, 3)$  e  $(-1, 1)$  (Figura 10.6d).

Figura 10.6 Gli insiemi dell'Esempio 10.3.



- a) L'insieme  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} < 1\}$  è aperto e limitato, infatti  $E \subseteq B_{\sqrt{3}}(\mathbf{0})$ .
- b) Il piano  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 3\}$  è chiuso, non è limitato,  $\mathring{E} = \emptyset$  e  $\partial E = E$ .
- c) Il semispazio  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z > 3\}$  è aperto, non è limitato,  $\mathring{E} = E$  e  $\partial E$  è il piano di equazione  $x - y + 2z = 3$ .
- d) Il cilindro  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3 < x < 4, y^2 + z^2 \leq 9\}$  è limitato; non è aperto né chiuso.
- e) L'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 9\}$  è chiuso, non è limitato e la sua frontiera è l'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 9\}$ .
- f) L'insieme  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (y - 1)^2 = 1, z \geq 0, 0 \leq x \leq 2\}$  è parte della superficie laterale di un cilindro; è un insieme chiuso e limitato e coincide con la sua frontiera.

**ESEMPIO 10.4**



**Figura 10.7** Gli insiemi dell'Esempio 10.4a e 10.4f.

Si vogliono determinare i punti di accumulazione per il dominio naturale della funzione

$$f(x, y) = e^{\frac{\log(x-y)}{x+3y}} \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$$

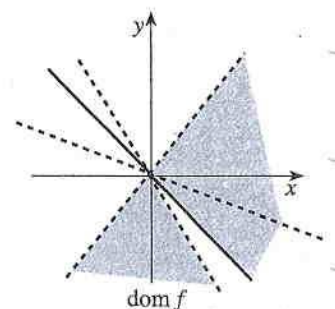
Anzitutto dovremmo determinare  $\text{dom } f$ , ma l'abbiamo già fatto nell'Esempio 10.1:

$$\text{dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y, 2x < -y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|, x \neq 3y\}.$$

Si possono ora individuare i punti di accumulazione per  $\text{dom } f$  utilizzando la sua rappresentazione grafica (riportata in Figura 10.8) e la (10.2). Poiché  $\text{dom } f$  non ha punti isolati, l'insieme dei punti di accumulazione per  $\text{dom } f$  coincide con la chiusura di  $\text{dom } f$ :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y, 2x \leq -y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq |y|\}.$$

**ESEMPIO 10.5**



**Figura 10.8**

È molto utile la seguente caratterizzazione degli insiemi chiusi di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  (in particolare, anche di  $\mathbb{R}$ ):

**TEOREMA 10.4**

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $E$  è chiuso,
- (ii)  $\partial E \subseteq E$ ,
- (iii)  $E$  contiene i suoi punti di accumulazione.

**Dimostrazione**

Segue immediatamente da questo teorema che

$$E \text{ è chiuso} \Leftrightarrow E = \bar{E}.$$

Da ciò si deduce che la chiusura  $\bar{E}$  è il “più piccolo” insieme chiuso contenente  $E$ . Non è difficile dimostrare che l’insieme  $\bar{E}$  è aperto; chiaramente è il “più grande” insieme aperto contenuto in  $E$ .

Concludiamo con la nozione di *insieme denso*:

#### DEFINIZIONE 10.5

Un insieme  $A \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **denso** in  $E$  se  $\bar{A} = \bar{E}$ .

Per esempio, l’insieme  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$  (si veda l’Esempio 3.5): infatti  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

#### ESERCIZIO 10.2

Determinare i punti di accumulazione per il dominio naturale delle funzioni definite nell’Esercizio 10.1.

#### ESERCIZIO 10.3

Rappresentare graficamente i seguenti insiemi  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  in un riferimento cartesiano ortonormale di  $\mathbb{R}^2$ , determinarne la frontiera e dire se  $X$  è limitato, aperto o chiuso:

- a)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y \geq 0\}$ ;    c)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2y^2\}$ ;  
 b)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \leq 2x, y \leq 2\}$ ;    d)  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y^2 \leq x \leq 3y\}$ .

#### ESERCIZIO 10.4

Dare una caratterizzazione geometrica dei seguenti insiemi  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  (rispetto a un riferimento cartesiano ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ ), determinarne la frontiera e dire se  $X$  è limitato, aperto o chiuso:

- a)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$ ;  
 b)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 2, y \geq 0, x = z\}$ ;  
 c)  $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 < 4, 1 < y < 6\}$ .

### 10.2.3 L’elemento $\infty$

Per le funzioni di *una* variabile reale, l’ampliamento  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  ha permesso di considerare gli elementi  $\pm\infty$  come punti di accumulazione tramite l’introduzione dei loro intorni (per poi poter definire il concetto di limite per  $x \rightarrow \pm\infty$ ). È evidente che, a causa della mancanza di ordinamento, tale tipo di ampliamento non si estende a  $\mathbb{R}^n$  se  $n > 1$ . Rimane comunque possibile introdurre il concetto di limite per  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ : ciò consentirà di descrivere il comportamento di funzioni per valori sempre più grandi di  $\|\mathbf{x}\|$ . È quindi naturale introdurre come ampliamento di  $\mathbb{R}^n$  l’insieme  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ . Per caratterizzare il nuovo elemento,  $\infty$ , si definiscono gli intorni sferici di ogni elemento di  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  come segue:

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , gli insiemi  $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon > 0$ , sono intorni di  $\mathbf{x}$
- gli insiemi  $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\| > a\} \cup \{\infty\}$ ,  $a \in [0, +\infty)$ , sono intorni di  $\infty$ .

In tal modo, è possibile parlare di  $\infty$  come punto di accumulazione per un insieme contenuto in  $\mathbb{R}^n$ .

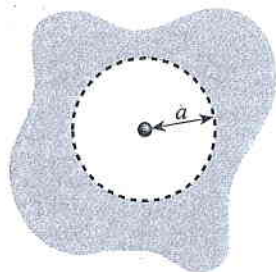


Figura 10.9 Un intorno di  $\infty$  in  $\mathbb{R}^2$ .

#### ESEMPIO 10.6

- a) Sia  $E = \{(n, n^2) : n \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots\}$ .  $E$  non ha punti di accumulazione in  $\mathbb{R}^2$  e  $\infty$  è punto di accumulazione per  $E$  in  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .  
 b) Sia  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$ . L’insieme dei punti di accumulazione per  $E$  in  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  è  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\} \cup \{\infty\}$ .





si ottiene la disuguaglianza

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+. \quad (10.5)$$

Più in generale è possibile verificare che la **media geometrica** è minore o uguale della **media aritmetica**:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+. \quad (10.6)$$

### ESERCIZIO 10.6

Verificare le seguenti disuguaglianze:

$$\text{a) } \left| \frac{xy}{x^2 + 7y^2} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{7}}; \quad \text{b) } \left| \frac{x^3 y}{2x^4 + 3x^2 y^2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

### ESERCIZIO 10.7

Dimostrare il seguente caso particolare della **disuguaglianza di Jensen**:

$$\left( \int_0^1 |f(x)| dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx \quad \forall f \in C([0, 1])$$

(si utilizzi la disuguaglianza (10.4) con  $x = 1$  e  $y = f(x)$ , si integri e si scelga  $\varepsilon$  opportunamente).

## 10.3 Limiti e continuità di funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$

Ricordiamo che la teoria dei limiti di funzioni da  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  si basa sul concetto di intorno (in  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ), sul teorema di Bolzano-Weierstrass (in  $\mathbb{R}$ ) e sulla disuguaglianza triangolare (in  $\mathbb{R}$ ). Nel paragrafo precedente abbiamo introdotto il concetto di intorno in  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  e abbiamo osservato che sia il teorema di Bolzano-Weierstrass sia la disuguaglianza triangolare rimangono validi. Seguendo la traccia del caso  $n = 1$ , è quindi possibile elaborare una teoria generale dei limiti e della continuità per funzioni di più variabili: è quel che faremo in questo paragrafo, omettendo le dimostrazioni (in quanto completamente analoghe a quelle svolte nel caso  $n = 1$ ) e concentrandoci piuttosto sui concetti nuovi. Ripetiamo che, se la teoria è per molti versi analoga, il *calcolo* dei limiti può essere molto più complicato se  $n > 1$ ; lo vedremo in dettaglio nel Paragrafo 10.4.

Come nel caso di  $\mathbb{R}$ , la seguente definizione ci faciliterà l'esposizione.

#### DEFINIZIONE 10.6

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  (oppure  $x_0 \in \mathbb{R}^+$  se  $n = 1$ ) un punto di accumulazione per  $X$ . Si dice che  $f(x)$  ha una certa proprietà  $\mathcal{P}$  **definitivamente per**  $x \rightarrow x_0$  se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $x_0$  tale che  $f(x)$  ha la proprietà  $\mathcal{P}$  per ogni  $x \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$ .

Cominciamo considerando una funzione  $f$  da  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  (il caso  $m = 1$ , ovvero funzioni a valori scalari). In tal caso l'immagine di  $f$ ,  $f(X)$ , è contenuta nell'insieme ordinato  $\mathbb{R}$ , sicché hanno ancora significato i concetti  $\sup f$ ,  $\inf f$ ,  $\max f$  e  $\min f$ ; per esempio  $\max_X f := \max f(X)$  e

$$\sup_X f := \begin{cases} \sup f(X) & \text{se } f(X) \text{ è superiormente limitato} \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La  $f$  si dice *limitata* (superiormente, inferiormente) se l'immagine  $f(X)$  è un insieme limitato (superiormente, inferiormente);  $f$  si dice *positiva* se  $f(X) \subseteq \mathbb{R}^+$ . Anche le definizioni di massimo locale e minimo locale sono completamente analoghe a quelle per funzioni di una sola variabile:

- $\mathbf{x}_0 \in X$  si dice **punto di massimo locale** (**punto di minimo locale**) per  $f$  se esiste un intorno  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  tale che  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$  ( $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ ) per ogni  $\mathbf{x} \in X \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ .

Anche la nozione di limite rimane sostanzialmente identica:

**DEFINIZIONE 10.7**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  punto di accumulazione per  $X$ ,  $\ell \in \mathbb{R}^*$ . Si scrive

$$\ell = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \quad \text{oppure} \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \ell \quad \text{per} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$$

se per ogni intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  si ha che  $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$  definitivamente per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ .

Se per esempio  $\ell \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , allora  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in X, \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon$$

(qui  $\|\cdot\|$  indica la norma euclidea in  $\mathbb{R}^n$ ). Sempre se  $\ell \in \mathbb{R}$ , allora  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = \ell$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $M > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in X, \quad \|\mathbf{x}\| > M \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

Utilizzando la definizione di limite, si verifica facilmente che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^4} = 0, \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow \infty} (x^2 + y^4 + z^2) = +\infty.$$

Per esempio, per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha  $0 < 1/(x^2 + y^4) < \varepsilon$  se e solo se  $x^2 + y^4 > 1/\varepsilon$ ; d'altra parte,  $x^2 + y^4 = x^2 + y^2 + (y^4 - y^2) \geq x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$  se  $|y| \geq 1$ , quindi la disuguaglianza  $x^2 + y^4 > 1/\varepsilon$  è certamente verificata scegliendo  $\|(x, y)\| \geq M := \max\{1, 1/\sqrt{\varepsilon}\}$ .

**ESEMPIO 10.8**

Passiamo ora a considerare una funzione  $\mathbf{f}$  da  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  con  $m \geq 1$ . La nozione di limitatezza si trasporta senza difficoltà: una funzione  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice **limitata** in  $A \subseteq X$  se la sua immagine,  $\mathbf{f}(A)$ , è limitata in  $\mathbb{R}^m$ , ovvero se esiste  $M > 0$  tale che  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| \leq M$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ . La definizione di limite cambia soltanto per quanto riguarda il valore  $\ell$  del limite, che in questo caso è un vettore a valori in  $\mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$  anziché uno scalare in  $\mathbb{R}^*$ .

**DEFINIZIONE 10.8**

Siano  $m \geq 1$ ,  $\mathbf{f} : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  (oppure  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^*$  se  $n = 1$ ) punto di accumulazione per  $X$  e  $\ell \in \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ . Si scrive

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell \quad \text{oppure} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \ell \quad \text{per} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$$

se per ogni intorno  $\mathcal{V}$  di  $\ell$  si ha che  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$  definitivamente per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ .

Se per esempio  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\ell \in \mathbb{R}^m$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x} \in X, \quad 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \ell\| < \varepsilon$$

(si osservi che qui  $\|\cdot\|$  denota in un caso la norma in  $\mathbb{R}^m$  e in un altro quella in  $\mathbb{R}^n$ ). Si dimostra facilmente che, posto

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad \text{e} \quad \ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m)$$



si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = \ell_1 \\ \vdots \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) = \ell_m. \end{cases} \quad (10.7)$$

Questo significa che, poiché  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) sono funzioni a valori scalari, il calcolo di limiti di funzioni da  $X$  in  $\mathbb{R}^m$  si riduce a quello di limiti di funzioni da  $X$  in  $\mathbb{R}$ .

La definizione di continuità di una funzione in un punto è identica a quella nota e indipendente dalla dimensione del dominio e del codominio.

#### DEFINIZIONE 10.9

Sia  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Allora  $\mathbf{f}$  si dice **continua in**  $\mathbf{x}_0 \in X$  se  $\mathbf{x}_0$  è un punto isolato di  $X$ , oppure se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di accumulazione per  $X$  e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Inoltre,  $\mathbf{f}$  si dice **continua** nell'insieme  $X$  se è continua in ogni punto  $\mathbf{x} \in X$ .

#### Proprietà generali

Si estendono a funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  tutte quelle proprietà generali che non dipendono dall'ordinamento di  $\mathbb{R}$ . In particolare:

- il limite, se esiste, è unico;
- i limiti della somma e del prodotto scalare sono uguali, rispettivamente, alla somma e al prodotto scalare dei limiti, qualora questi ultimi esistano finiti; in particolare, la somma e il prodotto scalare di funzioni continue sono continui;
- la composizione di funzioni continue è una funzione continua.

Se  $m = 1$ , allora l'immagine è ancora un insieme ordinato e quindi, come vedremo nel Paragrafo 10.4, anche altre proprietà rimangono valide.

La (10.7) riconduce lo studio di limiti e continuità di una funzione a valori vettoriali a quello di funzioni a valori scalari. Affronteremo questo argomento nel Paragrafo 10.4, mentre nel seguito di questo paragrafo introdurremo alcuni concetti riguardanti le funzioni continue su un insieme compatto e alcune classi particolari di funzioni (successioni a valori in  $\mathbb{R}^m$ , curve).

#### ESERCIZIO 10.8

Utilizzare la definizione di limite per verificare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

e determinare l'estremo inferiore di  $\frac{1}{x^2 + y^2}$  nel suo dominio naturale.

#### ESERCIZIO 10.9

Sia  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{f}(x, y) = (xy, x + y, x - y)$ . Dire se  $\mathbf{f}$  è limitata, rispettivamente, in  $\mathbb{R}^2$  e nel rettangolo  $\{(x, y) : |x| \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$ , e calcolare  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \mathbf{f}(x, y)$ .

### 10.3.1 Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$ ; insiemi compatti

Una **successione a valori in**  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), indicata con  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  oppure  $\{\mathbf{x}_k\}$ , è una funzione da  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}^n$ :  $k \mapsto \mathbf{x}_k$ . Il concetto di **sottosuccessione** si estende facilmente al caso  $n \geq 2$ .

$\left\{ \left( \frac{1}{k+1}, 1 + \sin k \right) \right\}$  è una successione a valori in  $\mathbb{R}^2$ , e  $\left\{ \left( \frac{1}{2k+1}, 1 + \sin 2k \right) \right\}$  è una sua sottosuccessione.

ESEMPIO 10.9

Se  $n > 1$ , una successione  $\{\mathbf{x}_k\}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  si dice **convergente** se esiste finito  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k$ , **divergente** se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k = \infty$  e **irregolare** altrimenti.

Le dimostrazioni dei seguenti risultati sono analoghe a quelle nel caso  $n = 1$  e le omettiamo.

Una successione a valori in  $\mathbb{R}^n$  che è convergente, è limitata.

Ovviamente non vale il viceversa: la successione  $\{(\cos(\pi k), \sin(\pi k))\}$  è limitata e irregolare.

Ogni successione limitata a valori in  $\mathbb{R}^n$  ha una sottosuccessione convergente.

Ricordiamo che, in analogia al caso  $n = 1$ , una successione  $\{\mathbf{x}_k\}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  si dice **fondamentale** o **di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad \forall k, m \geq N.$$

Il **criterio di Cauchy** per la convergenza delle successioni rimane valido in  $\mathbb{R}^n$ :

una successione a valori in  $\mathbb{R}^n$  è convergente se e solo se è fondamentale.

Anche il **teorema ponte** continua a valere per funzioni da  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ :

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \ell \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) = \ell \text{ per ogni successione } \{\mathbf{x}_k\} \\ \text{a valori in } X \setminus \{\mathbf{x}_0\} \text{ e convergente a } \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

L'insieme  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **compatto (per successioni)**, o **sequenzialmente compatto**, se ogni successione a valori in  $K$  ha una sottosuccessione convergente a un elemento di  $K$ . Se  $n > 1$  continua a valere la seguente caratterizzazione degli insiemi compatti, che può anche essere assunta (in  $\mathbb{R}^n$ ) come definizione:

$$K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ è compatto} \Leftrightarrow K \text{ è chiuso e limitato.}$$

Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$  sono compatti:

- |  |  |
|--|--|
| a) $(1, 3] \times [4, 5]$ ;  | e) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 3\} \cap (0, 2) \times [-1, 1]$ ; |
| b) $[1, 3] \times [4, 5] \cup [2, 4] \times [2, 3]$ ;  | f) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 3\} \cap [0, 2] \times (-1, 1)$ ; |
| c) $\{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 2\}$ ;  | g) $\{(x, y) : y = 2x, 1 \leq x \leq 3\}$ ;                  |
| d) $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2\}$ ;   | h) $\{(x, y) : xy \geq 0,  x  +  y  \leq 1\}$ ;              |
| i) $\text{graf} \left( \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right)$ ;   |  |
| j) $\text{graf} \left( \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right) \cup \left\{ \left( 1, \frac{\pi}{2} \right), \left( -1, \frac{\pi}{2} \right) \right\}$ . |  |

ESERCIZIO 10.10

### 10.3.2 Funzioni continue su un compatto

La continuità di una funzione  $f$  su un insieme compatto ha varie importanti conseguenze del tutto analoghe a quelle di funzioni di una variabile; anche le dimostrazioni sono praticamente identiche e perciò le omettiamo.

#### TEOREMA 10.10

Sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compatto.

- (i) Se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , è continua in  $K$ , allora  $f(K)$  è compatto;
- (ii) (Teorema di Weierstrass,  $m = 1$ ) se  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $K$ , allora esistono  $\max_K f$  e  $\min_K f$ .

In particolare una funzione definita e continua in un compatto è limitata.

Ricordiamo che la funzione inversa di una funzione continua e invertibile *non* è necessariamente continua. Se però il dominio è compatto vale il seguente risultato.

#### TEOREMA 10.11

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto e  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua e invertibile in  $K$ . Allora l'inversa  $f^{-1}$  è continua nel suo dominio  $f(K)$ .

Anche il concetto di continuità uniforme si generalizza facilmente.

#### DEFINIZIONE 10.12

Sia  $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^m$ . La  $f$  si dice **uniformemente continua in  $X$**  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon. \quad (10.8)$$

Non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue, ma se il loro dominio è compatto lo sono.

#### TEOREMA 10.13 Teorema di Heine-Cantor

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto e sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua. Allora  $f$  è uniformemente continua in  $K$ .

Come nel caso  $n = m = 1$ , le funzioni lipschitziane sono uniformemente continue: una funzione  $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice **lipschitziana in  $X$**  se esiste una costante  $L \geq 0$  (detta **costante di Lipschitz di  $f$** ) tale che

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{per ogni } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X. \quad (10.9)$$

### 10.3.3 Curve parametrizzate

Una curva in  $\mathbb{R}^m$  è una funzione *continua* di un intervallo in  $\mathbb{R}^m$ .

#### DEFINIZIONE 10.14

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo. Una **curva in  $\mathbb{R}^m$**  ( $m \geq 2$ ) è una funzione  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua in  $I$ .

L'immagine  $\gamma(I)$  di una curva si chiama anche **sostegno** della curva:

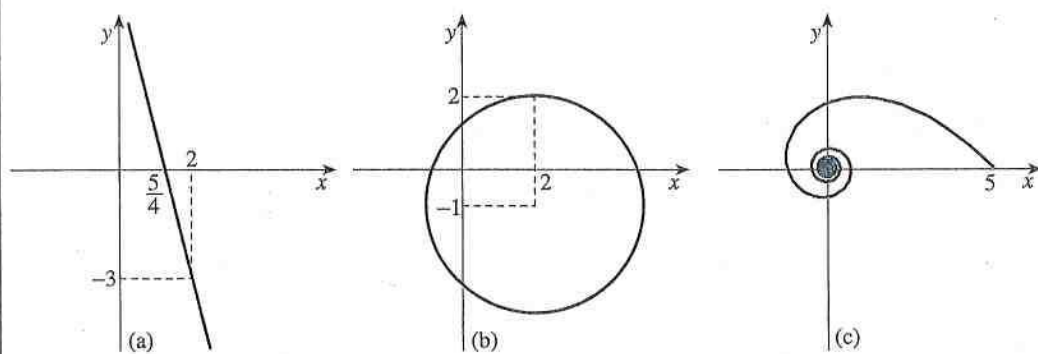
$$\gamma(I) = \text{im } \gamma = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^m.$$



Il sostegno di una curva è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$ , da non confondersi con la curva stessa che è invece una funzione. Le equazioni  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(t)$  si dicono anche **equazioni parametriche** della curva.

Se  $m = 2$  o  $m = 3$ , si può pensare a  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  come la posizione di un punto materiale nel piano o nello spazio al tempo  $t$ : per esempio, il moto di un pendolo è descritto (in un opportuno riferimento) da una funzione  $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  il cui sostegno è un arco di circonferenza<sup>(1)</sup>.

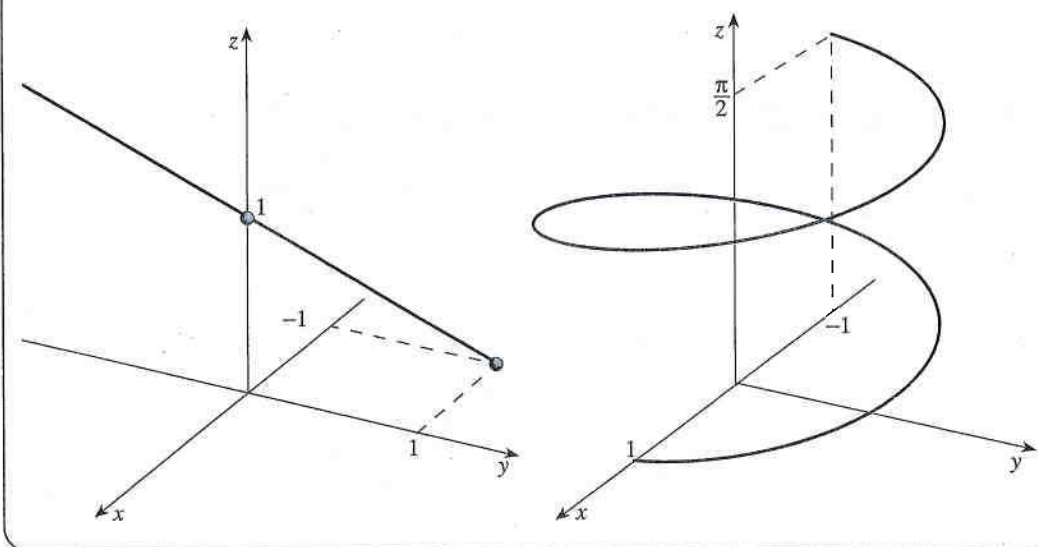
- a) La curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, 5 - 4t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ha come sostegno la retta di equazione  $4x + y = 5$ .  
 b) La curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (2 + 3 \cos t, -1 + 3 \sin t)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  ha come sostegno la circonferenza di equazione  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ .  
 c) La curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = \left( \frac{5 \cos t}{1 + t}, \frac{5 \sin t}{1 + t} \right)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , ha come sostegno una cosiddetta *spirale*.



## ESEMPIO 10.10

Figura 10.10 Il sostegno delle curve dell'Esempio 10.10.

- a) La curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t - 1, 1 - t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ha come sostegno la retta in  $\mathbb{R}^3$  passante per i punti  $(-1, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .  
 b) Il sostegno della curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t/6)$ ,  $t \in [0, 3\pi]$ , si trova sul cilindro verticale  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  ed è usualmente detto *elica cilindrica*.



## ESEMPIO 10.11

Figura 10.11 Il sostegno delle curve dell'Esempio 10.11.

Spesso si presenta il problema “inverso”: dato un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^m$ , determinarne, se possibile, una *parametrizzazione*, ovvero una curva di cui tale sottoinsieme sia il sostegno. Ovviamente se esiste una parametrizzazione allora ne esistono infinite. Per

<sup>(1)</sup> Si avverte lo studente che in letteratura è possibile incontrare nomenclature diverse (per esempio, talvolta si usa “curva” per denotare l’immagine della funzione). Il nome degli oggetti è comunque secondario: l’essenziale è capire la distinzione tra l’aspetto “cinematico” (la funzione) da quello “geometrico” (la sua immagine).

esempio, per la circonferenza di centro  $(0, -1)$  e raggio 3, ovvero l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 = 9\}$ , si possono scegliere come parametrizzazioni le curve  $\gamma(t) = (3 \cos t, -1 + 3 \sin t)$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ , oppure  $\gamma(t) = (3 \cos(2t), -1 + 3 \sin(2t))$ ,  $0 \leq t < \pi$ , oppure  $\gamma(t) = (3 \cos t, -1 - 3 \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 4\pi$  e così via.

**ESEMPIO 10.12**

Si cerchi una parametrizzazione del segmento in  $\mathbb{R}^2$  congiungente due punti  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ . Osserviamo che la retta per  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$  è l'unica retta passante per  $\mathbf{x}_0$  e parallela al vettore  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ . Perciò è l'insieme contenente tutti e soli i punti  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Chiaramente  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_1$  e si verifica facilmente che la curva

$$\gamma(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = (1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

è una parametrizzazione del segmento. Per esempio, se  $\mathbf{x} = (1, -2)$  e  $\mathbf{y} = (2, 3)$ , si ottiene la curva  $(x(t), y(t)) = (1 + t, -2 + 5t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

L'esempio precedente suggerisce come definire analiticamente il **segmento**, indicato con  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ , congiungente due punti  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$ ):

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] := \{(1 - t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1 : 0 \leq t \leq 1\}. \quad (10.10)$$

Il segmento  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$  privato degli estremi  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$  si denota con  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ .

**ESERCIZIO 10.11**

Rappresentare graficamente il sostegno delle seguenti curve:

- $\gamma(t) = (-2 + 4t, 4 - t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- $\gamma(\varphi) = (\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 4\pi$ ;
- $\gamma(\varphi) = (5 \cos \varphi, 2 \sin \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;
- $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 + 1)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

**ESERCIZIO 10.12**

Determinare una parametrizzazione dei seguenti insiemi:

- la retta di equazione  $3x + 4y = 5$ ;
- l'ellisse di equazione  $9x^2 + 4y^2 = 36$ ;
- la retta di intersezione dei due piani di, rispettivamente, equazione  $4x - y + z = 1$  e  $3x - y - z = 2$ .

**10.4 Limiti e continuità di funzioni a valori scalari**

Abbiamo osservato nella (10.7) che l'analisi di un limite per una funzione a valori in  $\mathbb{R}^m$  si riconduce a quella di  $m$  limiti di funzioni scalari. È perciò su di esse che concentreremo la nostra attenzione in questo paragrafo. Tale studio metterà in evidenza una ricchezza di situazioni non comune alle funzioni di una sola variabile; di fatto, in una dimensione per raggiungere un punto di accumulazione  $x_0$  ci muoviamo lungo un'unica direzione, eventualmente da destra o da sinistra, mentre in dimensione di spazio maggiore di 1 abbiamo infinite possibilità (si veda Figura 10.12).

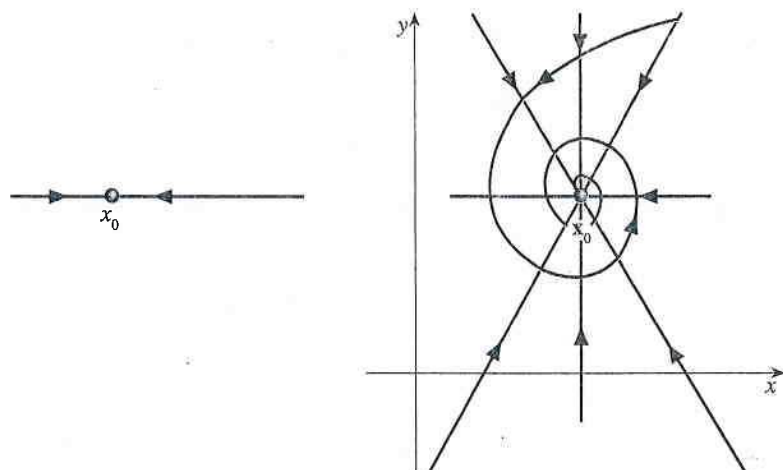


Figura 10.12

Per spiegare la diversità della teoria di funzioni di più variabili ricorremo a esempi di funzioni di due variabili, con il vantaggio di poterne visualizzare il grafico, essendo un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  (si veda Figura 10.13): se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}^2$ ,

$$\text{graf } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in X, z = f(x, y)\}. \quad (10.11)$$

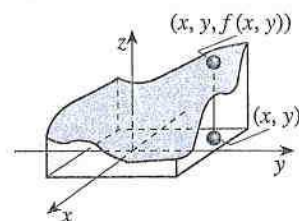


Figura 10.13 Grafico di una funzione di due variabili.

### 10.4.1 Uso dei teoremi di carattere generale

Come abbiamo osservato nel Paragrafo 10.3, alcune proprietà generali riguardanti limiti e continuità continuano a valere per funzioni di più variabili. Nell'esempio successivo useremo tali proprietà, insieme alla continuità in  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$  funzioni  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_2, \dots, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_n$  per provare la continuità di una funzione assegnata.

La funzione

$$f(x, y) = e^{\frac{\log(x-y)}{x+3y}} \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$$

è composta dalle seguenti funzioni continue:

$$\begin{aligned} (x, y) \mapsto x \quad \text{e} \quad (x, y) \mapsto y \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), \quad z \mapsto \log z \quad (\forall z > 0), \\ z \mapsto \frac{1}{z} \quad (\forall z \neq 0), \quad z \mapsto e^z \quad (\forall z \in \mathbb{R}), \quad z \mapsto \sqrt{z} \quad (\forall z \geq 0). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Quindi, per i teoremi generali relativi alle funzioni continue,  $f(x, y)$  è continua nel suo dominio, che abbiamo determinato nell'Esempio 10.1.

**ESEMPIO 10.13**

L'immagine di funzioni di più variabili a valori scalari è contenuta in un insieme ordinato. Perciò è possibile estendere a tali funzioni alcuni risultati che abbiamo già incontrato per funzioni di una variabile e che non dipendono dall'ordinamento del dominio. In particolare, se  $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ , continuano a valere la proprietà della permanenza del segno e il teorema del confronto. Come mostra il seguente esempio, il teorema del confronto può risultare utile nella determinazione del limite di una funzione.

**ESEMPIO 10.14**

Verifichiamo che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$



(la determinazione del candidato limite  $\ell = 0$ , che in questo caso è stato fornito a priori, sarà discussa nel Paragrafo 10.4.3, si veda in particolare l'Esempio 10.18). Osserviamo che, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,  $2|xy| \leq x^2 + y^2$ . Pertanto

$$-\frac{1}{2}|x| \leq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}|x|.$$

Poiché  $|x| \rightarrow 0$  per  $(x, y) \rightarrow 0$ , la verifica segue immediatamente dal teorema del confronto.

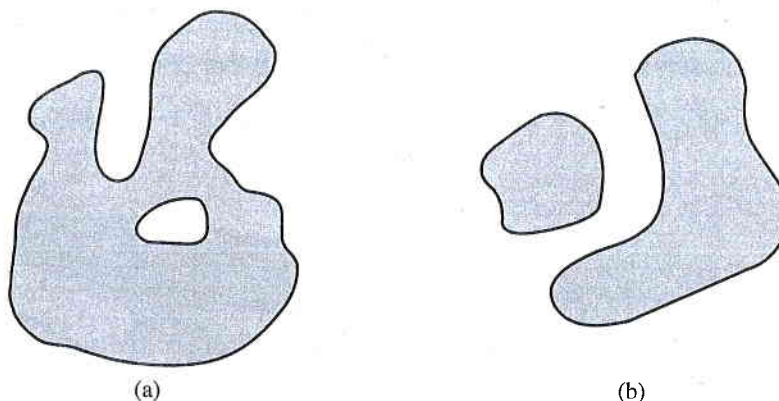
L'estensione a funzioni di più variabili di altri risultati richiede invece un'ulteriore ipotesi sul dominio. A questo scopo diamo la seguente definizione.

#### DEFINIZIONE 10.15

Un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **connesso (per archi)** se per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  esiste una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che  $\gamma(a) = x$ ,  $\gamma(b) = y$  e il cui sostegno sia contenuto in  $X$ .

La nozione di insieme connesso in  $\mathbb{R}^n$  (si veda Figura 10.14) è per molti aspetti analoga a quella di intervallo in  $\mathbb{R}$ : i sottoinsiemi connessi di  $\mathbb{R}$  sono tutti e soli gli intervalli; inoltre, se  $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  è continua in  $X$  e  $X$  è connesso, continuano a valere il teorema degli zeri (Esercizio 10.14b) e il teorema dei valori intermedi (Esercizio 10.14c).

**Figura 10.14** Insieme connesso (a); insieme non connesso (b).



#### ESERCIZIO 10.13

Determinare il dominio di  $f(x, y) = \sqrt{\arcsin\left(\frac{x+y}{x-y}\right)}$  e dire se  $f$  è continua nel suo dominio.

#### ESERCIZIO 10.14

Sia  $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua in  $X$ . Dimostrare che:

- data una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che  $f(\gamma(a)) < 0$  e  $f(\gamma(b)) > 0$ , esiste  $t_0 \in (a, b)$  tale che  $f(\gamma(t_0)) = 0$ ;
- se  $X$  è connesso e se esistono  $x_1, x_2 \in X$  tali che  $f(x_1) < 0$  e  $f(x_2) > 0$ , esiste  $x_0 \in X$  tale che  $f(x_0) = 0$ ;
- se  $X$  è connesso e  $\inf_X f < \sup_X f$ , per ogni  $c \in (\inf_X f, \sup_X f)$  esiste  $x \in X$  tale che  $f(x) = c$ .

### 10.4.2 Funzioni discontinue: alcuni esempi

#### ESEMPIO 10.15

Per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , siano

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x + 1, \quad g(x, y) = x - y \quad (10.13)$$

e

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } y > 2x \\ g(x, y) & \text{se } y \leq 2x. \end{cases}$$

Per le proprietà generali  $f$  e  $g$  sono continue in  $\mathbb{R}^2$ , quindi  $h$  è certamente continua in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x\}$ . È facile verificare (usando la definizione di limite) che  $h$  è continua in  $(t, 2t)$ , un punto generico della retta di equazione  $y = 2x$ , se e solo se

$$f(t, 2t) = g(t, 2t)$$

ovvero se e solo se

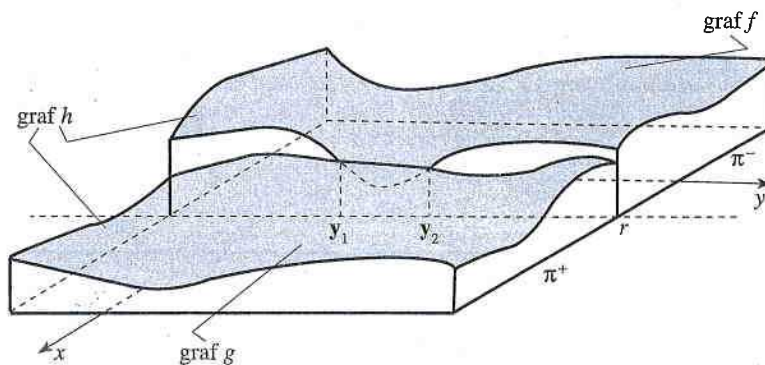
$$t^2 + 4t^2 + 4t + 1 = t - 2t \Leftrightarrow 5t^2 + 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{10}(-5 \pm \sqrt{5}).$$

Perciò gli unici punti sulla retta, di equazione  $y = 2x$ , nei quali  $f$  è continua sono

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{5}, -1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{5}, -1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}\right).$$

Nella Figura 10.15 abbiamo illustrato una situazione analoga a quella considerata nell'Esempio 10.15. La retta  $r$  divide il piano in due semipiani  $\pi^+$  e  $\pi^-$  ( $\mathbb{R}^2 = \pi^+ \cup \pi^- \cup r$ ), e  $\text{graf}(h|_{\pi^+}) = \text{graf}(g|_{\pi^+})$ , con  $g$  funzione continua in  $\mathbb{R}^2$  e  $\text{graf}(h|_{\pi^- \cup r}) = \text{graf}(f|_{\pi^- \cup r})$  con  $f$  funzione continua in  $\mathbb{R}^2$  (si ricordi che  $g|_{\pi^+}$  indica la restrizione di  $g$  a  $\pi^+$ ). I punti di  $r$  in cui  $h$  risulta continua sono quelli corrispondenti all'intersezione di  $\text{graf}(g|_r)$  con  $\text{graf}(f|_r)$ . Come si vede nella Figura 10.15, i grafici di  $g$  e  $f$ , ristretti a  $r$ , si intersecano almeno in due punti

$$(y_1, f(y_1)) = (y_1, g(y_1)) \quad \text{e} \quad (y_2, f(y_2)) = (y_2, g(y_2)).$$



**Figura 10.15** Punti di  $r$  in cui  $h$  è continua:  $y_1$  e  $y_2$

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x + 3y + 10 & \text{se } (x-1)^2 + (y-3)^2 \geq 4 \\ x + 4y + 10 & \text{se } (x-1)^2 + (y-3)^2 < 4. \end{cases}$$

Si osservi che  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$  è l'equazione della circonferenza di centro  $(1, 3)$  e di raggio 2, quindi  $\{(x, y) : (x-1)^2 + (y-3)^2 < 4\}$  è l'interno del cerchio corrispondente. Ragionando come sopra,  $f$  risulta continua fuori della circonferenza, ovvero nell'insieme  $\{(x, y) : (x-1)^2 + (y-3)^2 \neq 4\}$ . Inoltre,  $f$  sarà continua in un punto  $(x, y)$  della circonferenza se e solo se

$$\begin{cases} 2x + 3y + 10 = x + 4y + 10 \\ (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$$

ovvero se e solo se

$$x = y \quad \text{e} \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4.$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene

**ESEMPIO 10.16**

$$x = y \quad \text{e} \quad 2y^2 - 8y + 6 = 0,$$

da cui risulta che  $f$  è continua in  $(1, 1)$  e in  $(3, 3)$ .

**ESEMPIO 10.17**

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x + y^2 - 2) & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$$

Chiaramente  $f$  è continua in  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ , ovvero nei punti del piano che non appartengono agli assi coordinati. Per studiare la continuità nell'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ oppure } y = 0\},$$

laddove la funzione vale 0, si dovranno determinare le soluzioni  $(x, y)$  del sistema

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x + y^2 - 2) = 0 \\ xy = 0. \end{cases} \quad (10.14)$$

Poiché

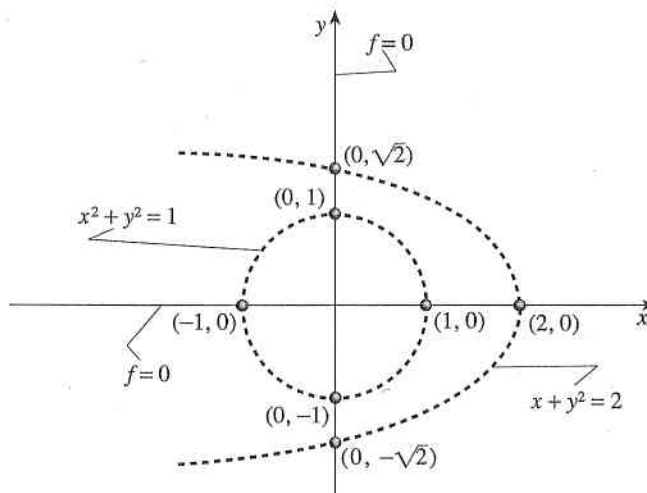
$$(x^2 + y^2 - 1)(x + y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \text{ oppure } x + y^2 - 2 = 0$$

il sistema (10.14) è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x + y^2 - 2 = 0 \\ xy = 0. \end{cases}$$

Perciò  $f$  risulta continua nei punti  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, \sqrt{2})$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  e  $(0, -\sqrt{2})$  (si veda la Figura 10.16).

Figura 10.16

**ESERCIZIO 10.15**

Determinare l'insieme dei punti in  $\mathbb{R}^2$  in cui le seguenti funzioni non sono continue:

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ 4x + 3y & \text{se } x < 0; \end{cases} \quad \text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \log(xy) & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1 \\ 6x & \text{se } x^2 + y^2 < 1; \end{cases} \quad \text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \log(xy) & \text{se } xy > 1 \\ 0 & \text{se } xy \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$



### 10.4.3 Calcolo dei limiti

In situazioni più complicate di quelle discusse nei paragrafi precedenti è necessario uno studio più approfondito del concetto di limite.

Ricordiamo che, dati una funzione  $f$  e un sottoinsieme  $A$  del dominio di  $f$ ,  $f|_A$  indica la restrizione di  $f$  ad  $A$ :

$$f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f|_A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

Di seguito useremo spesso la notazione

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) := \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f|_A(\mathbf{x}).$$

Il seguente risultato è una conseguenza immediata del teorema ponte.

#### TEOREMA 10.16

Siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  punto di accumulazione per  $X$  e  $\ell \in \mathbb{R}^*$ . Allora le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

- (i)  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$ ;  
 (ii) per ogni sottoinsieme  $A \subseteq X$  per cui  $\mathbf{x}_0$  è punto di accumulazione si ha  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in A}} f(\mathbf{x}) = \ell$ .

Il Teorema 10.16 è di grande utilità sia per determinare un valore candidato a essere l'eventuale limite della funzione sia, al contrario, per dimostrare la non esistenza del limite di una funzione. L'idea è quella di seguire delle "traiettorie" particolari, nel dom  $f$ , per raggiungere il punto di accumulazione: per esempio rette, rami di parabole ecc. che contengono il punto. Così facendo si perviene al calcolo di limiti di funzioni di una sola variabile (e quindi più semplici) che possono dare informazioni sull'andamento della funzione nell'intorno del punto di accumulazione.

Si voglia determinare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{y(x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} + \cos(x + y) \right) \quad (10.15)$$

Se tale limite esiste, dovrà essere, per il Teorema 10.16, uguale al limite della restrizione della funzione all'insieme  $\{(x, y) : y = 0\}$ , cioè, sostituendo  $y = 0$  nell'espressione della funzione, a  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ . Perciò 1 è candidato a essere il valore del limite cercato: verifichiamolo.

Ovviamente, per teoremi generali, si ha  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(x + y) = 1$ . Resta quindi da provare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y(x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} = 0 \quad (10.16)$$

(si noti che è una forma indeterminata del tipo  $0/0$ ). Per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  risulta

$$0 \leq \frac{|y|(x^2 + 3y^2)}{x^2 + 5y^2} \leq |y|.$$

Quindi per il teorema del confronto, essendo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$ , resta dimostrata la (10.16).

Dimostriamo che

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

#### ESEMPIO 10.18

#### ESEMPIO 10.19

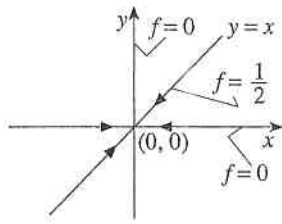


Figura 10.17

utilizzando come traiettorie le rette  $A_1 := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  e  $A_2 := \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$  (si veda Figura 10.17). Si ha infatti

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A_1}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

mentre

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A_2}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

da cui, per il Teorema 10.16, segue la tesi.

Nell'esempio precedente, il limite non esiste perché ci sono due traiettorie, in particolare due rette, lungo le quali il limite è diverso. È quindi naturale chiedersi: se il limite esiste ed assume lo stesso valore lungo *tutte* le rette, allora esiste? La risposta è no!

**ESEMPIO 10.20**

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(si veda Figura 10.18). Non è difficile verificare che, posto  $A_\alpha = \{(x, y) : y = \alpha x\}$   $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,

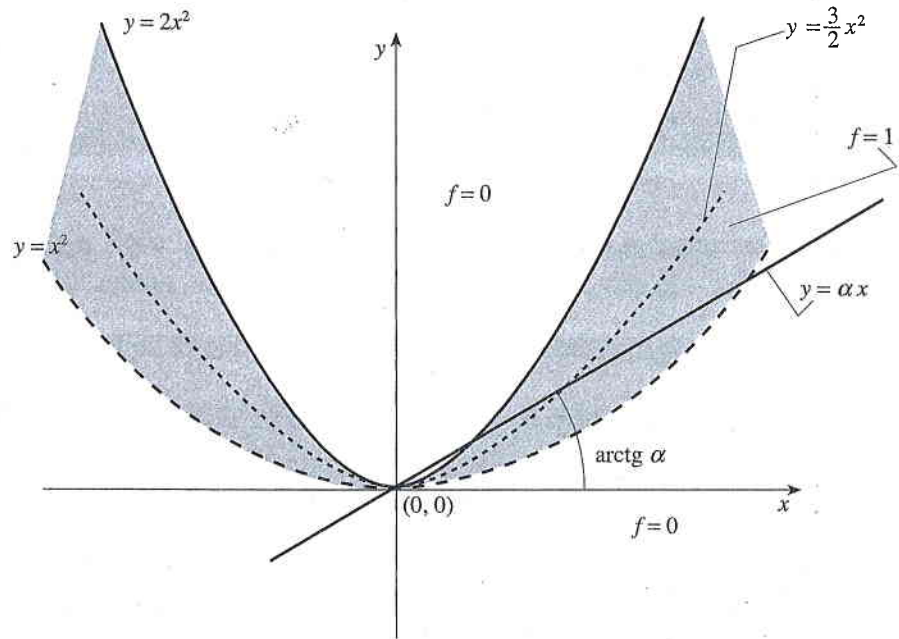
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A_\alpha}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, \alpha x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0,$$

ovvero lungo qualsiasi retta passante per  $(0,0)$  il limite è sempre 0. Se invece scegliamo, come traiettoria per raggiungere  $(0,0)$ , la parabola di equazione  $y = \frac{3}{2}x^2$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(x, \frac{3}{2}x^2\right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Perciò il limite della funzione per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  non esiste.

Figura 10.18



Coordinate polari

Nel caso di funzioni di *due* variabili può essere particolarmente utile, per il calcolo dei limiti, ricorrere alle *coordinate polari*.

Fissato un punto  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , possiamo rappresentare un qualunque punto  $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \varphi \\ y = y_0 + \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (10.17)$$

con  $\rho \geq 0$  e  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . I numeri  $\rho$  e  $\varphi$  si dicono **coordinate polari** del punto  $\mathbf{x}$  rispetto al centro  $\mathbf{x}_0$ . Quando si parla di coordinate polari senza indicare il punto centrale  $\mathbf{x}_0$ , è sottinteso che  $\mathbf{x}_0$  coincide con l'origine:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} = (0, 0)$ .

Geometricamente  $\rho$  rappresenta la distanza fra i punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

e  $\varphi$  è l'angolo formato dai vettori  $(0, 1)$  e  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  (si veda Figura 10.19). Si osservi che il centro  $\mathbf{x}_0$  si rappresenta con  $\rho = 0$ , e in questo caso l'angolo  $\varphi$  è arbitrario.

Sia ora  $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  un punto di accumulazione per  $X$ , e supponiamo per semplicità che, per un opportuno intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}_0$ , tutti i punti di  $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$  appartengano a  $X$ . Allora  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell \in \mathbb{R}$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}. \quad (10.18)$$

Utilizzando la rappresentazione in coordinate polari (si veda la (10.17)), osserviamo che

$$(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\} \Leftrightarrow 0 < \rho < \delta.$$

Pertanto la (10.18) è equivalente a

$$|f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - \ell| < \varepsilon \quad \forall \rho \in (0, \delta), \varphi \in [0, 2\pi). \quad (10.19)$$

La (10.19) mette in evidenza il fatto che la scelta di  $\delta$  non dipende dalla variabile  $\varphi$  (questo concetto si può esprimere dicendo che il limite per  $\rho \rightarrow 0^+$  è *uniforme rispetto a  $\varphi$* ). In particolare, la disuguaglianza continua a valere se prendiamo l'estremo superiore rispetto a  $\varphi$ . Otteniamo quindi che  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell \in \mathbb{R}$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - \ell| < \varepsilon \quad \forall \rho \in (0, \delta).$$

Ma questa non è altro che la definizione di limite per  $\rho \rightarrow 0^+$  della funzione  $g(\rho) = \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - \ell|$ . Abbiamo perciò dimostrato la prima parte del seguente risultato (le altre si provano in modo del tutto analogo).

#### TEOREMA 10.17

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  un punto di accumulazione per  $X$ , e supponiamo che esista un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}_0$  tale che  $\mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_0\} \subseteq X$ . Allora:

$$(i) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) - \ell| = 0;$$

$$(ii) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \inf_{\varphi \in [0, 2\pi)} f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) = +\infty;$$

$$(iii) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) = -\infty.$$

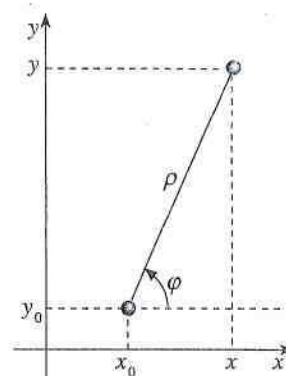


Figura 10.19 Coordinate polari (10.17).

Limiti in coordinate polari



**ESEMPIO 10.21**

Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  si vuole determinare, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x^2 - 2x + 1)y}{((x-1)^2 + y^2)^\alpha}.$$

Per selezionare un candidato a valore del limite utilizziamo il teorema ponte; la scelta più semplice è la retta  $y = 0$ :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y=0}} \frac{(x^2 - 2x + 1)y}{((x-1)^2 + y^2)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0}{(x-1)^{2\alpha}} = 0.$$

Perciò il limite, se esiste, vale 0. Utilizziamo ora il Teorema 10.17. Posto  $x = 1 + \rho \cos \varphi$ ,  $y = 0 + \rho \sin \varphi = \rho \sin \varphi$ , dobbiamo valutare

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \left| \frac{\rho^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\rho^{2\alpha} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^\alpha} - 0 \right| = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{3-2\alpha} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |\cos^2 \varphi \sin \varphi|;$$

osservando che  $0 < \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |\cos^2 \varphi \sin \varphi| \leq 1$ , si ottiene

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{3-2\alpha} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi)} |\cos^2 \varphi \sin \varphi| = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha > 0.$$

**ESERCIZIO 10.16**

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y};$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x+5y}{x^2-y^2};$

c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2};$

d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^4-y^4};$

e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{3x^2+2y^2};$

f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(7xy)}{x^2+y^2};$

g)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - \cos(2xy)}{x^2 - x^4 + |y|}.$

## FILO ROSSO Le corde di una chitarra

In questo capitolo svilupperemo il calcolo differenziale per le funzioni di più variabili. In questo contesto, rivestono un ruolo importante le *derivate parziali*, definite trattando tutte le variabili, tranne una, come costanti. Per esempio le derivate parziali di una funzione di due variabili,  $(x, t) \mapsto u(x, t)$ ,

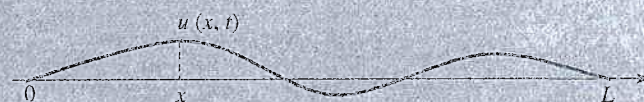
$$u_t(x_0, t_0), \quad u_x(x_0, t_0),$$

sono definite rispettivamente come le derivate delle funzioni di *una* variabile  $t \mapsto u(x_0, t)$  nel punto  $t = t_0$  e  $x \mapsto u(x, t_0)$  nel punto  $x = x_0$ . Analogamente si definiscono le derivate parziali di ordine superiore: per esempio  $u_{xx}(x_0, t_0)$  è la derivata parziale rispetto a  $x$  della funzione  $u_x(x, t)$  nel punto  $(x_0, t_0)$ .

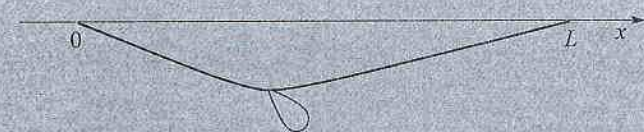
Le cosiddette *equazioni alle derivate parziali* (EDP), cioè relazioni tra varie derivate parziali di una funzione (ed eventualmente la funzione stessa) hanno un'importanza vitale nelle applicazioni: per esempio, il campo elettromagnetico è descritto dalle *equazioni di Maxwell*, la dinamica dei liquidi e dei gas dalle *equazioni di Navier Stokes*, la diffusione del calore in un metallo dall'*equazione del calore*. Le applicazioni non riguardano esclusivamente le scienze esatte e l'ingegneria: nel 1997 il premio Nobel per l'Economia è stato attribuito a Robert C. Merton e Myron Scholes per l'invenzione (nel 1973) di un nuovo metodo per determinare il prezzo dei derivati di un titolo: una EDP chiamata *equazione di Black-Scholes* (Fisher Black morì due anni prima, nel 1995). La teoria matematica delle EDP non sarà trattata in questo libro: lo scopo del testo è permettere allo studente di leggere tali equazioni, interpretarle e capirne, in eventuali corsi successivi, la derivazione.

Consideriamo per esempio l'equazione che descrive la vibrazione della corda di una chitarra. Per fissare le idee supponiamo che la corda si muova nel piano  $x$ - $y$  e che la posizione di equilibrio della corda coincida con il segmento di retta compreso tra

$(0, 0)$  e  $(L, 0)$ . Ad ogni istante  $t \geq 0$  la corda è il grafico della funzione  $x \mapsto u(x, t)$ :



Consideriamo la seguente situazione: con un plettro si tira la corda e si tiene ferma fino all'istante  $t = 0$  in cui si lascia andare (per connettersi agli effetti di scala del precedente filo rosso, qui si immagina che il plettro rilasci la corda istantaneamente):



Trascurando effetti di smorzamento, non è difficile dedurre che in prima approssimazione  $u$  verifica l'*equazione delle onde*

$$u_{tt}(x, t) = \sigma^2 u_{xx}(x, t)$$

per  $(x, t) \in (0, +\infty) \times (0, L)$ , dove  $\sigma > 0$  è una costante che dipende dalle proprietà della corda (materiale, spessore, tensione ecc). L'equazione impone che l'accelerazione verticale  $u_{tt}$  (i vettori in colore nella seguente figura) sia proporzionale a  $u_{xx}$ , la convessità/concavità della corda in un punto  $x$  al tempo  $t$ . Quest'ultima rappresenta la deviazione di  $u$  da una configurazione di *equilibrio locale* (una generica retta): quindi la corda si muove per ridurre (localmente) tale eccesso di tensione.



Il profilo iniziale (al tempo  $t = 0$ ) della corda è assegnato e descritto da una certa funzione  $f(x)$ , e la velocità iniziale è zero:



$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{per } 0 < x < L. \quad (\Delta)$$

Infine la corda è fissata nei suoi estremi:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{per } t > 0. \quad (\square)$$

Si osservi ora che per ogni  $n = 1, 2, \dots$ , la funzione

$$u^{(n)}(x, t) := \cos\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

verifica  $(\star)$ ,  $(\square)$ , e  $u_t(0, t) = 0$ : ad esempio,

$$\begin{aligned} u_n^{(n)}(x, t) &= \sigma^2 u_{xx}^{(n)}(x, t) \\ &= -\frac{n^2 \pi^2 \sigma^2}{L^2} \cos\left(\frac{n\pi\sigma t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Queste soluzioni *particolari* (perché associate a particolari profili iniziali,  $f(x) = u^{(n)}(x, 0)$ ) sono i cosiddetti *suoni puri*, o armoniche, caratterizzati da una singola *frequenza*,  $n\sigma/(2L)$  Hz (il reciproco del periodo temporale, ovvero il numero di oscillazioni per secondo, misurato in Hertz). In particolare, il suono che si ottiene per  $n = 1$  si chiama *armonica fondamentale*. Si noti che anche ogni "combinazione lineare" di armoniche,

$$v^{(N)}(x, t) := \sum_{n=0}^N \alpha_n u^{(n)}(x, t),$$

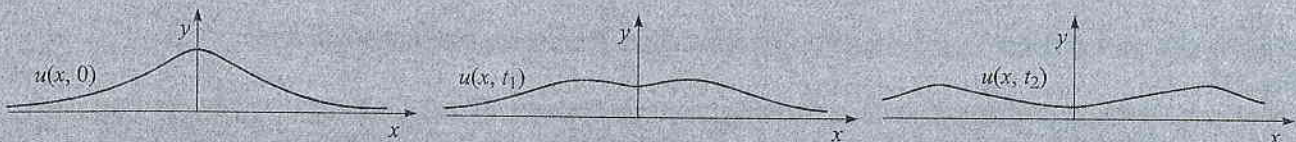
$$(N \in \mathbb{N}, \alpha_0, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R})$$

verifica  $(\star)$ ,  $(\square)$  e  $v_t^{(N)}(0, t) = 0$ . Nel capitolo 19 vedremo come questa osservazione elementare permetta di caratterizzare le soluzioni per un'ampia classe di profili iniziali  $f(x)$ .

Equazioni di tipo  $(\star)$  emergono in quasi tutti i campi in cui si voglia descrivere la propagazione di onde (sonore, elettromagnetiche, etc.). Ciò si può intuire studiando l'equazione per  $x \in \mathbb{R}$  piuttosto che per  $[0, L]$ : data una funzione due volte derivabile  $f(x)$  come profilo iniziale, si verifica facilmente che la funzione

$$u(x, t) = \frac{f(x - \sigma t) + f(x + \sigma t)}{2}$$

è una soluzione di  $(\star)$  con  $u(x, 0) = f(x)$  e  $u_t(x, 0) = 0$ . Il profilo iniziale si divide quindi in due onde: una si muove con velocità  $\sigma > 0$  (verso destra), l'altra con velocità  $-\sigma < 0$  (verso sinistra); in figura, il profilo di una tipica soluzione in tre istanti successivi: 0,  $t_1$  e  $t_2$ .



In questo capitolo ci occuperemo di estendere i principali strumenti del calcolo differenziale alle funzioni di più variabili. Ciò condurrà alla nozione di *differenziabilità* di una funzione, che coincide con quella di derivabilità per funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  e consente di generalizzare al caso di funzioni a valori scalari molti risultati, quali il teorema del valor medio, la formula per il resto secondo Lagrange, le relazioni tra convessità e punti di minimo. Alcuni risultati, per esempio la regola della catena e il teorema di Peano, continuano a valere anche per funzioni a valori vettoriali, su cui ci concentreremo soprattutto nell'ultimo paragrafo.

## 11.1 Derivate direzionali e parziali di funzioni a valori scalari

La derivata di una funzione reale di *una* variabile,  $x \mapsto f(x)$ , può essere pensata come una misura per la variazione infinitesimale del valore della funzione rispetto a una variazione infinitesimale della  $x$ . Per funzioni di più variabili tale misura dipenderà anche dalla *direzione* nella quale viene incrementata la variabile  $\mathbf{x}$ . Rappresentiamo una direzione attraverso un **versore**  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{R}^n$ , cioè un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Possiamo ora introdurre la nozione di *rapporto incrementale di una funzione in una direzione*: siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in X$  e sia  $\mathbf{v}$  un verso-

Versore e direzione



re; per ogni  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $\mathbf{x} + t\mathbf{v} \in X$  si definisce il **rapporto incrementale nella direzione  $\mathbf{v}$** :

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} \quad (11.1)$$

Si osservi che, posto

$$\varphi_{\mathbf{v}}(t) := f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \text{ per cui } \mathbf{x} + t\mathbf{v} \in X, \quad (11.2)$$

il rapporto incrementale (11.1) di  $f$  nella direzione  $\mathbf{v}$  coincide con il solito rapporto incrementale della funzione (di *una* variabile)  $\varphi_{\mathbf{v}}(t)$  in  $t = 0$ :

$$\frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} = \frac{\varphi_{\mathbf{v}}(t) - \varphi_{\mathbf{v}}(0)}{t}.$$

Se  $\varphi_{\mathbf{v}}$  è derivabile in  $t = 0$ ,  $\varphi'_{\mathbf{v}}(0)$  si dice derivata di  $f$  nella direzione  $\mathbf{v}$ .

#### DEFINIZIONE 11.1

Siano  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in X$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Se la funzione  $\varphi_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  è definita in un intorno di  $t = 0$  ed è derivabile in  $t = 0$ , allora

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) := \varphi'_{\mathbf{v}}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t} \quad (11.3)$$

si dice **derivata nella direzione  $\mathbf{v}$  di  $f$  in  $\mathbf{x}$** .

In modo analogo si definiscono

$$D_{\mathbf{v}}^{\pm}f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}.$$

Si osservi che se  $n = 1$  e  $\mathbf{v} = 1$ , la derivata direzionale di  $f$  coincide con la nota derivata  $f'(x)$ .

Poiché le derivate direzionali sono state definite come derivate di una funzione di una sola variabile, si possono usare i metodi del Capitolo 7 per calcolarle. Nel prossimo paragrafo vedremo comunque un modo più efficiente per calcolarle se la  $f$  è abbastanza regolare (si veda la (11.15)).

Siano  $f(x, y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$  e  $\mathbf{v}_{\alpha} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Allora

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{v}_{\alpha}}(t) &= f(x + t \cos \alpha, y + t \sin \alpha) \\ &= (x + t \cos \alpha)^2 - 3(x + t \cos \alpha) + 4(x + t \cos \alpha)(y + t \sin \alpha) + 5. \end{aligned}$$

Quindi, dopo un semplice calcolo, per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  è  $\alpha \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}_{\alpha}}f(x, y) &= \varphi'_{\mathbf{v}_{\alpha}}(0) = 2x \cos \alpha - 3 \cos \alpha + 4x \sin \alpha + 4y \cos \alpha \\ &= (2x + 4y - 3) \cos \alpha + 4x \sin \alpha. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Scegliendo rispettivamente  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi/2$  risulta

$$D_{(1, 0)}f(x, y) = 2x + 4y - 3, \quad D_{(0, 1)}f(x, y) = 4x. \quad (11.5)$$

Per le derivate nelle direzioni individuate dalla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$ , si utilizzano una notazione e una nomenclatura specifiche.

#### DEFINIZIONE 11.2

Siano  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in X$  e  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Se esiste la derivata nella direzione  $\mathbf{e}_k$  di  $f$  in  $\mathbf{x}$ , tale derivata si dice **derivata parziale rispetto a  $x_k$  di  $f$  in  $\mathbf{x}$**  e si denota con

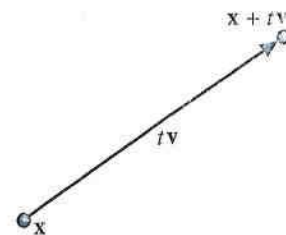


Figura 11.1

#### ESEMPIO 11.1

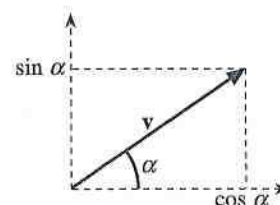


Figura 11.2  
 $\mathbf{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$$D_{e_k} f(\mathbf{x}), f_{x_k}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}), D_{x_k} f(\mathbf{x}), \partial_{x_k} f(\mathbf{x}), D_k f(\mathbf{x}).$$

Se esistono tutte le  $n$  derivate parziali  $f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x})$ , la funzione si dice **derivabile in  $\mathbf{x}$**  e il vettore le cui componenti sono le  $n$  derivate parziali di  $f$  in  $\mathbf{x}$  si dice **gradiente di  $f$  in  $\mathbf{x}$**  e si indica con

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) := (f_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{x})). \quad (11.6)$$

In particolare, se  $n = 2$  si ha  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  e quindi, per la (11.3),

$$f_x(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t}, \quad f_y(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y+t) - f(x, y)}{t}$$

che coincidono con le solite derivate per le funzioni di *una* variabile  $x \mapsto f(x, y)$  e  $y \mapsto f(x, y)$ , rispettivamente. Questa osservazione è vera per ogni  $n$ :  $f_{x_k}(\mathbf{x})$  può essere pensata come la derivata della funzione di una variabile

$$x_k \mapsto f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \quad (11.7)$$

dove  $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$  sono considerate come costanti. Ciò rende in molti casi il calcolo delle derivate parziali facilissimo: per calcolare  $f_{x_k}$ , si applicano i metodi del Capitolo 7 alla funzione (11.7) trattando le altre variabili come costanti.

### ESEMPIO 11.2

Riconsideriamo la funzione dell'Esempio 11.1. Si ha

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 3x + 4xy + 5) = 2x - 3 + 4y$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - 3x + 4xy + 5) = 4x$$

e si ritrova così la (11.5).

### ESEMPIO 11.3

Sia

$$g(x, y) = e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \sin(x-3y) \quad \text{per } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Per i teoremi generali sulla derivabilità delle funzioni di una variabile,  $g$  è derivabile in  $(x, y)$  se  $x^2 + 3y^2 \neq 0$ , ovvero se  $(x, y) \neq (0, 0)$ , e

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \right) \sin(x-3y) + e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x-3y)) \\ &= e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \left( \frac{\sin(x-3y)}{2\sqrt{x^2+3y^2}} \frac{\partial}{\partial x} (x^2+3y^2) + \cos(x-3y) \frac{\partial}{\partial x} (x-3y) \right) \\ &= e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \left( \frac{x \sin(x-3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \cos(x-3y) \right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$g_y(x, y) = e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \left( \frac{3y \sin(x-3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}} - 3 \cos(x-3y) \right).$$

Se  $(x, y) = (0, 0)$ , non possiamo più utilizzare i teoremi generali (la funzione  $s \mapsto \sqrt{s}$  non è derivabile in  $s = 0$ ); si ricorre quindi alla definizione di derivata parziale:

$$g_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t, 0) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{t^2}} \sin t}{t} = 1$$

$$g_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(0, t) - g(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{3t^2}} \sin(-3t)}{t} = -3.$$

Generalizzando il ragionamento seguito nell'esempio precedente, ovvero utilizzando le proprietà elementari delle derivate di funzioni di *una* variabile, si prova facilmente che le derivate parziali e il gradiente verificano proprietà molto simili: date due funzioni  $f, g : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabili in  $\mathbf{x}_0 \in X$ , e due costanti  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , le funzioni  $\alpha f + \beta g, fg$  e  $f/g$  (se  $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ) sono derivabili in  $\mathbf{x}_0$  e

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}_0) &= \alpha \nabla f(\mathbf{x}_0) + \beta \nabla g(\mathbf{x}_0) \\ \nabla(fg)(\mathbf{x}_0) &= g(\mathbf{x}_0) \nabla f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) \nabla g(\mathbf{x}_0) \\ \nabla(f/g)(\mathbf{x}_0) &= \frac{g(\mathbf{x}_0) \nabla f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0) \nabla g(\mathbf{x}_0)}{(g(\mathbf{x}_0))^2} \quad \text{se } g(\mathbf{x}_0) \neq 0. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Inoltre vale la seguente generalizzazione della regola della catena: date una funzione  $g : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $\mathbf{x}_0 \in X$ , e una funzione  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $g(\mathbf{x}_0) \in I$  (si osservi che  $f$  è una funzione di una variabile!), la funzione composta  $f \circ g$  è derivabile in  $\mathbf{x}_0$  e

$$\nabla(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = f'(g(\mathbf{x}_0)) \nabla g(\mathbf{x}_0). \quad (11.9)$$

Siano

$$g(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \quad \text{per } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad f(z) = \sin z \quad \text{per } z \in \mathbb{R}.$$

Allora  $g_x = 2(x + y)$ ,  $g_y = 2(x - y)$ ,  $f'(z) = \cos z$  e la funzione composta  $\varphi(x, y) = f(g(x, y)) = \sin(x^2 + 2xy - y^2)$  ha derivate parziali

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2(x + y) \cos(x^2 + 2xy - y^2)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2(x - y) \cos(x^2 + 2xy - y^2).$$

Determinare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

a)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ ;

d)  $f(x, y, z) = \cosh(x - yz)$ ;

b)  $f(x, y, z) = y \sin(zy)$ ;

e)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_3 x_5 - x_2 x_4^2$ .

c)  $f(x, y, z) = \operatorname{arctg}(xyz^2)$ ;

Utilizzare la definizione di derivata parziale per determinare, se esistono, le derivate parziali nei punti  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x(y + 1) & \text{se } x \neq 0 \\ y^2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Proprietà elementari

Regola della catena

ESEMPIO 11.4

ESERCIZIO 11.1

ESERCIZIO 11.2



## 11.2 Differenziabilità di funzioni a valori scalari

Per una funzione  $f$  di una variabile, la proprietà essenziale della derivata è che la funzione  $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  è la migliore approssimazione lineare di  $f$  per  $x \rightarrow x_0$ , ovvero

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (11.10)$$

Si ricordi inoltre che la (11.10) implica banalmente la continuità di  $f$  in  $x_0$ , ovvero derivabilità implica continuità se  $n = 1$ .

Per funzioni di più variabili la situazione è più complicata: i seguenti due esempi mostrano che  $f$  non è necessariamente continua in  $\mathbf{x}$  se  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x}$ , neppure se in tale punto esistono tutte le derivate direzionali di  $f$ .



### ESEMPIO 11.5

Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0 \\ 1 & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

Chiaramente  $f$  non è continua in  $(0, 0)$ :  $f(0, 0) = 0$  e ogni intorno di  $(0, 0)$  contiene punti nei quali  $f$  vale 1. D'altra parte  $f$  è derivabile in  $(0, 0)$ :

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Si noti che in questo esempio le altre derivate direzionali di  $f$  non esistono in  $(0, 0)$ : infatti, posto  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  con  $v_1^2 + v_2^2 = 1$ ,

$$\text{se } v_1 \neq 0 \text{ e } v_2 \neq 0 \text{ allora } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 0}{t} \text{ non esiste.}$$

La situazione dell'Esempio 11.5 non è sorprendente: infatti, la derivabilità di  $f$  in  $(0, 0)$  riguarda soltanto i valori di  $f$  sugli assi delle  $x$  e delle  $y$ , ovvero della restrizione di  $f$  a tali insiemi; quindi non ci si può aspettare che la sola derivabilità di  $f$  dia informazioni su ciò che accade nelle altre direzioni. A questo riguardo il seguente esempio è più significativo.

### ESEMPIO 11.6

Sia  $f$  la funzione introdotta nell'Esempio 10.20:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora  $f(0, 0) = 0$  e, posto  $\mathbf{v}_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , per ogni  $\alpha \in [0, 2\pi)$  esiste  $t_\alpha > 0$  tale che

$$f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = 0 \quad \text{se } |t| < t_\alpha; \quad (11.11)$$

infatti, se  $\alpha = 0, \pi/2, \pi$  oppure  $3\pi/2$ , ogni scelta di  $t_\alpha$  va bene, altrimenti si può scegliere  $t_\alpha$  come indicato in Figura 11.3:

$$t_\alpha = \frac{|\sin \alpha|}{2 \cos^2 \alpha}.$$

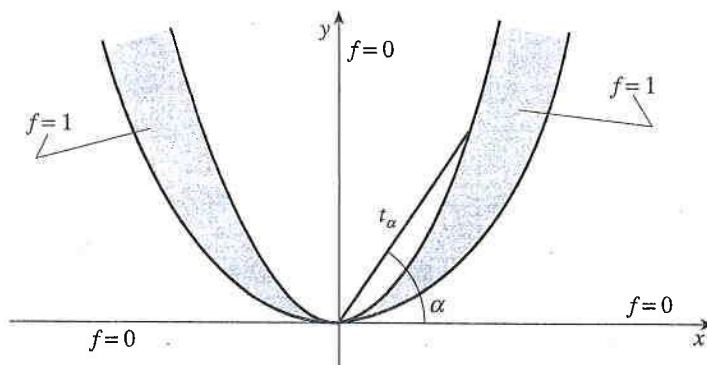


Figura 11.3

Chiaramente la (11.11) implica che

$$D_{v_\alpha} f(0, 0) = 0 \quad \text{per ogni } \alpha \in [0, 2\pi),$$

d'altra parte  $f$  non è continua in  $(0, 0)$ .

Gli ultimi due esempi mostrano che le derivate parziali e le derivate direzionali non sono gli strumenti adatti per affrontare il problema di miglior approssimazione lineare di una funzione di più variabili in un intorno di un punto. Perciò dovremo introdurre un concetto nuovo: la *differenziabilità*.

Prendiamo spunto dal caso di una funzione  $f(x)$  di una variabile. Secondo la Definizione 7.1, la funzione  $x \mapsto f(x_0) + m(x - x_0)$  è la migliore approssimazione lineare di  $f$  in un punto  $x_0$  del suo dominio se

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \quad (11.12)$$

Dal Teorema 7.4 segue che la costante  $m$  esiste se e solo se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , e in tal caso  $m = f'(x_0)$ .

Qui seguiamo lo stesso approccio. Siano quindi  $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in X$ . Anzitutto osserviamo che le funzioni lineari il cui grafico passa per il punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$  possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\mapsto f(\mathbf{x}_0) + a_1(x_1 - x_{01}) + a_2(x_2 - x_{02}) + \dots + a_n(x_n - x_{0n}) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle, \quad \text{dove } \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Tra questi candidati, la nozione di differenziabilità seleziona, se esiste, la migliore approssimazione di  $f$ .

### DEFINIZIONE 11.3

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice **differenziabile in**  $\mathbf{x}_0 \in X$  se esiste  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  tale che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (11.13)$$

I concetti di differenziabilità e derivabilità, che coincidono se  $n = 1$ , non sono invece equivalenti se  $n > 1$ . Infatti la nozione di differenziabilità risulta essere nettamente più forte.

### TEOREMA 11.4

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in X$ , allora

- (i)  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ ;
- (ii) esistono le derivate parziali di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  e la (11.13) vale con  $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ , ovvero

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0; \quad (11.14)$$

(iii) per ogni versore  $\mathbf{v}$  esiste la derivata direzionale  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$  e vale la formula

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle. \quad (11.15)$$

In conclusione:

$$f \text{ è differenziabile in } \mathbf{x}_0 \text{ se e solo se } f \text{ è derivabile in } \mathbf{x}_0 \text{ e} \\ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (11.16)$$

### Dimostrazione

(i)  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$  perché, per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \rightarrow 0.$$

(ii) Sia  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Allora per ogni  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) &= D_{\mathbf{e}_k}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \mathbf{a}, t\mathbf{e}_k \rangle + o(\|t\mathbf{e}_k\|)}{t} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_k \rangle \end{aligned}$$

quindi le derivate parziali in  $\mathbf{x}_0$  esistono e sono le  $n$  componenti del vettore  $\mathbf{a}$ .

(iii) Per il punto (ii),  $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$ , quindi

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), t\mathbf{v} \rangle + o(\|t\mathbf{v}\|)}{t} \\ &= \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Continuano a valere per le funzioni differenziabili le proprietà elementari delle derivate di funzioni di una variabile:

- la combinazione lineare, il prodotto o il quoziente di due funzioni differenziabili in un punto  $\mathbf{x}_0$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}_0$  e valgono le proprietà (11.8) per il gradiente;
- la composizione  $f \circ g$  di una funzione  $g: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabile in  $\mathbf{x}_0 \in X$ , e una funzione  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , differenziabile in  $g(\mathbf{x}_0) \in I$ , è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e vale la (11.9) per il gradiente.

Poiché inoltre le funzioni elementari  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) sono banalmente differenziabili, è spesso immediato stabilire la differenziabilità di una funzione e, quindi, calcolarne le derivate direzionali.

### ESEMPIO 11.7

Riconsideriamo la funzione  $f(x, y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$  degli esempi 11.1 e 11.2. Essendo, come ogni polinomio, composta da somma e prodotto di funzioni differenziabili in  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  risulta differenziabile in  $\mathbb{R}^2$ . Nell'Esempio 11.2 abbiamo calcolato le derivate parziali:

$$f_x(x, y) = 2x - 3 + 4y \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = 4x, \quad \text{ovvero} \quad \nabla f(x, y) = (2x - 3 + 4y, 4x).$$

Per calcolare la derivata direzionale di  $f$  nel punto  $(x, y)$  nella direzione  $\mathbf{v}_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , è sufficiente applicare la (11.15):

$$D_{\mathbf{v}_\alpha}f(x, y) = \langle \nabla f(x, y), \mathbf{v}_\alpha \rangle = (2x - 3 + 4y) \cos \alpha + 4x \sin \alpha$$

e si ritrova la (11.4).



**ESEMPIO 11.8**

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = \sin(x^2y)$ . Si vuole calcolare la derivata di  $f$  nel punto  $(1, \pi)$  nella direzione  $\mathbf{v}$  parallela ed equiversa al vettore  $(1, 2)$ . Anzitutto ricordiamo che  $\mathbf{v}$  deve essere un versore: perciò

$$\mathbf{v} = \frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{1+4}} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Osserviamo che  $f$  è composizione di funzioni differenziabili in  $\mathbb{R}^2$ , quindi è differenziabile in  $\mathbb{R}^2$  e  $D_{\mathbf{v}}f(1, \pi)$  si può calcolare usando la (11.15). Le derivate parziali si calcolano facilmente:

$$f_x(x, y) = 2xy \cos(x^2y), \quad f_y(x, y) = x^2 \cos(x^2y), \quad \text{quindi } \nabla f(1, \pi) = (-2\pi, -1).$$

Perciò

$$D_{\mathbf{v}}f(1, \pi) = \langle \nabla f(1, \pi), \mathbf{v} \rangle = -2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2(1+\pi)}{\sqrt{5}}.$$

Va sottolineato comunque che la (11.15) non vale se  $f$  non è differenziabile, neppure se  $f$  ha derivate in ogni direzione (si veda l'Esercizio 11.6).



Un'altra applicazione della (11.15) si basa sulla formula (10.1):

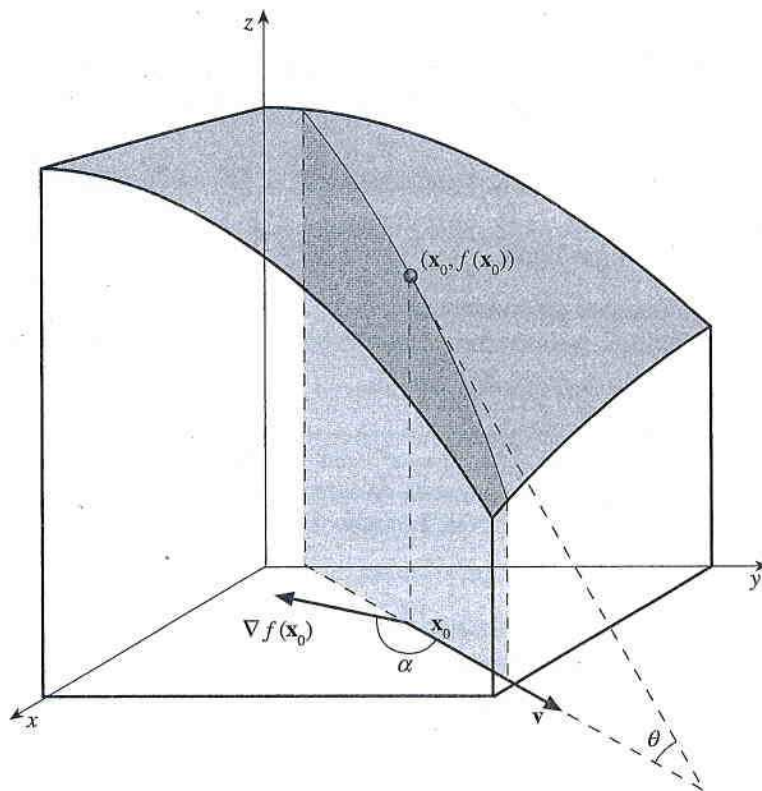
$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \alpha$$

dove

$\alpha$  è l'ampiezza dell'angolo formato dai vettori  $\mathbf{v}$  e  $\nabla f(\mathbf{x})$

(si veda Figura 11.4). Si noti che se  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ,  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$  è massima, al variare di  $\mathbf{v}$ , quando  $\cos \alpha = 1$ , ovvero per  $\alpha = 0$ , cioè se  $\mathbf{v}$  e  $\nabla f(\mathbf{x})$  hanno la stessa direzione e lo stesso verso; sarà minima quando  $\cos \alpha = -1$ , o equivalentemente se  $\mathbf{v}$  e  $\nabla f(\mathbf{x})$  hanno la stessa direzione ma verso opposto (si veda Figura 11.5). Dunque, se  $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ,  $\nabla f(\mathbf{x})/\|\nabla f(\mathbf{x})\|$  e  $-\nabla f(\mathbf{x})/\|\nabla f(\mathbf{x})\|$  indicano, rispettivamente, le direzioni di massima e minima crescita di  $f$ .

Direzioni di massima e minima crescita



**Figura 11.4**

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cos \alpha = \text{tg } \theta.$$

## ESEMPIO 11.9

Utilizzando la formula per il gradiente dell'Esempio 11.8, si ottengono le direzioni di massima e minima crescita della funzione  $f(x, y) = \sin(x^2y)$  nel punto  $(1, \pi)$ :

$$\mathbf{v}_{\max} = \frac{\nabla f(1, \pi)}{\|\nabla f(1, \pi)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}(-2\pi, -1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi^2}}(2\pi, 1).$$

Se  $n = 2$ , la (11.14) diventa

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Il grafico della funzione definita dall'equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (11.17)$$

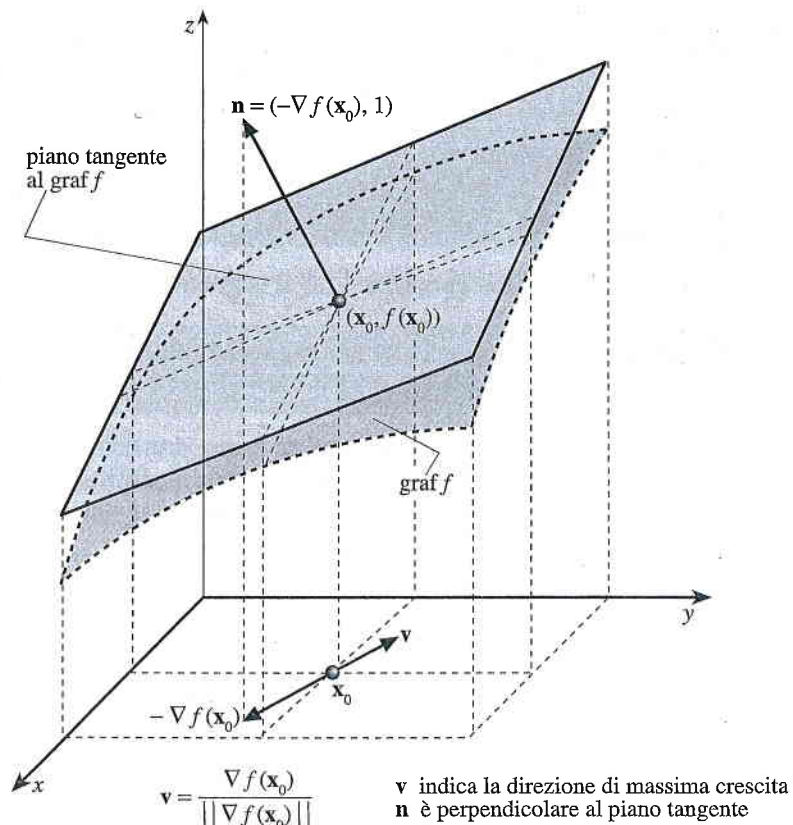
si dice **piano tangente** al grafico di  $f$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$  (si veda la Figura 11.5): è il piano di giacitura  $\mathbf{n} = (-\nabla f(x_0, y_0), 1) = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1)$  passante per il punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . La (11.17) si dice **equazione del piano tangente**.

## ESEMPIO 11.10

La funzione  $f(x, y) = 3x^2 + 4xy + 5y$  è differenziabile in  $(3, 1)$ ,  $\nabla f(3, 1) = (22, 17)$  e il piano tangente al suo grafico in  $(3, 1, f(3, 1)) = (3, 1, 44)$  ha equazione  $z = 22x + 17y - 39$ .

Se  $n = 1$ ,  $f$  è differenziabile se e solo se  $f$  è derivabile. Se invece  $n \geq 2$ , conosciamo solo alcune condizioni *necessarie* per la differenziabilità in un punto:  $f$  deve essere continua, derivabile e devono valere la (11.14) e la (11.15). Il prossimo teorema fornisce una condizione *sufficiente* per la differenziabilità di  $f$ .

Figura 11.5



**TEOREMA 11.5** Teorema del differenziale totale

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x} \in X$ . Se esiste un intorno  $U$  di  $\mathbf{x}$  nel quale  $f$  è derivabile e se le derivate parziali  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sono continue nel punto  $\mathbf{x}$ , allora  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$ .

Dimostrazione

Illustriamone l'applicazione attraverso un esempio.

La funzione

$$g(x, y) = e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \sin(x-3y) \quad \text{per } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

è differenziabile in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  in quanto composizione di funzioni differenziabili. Nell'Esempio 11.3 abbiamo determinato le derivate parziali di  $g$  in  $\mathbb{R}^2$ :

$$g_x(x, y) = \begin{cases} e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \left( \frac{x \sin(x-3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \cos(x-3y) \right) & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ 1 & \text{se } (x, y) = 0 \end{cases}$$

e

$$g_y(x, y) = \begin{cases} e^{\sqrt{x^2+3y^2}} \left( \frac{3y \sin(x-3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}} - 3 \cos(x-3y) \right) & \text{se } (x, y) \neq 0 \\ -3 & \text{se } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Utilizzando le coordinate polari, si verifica facilmente che il fattore  $\frac{\sin(x-3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$  è definitivamente limitato per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  e che quindi le derivate parziali sono continue nell'origine (lo studente controlli). Perciò, per il Teorema 11.5,  $g$  è differenziabile anche nell'origine.

**ESEMPIO 11.11**

Il Teorema 11.5 motiva l'ultima parte della seguente definizione.

**DEFINIZIONE 11.6**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $E \subseteq X$ . La  $f$  si dice **derivabile (differenziabile) in  $E$**  se  $f$  è derivabile (differenziabile) in ogni  $\mathbf{x} \in E$ . Se  $f$  è derivabile in  $E$  e se le  $n$  derivate parziali  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sono continue in  $E$ ,  $f$  si dice di **classe  $C^1$**  in  $E$ , e si scrive

$$f \in C^1(E).$$

Infatti, segue immediatamente dal Teorema 11.5 il seguente corollario.

**COROLLARIO 11.7**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f \in C^1(X)$  allora  $f$  è differenziabile in  $X$ .

Si osservi che la continuità delle derivate parziali è una condizione solo sufficiente, non necessaria, per la differenziabilità, ovvero la differenziabilità di una funzione  $f$  in un aperto  $X$  non implica che  $f \in C^1(X)$ . Per esempio, segue dall'Esempio 7.18 che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in  $\mathbb{R}$  (e quindi differenziabile), ma  $f'(x)$  non è continua in  $x = 0$ . Quindi nei casi in cui  $f \notin C^1$  non è lecito dedurre che  $f$  non è differenziabile, ma si deve ricorrere alla (11.16), cosa che è sempre possibile fare. Nel caso della funzione  $g$  dell'esempio precedente, la differenziabilità di  $g$  nell'origine segue facilmente:  $g(0, 0) = 0$  e  $\nabla g(0, 0) = (1, -3)$ , quindi



$$\begin{aligned} \frac{|g(x, y) - x + 3y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{|e^{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \sin(x - 3y) - x + 3y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{(1 + o(1))(x - 3y + o(x - 3y)) - x + 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{o(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0 \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0), \end{aligned}$$

ovvero  $g$  è differenziabile in  $(0, 0)$ :

$$g(x, y) = x - 3y + o(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

**ESERCIZIO 11.3**

Determinare il piano tangente al grafico di  $f(x, y)$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  se:

a)  $f(x, y) = x + 2xy + 3y^2$ ,  $(x_0, y_0) = (4, 1)$ ;

b)  $f(x, y) = \sin(xy^2)$ ,  $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ .

**ESERCIZIO 11.4**

Sia  $f(x, y) = x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3$ . Calcolare  $D_{\mathbf{v}}f(1, 2)$  se  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ ;

inoltre determinare

$$\max\{D_{\mathbf{v}}f(1, 2); \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{v}\| = 1\}.$$

**ESERCIZIO 11.5**

Sia  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_4 - x_3x_4^2 + x_2x_3$ . Determinare la migliore approssimazione lineare di  $f$  in un intorno di  $(-1, 0, 2, 1)$ .

**ESERCIZIO 11.6**

Determinare le derivate direzionali in  $(0, 0)$  della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } y = 0, x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } y \neq 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

e dedurre che  $f$  non è differenziabile in  $(0, 0)$ .

**11.2.1 Il teorema del valor medio sui segmenti**

Il concetto di differenziabilità e il Teorema 11.4, che riduce il calcolo delle derivate a quello delle derivate parziali, permettono di estendere con naturalezza molti dei risultati ottenuti per funzioni di una variabile, riguardanti per esempio gli sviluppi di Taylor e lo studio di massimi e minimi: è ciò di cui ci occuperemo nei prossimi paragrafi. In questo forniamo un primo esempio: una semplice estensione del teorema del valor medio.

**TEOREMA 11.8**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ) tali che il segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq X$ . Se  $f$  è continua in  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  e differenziabile in  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , allora esiste  $\xi \in (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tale che

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\xi), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle. \quad (11.18)$$

Ricordiamo che il segmento  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$  è l'insieme delle combinazioni lineari  $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$  di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  con  $t \in [0, 1]$ , e che  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  indica il segmento privato degli estremi.

**Dimostrazione**

Sia  $\mathbf{v} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ . La funzione  $\varphi_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  è ben definita per  $t \in [0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|]$  e  $\varphi_{\mathbf{v}}(0) = f(\mathbf{x})$ ,  $\varphi_{\mathbf{v}}(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) = f(\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})) = f(\mathbf{y})$ . Inoltre, per le ipotesi su  $f$ ,  $\varphi_{\mathbf{v}}$  è continua in  $[0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|]$  e derivabile in  $(0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)$  e, per la (11.3),  $\varphi'_{\mathbf{v}}(t) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ . Per il teorema del valor medio (applicato a  $\varphi_{\mathbf{v}}$  nell'intervallo  $[0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|]$ ) esiste  $t_0 \in (0, \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)$  tale che

$$\varphi_{\mathbf{v}}(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) - \varphi_{\mathbf{v}}(0) = \varphi'_{\mathbf{v}}(t_0)\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

ovvero

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x} + t_0\mathbf{v})\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Posto  $\xi = \mathbf{x} + t_0\mathbf{v}$ , il risultato segue dalla scelta di  $\mathbf{v}$  e dalla formula (11.15) per la derivata direzionale:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &= \langle \nabla f(\xi), \mathbf{v} \rangle \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \langle \nabla f(\xi), \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \rangle \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \\ &= \langle \nabla f(\xi), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle. \end{aligned}$$

**11.2.2 Integrali dipendenti da un parametro**

Integrando una funzione di due variabili rispetto a una di esse si ottiene una funzione di una variabile. Cominciamo con un esempio: il valore dell'integrale

$$\int_0^2 e^{yx^2} dx$$

dipende dal valore del "parametro"  $y \in \mathbb{R}$ , ovvero definisce una funzione nella variabile  $y$ :

$$g : y \mapsto \int_0^2 e^{yx^2} dx.$$

Si tratta di un fenomeno che si presenta regolarmente in ambito applicativo ed è utile formalizzarlo matematicamente.

Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $[a, b]$  per ogni  $y \in [c, d]$ . Risulta allora ben definita la funzione

$$g(y) := \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{per } y \in [c, d]. \quad (11.19)$$

È importante capire quali sono le proprietà della funzione  $f$  che continuano a valere per la funzione  $g$ , ovvero, come si usa dire, *passando sotto il segno di integrale*.

**TEOREMA 11.9** Passaggio al limite sotto integrale

Sia  $f \in C([a, b] \times [c, d])$  e sia  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  definita dalla (11.19). Allora  $g$  è continua in  $[c, d]$ , ovvero

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) dx \quad \text{per } y_0 \in [c, d]. \quad (11.20)$$

La (11.20) fa capire l'essenza del teorema: sotto ipotesi opportune si possono "scambiare" le operazioni di limite e integrale. Applicandolo all'esempio iniziale si ottiene

**Guida**

I risultati del paragrafo sono utilizzati per caratterizzare le forme differenziali esatte (Teorema 12.17), per introdurre l'equazione di continuità di un fluido (Esempio 16.6), per caratterizzare le derivate di funzioni olomorfe (Paragrafo 18.5) e, almeno formalmente, per le proprietà delle trasformate di Fourier e di Laplace.

**Dimostrazione**

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^2 e^{yx^2} dx = \int_0^2 \left( \lim_{y \rightarrow 0} e^{yx^2} \right) dx = \int_0^2 dx = 2.$$

Un secondo risultato riguarda lo scambio tra derivata e integrale.

**Dimostrazione**

**TEOREMA 11.10** Derivazione sotto integrale

Siano  $f, f_y \in C([a, b] \times [c, d])$ . Allora  $g$ , definita dalla (11.19), è derivabile in  $[c, d]$ ,  $g \in C^1([c, d])$  e risulta

$$g'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$

Applicando il Teorema 11.10 all'esempio iniziale si ottiene

$$g'(y) = \int_0^2 x^2 e^{yx^2} dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**ESEMPIO 11.12**

Si vuole studiare la funzione  $g(y) = \int_0^1 \sin(x^3 y) dx$  nell'intervallo  $y \in [0, \pi/2]$ . Preliminarmente osserviamo che

$$0 < x^3 y < \pi/2 \Rightarrow \sin(x^3 y) > 0 \text{ e } \cos(x^3 y) > 0 \quad \forall (x, y) \in (0, 1] \times (0, \pi/2).$$

In particolare,  $g(y) > 0$  per ogni  $y \in (0, \pi/2]$ , mentre sostituendo si ottiene  $g(0) = 0$ . Per il Teorema 11.10,  $g \in C^1([0, \pi/2])$  e

$$g'(y) = \int_0^1 x^3 \cos(x^3 y) dx. \quad (11.21)$$

In particolare,  $g'(0) = 1/4$  e  $g'(y) > 0$  per ogni  $y \in (0, \pi/2]$ . Quindi  $g$  è strettamente crescente in  $[0, \pi/2]$ ,  $\min g = g(0) = 0$  e  $\max g = g(\pi/2)$ . Per la (11.21) e il Teorema 11.10, anche  $g'(y)$  è di classe  $C^1([0, \pi/2])$  e

$$g''(y) = - \int_0^1 x^6 \sin(x^3 y) dx.$$

Perciò  $g''(0) = 0$  e  $g''(y) < 0$  per ogni  $y \in (0, \pi/2]$ , ovvero  $g'$  è strettamente decrescente e  $g$  è concava in  $[0, \pi/2]$ .

**ESERCIZIO 11.7**

Calcolare  $g'(0)$  nei seguenti casi:

a)  $g(y) = \int_1^2 \log(x + 3y) dx;$

b)  $g(y) = \int_1^2 \frac{1}{x^2 + y} dx.$

**ESERCIZIO 11.8**

Sia  $f \in C([0, 1])$  tale che  $0 < f(x) \leq 1$  per ogni  $x \in [0, 1]$ , e sia  $g(y) = \int_0^1 e^{-xy} f(x) dx$ .

a) Verificare che  $0 < g(y) \leq \frac{1 - e^{-y}}{y}$  per ogni  $y > 0$ ;

b) determinare il segno di  $g'(y)$ ;

c) determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo di  $g$  in  $[0, +\infty)$ .



## 11.3 Derivate di ordine superiore

Siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\mathbf{x} \in X$  e  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  due versori:  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$ . Se  $f$  è derivabile nella direzione  $\mathbf{v}$  in un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}$ , resta definita la funzione  $D_{\mathbf{v}}f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ; se tale funzione è derivabile nella direzione  $\mathbf{w}$ , ossia se esiste  $D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}))$ , si scrive

$$D_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) := D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})).$$

In altri termini,

$$D_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x} + t\mathbf{w}) - D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})}{t}.$$

**Osservazione.** Se esiste  $D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x})$ , allora la funzione  $\varphi(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  è ben definita in un intorno di  $t = 0$ , è due volte derivabile in  $t = 0$ , e  $\varphi''(0) = D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x})$ .

Se  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{e}_j$  si parla di **derivata parziale del secondo ordine**, o **derivata parziale seconda**,

$$(f_{x_i})_{x_j}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i} f(\mathbf{x}),$$

e si scrive

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}, \quad D_{x_j x_i} f(\mathbf{x}), \quad \dots$$

In modo analogo si definiscono le derivate direzionali e parziali di ordine maggiore di 2.

La  $f$  si dice **due volte differenziabile in  $\mathbf{x}$**  se  $f$  è differenziabile in un intorno di  $\mathbf{x}$  e le derivate parziali  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}$ . Analogamente  $f$  si dice  **$k$  volte differenziabile in  $\mathbf{x}$**  se è differenziabile  $k - 1$  volte in un intorno di  $\mathbf{x}$  e le sue derivate parziali di ordine  $k - 1$  sono differenziabili in  $\mathbf{x}$ . Se le derivate parziali di ordine  $k$  esistono e sono continue in  $X$ ,  $f$  si dice di classe  $C^k$  e si scrive

$$f \in C^k(X).$$

Se  $f \in C^k(X)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f$  si dice di classe  $C^\infty$  e si usa la notazione

$$f \in C^\infty(X).$$

Per il Teorema 11.5,

$$f \in C^k(X) \Rightarrow f \text{ è } k \text{ volte differenziabile in } X;$$

non vale però l'implicazione opposta.

Sia

$$f(x, y) = 3e^{xy^2} + x \sin(y - 3) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Poiché  $f$  è composta da funzioni di classe  $C^\infty$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Poiché

$$f_x(x, y) = 3y^2 e^{xy^2} + \sin(y - 3)$$

$$f_y(x, y) = 6xy e^{xy^2} + x \cos(y - 3)$$

le derivate  $f_{xx}$  e  $f_{xy}$  sono

$$f_{xx}(x, y) := (f_x)_x(x, y) = 3y^4 e^{xy^2}$$

$$f_{xy}(x, y) := (f_x)_y(x, y) = (6y + 6xy^3)e^{xy^2} + \cos(y - 3)$$

Derivate  
del secondo  
ordine

Funzioni  
 $k$  volte  
differenziabili

ESEMPIO 11.13

e le derivate  $f_{yx}$  e  $f_{yy}$  sono

$$f_{yx}(x, y) := (f_y)_x(x, y) = (6y + 6xy^3)e^{xy^2} + \cos(y - 3)$$

$$f_{yy}(x, y) := (f_y)_y(x, y) = (6x + 12x^2y^2)e^{xy^2} - x \sin(y - 3).$$

Le derivate di ordine maggiore possono essere calcolate in modo analogo; per esempio

$$f_{xxy}(x, y) := (f_{xx})_y(x, y) = (12y^3 + 6xy^5)e^{xy^2}$$

$$f_{yxx}(x, y) := (f_{yx})_x(x, y) = (12y^3 + 6xy^5)e^{xy^2}.$$

### ESEMPIO 11.14

Sia  $\alpha > 0$  e

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^\alpha} = \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\alpha/2}} \quad \text{per } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Allora  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  e per ogni  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  risulta

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{-\alpha x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha+2}{2}}} = -\frac{\alpha x_i}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+2}}$$

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha+2)x_i x_j}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+4}} & \text{se } i \neq j \\ -\frac{\alpha}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+2}} + \frac{\alpha(\alpha+2)x_j^2}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+4}} & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Si noti che

$$\sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(\alpha+2-n)}{\|\mathbf{x}\|^{\alpha+2}} \quad \text{per } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Negli esempi precedenti le *derivate miste*  $f_{x_i x_j}$  e  $f_{x_j x_i}$  coincidono. Infatti vale il seguente risultato.

### Dimostrazione

#### TEOREMA 11.11 Teorema di Schwarz

Siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $\mathbf{x} \in X$ . Se  $f$  è due volte differenziabile in  $\mathbf{x}$ , allora

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = f_{x_j x_i}(\mathbf{x}) \quad \text{per ogni } i, j = 1, \dots, n.$$

Un risultato analogo vale per le derivate miste di ordine superiore a 2 (si veda l'Esempio 11.13). Sottolineiamo però che esistono funzioni le cui derivate miste non coincidono (ovviamente, esse non sono due volte differenziabili).

Sia  $f$  due volte differenziabile in  $\mathbf{x}$ . Dati due versori  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  e  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ , applichiamo due volte consecutive la (11.15):

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}) v_i$$

e

$$D_{\mathbf{w}}^2 f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{w}} \left( \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}) v_i \right) = \sum_{i=1}^n (D_{\mathbf{w}} f_{x_i}(\mathbf{x})) v_i = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) v_i w_j.$$

Per il Teorema 11.11, anche

$$D_{\mathbf{v}\mathbf{w}}^2 f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) v_i w_j.$$

Ponendo

$$D^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_2 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_n x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (11.22)$$

Matrice hessiana

si ottiene che se  $f$  è due volte differenziabile in  $\mathbf{x}$ , allora

$$D_{\mathbf{v}\mathbf{w}}^2 f(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{w}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) = \langle D^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \quad (11.23)$$

La matrice  $D^2 f(\mathbf{x})$  si chiama **matrice hessiana** (e si indica anche con  $H_f(\mathbf{x})$ ); per il Teorema 11.11, la matrice hessiana è simmetrica. In particolare

$$D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) = \langle D^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) v_i v_j \quad (11.24)$$

ovvero  $D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x})$  è una *forma quadratica* in  $\mathbb{R}^n$  con coefficienti  $f_{x_i x_j}(\mathbf{x})$ .

Analogamente, se  $f$  è  $k$  volte differenziabile in  $\mathbf{x}$ , dato un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$D_{\mathbf{v}\mathbf{v}\dots\mathbf{v}}^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(\mathbf{x}) v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_k} \quad (11.25)$$

che coincide con la derivata  $k$ -esima della funzione  $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  nel punto  $t = 0$ .

Siano  $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$  per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ .

Evidentemente  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  e possiamo calcolare  $D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(1, 3)$  utilizzando la formula (11.24):

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{quindi } D^2 f(1, 3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(1, 3) = 6 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^2 \theta.$$

ESEMPIO 11.15

Determinare la matrice hessiana delle seguenti funzioni

a)  $f(x, y) = e^{x+y^2+xy}$ ;

b)  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy - z^2 + 3yz$ ;

c)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 x_2^2 + 3x_2^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3 x_4 - 1$ .

ESERCIZIO 11.9

Siano  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 x_2^2 + 3x_2^2 x_4 + x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3 x_4 - 1$  (come nell'Esercizio 11.9c)

e  $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Determinare  $D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(0, 1, -1, 2)$ .

ESERCIZIO 11.10

## 11.4 Polinomio di Taylor

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  due volte differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in X$ ,  $\mathcal{U}$  un intorno di  $\mathbf{x}_0$  contenuto in  $X$ , e  $\mathbf{x} \in \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ . Si pone



$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}.$$

Allora la funzione  $\varphi(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$  è ben definita per  $|t| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ , è due volte derivabile in  $t = 0$  e, per le (11.15) e (11.24),

$$\varphi'(0) = D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle, \quad \varphi''(0) = D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}_0) = \langle D^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Sostituendo queste espressioni nel polinomio di Taylor di ordine due di  $\varphi(t)$  centrato in  $t = 0$ , si ottiene

$$\varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle t + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle t^2.$$

Scegliendo  $t = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ , si ottiene la formula per il *polinomio di Taylor di  $f$  di ordine 2 intorno a  $\mathbf{x}_0$* :

Polinomio  
di Taylor  
di ordine 2

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (11.26)$$

Possiamo ora ricavare molto facilmente una generalizzazione del teorema di Peano (Teorema 7.34). Infatti, basta ricordare che

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2 + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

e sostituire  $t = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$  per ottenere la prima parte del seguente risultato.

#### TEOREMA 11.12

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 \in X$  e  $T_2(\mathbf{x})$  il polinomio di Taylor di ordine due intorno a  $\mathbf{x}_0$  definito dalla (11.26).

(i) Se  $f$  è due volte differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0; \quad (11.27)$$

(ii)  $T_2(\mathbf{x})$  è l'unico polinomio di grado  $\leq 2$  che verifica la (11.27);

(iii) se il segmento  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}] \subset X$  e  $f$  è di classe  $C^1$  in  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$  e due volte differenziabile in  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ , allora esiste  $\xi \in (\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$  tale che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle. \quad (11.28)$$

La parte (iii) è l'analogo, in più dimensioni, della formula di Lagrange per il resto di ordine due; le ipotesi sono certamente verificate se  $f \in C^2$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  che contiene  $\mathbf{x}$ .

#### Dimostrazione

Abbiamo appena dimostrato la parte (i). La dimostrazione di (ii) è uguale a quella del caso  $n = 1$  e la omettiamo. Per provare (iii), osserviamo che le ipotesi consentono di applicare la formula per il resto di Lagrange alla funzione  $\varphi(t)$ : ragionando come prima, si ottiene che esiste  $y \in (0, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$  tale che

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) = \varphi(0) + \varphi'(0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \frac{1}{2}\varphi''(y)(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)^2 \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}\varphi''(y)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2. \end{aligned}$$

Poiché

$$\varphi''(y) = D_{\mathbf{v}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}_0 + y\mathbf{v}) = \langle D^2 f(\mathbf{x}_0 + y\mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle,$$

ponendo  $\xi = \mathbf{x}_0 + y\mathbf{v}$  si ottiene la tesi.

Per determinare il polinomio di Taylor di grado 2 intorno a  $(0, 0)$  della funzione  $(x, y) \mapsto e^{xy} \cos y$  si calcolano le derivate parziali di ordine  $\leq 2$  in  $(0, 0)$ ; alternativamente, si può utilizzare l'unicità del polinomio di Taylor e gli sviluppi di Taylor per funzioni di una variabile: per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$e^{xy} \cos y = (1 + xy + o(xy)) \left( 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \right) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + xy + o(x^2 + y^2)$$

quindi il polinomio cercato è  $1 - \frac{1}{2}y^2 + xy$ . Lo studente controlli che il calcolo diretto produce lo stesso risultato.

#### ESEMPIO 11.16

Ripetendo più volte il procedimento seguito sopra si trova la formula per il polinomio di Taylor di ordine  $m$ .

#### DEFINIZIONE 11.13

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile  $m$  volte in  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in X$ . La funzione

$$T_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_k} - x_{0i_k})$$

si dice **polinomio di Taylor di ordine  $m$  di  $f$  intorno a  $\mathbf{x}_0$** . Se  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , il polinomio di Taylor si dice anche **polinomio di MacLaurin**.

Anche in questo caso il polinomio di Taylor di grado  $m$  di  $f$  intorno a  $\mathbf{x}$  è l'unico polinomio di grado  $\leq m$  le cui derivate parziali fino all'ordine  $m$  in  $\mathbf{x}$  coincidono con quelle di  $f$  in  $\mathbf{x}$ . Il teorema di Peano e la formula di Lagrange continuano a valere nella seguente forma:

#### TEOREMA 11.14

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in X$  e  $T_m(\mathbf{x})$  il polinomio di Taylor di ordine  $m$  intorno a  $\mathbf{x}_0$ .

(i) Se  $f$  è  $m$  volte differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora

$$f(\mathbf{x}) = T_m(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^m) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (11.29)$$

e  $T_m(\mathbf{x})$  è l'unico polinomio di grado  $\leq m$  che verifica la (11.29);

(ii) se il segmento  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$  è contenuto in  $X$  e  $f$  è di classe  $C^{m-1}$  in  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$  e  $m$  volte differenziabile in  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$ , allora esiste  $\xi \in (\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$  tale che

$$f(\mathbf{x}) = T_{m-1}(\mathbf{x}_0) + E_{m-1}(\mathbf{x})$$

dove il resto  $E_{m-1}(\mathbf{x})$  è dato dalla formula

$$\frac{1}{m!} \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}}(\xi) (x_{i_1} - x_{0i_1}) \dots (x_{i_m} - x_{0i_m}).$$

#### Dimostrazione

Determiniamo il polinomio di MacLaurin di ordine 4 di  $\sin(xe^{xy})$ . Ragioniamo come nell'esempio precedente: per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

#### ESEMPIO 11.17



$$\begin{aligned}\sin(xe^{xy}) &= xe^{xy} - \frac{1}{6}x^3e^{3xy} + o(x^4e^{4xy}) \\ &= x\left(1 + xy + \frac{1}{2}(xy)^2 + o((xy)^2)\right) - \frac{1}{6}x^3(1 + 3xy + o(xy)) + o(x^4) \\ &= x + x^2y - \frac{1}{6}x^3 + o((x^2 + y^2)^2)\end{aligned}$$

quindi il polinomio di MacLaurin cercato è  $x + x^2y - x^3/6$ .

**ESERCIZIO 11.11**

Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 con centro  $(1, 2)$  della funzione  $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3$ .

**11.5 Insiemi convessi e funzioni convesse****DEFINIZIONE 11.15**

Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **convesso** se per ogni  $x, y \in A$ , il segmento  $[x, y]$  è contenuto in  $A$ .

Combinazione  
convessa

La definizione è illustrata dalla Figura 11.6. Se  $\theta \in [0, 1]$ , la combinazione lineare  $(1 - \theta)x + \theta y$  di  $x$  e  $y$  viene anche detta **combinazione convessa** di  $x$  e  $y$ ; il segmento  $[x, y]$  in  $\mathbb{R}^n$  è quindi l'insieme di tutte le combinazioni convesse di  $x$  e  $y$ .

**ESEMPIO 11.18**

I sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}$  sono tutti e soli gli intervalli. Il rettangolo  $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$  e il semipiano  $\{(x, y) : x \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$  sono sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}^2$ . Gli intorni sferici  $B_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n$  e le rette sono sottoinsiemi convessi di  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE 11.16**

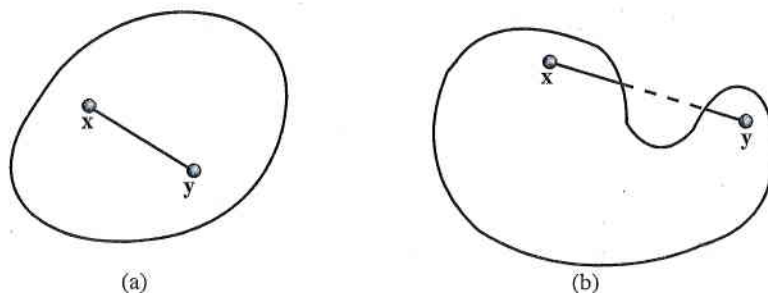
Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . La  $f$  si dice **convessa in  $A$**  se per ogni  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ ,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad \text{per ogni } t \in (0, 1). \quad (11.30)$$

Se vale la (11.30) con  $<$  sostituito a  $\leq$ ,  $f$  si dice **strettamente convessa in  $A$** . La  $f$  si dice **(strettamente) concava in  $A$**  se  $-f$  è (strettamente) convessa, ovvero se la disuguaglianza in (11.30) vale con  $\geq$  ( $>$ ) sostituito a  $\leq$  ( $<$ ).

La convessità dell'insieme  $A$  è necessaria per dar senso alla definizione, in quanto implica che la combinazione convessa  $(1-t)x + ty$  ( $0 < t < 1$ ) appartiene ad  $A$  per ogni  $x, y \in A$ . La condizione (11.30) significa che per ogni  $x \neq y$  la funzione di una variabile  $t \mapsto f((1-t)x + ty)$  è convessa in  $[0, 1]$ .

**Figura 11.6** Insieme convesso (a) e insieme non convesso (b).





A partire da questa osservazione, si possono dedurre alcune proprietà di regolarità delle funzioni convesse analoghe a quelle del Teorema 7.28. Per esempio, dal Teorema 7.28 segue che esistono finiti

$$-\infty < \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t} < +\infty$$

ovvero la prima parte del seguente risultato.

**TEOREMA 11.17**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , convessa nell'insieme convesso e aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora

- (i) in ogni punto  $\mathbf{x} \in A$  le derivate parziali destre e sinistre esistono finite e  $D_{\mathbf{e}_i}^- f(\mathbf{x}) \leq D_{\mathbf{e}_i}^+ f(\mathbf{x})$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;
- (ii)  $f$  è continua in  $A$ ;
- (iii) se  $f$  è derivabile in  $\mathbf{x} \in A$ ,  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$ .

Dimostrazione

La parte (iii) è banale se  $n = 1$ : si ricordi che invece, se  $n > 1$ , una funzione derivabile non è necessariamente differenziabile.

La proprietà che il grafico di una funzione convessa di una variabile si trova sopra la retta tangente al grafico stesso si estende facilmente al caso di più variabili; in particolare, se  $n = 2$ , il grafico si trova sopra il piano tangente.

**TEOREMA 11.18**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in A$  e sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e aperto.

- (i) Se  $f$  è convessa in  $A$  allora

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in A. \quad (11.31)$$

- (ii) Se  $f$  è strettamente convessa in  $A$  allora

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0. \quad (11.32)$$

Dimostrazione

Se inoltre  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $A$ , vale un risultato più forte.

**TEOREMA 11.19**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile nell'insieme convesso e aperto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Allora:

- (i)  $f$  è convessa in  $A$  se e solo se vale la (11.31) per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$ ;
- (ii)  $f$  è strettamente convessa in  $A$  se e solo se vale la (11.32) per ogni  $\mathbf{x}_0 \in A$ .

Dimostrazione

Se inoltre  $f$  è due volte differenziabile si possono usare le derivate parziali di ordine 2 per caratterizzare la convessità di una funzione.

**TEOREMA 11.20**

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  convesso e aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  due volte differenziabile in  $A$ . Allora

- (i)  $f$  è convessa in  $A$  se e solo se  $D^2 f(\mathbf{x})$  è semi-definita positiva per ogni  $\mathbf{x} \in A$ , ovvero se e solo se

$$\langle D^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ e ogni } \mathbf{x} \in A; \quad (11.33)$$

- (ii)  $f$  è strettamente convessa in  $A$  se  $D^2 f(\mathbf{x})$  è definita positiva per ogni  $\mathbf{x} \in A$ , ovvero se

$$\langle D^2 f(\mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0 \quad \text{per ogni } 0 \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ e ogni } \mathbf{x} \in A. \quad (11.34)$$



Infatti, per la (11.28), per ogni  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x} \in A$  esiste una combinazione convessa  $\xi$  di  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$  tale che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\xi)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

e la tesi segue dal Teorema 11.19.

### Dimostrazione

Se  $f$  è due volte differenziabile, per il Teorema di Schwarz la matrice hessiana è simmetrica. Quindi per le proprietà delle forme quadratiche (si veda l'appendice di algebra lineare disponibile sul sito internet dedicato al libro)

$$D^2 f(\mathbf{x}) \text{ è (semi-) definita positiva} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il più piccolo autovalore di} \\ D^2 f(\mathbf{x}) \text{ è positivo (non-negativo).} \end{cases}$$

In particolare, se  $n = 2$  possiamo riformulare il Teorema 11.20 come segue.

### COROLLARIO 11.21

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  convesso e aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  due volte differenziabile in  $A$ . Allora:

(i)  $f$  è convessa in  $A$  se e solo se per ogni  $\mathbf{x} \in A$  risulta

$$\begin{cases} \det D^2 f(\mathbf{x}) = f_{xx}(\mathbf{x})f_{yy}(\mathbf{x}) - f_{xy}^2(\mathbf{x}) \geq 0 \\ f_{xx}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ oppure } f_{yy}(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ oppure } f_{xx}(\mathbf{x}) + f_{yy}(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases}$$

(ii)  $f$  è strettamente convessa in  $A$  se per ogni  $\mathbf{x} \in A$

$$\begin{cases} \det D^2 f(\mathbf{x}) = f_{xx}(\mathbf{x})f_{yy}(\mathbf{x}) - f_{xy}^2(\mathbf{x}) > 0 \\ f_{xx}(\mathbf{x}) > 0 \text{ oppure } f_{yy}(\mathbf{x}) > 0 \text{ oppure } f_{xx}(\mathbf{x}) + f_{yy}(\mathbf{x}) > 0. \end{cases}$$

I criteri corrispondenti per funzioni concave si ottengono scambiando  $f$  con  $-f$ : per esempio, se  $n = 2$ ,  $f$  è concava in  $A$  se e solo se per ogni  $\mathbf{x} \in A$   $D^2 f(\mathbf{x})$  è semi-definita negativa, ovvero se e solo se

$$\begin{cases} \det D^2 f(\mathbf{x}) = f_{xx}(\mathbf{x})f_{yy}(\mathbf{x}) - f_{xy}^2(\mathbf{x}) \leq 0 \\ f_{xx}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ oppure } f_{yy}(\mathbf{x}) \leq 0 \text{ oppure } f_{xx}(\mathbf{x}) + f_{yy}(\mathbf{x}) \leq 0. \end{cases}$$

Si noti che c'è una differenza tra il caso  $n = 1$  e  $n \geq 2$  se  $f$  è due volte differenziabile in  $A$ : se  $n = 1$  l'insieme  $A$  consiste sovente di intervalli nei quali  $f''(x) \geq 0$  oppure  $f''(x) \leq 0$ , ovvero dove  $f$  è convessa o concava; se invece  $n \geq 2$  possono esserci dei sottoinsiemi nei quali  $D^2 f(\mathbf{x})$  non è semi-definita positiva né semi-definita negativa; per esempio, se  $n = 2$ , questo si verifica se

$$f_{xx}(\mathbf{x})f_{yy}(\mathbf{x}) - f_{xy}^2(\mathbf{x}) < 0.$$

### ESEMPIO 11.19

La funzione

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by + c$$

ha matrice hessiana

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix}.$$

Perciò è convessa in  $\mathbb{R}^2$  se e solo se  $4AC - B^2 \geq 0$  e  $A \geq 0$ , è concava in  $\mathbb{R}^2$  se e solo se  $4AC - B^2 \geq 0$  e  $A \leq 0$ , mentre se  $4AC - B^2 < 0$  non è convessa né concava in  $\mathbb{R}^2$ . I prototipi di questi tre casi sono:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \quad D^2f_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_2(x, y) = -x^2 - y^2 \quad D^2f_2(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$f_3(x, y) = -x^2 + y^2 \quad D^2f_3(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(si veda Figura 11.7). Si noti che  $D_{xx}f_3 = -2 > 0$  e  $D_{yy}f_3 = 2 < 0$ ; quindi la funzione  $x \mapsto f_3(x, y)$  è concava mentre la funzione  $y \mapsto f_3(x, y)$  è convessa.

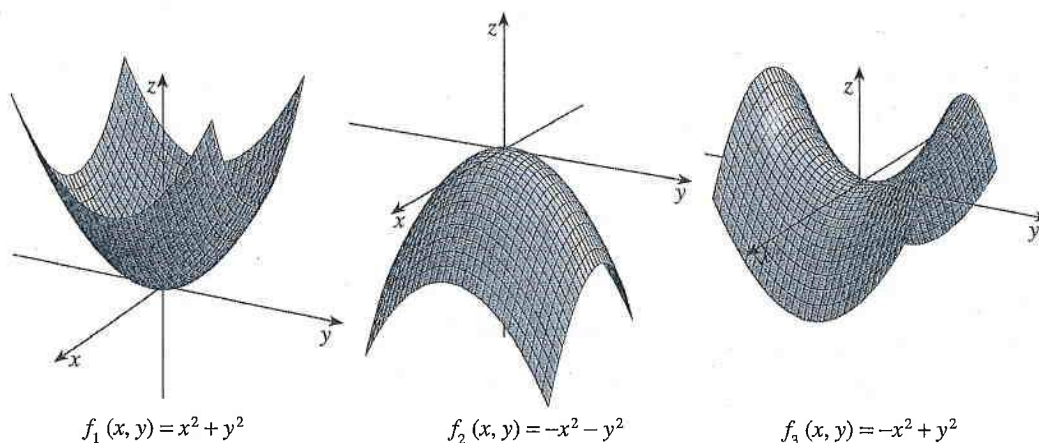


Figura 11.7 I grafici delle funzioni dell'Esempio 11.19.

Per studiare la convessità della funzione  $f(x, y) = xe^{xy}$ , si possono calcolare le derivate parziali di ordine 2:  $f_x = (1 + xy)e^{xy}$  e  $f_y = x^2e^{xy}$ , quindi

$$f_{xx} = y(2 + xy)e^{xy}, \quad f_{yy} = x^3e^{xy}, \quad f_{xy} = f_{yx} = x(2 + xy)e^{xy}$$

e

$$\det D^2f(x, y) = -2x^2(2 + xy)e^{2xy} > 0 \Leftrightarrow xy < -2.$$

Perciò  $f$  è strettamente convessa in

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < -2 \text{ e } x > 0\}$$

e  $f$  è strettamente concava in

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < -2 \text{ e } x < 0\}.$$

Se  $xy > -2$ ,  $f$  non è né convessa né concava in qualunque intorno di  $(x, y)$  (si veda Figura 11.8).

#### ESEMPIO 11.20

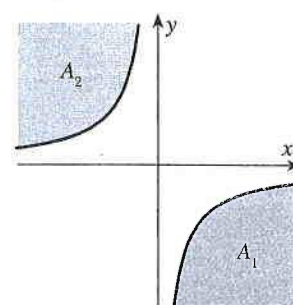


Figura 11.8

Studiare la concavità/convessità delle seguenti funzioni:

- a)  $f(x, y) = -2x^2y + xy^2 + x - y - 1$ ;      c)  $f(x, y) = x^2y^2 + 6y^2$ .  
 b)  $f(x, y) = x^2y^2$ ;

#### ESERCIZIO 11.12



## 11.6 Estremi liberi di funzioni a valori scalari

In questo paragrafo si analizza il problema di determinare eventuali punti di massimo e minimo relativi di una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto, ovvero di determinare i punti di estremo locale *all'interno* del dominio di  $f$ ; tali estremi si dicono anche *estremi liberi* o *non vincolati*.

### DEFINIZIONE 11.22

Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Un punto  $\mathbf{x} \in A$  si dice **punto critico** o **punto stazionario** di  $f$  se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$  e se

$$\nabla f(\mathbf{x}) = 0.$$

Se  $\mathbf{x} \in A$  è un punto di estremo locale di  $f$  nel quale  $f$  è differenziabile, per ogni elemento  $\mathbf{e}_i$  della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  la funzione di una variabile  $\varphi_{\mathbf{e}_i}(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i)$  ha un estremo locale in  $t = 0$ ; quindi

$$\varphi'_{\mathbf{e}_i}(0) = f_{x_i}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

ovvero  $\mathbf{x}$  è un punto critico di  $f$ .

### TEOREMA 11.23

Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Se  $\mathbf{x} \in A$  è un punto di estremo locale di  $f$  e se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$  allora  $\mathbf{x}$  è un punto critico di  $f$ :  $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$ .



Non ogni punto critico di  $f$  è anche punto di estremo, come mostra il seguente esempio.

### ESEMPIO 11.21

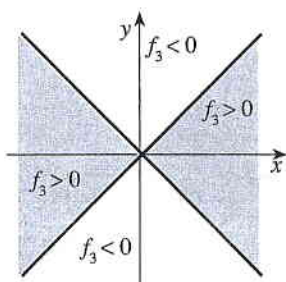


Figura 11.9

Si verifica immediatamente che  $(0, 0)$  è punto critico delle funzioni

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2, \quad f_2(x, y) = -x^2 - y^2, \quad f_3(x, y) = x^2 - y^2.$$

$(0, 0)$  è punto di minimo di  $f_1(x, y)$ :

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 \geq f(0, 0) = 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$(0, 0)$  è punto di massimo di  $f_2(x, y)$ :

$$f_2(x, y) = -x^2 - y^2 \leq f(0, 0) = 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

D'altra parte,  $(0, 0)$  non è punto di estremo locale di  $f_3(x, y)$ , poiché  $f_3(0, 0) = 0$  e ogni intorno di  $(0, 0)$  contiene punti nei quali  $f_3 > 0$  e punti nei quali  $f_3 < 0$ , (si veda Figura 11.9).

Analogamente alle funzioni di una variabile, queste informazioni sono strettamente collegate alle proprietà di convessità. Come abbiamo visto nell'Esempio 11.21, infatti, in qualsiasi intorno di  $(0, 0)$   $f_1$  è strettamente convessa,  $f_2$  è strettamente concava, mentre  $f_3$  non è né convessa né concava; in particolare, anche dalla Figura 11.7 geometricamente si intuisce che  $(0, 0)$  non può essere un punto di estremo locale di  $f_3$ ;  $(0, 0)$  si chiama *punto di sella* di  $f_3$ .

### DEFINIZIONE 11.24

Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$  si dice **punto di sella** di  $f$  se  $\mathbf{x}_0$  è punto critico di  $f$  e se la funzione  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$  ammette valori positivi e negativi in qualsiasi intorno di  $\mathbf{x}_0$ .

Il seguente teorema precisa le considerazioni fatte precedentemente.

**TEOREMA 11.25**

Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $\mathbf{x} \in A$  un punto critico di  $f$ .

- (i) Se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}$  nel quale  $f$  è (strettamente) convessa, allora  $\mathbf{x}$  è un punto di minimo (forte) di  $f$ .  
 (ii) Se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}$  nel quale  $f$  è (strettamente) concava, allora  $\mathbf{x}$  è un punto di massimo (forte) di  $f$ .

Se inoltre  $f$  è due volte differenziabile in  $\mathbf{x}$ , allora:

- (iii) se  $D^2f(\mathbf{x})$  è definita positiva,  $\mathbf{x}$  è un punto di minimo forte di  $f$ ;  
 (iv) se  $D^2f(\mathbf{x})$  è definita negativa,  $\mathbf{x}$  è un punto di massimo forte di  $f$ ;  
 (v) se  $D^2f(\mathbf{x})$  non è semi-definita positiva né semi-definita negativa,  $\mathbf{x}$  è un punto di sella di  $f$ ;  
 (vi) se  $D^2f(\mathbf{x})$  è semi-definita positiva o semi-definita negativa,  $\mathbf{x}$  può essere un punto di massimo o minimo, oppure un punto di sella.

Dimostrazione

Nel caso particolare di  $\mathbb{R}^2$ , ricordando il Teorema 11.20 e il Corollario 11.21, si ottiene il seguente risultato.

**COROLLARIO 11.26**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, e sia  $\mathbf{x} \in A$  un punto critico di  $f$ .

- (i) se  $\det D^2f(\mathbf{x}) > 0$  e  $f_{xx}(\mathbf{x}) > 0$ , allora  $\mathbf{x}$  è un punto di minimo forte;  
 (ii) se  $\det D^2f(\mathbf{x}) > 0$  e  $f_{xx}(\mathbf{x}) < 0$ , allora  $\mathbf{x}$  è un punto di massimo forte;  
 (iii) se  $\det D^2f(\mathbf{x}) < 0$  allora  $\mathbf{x}$  è un punto di sella.

Nel caso in cui  $\det D^2f(\mathbf{x}) = 0$ , il corollario non fornisce alcuna informazione e bisogna procedere utilizzando la definizione.

Consideriamo di nuovo la funzione dell'Esempio 11.19:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + ax + by + c.$$

$f$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^2$  e

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2Ax + By + a \\ Bx + 2Cy + b \end{pmatrix}.$$

Se  $4AC - B^2 \neq 0$ , l'unico punto critico di  $f$  è

$$\mathbf{x}_0 := \left( \frac{bB - 2Ca}{4AC - B^2}, \frac{aB - 2Ab}{4AC - B^2} \right)$$

cioè l'unico eventuale punto di estremo locale di  $f$  è  $\mathbf{x}_0$ . Dalle proprietà di convessità ottenute nell'Esempio 11.19 segue che:

- $\mathbf{x}_0$  è punto di minimo se  $4AC - B^2 > 0$  e  $A > 0$ ;
- $\mathbf{x}_0$  è punto di massimo se  $4AC - B^2 > 0$  e  $A < 0$ ;
- $\mathbf{x}_0$  è punto di sella se  $4AC - B^2 < 0$ .

**ESEMPIO 11.22**

Sia

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 8 \quad \text{per } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Allora  $f$  è due volte differenziabile in  $\mathbb{R}^2$  e i punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x^3 + 2xy^2 - 4x = 0 \\ f_y(x, y) = 2x^2y + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 2x(2x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ 2y(x^2 + 2) = 0. \end{cases}$$

**ESEMPIO 11.23**



Poiché  $x^2 + 2 \neq 0$ , si ha  $y = 0$ , quindi la prima equazione diventa  $4x(x^2 - 1) = 0$  ovvero  $x = 0, \pm 1$ . I punti critici sono quindi  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ . Determiniamo la matrice hessiana:

$$D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 4 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene

$$D^2f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D^2f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

perciò  $(0, 0)$  è un punto di sella e  $(\pm 1, 0)$  sono punti di minimo.

### ESEMPIO 11.24

I punti critici della funzione

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x - y^2 + 1)(x^2 + y^2 - 1) \\ &= x^3 + xy^2 - x^2y^2 - y^4 + x^2 + 2y^2 - x - 1 \end{aligned}$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3x^2 + y^2 - 2xy^2 + 2x - 1 = 0 \\ f_y(x, y) = 2xy - 2x^2y - 4y^3 + 4y = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy^2 + 2x - 1 = 0 \\ 2y(x - x^2 - 2y^2 + 2) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2xy^2 + 2x - 1 = 0 \\ 2y^2 = 2 + x - x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x(2x^2 + 3x + 1) = 0 \\ 2y^2 = 2 + x - x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ o } x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò i punti critici sono

$$(-1, 0), \left(\frac{1}{3}, 0\right), (0, 1), (0, -1), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Nella Figura 11.10 abbiamo indicato i sei punti critici e l'insieme nel quale  $f$  è positiva; si osservi che  $f$  si annulla sulla circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 1$  e sulla parabola di equazione  $x = y^2 - 1$ . Si noti che  $f$  cambia segno in ogni intorno dei punti critici  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ , quindi  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  sono punti di sella.

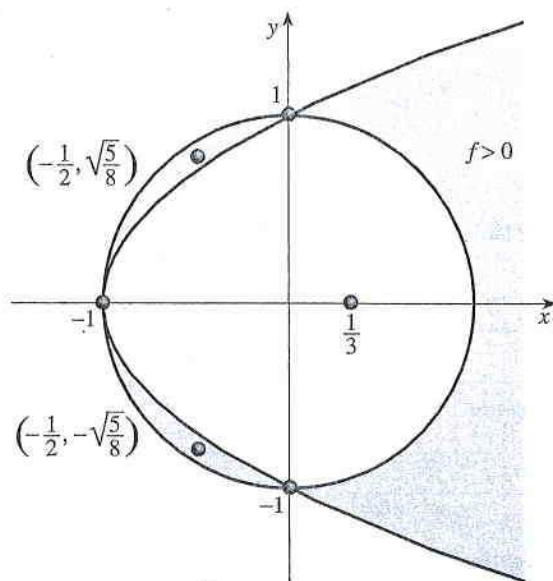
Sia

$$A := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq y^2 - 1, y \geq 0\},$$

ovvero  $A$  è l'insieme nel secondo quadrante dove  $f \geq 0$ . Si osservi che  $A$  è compatto quindi, per la continuità di  $f$ , esiste  $\max_A f$ . Poiché  $f = 0$  su  $\partial A$  e  $f > 0$  in  $\overset{\circ}{A}$ , il massimo di  $f$  in  $A$  è positivo e il punto di massimo si trova in  $\overset{\circ}{A}$ . Perciò il punto di massimo è un punto critico e deve coincidere con l'unico punto critico in  $\overset{\circ}{A}$ , ovvero  $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$  è un punto di massimo. Analogamente si dimostra che  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$  è un punto di massimo e  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$



Figura 11.10



è un punto di minimo. Si può anche usare la matrice hessiana per determinare la natura dei seguenti punti critici:

$$D^2f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{40}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ è punto di minimo};$$

$$D^2f(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 1) \text{ è punto di sella};$$

$$D^2f(0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, -1) \text{ è punto di sella};$$

$$D^2f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & \sqrt{10} \\ \sqrt{10} & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow -\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \text{ è punto di massimo};$$

$$D^2f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\sqrt{10} \\ -\sqrt{10} & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \text{ è punto di massimo}.$$

Si noti però che la matrice hessiana nel punto  $(-1, 0)$  non dà informazioni sufficienti:

$$D^2f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det D^2f(-1, 0) = 0.$$

In quest'ultimo caso è perciò indispensabile ragionare come abbiamo fatto.

Determinare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni:

a)  $f(x, y) = 16x^2 + y - \frac{1}{4}xy^4$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;

b)  $f(x, y) = e^x \left( x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y \right)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;

c)  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;

d)  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + y^2 - 6y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ;

e)  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}(x + y + 4)^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

### ESERCIZIO 11.13

**ESERCIZIO 11.14**

Studiare il grafico della funzione  $g(s) = \frac{s}{1+s^2}$  per  $s \geq 0$  e determinare i punti critici e i punti di estremo locale della funzione  $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2}$  (lo studente cerchi di capire come è fatto il grafico di  $f$ ).

**ESERCIZIO 11.15**

Trovare il punto critico  $(x_0, y_0)$  di  $f(x, y) = (x + y + 1)(x - y + 1)$ . Studiare il segno di  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  per stabilire se  $(x_0, y_0)$  è punto di estremo di  $f$ .

**ESERCIZIO 11.16**

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e limitato e sia  $f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  in  $E$  e continua in  $\bar{E}$ . Sia

$$f < 0 \text{ in } E, \quad f = 0 \text{ su } \partial E.$$

Se  $f$  ha un unico punto critico in  $E$ , determinarne la natura.

**ESERCIZIO 11.17**

Sia  $f$  di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$  tale che

$$f(x, y) > 0 \quad \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \lim_{(x, y) \rightarrow \infty} f(x, y) = 0.$$

Se  $f$  ha un unico punto critico in  $\mathbb{R}^2$ , stabilirne la natura.

**ESERCIZIO 11.18**

Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e stabilirne la natura:

(a)  $f(x, y) = axy - x^3y - bxy^3 = xy(a - x^2 - by^2) \quad (a, b > 0);$

(b)  $f(x, y) = e^x \left( x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y \right).$

È possibile arrivare ai risultati senza utilizzare la matrice hessiana?

## 11.7 Derivabilità e differenziabilità di funzioni a valori vettoriali

Per funzioni da  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ , i concetti di limite e continuità sono già stati introdotti nel Paragrafo 10.3. Qui ci si occupa della (facile) estensione dei concetti di derivabilità e differenziabilità al caso  $m > 1$ . In tutto il paragrafo, le  $m$  componenti di una funzione  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  si indicano con  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ .

**DEFINIZIONE 11.27**

Una funzione  $f: \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice derivabile lungo la direzione  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{x} \in X$  se esistono  $D_{\mathbf{v}}f_1(\mathbf{x}), \dots, D_{\mathbf{v}}f_m(\mathbf{x})$ ; in tal caso si scrive

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{f} = (D_{\mathbf{v}}f_1, \dots, D_{\mathbf{v}}f_m).$$

Una funzione da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  è lineare se e solo se può essere rappresentata con una matrice di ordine  $m \times n$ . Quindi il concetto di miglior approssimazione conduce alla seguente definizione di differenziabilità.

**DEFINIZIONE 11.28**

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  si dice differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in X$  se esiste una matrice  $M$  di ordine  $m \times n$  tale che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + M(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0. \quad (11.35)$$

Analogamente al caso dei limiti e della continuità, dalla (11.35) segue che anche per la differenziabilità è possibile ragionare sulle componenti  $f_1, \dots, f_m$ , ovvero

$$f \text{ è differenziabile in } \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m \text{ sono differenziabili in } \mathbf{x}_0.$$

In particolare continuano a valere le conclusioni del Teorema 11.4: se  $f$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , allora  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ , esistono le derivate parziali  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  per  $k = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + J_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (11.36)$$

dove  $J_f(\mathbf{x}_0)$  è la **matrice jacobiana**, ovvero la matrice di ordine  $m \times n$  così definita:

$$J_f(\mathbf{x}_0) = M = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \quad (11.37)$$

Matrice jacobiana

La matrice jacobiana si indica anche con

$$Df(\mathbf{x}), \quad f'(\mathbf{x}).$$

Il caso  $n = 1$  e  $m > 1$  è quello delle curve parametrizzate:  $\gamma(t)$  per  $t \in I$ . In tal caso la matrice jacobiana si riduce al vettore "velocità":

$$\gamma'(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_m(t)).$$

Si noti anche che una curva parametrizzata  $\mathbf{x}$  è differenziabile in  $t$  se e solo se tutte le sue componenti  $x_i$  sono derivabili in  $t$ , ovvero se e solo se  $\mathbf{x}$  è derivabile in  $t$ .

Ragionando sempre sulle componenti, è facile vedere che continuano a valere molti dei risultati ottenuti nel caso  $m = 1$ . Per esempio, la continuità di tutte le derivate parziali (in tal caso  $f$  si dice di classe  $C^1$ ) implica la differenziabilità. Anche i polinomi di Taylor si definiscono componente per componente: a tale proposito va sottolineato che, mentre continua a valere il teorema di Peano (si veda il Teorema 11.14 (i)), nel caso vettoriale *non* valgono più il teorema del valor medio (si veda Teorema 11.8) e la formula di Taylor con il resto secondo Lagrange (si veda il Teorema 11.14 (ii)). Il seguente controesempio evidenzia, nel caso  $n = 1, m = 2$ , quanto appena affermato.

Sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) := (\cos t, \sin t)$  per  $t \in \mathbb{R}$ . Se valesse il teorema del valor medio, esisterebbe  $t \in (0, 2\pi)$  tale che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma(2\pi) - \gamma(0) = 2\pi\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

ovvero  $\sin t = 0$  e  $\cos t = 0$ . Chiaramente tale  $t$  non esiste, quindi il teorema del valor medio non vale.

Questo fenomeno può essere facilmente compreso pensando a  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$  come alla traiettoria e alla velocità di un punto materiale: per esempio, come mostra la Figura 11.11, la curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t/3)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , connette due punti sulla retta  $(x, y) = (1, 0)$ , ma la velocità  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1/3)$  non è mai parallela a tale retta poiché  $(-\sin t, \cos t) \neq (0, 0)$  per qualunque  $t$ .

Infine, procedendo come nella dimostrazione della regola della catena nel caso  $n = m = 1$ , si ottiene il seguente importante risultato.

#### ESEMPIO 11.25

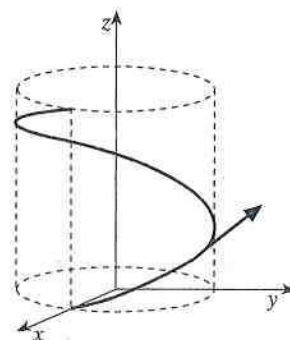


Figura 11.11 Un'elica cilindrica e un suo vettore tangente.



## Dimostrazione

## TEOREMA 11.29

Siano  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  aperti e

$$f: B \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad g: A \rightarrow B.$$

Se  $g$  è differenziabile in  $\mathbf{x} \in A$  e  $f$  è differenziabile in  $g(\mathbf{x})$ , allora la funzione composta  $f \circ g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$  è differenziabile in  $\mathbf{x}$  e

$$J_{f \circ g}(\mathbf{x}) = J_f(g(\mathbf{x})) \cdot J_g(\mathbf{x}). \quad (11.38)$$

Si osservi che la matrice  $J_g(\mathbf{x})$  è di ordine  $m \times n$ ,  $J_f(g(\mathbf{x}))$  di ordine  $k \times m$ , e il loro prodotto è di ordine  $k \times n$ .

È utile notare che la (11.38) è equivalente alla seguente formula esplicita per le derivate parziali delle componenti della funzione composta  $f \circ g$ : per ogni  $i = 1, \dots, k$  e  $j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial (f \circ g)_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{\ell=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_\ell}(g(\mathbf{x})) \frac{\partial g_\ell}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (11.39)$$

Si osservi che nel caso  $n = k = 1$ , si ottiene una generalizzazione della (11.15) per il calcolo delle derivate direzionali:

$$\frac{df(\gamma(t_0))}{dt} = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle.$$

## ESEMPIO 11.26

Sia  $\varphi(t) = f(\cos(2t), 2 \sin(3t))$  per  $t \in \mathbb{R}$ , dove  $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$  per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Allora

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f_x(\cos(2t), 2 \sin(3t))(-2 \sin(2t)) + f_y(\cos(2t), 2 \sin(3t))(6 \cos(3t)) = \\ &= \frac{-2 \sin(2t) \cos(2t) + 12 \sin(3t) \cos(3t)}{\sqrt{1 + \cos^2(2t) + 4 \sin^2(3t)}} \quad \text{per } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 11.19

Sia  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Determinare  $J_f(x, y)$  e trovare le costanti  $a, b, c$  e  $d$  tali che per  $(x, y) \rightarrow (1, \pi)$ ,

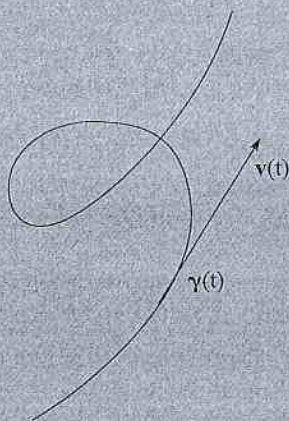
$$\begin{cases} e^x \cos y = -e + a(x-1) + b(y-\pi) + o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-\pi)^2}) \\ e^x \sin y = c(x-1) + d(y-\pi) + o(\sqrt{(x-1)^2 + (y-\pi)^2}). \end{cases}$$



## FILO ROSSO Campo magnetico e forza di Lorentz

Questo capitolo è fortemente motivato dalla fisica. La scelta di definire matematicamente una *curva* come una *funzione* continua  $\gamma$  da un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}^n$  è motivata dall'esempio di una piccola particella che viaggia nel piano ( $n = 2$ ) o nello spazio ( $n = 3$ ) in un intervallo temporale  $I$ , cioè

$\gamma(t)$  è e la posizione della particella al tempo  $t \in I$ .



Se  $\gamma$  è di classe  $C^1$  è naturale interpretare la sua derivata,  $\gamma'(t)$ , come la velocità,  $\mathbf{v}(t)$ , della particella al tempo  $t$ . Questo mette in evidenza il "carattere dinamico" della definizione di curva.

Approfondiamo ulteriormente l'analogia tra la matematica e la fisica nel caso  $n = 3$ . Una funzione continua,  $\mathbf{F} : X \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (anche chiamata *campo vettoriale*) può essere utilizzata per interpretare il vettore  $\mathbf{F}(\gamma(t))$  come una *forza esercitata sulla particella al tempo t*. Nella fisica il *lavoro compiuto dalla forza F nell'intervallo temporale*  $I = [t_0, t_1]$  è definito come l'integrale

$$L := \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

La forza si dice *conservativa in  $\mathbb{R}^3$*  se esiste una funzione  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , il *potenziale di F in X*, tale che

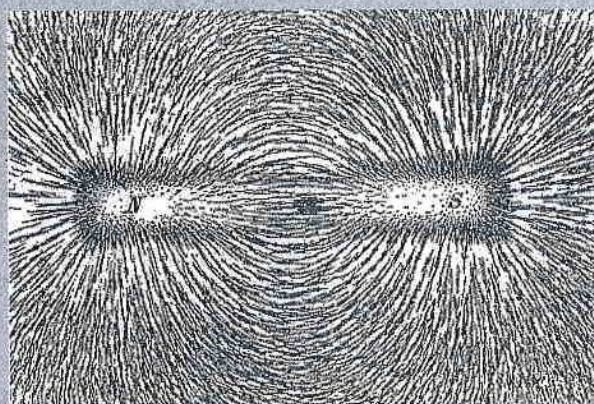
$$\mathbf{F} = \nabla U \quad \text{in } X.$$

In tal caso il lavoro compiuto dalla forza dipende solo dai punti estremi della traiettoria della particella:

$$L = U(\gamma(t_1)) - U(\gamma(t_0))$$

(nella fisica si richiede  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , ma il segno di  $U$  è matematicamente irrilevante). In questo capitolo vedremo come i concetti fisici di lavoro e forza conservativa hanno motivato le definizioni matematiche di *integrale curvilineo di seconda specie* e di *forma differenziale esatta*.

Gli esempi più classici di campi conservativi sono il campo gravitazionale e il campo elettrostatico generati, rispettivamente, da una massa o una carica puntiformi. Il più noto esempio di campo non conservativo è l'*induzione magnetica* (o campo magnetico)  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ : matematicamente, l'induzione magnetica è una funzione continua da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$ ; fisicamente, è il campo vettoriale che dà conto dell'azione che il campo magnetico esercita su una carica elettrica puntiforme o su un (infinitesimale) ago magnetico. Nella figura, della limatura di ferro è orien-



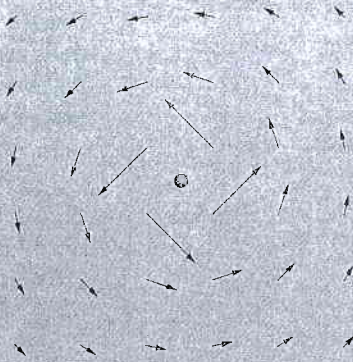
tata da un dipolo magnetico, rendendo visibile il campo  $\mathbf{B}$ . Come è noto, la corrente elettrica genera campi magnetici: ad esempio, un filo conduttore rettilineo e indefinito percorso da una corrente  $i$ , che



pensiamo coincidere con l'asse  $z$  (uscendo da questo foglio), genera il campo magnetico

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{i\mu_0}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(la legge di Biot-Savart): vedremo negli Esempi 12.12 e 12.15 che tale campo non è conservativo.



Consideriamo ora una particella con una carica elettrica  $q$  che si muove nello spazio in un campo ma-

gnético costante nel tempo. La particella ha quindi posizione  $\gamma(t)$  e velocità  $\mathbf{v}(t)$ . Al tempo  $t$  l'induzione magnetica esercita sulla carica la *forza di Lorentz*:

$$\mathbf{F}_{\text{Lorentz}} = q\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{B}(\gamma(t))$$

(qui  $\wedge$  indica il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ ). Il lavoro compiuto dalla forza di Lorentz nell'intervallo temporale  $[t_0, t_1]$  è definito da  $L_{\text{Lorentz}} = \int_{t_0}^{t_1} \langle \mathbf{F}_{\text{Lorentz}}, \mathbf{v} \rangle dt$  ed essendo  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}$  ortogonali tra loro per ogni  $t \in [t_0, t_1]$ , si ha che  $\langle \mathbf{F}_{\text{Lorentz}}, \mathbf{v} \rangle = 0$  in  $[t_0, t_1]$ , ovvero

$$L_{\text{Lorentz}} = 0.$$

Perciò si sarebbe tentati di definire  $\mathbf{F}$  come un "campo conservativo". Tuttavia questa affermazione è priva di senso: perché? Semplicemente perché  $\mathbf{F}$  non è un campo vettoriale: non è definito, come  $\mathbf{B}$ , una volta per tutte, ma *dipende dalla traiettoria e dalla velocità della carica*.

## 12.1 Curve in $\mathbb{R}^n$

Nel Paragrafo 10.3.3 è stato introdotto il concetto di curva in  $\mathbb{R}^n$  come una funzione *continua* da un *intervallo* in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ricordiamo anche che il sostegno di  $\gamma$  è l'insieme immagine,  $\gamma(I)$ , e che le equazioni  $\mathbf{x} = \gamma(t)$  ( $t \in I$ ) si dicono equazioni parametriche della curva. Se  $I = [a, b]$ , i punti  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  sono gli estremi della curva  $\gamma$ .

### DEFINIZIONE 12.1

Una curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice

- (i) **chiusa** se  $I = [a, b]$  e  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ;
- (ii) **semplice** se è iniettiva in  $I$  o, nel caso di una curva chiusa (con  $I = [a, b]$ ), se è iniettiva in  $[a, b]$ ;
- (iii) **piana** se  $n = 2$ .

Un caso particolare di curva semplice e piana è quello di una **curva cartesiana**, ovvero di una curva della forma

$$t \mapsto (t, f(t)), \quad t \in I \quad \text{oppure} \quad t \mapsto (f(t), t), \quad t \in I$$

dove  $f$  è una funzione continua da  $I$  in  $\mathbb{R}$ . In questo caso il sostegno coincide con il grafico di  $f$ .

Ogni curva semplice induce una *orientazione* del proprio sostegno, cioè il verso in cui  $\gamma(t)$  percorre il sostegno all'aumentare di  $t$ :  $\mathbf{x}_1 = \gamma(t_1)$  precede  $\mathbf{x}_2 = \gamma(t_2)$  se  $t_1 < t_2$ . L'orientazione del sostegno di una curva si indica con frecce (si veda l'esempio seguente).

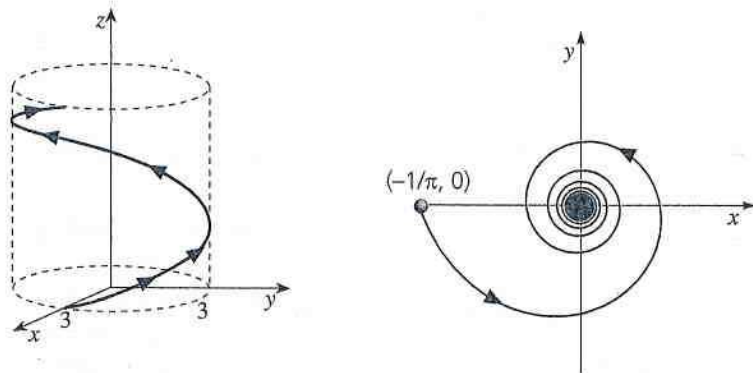
Curva cartesiana

Orientazione



**ESEMPIO 12.1**

- a) La curva  $(5 \cos t, 5 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , è piana, semplice e chiusa, e il suo sostegno è la circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 5. Le curve  $(5 \cos t, 5 \sin t)$ ,  $t \in [0, 6\pi]$ , e  $(5 \cos(3t), 5 \sin(3t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  sono piane e chiuse, hanno lo stesso sostegno, ma non sono semplici: la circonferenza è percorsa tre volte.
- b) La curva  $(3 \cos t, 3 \sin t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è semplice, non è chiusa e ha come sostegno un'elica infinita contenuta nel cilindro verticale  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9\}$ .
- c) La curva  $(\varphi^{-1} \cos \varphi, \varphi^{-1} \sin \varphi)$ ,  $\varphi \geq \pi$ , è semplice e ha come sostegno una spirale infinita che si concentra nell'origine:  $(\varphi^{-1} \cos \varphi, \varphi^{-1} \sin \varphi) \rightarrow (0, 0)$  per  $\varphi \rightarrow +\infty$ .



**Figura 12.1** Il sostegno delle curve dell'Esempio 12.1b e 12.1c, e la loro orientazione.

Nell'ultimo esempio  $\varphi$  e  $\rho = \varphi^{-1}$  sono le *coordinate polari* della curva. In generale, data  $\rho \in C(I)$ ,  $\rho$  e  $\varphi$  si dicono **coordinate polari** della curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\gamma(\varphi) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi)$ ,  $\varphi \in I$ .

Come visualizzato in Figura 12.2, si può dimostrare che il sostegno di una curva piana, semplice e chiusa divide il piano in due insiemi aperti e connessi, di cui uno è limitato e si chiama **interno** della curva, e l'altro è illimitato e si chiama **esterno** della curva. Ciò induce la seguente definizione.

Coordinate polari di una curva

**DEFINIZIONE 12.2**

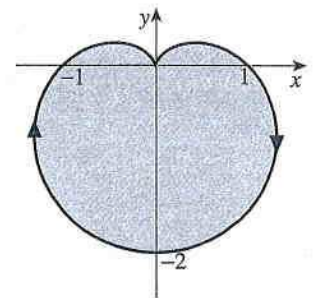
Una curva  $\gamma$  piana, semplice e chiusa si dice **curva di Jordan**. Una curva di Jordan si dice **orientata positivamente** (negativamente) se  $\gamma(t)$  percorre il sostegno in senso antiorario (orario), ovvero tenendo l'interno della curva a sinistra.

La curva

$$\gamma(t) = ((1 + \sin t) \cos t, -(1 + \sin t) \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

è una curva di Jordan orientata negativamente: si tratta di una cardiode (la Figura 12.2 motiva il nome).

**ESEMPIO 12.2**



**Figura 12.2** L'interno di una cardiode orientata negativamente.

Sia  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ . Se le  $n$  funzioni  $\gamma_k$  sono derivabili in  $t_0$ , allora

$$\gamma_k(t) = \gamma_k(t_0) + \gamma'_k(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) \text{ per } t \rightarrow t_0 \text{ per ogni } k = 1, \dots, n.$$

Introducendo il vettore

$$\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0)),$$

detto **derivata** o **velocità** della curva in  $t_0$ , la formula precedente si può riscrivere in forma compatta come

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) \text{ per } t \rightarrow t_0. \quad (12.1)$$

Ciò motiva la seguente definizione (equivalente a quella data nel Paragrafo 11.7 per generiche funzioni a valori vettoriali):  $\gamma$  si dice **differenziabile** in  $t_0$  se le  $n$  funzioni  $\gamma_k$  sono derivabili in  $t_0$ . In tal caso vale la (12.1) e, se  $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , la retta di equazioni

Retta tangente  
a una curva

parametriche  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(t_0) + \boldsymbol{\gamma}'(t_0)(t - t_0)$  è quella di miglior approssimazione lineare per  $t \rightarrow t_0$ . Tale retta si dice **retta tangente** al sostegno della curva in  $\boldsymbol{\gamma}(t_0)$  o anche, per brevità, **retta tangente a  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $t_0$** . Infatti, se  $\boldsymbol{\gamma}'(t_0) \neq \mathbf{0}$  allora

$$\left\| \frac{\boldsymbol{\gamma}(t) - \boldsymbol{\gamma}(t_0)}{t - t_0} \right\| \rightarrow \|\boldsymbol{\gamma}'(t_0)\| \neq 0 \quad \text{per } t \rightarrow t_0$$

e quindi

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t_0) + \boldsymbol{\gamma}'(t_0)(t - t_0) + o(\|\boldsymbol{\gamma}(t) - \boldsymbol{\gamma}(t_0)\|) \quad \text{per } t \rightarrow t_0. \quad (12.2)$$

Perciò il vettore velocità  $\boldsymbol{\gamma}'(t)$  si dice anche **vettore tangente**; se esso non è zero, il corrispondente versore si dice **versore tangente**:

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\boldsymbol{\gamma}'(t)}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|} \quad \text{se } \boldsymbol{\gamma}'(t) \neq \mathbf{0} \quad (12.3)$$

(si veda Figura 12.3). Si dice che  $\boldsymbol{\gamma}$  è di classe  $C^k$  in  $I$  (e si scrive  $\boldsymbol{\gamma} \in C^k(I)$ ),  $k \geq 0$ , se lo sono le  $n$  funzioni  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ .

Le curve di classe  $C^1$  per le quali il versore tangente è ben definito in ogni punto si chiamano **regolari**.

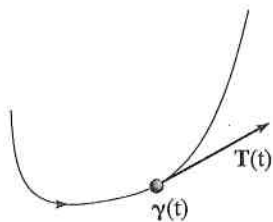


Figura 12.3

#### DEFINIZIONE 12.3

Una curva  $\boldsymbol{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **regolare** se  $\boldsymbol{\gamma} \in C^1(I)$  e  $\boldsymbol{\gamma}'(t) \neq \mathbf{0}$  per ogni  $t \in I$ .



Come mostra il seguente esempio, se  $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{0}$  la retta tangente può non esistere.

#### ESEMPIO 12.3

Sia  $\boldsymbol{\gamma}$  la curva piana di equazioni parametriche

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La curva è di classe  $C^1$  e  $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (2t, 3t^2) \neq (0, 0)$  se e solo se  $t \neq 0$ . Se  $t_0 \neq 0$ , la retta tangente a  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $(x(t_0), y(t_0))$  ha equazioni parametriche

$$x = t_0^2 + 2t_0(t - t_0), \quad y = t_0^3 + 3t_0^2(t - t_0) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Come mostra la Figura 12.4a, la retta tangente a  $\boldsymbol{\gamma}$  nell'origine  $(0, 0)$  non esiste.

Si noti che la curva  $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t^6, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è anch'essa di classe  $C^1$  con  $\boldsymbol{\gamma}'(0) = \mathbf{0}$ , ma in questo caso la retta tangente al sostegno della curva in  $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)$  esiste: basta osservare che la curva  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (t^2, t)$  ha lo stesso sostegno ed è regolare; in particolare  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(0) = (0, 1)$  (si veda Figura 12.4b).

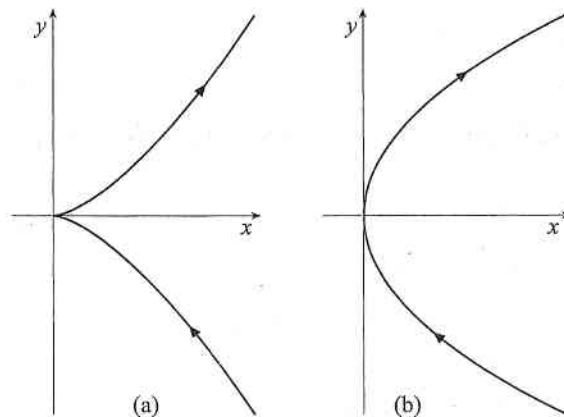


Figura 12.4 I sostegni delle curve dell'Esempio 12.3.

La seguente regola della catena generalizza la (11.15) per il calcolo delle derivate direzionali.



**TEOREMA 12.4**

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , e sia

$$\gamma : [a, b] \rightarrow X$$

tale che  $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$  e  $\gamma$  è derivabile in  $t_0$ . Allora la funzione composta  $f(\gamma(t))$  da  $I$  in  $\mathbb{R}$  è derivabile in  $t_0$  e

$$\frac{df(\gamma(t_0))}{dt} = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \gamma'(t_0) \rangle. \quad (12.4)$$

Omettiamo la dimostrazione, molto simile a quella della regola della catena considerata nel Capitolo 7 (che, appunto, era basata sul concetto di miglior approssimazione lineare).

Se la curva è due volte differenziabile in  $t$ , il vettore  $\gamma''(t)$  si dice **vettore accelerazione**. Le norme  $\|\gamma'(t)\|$  e  $\|\gamma''(t)\|$  si dicono, rispettivamente, **velocità** e **accelerazione scalare**. Infine introduciamo il concetto di curva di classe  $C^1$  a tratti e regolare a tratti.

**DEFINIZIONE 12.5**

Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice di classe  $C^1$  a tratti (**regolare a tratti**) se esiste una suddivisione  $\{t_0, \dots, t_N\}$  di  $[a, b]$  tale che la restrizione di  $\gamma$  all'intervallo  $[t_{i-1}, t_i]$  è di classe  $C^1$  (regolare) per ogni  $i = 1, \dots, N$ . In tal caso  $\gamma$  si dice anche **unione delle  $N$  curve**  $\gamma_i := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  e si scrive

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^N \gamma_i.$$

Determinare i valori di  $t$  per cui il vettore velocità delle seguenti curve si annulla:

a)  $\gamma(t) = (t^3 + t^4, \cos(\pi t/2)), \quad -2 \leq t \leq 2;$

b)  $\gamma(t) = (1 + \sin t) \cdot (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$  (si veda l'Esempio 12.2).

Trovare un'equazione della retta tangente alla curva (a) in  $\gamma(-1) = (0, 0)$ .

**ESERCIZIO 12.1****12.1.1 Cambiamento di parametro**

Risulterà utile considerare classi di curve che si ottengono l'una dall'altra attraverso opportuni cambiamenti di variabile.

**DEFINIZIONE 12.6**

Due curve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  si dicono **equivalenti** se esiste una funzione biiettiva  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  tale che

$$\varphi \in C^1(\tilde{I}), \quad \varphi'(\tau) \neq 0 \quad \text{per ogni } \tau \in \tilde{I}$$

e

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \quad \text{se } \tau \in \tilde{I}.$$

In tal caso  $\tau \mapsto t = \varphi(\tau)$  si dice **cambiamento di parametrizzazione**. Se

$$\varphi'(\tau) > 0 \quad \text{per ogni } \tau \in \tilde{I}$$

allora si dice che  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  hanno lo **stesso verso**; se viceversa  $\varphi'(\tau) < 0$  per ogni  $\tau \in \tilde{I}$ , allora si dice che  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  hanno **verso opposto**.



In altre parole, due curve sono equivalenti se si ottengono l'una dall'altra attraverso un cambiamento di parametrizzazione regolare e strettamente monotono: se è crescente le due curve hanno lo stesso verso, altrimenti hanno verso opposto. Chiaramente due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno.

In particolare, data una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la curva  $\tilde{\gamma} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n$  data da  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(-t)$  è equivalente a  $\gamma$  e ha verso opposto; indicheremo tale curva con il simbolo  $\gamma^-$ .

**ESEMPIO 12.4**

Le curve

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (\cos t, \sin t), & t \in [-\pi, 0], \\ \gamma_2(t) &= (\cos(2t), \sin(2t)), & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],\end{aligned}$$

sono curve equivalenti con lo stesso verso. La curva

$$\gamma_3(t) = (\cos t, -\sin t), \quad t \in [0, \pi]$$

è equivalente alle precedenti ma ha verso opposto. Si osservi che  $\gamma_3(t) = (\cos(-t), \sin(-t))$  con  $t \in [0, \pi]$ , quindi  $\gamma_3 = \gamma_1^-$ .

**ESERCIZIO 12.2**

- Determinare  $A \in \mathbb{R}$  in modo tale che le curve  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , e  $\tilde{\gamma}(t) = (At - 1, 4t^2 - 4t + 1)$ ,  $t \in [1/A, 2/A]$ , siano equivalenti;
- date due curve equivalenti  $\gamma_1 \in C^1(I_1)$  e  $\gamma_2 \in C^1(I_2)$ , è vero che  $\gamma_1$  è regolare se e solo se lo è  $\gamma_2$ ?
- dire se le curve  $\gamma(t) = (t^6, t^3)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , e  $\tilde{\gamma}(t) = (t^2, t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , sono equivalenti (si veda l'Esempio 12.3).

**12.1.2 Integrabilità di funzioni vettoriali**

La nozione di *integrabilità* si estende facilmente al caso vettoriale.

**DEFINIZIONE 12.7**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Se  $f_i \in \mathcal{R}(a, b)$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ,  $f$  si dice **integrabile (secondo Riemann) in  $[a, b]$**  e si scrive

$$\int_a^b f(t) dt := \left( \int_a^b f_1(t) dt, \dots, \int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Inoltre, come si può facilmente verificare, continuano a valere tutte le proprietà dell'integrale note nel caso scalare. In particolare rimane valido il **teorema fondamentale del calcolo integrale**: se  $f \in C^1([a, b])$  allora

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t) dt &= \left( \int_a^b f_1'(t) dt, \dots, \int_a^b f_n'(t) dt \right) \\ &= (f_1(b) - f_1(a), \dots, f_n(b) - f_n(a)) = f(b) - f(a).\end{aligned}\tag{12.5}$$

Per esempio, se  $\gamma(t)$  rappresenta la posizione nello spazio di un punto materiale di cui è nota la posizione iniziale,  $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ , e il vettore velocità

$$\gamma'(t) = (4t + 9t^2, 1 - 4t + 4t^3, 5 \sin(\pi t)), \quad t \geq 0$$

allora la sua posizione al tempo  $t = 2$  è data da

$$\begin{aligned}\gamma(2) &= \int_0^2 (4t + 9t^2, 1 - 4t + 4t^3, 5 \sin(\pi t)) dt \\ &= (8 + 24, 2 - 8 + 16, 0) = (32, 10, 0).\end{aligned}$$

Un'altra importante proprietà è la seguente disuguaglianza.

**TEOREMA 12.8**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  integrabile in  $[a, b]$ . Allora  $\|f\| \in \mathcal{R}(a, b)$  e

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt. \quad (12.6)$$

Dimostrazione 

Determinare i seguenti vettori:

a)  $\int_0^1 (1, t, t^2) dt;$

b)  $\int_0^1 (\sin(\pi t), t \cos(\pi t)) dt.$

**ESERCIZIO 12.3**

## 12.2 Curve rettificabili, lunghezza

Siano  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{D}$  una suddivisione di  $[a, b]$ ,

$$\mathcal{D} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\},$$

dove  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$ . Gli  $N + 1$  punti  $\gamma(t_i) \in \mathbb{R}^n$  individuano  $N$  segmenti,  $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ , di lunghezza complessiva

$$L(\gamma, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \quad (12.7)$$

(si veda Figura 12.5). Se esiste finito il numero

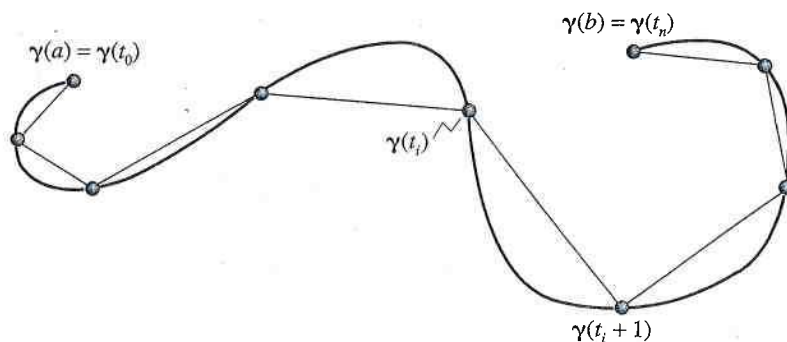
$$L(\gamma) := \sup \{L(\gamma, \mathcal{D}); \mathcal{D} \text{ suddivisione di } [a, b]\}, \quad (12.8)$$

è ragionevole chiamarlo lunghezza della curva.

**DEFINIZIONE 12.9**

Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva e  $L(\gamma)$  definito dalla (12.8). Se  $L(\gamma) < +\infty$  la curva si dice **rettificabile** e  $L(\gamma)$  si dice **lunghezza** di  $\gamma$ .

Il numero  $L(\gamma)$  rappresenta la lunghezza della "traiettoria percorsa" e non va confusa con la lunghezza del sostegno della curva. Per esempio, la curva  $(\cos t, \sin t)$ ,



**Figura 12.5** Approssimazione della lunghezza di una curva.

$t \in [0, 5\pi]$ , ha lunghezza  $5\pi$ , mentre la lunghezza della circonferenza, sostegno della curva, è  $2\pi$ . Naturalmente le due quantità coincidono se la curva è semplice.

Come vedremo nel seguente esempio, non tutte le curve sono rettificabili.



### ESEMPIO 12.5

Sia  $\gamma(t) = (t, y(t))$  per  $t \in [0, 1]$ , dove

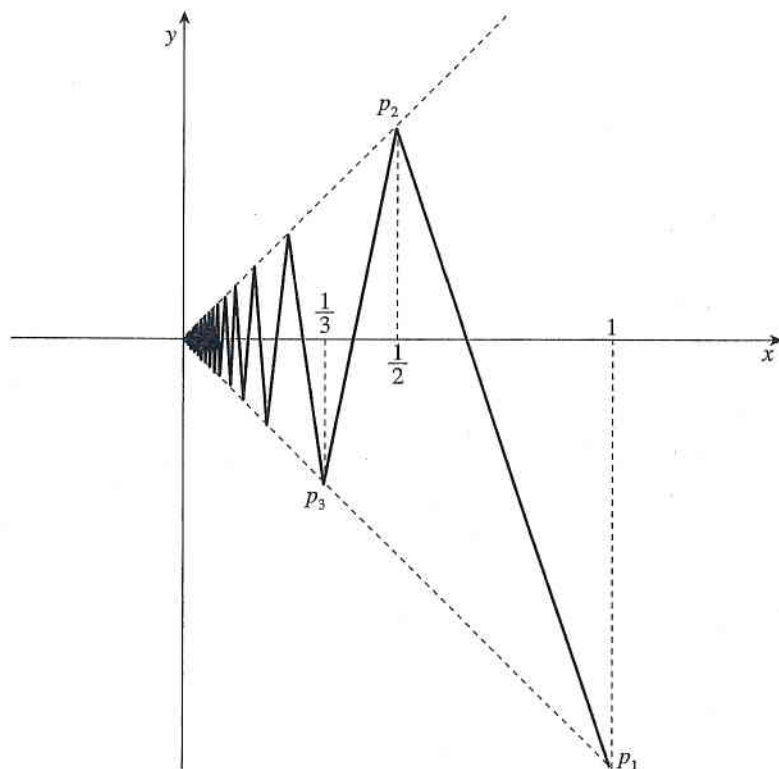
$$y(t) = \begin{cases} (-1)^n((2n+1)t - 2) & \text{se } \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

ovvero la traiettoria percorsa è la poligonale (infinita) individuata dagli infiniti punti  $p_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n \frac{1}{n}\right)$ , indicata nella Figura 12.6. Si osservi che  $(t, y(t)) \rightarrow (0, 0)$  per  $t \rightarrow 0^+$ , ovvero  $\gamma$  è continua in  $[0, 1]$ . Ovviamente risulta che per ogni  $N = 1, 2, 3, \dots$

$$L(\gamma) \geq \sum_{n=1}^N \|p_{n+1} - p_n\| = \sum_{n=1}^N \frac{\sqrt{2 + 4n + 4n^2}}{n(n+1)}.$$

Ma essendo  $\frac{\sqrt{2 + 4n + 4n^2}}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1}(1 + o(1))$  per  $n \rightarrow +\infty$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2 + 4n + 4n^2}}{n(n+1)}$  è divergente e quindi  $L(\gamma) = +\infty$ .

Figura 12.6



Moltiplicando e dividendo ciascun addendo per  $t_i - t_{i-1}$ , la (12.7) si può riscrivere come

$$L(\gamma, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right\| (t_i - t_{i-1}).$$



Da ciò segue che la lunghezza di una curva di classe  $C^1$  si ottiene integrando la velocità scalare nell'intervallo temporale, fatto non sorprendente se si pensa alla relazione tra spazio percorso e velocità.

**TEOREMA 12.10**

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$  in  $[a, b]$ , allora è rettificabile e

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \quad (12.9)$$

Dimostrazione

Come è giusto aspettarsi, il concetto di lunghezza non dipende dalla parametrizzazione della curva.

**TEOREMA 12.11**

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$  e sia  $\tilde{\gamma}$  una curva equivalente a  $\gamma$ . Allora anche  $\tilde{\gamma}$  è rettificabile e  $L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$ .

**Dimostrazione**

Sia  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  il cambiamento di parametrizzazione tale che  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\varphi(\tau))$ . Supponiamo per esempio che  $\varphi'(\tau) < 0$  per  $\alpha \leq \tau \leq \beta$  (l'altro caso è del tutto analogo). Allora  $\varphi(\alpha) = b$ ,  $\varphi(\beta) = a$  e ponendo  $t = \varphi(\tau)$  si ha

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau} \right\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(\tau))\| \cdot |\varphi'(\tau)| d\tau \\ &= - \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma). \end{aligned}$$

a) Sia  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , un'elica cilindrica. Allora

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|(-\sin t, \cos t, 1)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

b) L'asteroide

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

(si veda Figura 12.7) ha vettore velocità  $\gamma'(t) = 3(-\cos^2 t \sin t, \sin^2 t \cos t)$ . Quindi  $\|\gamma'(t)\|^2 = 9\sin^2 t \cos^2 t$  e

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 3|\sin t \cos t| dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 6 \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = 6.$$

Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una curva cartesiana di classe  $C^1$ , ovvero se  $\gamma(t) = (t, f(t))$  con  $f \in C^1([a, b])$ , segue immediatamente dalla (12.9) che la lunghezza della curva, ovvero la lunghezza del grafico di  $f$ , è data da

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt. \quad (12.10)$$

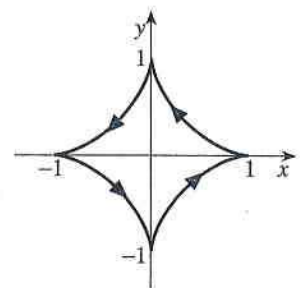
**ESEMPIO 12.6**

Figura 12.7 L'asteroide  $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$

**ESEMPIO 12.7**

La lunghezza del grafico della funzione  $f(x) = x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , è data da

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+4t^2} dt = \sqrt{5} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5}).$$

È facile vedere che una curva di classe  $C^1$  a tratti,  $\gamma$ , è rettificabile e vale (con riferimento alla notazione della Definizione 12.5)

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'_i(t)\| dt.$$

Ascissa curvilinea o parametro d'arco

Fra tutte le possibili parametrizzazioni di una curva regolare, ne esiste una che fa percorrere la traiettoria con velocità scalare costantemente uguale a 1. Infatti, ponendo

$$t \mapsto s = s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau, \quad t \in [a, b],$$

si ha che  $s \in C^1([a, b])$  con  $s'(t) = \|\gamma'(t)\| \neq 0$  per ogni  $t \in [a, b]$ . Perciò è ben definita in  $[0, L(\gamma)]$  la funzione inversa,  $s \mapsto t(s)$ , e la curva  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$  è equivalente a  $\gamma$ . Si osservi che

$$\frac{d}{ds} \tilde{\gamma}(s) = \frac{d\gamma}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \gamma'(t(s)) \frac{1}{s'(t(s))} = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|},$$

ovvero la velocità scalare di  $\tilde{\gamma}(s)$  vale 1:

$$\left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(s) \right\| = 1 \quad \text{per ogni } s \in [0, L(\gamma)]. \quad (12.11)$$

Il valore  $s = s(t)$  rappresenta la lunghezza dell'arco di curva compreso tra  $\gamma(a)$  e  $\gamma(t)$ , e prende anche il nome di **ascissa curvilinea** o **parametro d'arco**.

**ESEMPIO 12.8**

Siano  $a > 0$  e  $b \neq 0$ . Si vuole parametrizzare mediante il parametro d'arco l'elica cilindrica  $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ . Si ha  $\gamma'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$ , quindi  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = t \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Perciò  $t = s/\sqrt{a^2 + b^2}$ , e la parametrizzazione cercata è data da

$$\tilde{\gamma}(s) = \left( a \cos \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left( \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

**ESERCIZIO 12.4**

Determinare la lunghezza delle seguenti curve:

- $\gamma(t) = (t \sin t, t \cos t, t)$ ,  $t \in [0, T]$  (elica conica);
- $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in [0, \pi]$  (cicloide);
- $\gamma(t) = \left( \frac{e^{-3t}}{3}, \frac{e^{-2t}}{2} \right)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**ESERCIZIO 12.5**

Scrivere un integrale definito che rappresenta la lunghezza del tratto della curva di intersezione del piano di equazione  $z = 2x + y$  e dell'insieme di equazione  $z = x^2$ , compreso tra i piani  $x = -1$  e  $x = 2$ .

Determinare l'ascissa curvilinea delle seguenti curve:

a)  $\gamma(t) = (2t, 5t - 6), t \in [0, 1]$ ;

b)  $\gamma(t) = (6t, t^2, 8t), t \in [0, 5]$ .

## 12.3 Integrali curvilinei di 1<sup>a</sup> specie

Immaginiamo il sostegno di una curva semplice  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  come un filo rigido di densità lineare  $f$  (ovvero  $f$  ha le dimensioni di una massa per unità di lunghezza, per esempio [kg]/[m]). Se  $f$  è costante, la massa totale  $M$  del filo è pari a  $f$  volte la sua lunghezza:

$$M = f \cdot L(\gamma) = \int_a^b f \|\gamma'(t)\| dt.$$

Stiamo cioè integrando il prodotto tra la densità  $f$  e l'elemento infinitesimale di lunghezza  $\|\gamma'(t)\| dt$ .

In generale, la densità può assumere valori diversi nei diversi punti di  $\gamma$ , nel qual caso si rappresenta come una funzione  $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ . In modo analogo, la massa si otterrà integrando il prodotto tra la densità e l'elemento infinitesimale di lunghezza:

$$M = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt. \quad (12.12)$$

Esaminiamo per un attimo questa espressione. Per avere senso, il prodotto  $f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|$  deve essere integrabile. Per il resto la scrittura è indipendente dall'esempio scelto per introdurla, in particolare dalla dimensione del codominio di  $\gamma$ . Ciò conduce quindi alla seguente definizione.

### DEFINIZIONE 12.12

Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$  e sia  $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|$  è integrabile in  $[a, b]$ . Si definisce

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt, \quad (12.13)$$

detto **integrale curvilineo di 1<sup>a</sup> specie** di  $f$  lungo  $\gamma$ .

Se la curva  $\gamma$  è semplice e chiusa si usa anche il simbolo  $\oint_{\gamma} f ds$ .

Procedendo esattamente come nella dimostrazione del Teorema 12.11 si verifica che l'integrale non dipende dalla parametrizzazione scelta:

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\tilde{\gamma}} f ds \quad \text{se } \gamma \text{ e } \tilde{\gamma} \text{ sono equivalenti.} \quad (12.14)$$

Consideriamo un filo sottile nello spazio esposto a una fonte di calore e sia  $e(x, y, z)$  l'energia termica assorbita dal filo per unità di lunghezza e di tempo nel punto  $(x, y, z)$  appartenente al sostegno della curva di classe  $C^1$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , che rappresenta il filo.

Se la funzione  $e$  è continua in  $\mathbb{R}^3$ , la funzione



$$t \mapsto e(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}, \quad t \in [a, b]$$

è integrabile in  $[a, b]$  e l'energia assorbita dal filo per unità di tempo è

$$\int_{\gamma} e \, ds = \int_a^b e(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

Anche in questo caso il fattore  $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$  tiene conto della lunghezza dell'arco "infinitesimo" di filo.

**ESEMPIO 12.10**

a) Sia  $\gamma(t) = (3t, 4t - 1, t + 5)$  per  $t \in [0, 1]$ . Allora

$$\int_{\gamma} (3x - y + z) \, ds = \int_0^1 (3(3t) - (4t - 1) + (t + 5)) \sqrt{3^2 + 4^2 + 1} \, dt = 9\sqrt{26}.$$

b) Si vuole calcolare

$$\int_{\gamma} xyz \, ds, \quad \text{dove } \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, \pi].$$

Si ha  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ , ovvero  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ . Utilizzando la definizione, si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xyz \, ds &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos t \cdot \sin t \cdot t \, dt = \frac{1}{2} \sqrt{2} \int_0^{\pi} t \sin(2t) \, dt \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{2} [t \cos(2t)]_0^{\pi} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos(2t) \, dt = -\frac{1}{4} \pi \sqrt{2}. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 12.7**

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a)  $\int_{\gamma} \frac{xy \sin y}{\sqrt{1+x^2}} \, ds, \quad \gamma(t) = (t, t^2/2), \quad t \in [0, 1];$

b)  $\int_{\gamma} (x^2 + x - 2y^2 + 3y) \, ds, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$

c)  $\int_{\gamma} x \, ds, \quad \gamma(t) = (t^3, t), \quad t \in [0, 1];$

d)  $\int_{\gamma} (1+x) \, ds, \quad \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}\right), \quad t \in [0, 1];$

e)  $\int_{\gamma} \frac{y+1}{x^2} \, ds, \quad \gamma(t) = (t, t \log t - 1), \quad t \in [1, e].$

## 12.4 Integrali curvilinei di 2<sup>a</sup> specie. Forme differenziali

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme e sia  $F: E \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale:

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})) \quad \text{per } \mathbf{x} \in E.$$

A  $F$  associamo l'espressione formale

$$\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$$

detta **forma differenziale lineare** con coefficienti  $F_1, \dots, F_n$ , o **forma differenziale associata a F**. Si scrive anche, sempre formalmente,

$$\omega = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle.$$

Viceversa, data una forma differenziale lineare  $\omega(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})dx_1 + \dots + F_n(\mathbf{x})dx_n$ , a essa è associato il campo vettoriale  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ . La regolarità di una forma differenziale è quella del campo vettoriale associato: per esempio,  $\omega$  è continua in  $E$ , e si scrive  $\omega \in C(E)$ , se e solo se  $\mathbf{F} \in C(E)$ , ovvero se e solo se  $F_1, \dots, F_n \in C(E)$ ; analogamente, se  $E$  è aperto,  $\omega \in C^1(E)$ , se e solo se  $F_1, \dots, F_n \in C^1(E)$ .

Se  $n = 3$  e se  $\mathbf{F}$  rappresenta un campo di forze, si può pensare  $\omega$  come il lavoro compiuto dalla forza su una particella che subisce uno spostamento "infinitesimo"  $d\mathbf{x} = \mathbf{x}'(t) dt$ . Più precisamente, se la particella si muove lungo una curva  $\gamma$  il lavoro compiuto dalla forza si ottiene integrando  $\langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$  nell'intervallo temporale. Questa applicazione fisica suggerisce la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 12.13**

Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$ ,  $\mathbf{F} : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vettoriale continuo e  $\omega$  la forma differenziale associata a  $\mathbf{F}$ . Si definisce **integrale curvilineo di 2ª specie**

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)) dt. \end{aligned} \quad (12.15)$$

**ESEMPIO 12.11**

Sia  $\gamma(t) = (t^2, \cos t, 2 \sin t)$  per  $t \in [0, 2\pi]$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (x + y) dx + z dy - \sqrt{x} dz \\ = \int_0^{2\pi} ((t^2 + \cos t) 2t + 2 \sin t (-\sin t) - t(2 \cos t)) dt = 8\pi^4 - 2\pi. \end{aligned}$$

Se  $\gamma$  è una curva di Jordan si scrive anche

$$\oint_{\gamma} \omega \quad \text{o} \quad \oint_{\gamma} \omega$$

se, rispettivamente,  $\gamma$  è orientata positivamente o negativamente.

**ESEMPIO 12.12**

Sia  $\gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  la circonferenza di raggio  $\rho$  orientata positivamente:

$$\gamma(t) = (\rho \cos t, \rho \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Allora

$$\oint_{\gamma} -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} \left( -\frac{\rho \sin t}{\rho^2} (-\rho \sin t) + \frac{\rho \cos t}{\rho^2} \rho \cos t \right) dt = 2\pi.$$

La linearità dell'integrale segue immediatamente dalla definizione:

$$\int_{\gamma} a\omega_1 + b\omega_2 = a \int_{\gamma} \omega_1 + b \int_{\gamma} \omega_2 \quad \text{se } a, b \in \mathbb{R}.$$

Il prossimo teorema mostra che l'integrale di 2<sup>a</sup> specie, coerentemente con la sua interpretazione fisica di lavoro di un campo di forze, è invariante per curve equivalenti solo se le curve hanno lo stesso verso, mentre se il verso è opposto l'integrale cambia segno: il lavoro fatto dal campo gravitazionale per far cadere un grave è uguale in modulo, ma di segno opposto, al lavoro che facciamo noi per sollevarlo.

**TEOREMA 12.14**

Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\omega$  una forma differenziale continua in  $E$  e  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  curve di classe  $C^1$  contenute in  $E$ . Allora

- (i)  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$  se  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  sono equivalenti con lo stesso verso;
- (ii)  $\int_{\gamma} \omega = - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$  se  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  sono equivalenti con verso opposto.

**Dimostrazione**

Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  due curve equivalenti, e sia  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  il cambiamento di parametrizzazione corrispondente:  $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$  per ogni  $\tau \in [\alpha, \beta]$ . Allora

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \omega &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{F}(\tilde{\gamma}(\tau)), \frac{d\tilde{\gamma}}{d\tau}(\tau) \rangle d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{F}(\gamma(\varphi(\tau))), \frac{d\gamma}{dt}(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) \rangle d\tau \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \frac{d\gamma}{dt}(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Se  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  hanno lo stesso verso, ossia  $\varphi' > 0$ , allora  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  e si ottiene (i); se invece hanno verso opposto, allora  $\varphi(\alpha) = b$ ,  $\varphi(\beta) = a$  e si ottiene (ii).

Se la curva è regolare, ogni integrale curvilineo di 2<sup>a</sup> specie si può riscrivere come uno di 1<sup>a</sup> specie. Infatti, ricordando la definizione (12.3) del versore tangente, risulta

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}' \rangle dt = \int_a^b \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle \|\boldsymbol{\gamma}'\| dt = \int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle ds. \quad (12.16)$$

Le definizioni di integrali di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie si estendono facilmente alle curve di classe  $C^1$  a tratti:

$$\int_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N} f ds := \int_{\gamma_1} f ds + \dots + \int_{\gamma_N} f ds$$

è

$$\int_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_N} \omega := \int_{\gamma_1} \omega + \dots + \int_{\gamma_N} \omega.$$

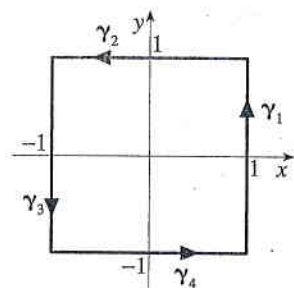


Figura 12.8

**ESEMPIO 12.13**

Si vuole calcolare  $\oint_{\gamma} x dy$ , dove  $\gamma$  è una curva di Jordan il cui sostegno è la frontiera del quadrato  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Suddividiamo la curva come in Figura 12.8:  $\gamma = \bigcup_{i=1}^4 \gamma_i$ . Lungo  $\gamma_2$  e  $\gamma_4$   $x$  è costante, quindi

$$\oint_{\gamma} x dy = \int_{\gamma_1} x dy + \int_{\gamma_3} x dy = \int_{-1}^1 1 dy + \int_1^{-1} -1 dy = 4.$$



## ESERCIZIO 12.8

Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$ , per le seguenti forme differenziali  $\omega$  e curve  $\gamma$ :

a)  $\omega = (2x - y) dx + (x + y) dy$ ,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 1 - 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ (2t - 1, 3t - 4) & \text{se } 1 < t \leq 2; \end{cases}$$

b)  $\omega = (3x^2 + y) dx - xy dy$ ,  $\gamma$  è il segmento di retta percorsa da  $(-2, 1)$  a  $(3, 0)$ ;

c)  $\omega = 2x dx + \frac{1}{x} dy$ ,  $\gamma$  è la circonferenza di raggio 2 e centro  $(0, 0)$ , orientata positivamente;

d)  $\omega = xy dx + xy dy$ ,  $\gamma$  è la porzione di circonferenza di raggio 1 e centro  $(0, 0)$  contenuta nei primi due quadranti;

e)  $\omega = x e^y dx + \sin x dy$ ,  $\gamma$  è una curva semplice regolare che ha come sostegno l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = x^2\}$  percorso da  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ .

### 12.4.1 Forme differenziali esatte e chiuse

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e connesso. Al gradiente  $\nabla U$  di una funzione  $U \in C^1(E)$  è associata in modo naturale la forma differenziale  $dU$ , detta anche **differenziale** di  $U$ :

$$dU := \langle \nabla U, dx \rangle = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n. \quad (12.17)$$

Ovviamente non tutte le forme differenziali sono associate al gradiente di una funzione; quelle che lo sono si chiamano *esatte*.

#### DEFINIZIONE 12.15

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto connesso. Una forma differenziale  $\omega$  continua in  $E$ , associata al campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , si dice **esatta** in  $E$  se esiste una funzione  $U : E \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che  $\nabla U = \mathbf{F}$ , ovvero

$$\omega = dU := \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n. \quad (12.18)$$

In tal caso  $U$  si dice **funzione potenziale** di  $\omega$  oppure **primitiva** di  $\omega$ .

Data una curva  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  di classe  $C^1$ , per la regola della catena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \gamma_1'(t) + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} \gamma_n'(t) = \\ &= F_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t)) \gamma_n'(t). \end{aligned}$$

Quindi, per la (12.15) e il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left( \frac{d}{dt} U(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \right) dt = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)),$$

ossia vale il seguente risultato.

#### TEOREMA 12.16

Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto connesso,  $\omega$  una forma differenziale continua ed esatta in  $E$  e  $\gamma$  una curva di classe  $C^1$  a tratti contenuta in  $E$ . Allora

$$\int_{\gamma} \omega = \mathcal{U}(\gamma(b)) - \mathcal{U}(\gamma(a)) \quad (12.19)$$

dove  $\mathcal{U}$  è una funzione potenziale di  $\omega$ .

La (12.19) implica immediatamente che se  $\omega$  è esatta,  $\int_{\gamma} \omega$  dipende solo dai punti estremi di  $\gamma$  e  $\oint_{\gamma} \omega = 0$  se  $\gamma$  è chiusa (si veda Figura 12.9). In effetti vale un risultato più forte, che dimostreremo alla fine di questo paragrafo.

#### TEOREMA 12.17

Siano  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto connesso e  $\omega$  una forma differenziale di classe  $C(E)$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $\omega$  è esatta in  $E$ ;
- (ii) per ogni coppia di curve di classe  $C^1$  a tratti,  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$ , contenute in  $E$  e con gli stessi punti finali e iniziali

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega;$$

- (iii) per ogni curva chiusa, contenuta in  $E$  e di classe  $C^1$  a tratti,

$$\oint_{\gamma} \omega = 0.$$

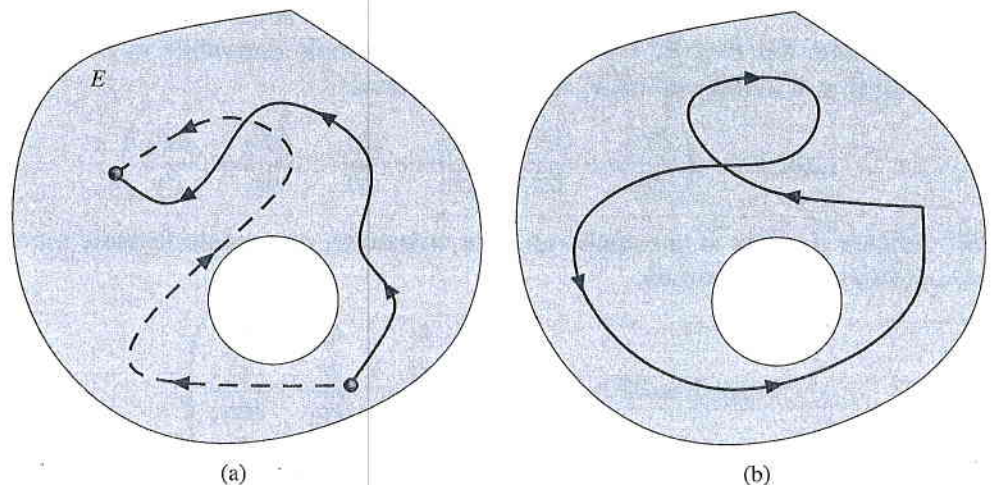
Nella fisica le forme differenziali sono di particolare importanza: un campo di forze  $\mathbf{F}$  si dice **conservativo** se la forma differenziale associata è esatta, ovvero se il lavoro compiuto dalla forza su una particella che percorre una curva dipende solo dagli estremi della curva. Osserviamo che la funzione potenziale ha segno opposto a ciò che in fisica è noto come *energia potenziale*  $U$ :  $U = -\mathcal{U} + C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ).

Rimangono due problemi da affrontare: come riconoscere una forma differenziale esatta e, in tal caso, come ricavare una funzione potenziale.

Sia  $\omega = \langle \mathbf{F}, d\mathbf{x} \rangle$  una forma differenziale esatta di classe  $C^1(E)$ , e sia  $\mathcal{U}$  una sua funzione potenziale. Allora  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} = F_i$  e

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{in } E \text{ per } i, j = 1, \dots, n.$$

**Figura 12.9** Caso (ii) (a) e caso (iii) (b).





D'altra parte, per il teorema del differenziale totale  $\mathcal{U} \in C^2(E)$  e per il teorema di Schwarz  $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x_j \partial x_i}$  in  $E$ ; quindi

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{in } E \text{ per } i, j = 1, \dots, n. \quad (12.20)$$

**DEFINIZIONE 12.18**

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e connesso. Una forma differenziale  $\omega$  di classe  $C^1(E)$ , associata al campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , si dice **chiusa** in  $E$  se vale la (12.20).

Possiamo allora concludere che se  $\omega \in C^1(E)$ , allora

$$\boxed{\omega \text{ esatta in } E \Rightarrow \omega \text{ chiusa in } E}. \quad (12.21)$$

Trattandosi di una *condizione necessaria*, la (12.21) serve in particolare a escludere che una forma sia esatta.

Sia  $\omega = x^2 y dx + y^2 x dy$  in  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $F_1 = x^2 y, F_2 = y^2 x$  e

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2 \neq y^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

quindi  $\omega$  non è esatta in  $\mathbb{R}^2$ .

**ESEMPIO 12.14**

Senza ulteriori ipotesi, la doppia implicazione **non** vale nella (12.21):

$$\boxed{\omega \text{ chiusa in } E \not\Rightarrow \omega \text{ esatta in } E}.$$

Sia  $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Risulta che  $\omega$  è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{in } E.$$

D'altra parte abbiamo visto nell'Esempio 12.12 che esistono curve chiuse in  $E$  per le quali

$\oint_{\gamma} \omega \neq 0$ ; quindi, per il Teorema 12.17,  $\omega$  non è esatta in  $E$ .

**ESEMPIO 12.15**

**Osservazione.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  e sia  $\mathbf{F}$  un campo vettoriale derivabile in  $E$ . Si definisce **rotore** di  $\mathbf{F}$ , e si indica con  $\text{rot } \mathbf{F}$ , il campo vettoriale

$$\text{rot } \mathbf{F} := \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Per indicare il rotore si usa anche un'altra notazione, puramente formale ma utilissima per ricordarsi la formula:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix};$$



lo studente controlli calcolando (formalmente) il determinante rispetto alla prima riga.

Un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  si dice **irrotazionale** se  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Si noti che la (12.20) può essere espressa in termini di rotore: la (12.20) è equivalente a  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Perciò una forma differenziale è chiusa in  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  se e solo se il campo vettoriale a essa associato è irrotazionale.

In seguito vedremo che è possibile caratterizzare una classe di insiemi  $E$  che contiene, per esempio, l'insieme  $\mathbb{R}^n$  e tutti i sottoinsiemi convessi in  $\mathbb{R}^n$ , in cui si può affermare che  $\omega$  è esatta in  $E$  se e solo se è chiusa in  $E$ . Ma prima di affrontare tale questione, vediamo come costruire una funzione potenziale  $\mathcal{U}$ .

Supponiamo che  $\omega$  sia esatta in  $E$  e che  $\mathcal{U}_0$  sia una funzione potenziale di  $\omega$  in  $E$ . Presi due punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$  in  $E$  e una *qualunque* curva di classe  $C^1$  a tratti  $\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}) \subset E$  avente  $\mathbf{x}_0$  come punto iniziale e  $\mathbf{x}$  come punto finale, per la (12.19)

$$\int_{\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x})} \omega = \mathcal{U}_0(\mathbf{x}) - \mathcal{U}_0(\mathbf{x}_0).$$

Ciò significa che, fissato  $\mathbf{x}_0$ , la funzione

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) := \int_{\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x})} \omega \quad (12.22)$$

è uguale alla funzione potenziale  $\mathcal{U}_0(\mathbf{x})$  meno una costante,  $\mathcal{U}_0(\mathbf{x}_0)$ ; quindi  $\mathcal{U}(\mathbf{x})$  è una funzione potenziale. Ciò suggerisce il seguente procedimento. Sia  $\omega$  una forma differenziale chiusa in  $E$  (quindi  $\omega$  non è necessariamente esatta) e sia  $\mathbf{x}_0 \in E$ . Scegliendo per ogni  $\mathbf{x} \in E$  una curva  $\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}) \subset E$  che va da  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}$  si definisce  $\mathcal{U}(\mathbf{x})$  tramite la (12.22). A posteriori si verifica se  $\mathcal{U}(\mathbf{x})$  è funzione potenziale di  $\omega$ .

Costruzione del  
potenziale

### ESEMPIO 12.16

Sia

$$\omega = (3x^2y + xy^2 + 2) dx + (x^3 + x^2y - 1) dy \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \quad (12.23)$$

Allora  $\omega$  è chiusa in  $\mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} (3x^2y + xy^2 + 2) = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + x^2y - 1) = 3x^2 + 2xy \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Sia  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Fissato un punto generico  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , si considera una curva semplice da  $(0, 0)$  a  $(x, y)$  con sostegno come in Figura 12.10:

$$\gamma_1(t) = (tx, 0), \quad t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) = (x, (t-1)y), \quad t \in [1, 2].$$

Ponendo ora

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, y) &:= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} 2dx + \int_{\gamma_2} (x^3 + x^2y - 1) dy \\ &= 2x + x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 - y. \end{aligned}$$

A posteriori si verifica che  $\mathcal{U} \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e che

$$\mathcal{U}_x(x, y) = 2 + 3x^2y + xy^2, \quad \mathcal{U}_y(x, y) = x^3 + x^2y - 1$$

quindi  $\mathcal{U}$  è funzione potenziale di  $\omega$  e  $\omega$  è esatta in  $\mathbb{R}^2$ .

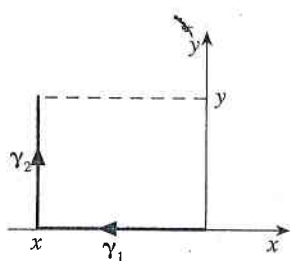


Figura 12.10

Si osservi che si può ottenere il risultato nell'esempio precedente anche in altro modo: supponiamo che la forma differenziale (12.23) sia esatta in  $\mathbb{R}^2$  e che  $\mathcal{U}$  sia funzione potenziale di  $\omega$ . Allora devono valere le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 + 2 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \quad (12.24)$$

e

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + x^2 y - 1 \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \quad (12.25)$$

Integrando, per ogni  $y \in \mathbb{R}$  costante, la (12.24) rispetto a  $x$  si ottiene che

$$U(x, y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + 2x + C(y)$$

dove, ovviamente, la “costante di integrazione”  $C(y)$  non dipende da  $x$  ma dipenderà in generale da  $y$ . Allora

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 + x^2 y + C'(y) \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

e confrontando questa espressione con la (12.25), si ricava che  $C'(y) = -1$ , ovvero  $C(y) = -y + A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ), e quindi

$$U(x, y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + 2x - y + A \quad (A \in \mathbb{R}).$$

Poiché  $U \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e valgono le (12.24) e (12.25), si conclude che  $\omega$  è esatta.

Se una forma  $\omega$  è esatta, la determinazione di una funzione potenziale può essere utilizzata, insieme alla (12.19), per calcolare  $\int_{\gamma} \omega$ .

**ESEMPIO 12.17**

Si vuole calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = \left( \frac{x^2 \cos(x^3 - 2)}{3y + 1} + y \right) dx - \frac{\sin(x^3 - 2)}{(3y + 1)^2} dy$$

lungo la curva  $\gamma(t) = (2^{t/3}, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Lo studente può facilmente rendersi conto che il calcolo diretto dell'integrale è piuttosto complesso. Invece, non è difficile verificare che la forma

$$\omega_1 = \frac{x^2 \cos(x^3 - 2)}{3y + 1} dx - \frac{\sin(x^3 - 2)}{(3y + 1)^2} dy$$

è esatta determinandone un potenziale  $U$ :

$$U(x, y) = \int -\frac{\sin(x^3 - 2)}{(3y + 1)^2} dy = \frac{\sin(x^3 - 2)}{3(3y + 1)} + C(x)$$

da cui

$$U_x(x, y) = \frac{x^2 \cos(x^3 - 2)}{3y + 1} + C'(x).$$

Perciò  $U(x, y)$ , con  $C(x) = C$  ( $C \in \mathbb{R}$ ), è un potenziale associato a  $\omega_1$ ; quindi

$$\int_{\gamma} \omega_1 = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(\sqrt[3]{2}, 1) - U(1, 0) = -\frac{1}{3} \sin(-1) = \frac{1}{3} \sin 1.$$

Per concludere resta da osservare che

$$\int_{\gamma} y dx = \int_0^1 t d(2^{t/3}) = t 2^{t/3} \Big|_0^1 - \int_0^1 2^{t/3} dt = \sqrt[3]{2} - \frac{3}{\log 2} (\sqrt[3]{2} - 1).$$

Pertanto

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} y dx = \frac{1}{3} \sin 1 + \sqrt[3]{2} - \frac{3}{\log 2} (\sqrt[3]{2} - 1).$$

Terminiamo il paragrafo con la dimostrazione del Teorema 12.17.

**Dimostrazione**

(i)  $\Rightarrow$  (iii) Segue dalla (12.19).

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) Siano  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ . La curva

$$\bar{\gamma} : [b, b + d - c] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(b + d - t)$$

è equivalente a  $\tilde{\gamma}$  e ha verso opposto, e la curva  $\gamma \cup \bar{\gamma}$  è chiusa e di classe  $C^1$  a tratti. Quindi per la (iii), la linearità dell'integrale e il Teorema 12.14,

$$0 = \int_{\gamma \cup \bar{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\bar{\gamma}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sia  $\mathbf{x}_0 \in E$  fissato. Poiché  $E$  è aperto e connesso, è possibile dimostrare che per ogni  $\mathbf{x} \in E$  esiste una curva  $\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x})$  di classe  $C^1$  contenuta in  $E$ . Definendo  $\mathcal{U}$  come nella (12.22), è sufficiente dimostrare che  $\mathcal{U}$  è una funzione potenziale. Per esempio, dimostriamo che  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in E$ . Poiché  $E$  è aperto, per ogni  $h \in \mathbb{R}$  sufficientemente piccolo la curva  $\gamma_h(t) = \mathbf{x} + ht\mathbf{e}_1$ ,  $t \in [0, 1]$ , è contenuta in  $E$ . Come mostra la Figura 12.11, le curve  $\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} + h\mathbf{e}_1)$  e  $\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}) \cup \gamma_h$  hanno gli stessi estremi; perciò, ricordando l'invarianza per curve orientate dell'integrale nella (12.22), il calcolo di  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}$  si riduce al calcolo del limite dell'integrale lungo il segmento. Infatti, per la (ii),

$$\int_{\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} + h\mathbf{e}_1)} \omega = \int_{\gamma(\mathbf{x}_0; \mathbf{x})} \omega + \int_{\gamma_h} \omega$$

ovvero

$$\mathcal{U}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - \mathcal{U}(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_h} \omega = h \int_0^1 F_1(\gamma_h(t)) dt.$$

Allora

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_1) - \mathcal{U}(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F_1(\mathbf{x} + ht\mathbf{e}_1) dt$$

e la continuità di  $F_1$  in  $\mathbf{x}$  permette di scambiare limite e integrale (si veda il Teorema 11.9):

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} F_1(\mathbf{x} + ht\mathbf{e}_1) dt = \int_0^1 F_1(\mathbf{x}) dt = F_1(\mathbf{x}).$$

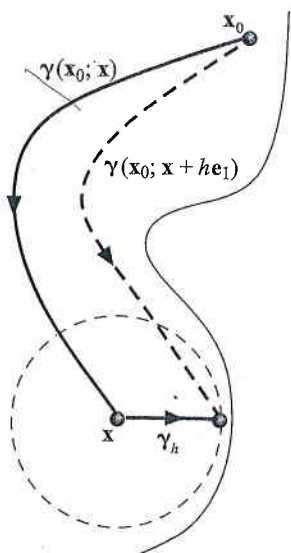


Figura 12.11

**ESERCIZIO 12.9**

Calcolare  $\int_{\gamma} \omega$  nei seguenti casi:

- a)  $\omega = (2x^3 - 3x^2y + y^2) dx + (2xy - x^3 - 5) dy$ ,  $\gamma$  è una curva regolare a tratti che va da  $(5, -1)$  a  $(1, 2)$ ;
- b)  $\omega = \left( \frac{e^x}{1+y^2} + 1 \right) dx + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2} dy$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$ ,  $t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ ;



$$c) \omega = \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \log(1+x^2) \right) dx + \left( \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + x \right) dy, \quad \gamma \text{ è la frontiera}$$

del rettangolo  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$  orientata positivamente;

$$d) \omega = \frac{2 \cos(2x)}{3y+1} dx - \frac{3 \sin(2x)}{(3y+1)^2} dy, \quad \gamma(t) = (2^{t/3}, \log(1+t^7(e-1))), \quad t \in [0, 1];$$

$$e) \omega = y^2 dx + 2xy dy, \quad \gamma(t) = (1 - \sin(\pi t^2), \cos(\pi t^2)), \quad t \in [0, 1];$$

$$f) \omega = (ye^{xy} + 3x) dx + (xe^{xy} + 1) dy, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Verificare che la forma differenziale

$$\omega = (2xyz + y^2z - y + 2z) dx + (x^2z + 2xyz - x - 4) dy + (x^2y + xy^2 + 2x + 1) dz$$

è esatta in  $\mathbb{R}^3$  e determinarne una funzione potenziale.

#### ESERCIZIO 12.10

### 12.4.2 Insiemi semplicemente connessi

#### DEFINIZIONE 12.19

Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  aperto e connesso e siano

$$\gamma^{(0)} : [a, b] \rightarrow E, \quad \gamma^{(1)} : [a, b] \rightarrow E$$

due curve aventi gli stessi punti estremi:

$$\mathbf{x}_a := \gamma^{(0)}(a) = \gamma^{(1)}(a), \quad \mathbf{x}_b := \gamma^{(0)}(b) = \gamma^{(1)}(b).$$

Le due curve  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$  si dicono **omotope** in  $E$  se esiste una funzione continua,  $\varphi$ , detta **omotopia** tra  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$ ,

$$\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E$$

tale che

$$(i) \quad \varphi(t, 0) = \gamma^{(0)}(t) \quad \text{e} \quad \varphi(t, 1) = \gamma^{(1)}(t) \quad \text{per} \quad a \leq t \leq b;$$

$$(ii) \quad \varphi(a, \lambda) = \mathbf{x}_a \quad \text{e} \quad \varphi(b, \lambda) = \mathbf{x}_b \quad \text{per} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Per capire la definizione si osservi che per ogni valore  $\lambda \in [0, 1]$

$$\gamma^{(\lambda)}(t) := \varphi(t, \lambda), \quad a \leq t \leq b,$$

è una curva con gli stessi estremi  $\mathbf{x}_a$  e  $\mathbf{x}_b$  di  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$  contenuta in  $E$ . Poiché  $\varphi$  è continua (anche rispetto al parametro  $\lambda$ ) possiamo pensare che al variare di  $\lambda$  da 0 a 1 la curva  $\gamma^{(0)}$  si deforma con continuità nella curva  $\gamma^{(1)}$  senza mai uscire da  $E$ . Se tale deformazione continua è possibile per ogni coppia di curve con gli stessi estremi,  $E$  si dice **semplicemente connesso**.

#### DEFINIZIONE 12.20

Un insieme aperto e connesso  $E \subset \mathbb{R}^n$  si dice **semplicemente connesso** se due curve qualsiasi contenute in  $E$  e aventi gli stessi estremi sono omotope.

Ogni insieme connesso in  $\mathbb{R}^n$  è semplicemente connesso. Infatti, se

$$\gamma^{(0)} : [a, b] \rightarrow E \quad \text{e} \quad \gamma^{(1)} : [a, b] \rightarrow E$$

sono due curve contenute in  $E$  con gli stessi estremi, allora

#### ESEMPIO 12.18

$$\varphi(t, \lambda) := \lambda \gamma^{(1)}(t) + (1 - \lambda) \gamma^{(0)}(t)$$

definisce un'omotopia tra  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$ . Chiaramente  $\varphi$  è continua in  $[a, b] \times [0, 1]$  e, per la convessità di  $E$ ,  $\varphi$  ha valori in  $E$ : per ogni  $\lambda \in [0, 1]$  e  $t \in [a, b]$  abbiamo che

$$\gamma^{(0)}(t) \in E \quad \text{e} \quad \gamma^{(1)}(t) \in E \Rightarrow \lambda \gamma^{(1)}(t) + (1 - \lambda) \gamma^{(0)}(t) \in E.$$

È possibile dimostrare che  $E$  è semplicemente connesso se e solo se ogni curva chiusa  $\gamma \subset E$  è omotopa a una curva costante, ovvero se e solo se ogni  $\gamma$  chiusa si può deformare con continuità a un punto senza uscire da  $E$  (si veda Figura 12.12).

Nel piano, ciò si può tradurre in un semplice criterio empirico: un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^2$  è semplicemente connesso se non ha "buchi" (si veda Figura 12.13). Per esempio la corona circolare

$$\{(x, y) : \rho_1^2 < x^2 + y^2 < \rho_2^2\} \quad (0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty)$$

non è semplicemente connesso (se  $\rho_1 = 0$  e  $\rho_2 = +\infty$  si tratta dell'insieme  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ). Infatti una curva chiusa che ha  $(0,0)$  al suo interno non può essere deformata con continuità a un punto senza uscire dall'insieme.

Si osservi che lo stesso criterio è falso in  $\mathbb{R}^3$ : la corona sferica

$$\{(x, y, z) : \rho_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < \rho_2^2\} \quad (0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty)$$

è un insieme semplicemente connesso; in particolare lo è  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ .

Negli insiemi semplicemente connessi una forma differenziale è esatta se e solo se è chiusa.

#### TEOREMA 12.21

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  semplicemente connesso e sia  $\omega$  chiusa in  $E$ . Allora  $\omega$  è esatta in  $E$ .

Questo risultato consente di provare che una forma differenziale è esatta senza doverne determinare il potenziale.

#### ESEMPIO 12.19

Sia  $\omega$  la forma differenziale (12.23) nell'Esempio 12.16:

$$\omega = (3x^2y + xy^2 + 2)dx + (x^3 + x^2y - 1)dy.$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2 + 2) = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y - 1)$$

la forma è chiusa in  $\mathbb{R}^2$ , che è semplicemente connesso; quindi  $\omega$  è esatta in  $\mathbb{R}^2$ .

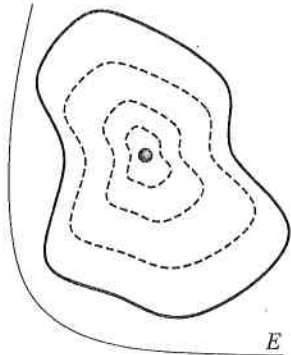
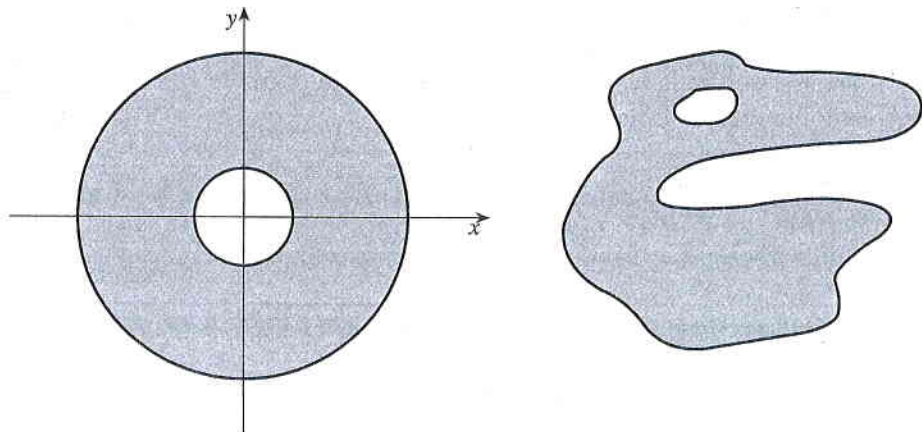


Figura 12.12 Omotopia tra una curva e un punto.

Figura 12.13 Sottoinsiemi non semplicemente connessi di  $\mathbb{R}^2$ .



Il Teorema 12.21 segue immediatamente dalla definizione di insieme semplicemente connesso, dal Teorema 12.17 e dal seguente risultato.

**TEOREMA 12.22**

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto connesso e sia  $\omega$  chiusa in  $E$ . Se  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$  sono due curve omotopiche in  $E$ , allora  $\int_{\gamma^{(0)}} \omega = \int_{\gamma^{(1)}} \omega$ .

Dimostrazione

Indichiamo soltanto come impostare la dimostrazione nel caso  $n = 2$ , rimandando alla rete per i dettagli dei calcoli.

Nelle ipotesi del teorema si può dimostrare che esiste un'omotopia  $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow E \subseteq \mathbb{R}^2$  di classe  $C^2$  tra  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$ . Poniamo, per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$\gamma^{(\lambda)}(t) := \varphi(t, \lambda) \quad \text{per } a \leq t \leq b \quad \text{e} \quad \mathcal{I}(\lambda) := \int_{\gamma^{(\lambda)}} \omega.$$

Utilizzando la regola della catena, un calcolo esplicito mostra che se la forma differenziale  $\omega = F_1 dx + F_2 dy$  è chiusa, per ogni  $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( F_1(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_1^{(\lambda)}}{\partial t} + F_2(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_2^{(\lambda)}}{\partial t} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left( F_1(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_1^{(\lambda)}}{\partial \lambda} + F_2(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_2^{(\lambda)}}{\partial \lambda} \right). \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{I}}{d\lambda} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( F_1(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_1^{(\lambda)}}{\partial t} + F_2(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_2^{(\lambda)}}{\partial t} \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left( F_1(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_1^{(\lambda)}}{\partial \lambda} + F_2(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_2^{(\lambda)}}{\partial \lambda} \right) dt \\ &= \left( F_1(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_1^{(\lambda)}}{\partial \lambda} + F_2(\gamma^{(\lambda)}) \frac{\partial \gamma_2^{(\lambda)}}{\partial \lambda} \right) \Bigg|_{t=a}^{t=b} = 0, \end{aligned}$$

essendo

$$\frac{\partial \gamma_1^{(\lambda)}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \gamma_2^{(\lambda)}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{in } t = a \quad \text{e in } t = b, \quad \text{quindi} \quad \int_{\gamma^{(0)}} \omega = \mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(1) = \int_{\gamma^{(1)}} \omega.$$

Sia  $\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  in  $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  e siano  $\gamma^{(0)}$  e  $\gamma^{(1)}$  i triangoli, rispettivamente, di vertici  $(-3, -4)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(11, 0)$  e  $(-3, -4)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(-11, 0)$ , percorsi in senso antiorario.

- a) Spiegare che uno dei triangoli è omotopo in  $E$  a un punto e l'altro a una circonferenza di centro  $(0, 0)$ , percorsa in senso antiorario;  
 b) Utilizzare il Teorema 12.22 e l'Esempio 12.12 per calcolare  $\int_{\gamma^{(0)}} \omega$  e  $\int_{\gamma^{(1)}} \omega$  (si ricordi che  $\omega$  è chiusa in  $E$ ).

**ESERCIZIO 12.11**



## 12.5 Normale, curvatura, binormale, torsione

In questo paragrafo accenniamo ai fondamenti della geometria delle curve nello spazio  $\mathbb{R}^3$ . Considereremo curve di classe  $C^3$ . Preliminarmente, osserviamo che il prodotto scalare e il prodotto vettoriale soddisfano le stesse regole di derivazione del prodotto usuale, nel senso che se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono derivabili in  $I$ , allora

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t) \rangle = \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{w}(t) \rangle + \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w}'(t) \rangle, \quad (12.26)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{w}(t)) = \mathbf{v}'(t) \wedge \mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t) \wedge \mathbf{w}'(t) \quad (12.27)$$

(la prima uguaglianza in effetti vale in  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $n \geq 1$ ). Per verificarlo basta sviluppare i prodotti e utilizzare le usuali regole di calcolo per funzioni di una variabile: per esempio,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^n v_k(t) w_k(t) \right) = \sum_{k=1}^n (v_k'(t) w_k(t) + v_k(t) w_k'(t)) \\ &= \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{w}(t) \rangle + \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w}'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Consideriamo prima una curva regolare  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizzata mediante il parametro d'arco. Poiché  $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$  per ogni  $s \in I$ , cioè  $\langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 1$  per ogni  $s \in I$ , si ha

$$0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{T}(s) \rangle \stackrel{(12.26)}{=} 2 \langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}(s) \rangle. \quad (12.28)$$

Denotiamo con  $\kappa(s)$  la **curvatura** di  $\gamma$  nel punto  $\gamma(s)$ :

$$\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

Per la (12.28), il vettore  $\mathbf{T}'(s)$ , se  $\kappa(s) \neq 0$ , è perpendicolare a  $\mathbf{T}(s)$ : in tal caso, è ben definito il **versore normale**

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \mathbf{T}'(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \quad \text{se } \kappa(s) \neq 0 \quad (12.29)$$

(si veda la Figura 12.14). Si dice **piano osculatore** il piano passante per  $\gamma(s)$  e parallelo ai vettori  $\mathbf{T}(s)$  e  $\mathbf{N}(s)$ . È possibile dimostrare, ma non lo faremo, che la **circonfenza osculatrice** – la circonferenza contenuta nel piano osculatore, passante per  $\gamma(s)$  e centrata in  $\gamma_c(s) = \gamma(s) + \mathbf{N}(s)/\kappa(s)$  – è, tra tutte le circonferenze passanti per  $\gamma(s)$ , quella che “approssima meglio”  $\gamma$  in un intorno di  $\gamma(s)$  (si veda la Figura 12.15).

Se la curva è piana (e  $\kappa(s) \neq 0$ ) i versori  $\mathbf{T}(s)$  e  $\mathbf{N}(s)$ , essendo ortogonali, generano tutto il codominio,  $\mathbb{R}^2$ : in altre parole, il piano osculatore coincide con il codominio. Altrimenti, conviene introdurre un terzo versore, il **versore binormale**  $\mathbf{B}(s)$ , che è ortogonale al piano osculatore e quindi completa una base ortonormale di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ T_1(s) & T_2(s) & T_3(s) \\ N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) \end{pmatrix}.$$

La base  $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$  si chiama usualmente **riferimento intrinseco** o **riferimento di Frenét** di  $\gamma$ . Si noti che

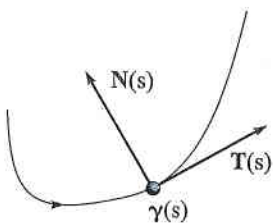


Figura 12.14

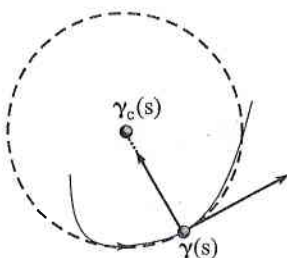


Figura 12.15 Circonfenza osculatrice.

$$\mathbf{B}'(s) \stackrel{(12.27)}{=} \mathbf{T}'(s) \wedge \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}'(s) \stackrel{(12.29)}{=} \kappa(s) \mathbf{N}(s) \wedge \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}'(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}'(s)$$

(ricordiamo che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo). Perciò  $\mathbf{B}'(s)$  è ortogonale a  $\mathbf{T}(s)$ . Poichè  $\|\mathbf{B}(s)\| = 1$ ,  $\mathbf{B}'(s)$  è anche ortogonale a  $\mathbf{B}(s)$  (si ragiona come nella (12.28)). Perciò  $\mathbf{B}'(s)$  è parallelo a  $\mathbf{N}(s)$ :

$$\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s), \quad \text{ovvero} \quad \tau(s) = \|\mathbf{B}'(s)\| \quad (\text{poichè} \quad \|\mathbf{N}(s)\| = 1).$$

Il valore  $\tau(s)$  si dice **torsione** della curva nel punto  $\gamma(s)$ .

## ESEMPIO 12.20

Si vuole determinare la normale, la curvatura, la binormale e la torsione dell'elica cilindrica  $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ , con  $a, b > 0$ . Per utilizzare le nozioni appena acquisite, si deve preliminarmente parametrizzare la curva mediante il parametro d'arco, cosa che è già stata fatta nell'Esempio 12.8:

$$\gamma(s) = (a \cos(\ell s), a \sin(\ell s), b\ell s), \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Si ha quindi

$$\mathbf{T}(s) = \tilde{\gamma}'(s) = \ell(-a \sin(\ell s), a \cos(\ell s), b),$$

da cui

$$\mathbf{T}'(s) = \ell^2(-a \cos(\ell s), -a \sin(\ell s), 0).$$

Perciò  $\kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = a\ell^2 = a/(a^2 + b^2)$  e

$$\mathbf{N}(s) = (-\cos(\ell s), -\sin(\ell s), 0).$$

Infine

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = \ell(b \sin(\ell s), -b \cos(\ell s), a),$$

da cui

$$\mathbf{B}'(s) = \ell^2(b \cos(\ell s), b \sin(\ell s), 0)$$

e pertanto  $\tau(s) = \|\mathbf{B}'(s)\| = b\ell^2 = b/(a^2 + b^2)$ .

È possibile riscrivere le quantità appena introdotte per una generica parametrizzazione  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ , utilizzando la regola della catena:

## PROPOSIZIONE 12.23

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva di classe  $C^3(I)$ . Allora

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \mathbf{B}(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \quad \mathbf{N}(t) = \frac{\frac{d}{dt} \mathbf{T}(t)}{\|\frac{d}{dt} \mathbf{T}(t)\|} = \mathbf{B}(t) \wedge \mathbf{T}(t)$$

e

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

Dimostrazione 

Si vuole determinare la curvatura e la torsione della curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\gamma(t) = (t, f(t), 2t + 1)$  con  $f \in C^3(I)$ . Si ha

$$\gamma'(t) = (1, f'(t), 2), \quad \gamma''(t) = (0, f''(t), 0), \quad \gamma'''(t) = (0, f'''(t), 0),$$

quindi

## ESEMPIO 12.21

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{5 + f'(t)^2}, \quad \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (-2f''(t), 0, f''(t)), \quad \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle = 0.$$

$$\text{Perciò } \kappa(s) = \sqrt{5}|f''(t)|/(5 + f'(t)^2)^{3/2} \text{ e } \tau(t) = 0.$$

**ESERCIZIO 12.12**

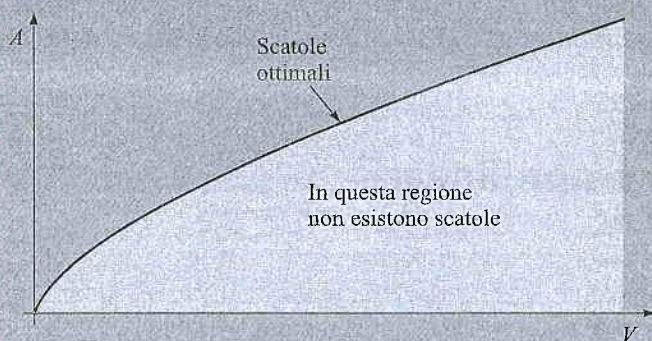
- a) Sia  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  due volte derivabile in  $x = 0$  e siano  $f(0) = f'(0) = 0$  e  $f''(0) > 0$ . Sia  $\gamma$  la curva piana  $\gamma(t) = (t, 0, f(t))$  per  $t \in [-1, 1]$ . Calcolare la curvatura,  $\kappa(0)$ , di  $\gamma$  in  $t = 0$ .
- b) Dato  $R > 0$ , si consideri la circonferenza nel piano  $y = 0$  di centro  $(0, 0, R)$  e di raggio  $R$ . La semiconferenza inferiore è il sostegno della curva piana  $\gamma_1(t) = (t, 0, g(t))$  ( $t \in [-R, R]$ ) dove  $g(t) = R - \sqrt{R^2 - t^2}$ . Dimostrare che  $g(0) = g'(0) = 0$  e che  $g''(0, 0) = f''(0)$  se e solo se la circonferenza è la circonferenza osculatrice relativa a  $\gamma$ , ovvero se e solo se  $R = 1/\kappa(0)$ .



## FILO ROSSO L'imballaggio ottimale

Un imballaggio serve a contenere e proteggere prodotti. Il concetto di "imballaggio ottimale" dipende ovviamente dai criteri scelti (di costo, di marketing, di spedizione, di prestazioni, etc.). Concentriamoci sul concetto più immediato di ottimalità: si vuole utilizzare, dato un certo volume  $V$  di materiale da racchiudere, un imballaggio di area  $A$  più piccola possibile, ovvero racchiudere, data  $A$ , il maggior volume possibile. Ovviamente questo concetto dipende dalla forma prescelta per l'imballaggio. Prendiamo l'esempio di una scatola, un oggetto che ha come forma un parallelepipedo rettangolo. Chiaramente scatole alte e sottili o basse e larghe utilizzano "molta" area rispetto al volume che racchiudono, e in effetti la scelta ottimale è il cubo. In questo capitolo si offrono gli strumenti per verificare questo fatto: si veda l'Esempio 13.18, dove si mostra anche che il rapporto ottimale tra  $V$  e  $A$  è dato dalla formula

$$A = 6V^{2/3}$$



Un'altra possibilità sono gli imballaggi di forma cilindrica, per esempio le lattine. Ottimizzando il raggio  $R$  e l'altezza  $h$  si trova il rapporto ottimale tra  $R$  e  $h$ ,  $h = 2R$ , e quindi quello tra  $V$  e  $A$ :

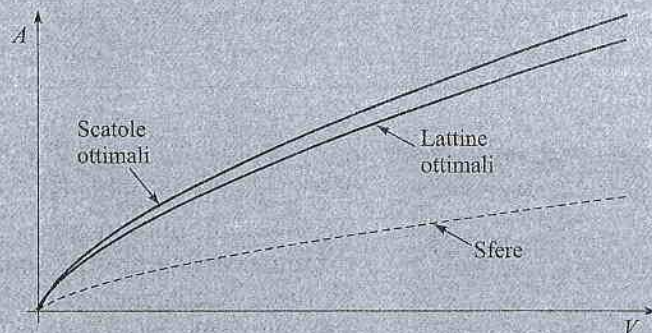
$$A = 6\sqrt[3]{\pi/4}V^{2/3}$$

(si veda l'Esercizio 13.9). Si osservi che  $\sqrt[3]{\pi/4} < 1$ . Nel caso di pacchetti sferici (sempre

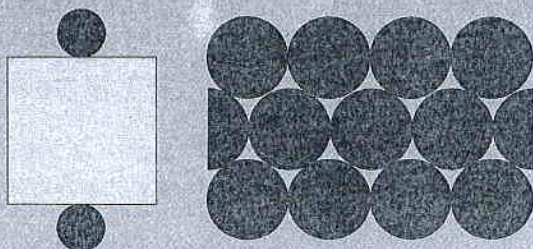
che siano ragionevoli) non ci sono parametri da ottimizzare, perciò il rapporto tra  $A$  e  $V$  è uguale per tutte le sfere:

$$A = \sqrt[3]{4\pi}V^{2/3}$$

È noto (ma non lo dimostriamo) che per nessun'altra scelta della forma si può migliorare questo rapporto, ovvero la sfera è l'imballaggio ottimale in assoluto. Queste informazioni sono state sintetizzate in figura:



È chiaro che abbiamo scelto una presentazione molto semplice del problema dell'imballaggio ottimale. Per esempio, perché le lattine in commercio sono in effetti più alte e sottili di quella ottimale? Le risposte possono essere molte (la funzionalità, la possibilità di essere a loro volta contenute, ecc.), ma una (almeno una) potrebbe essere legata al costo. Per intuirlo, consideriamo una lastra di latta infinita: per ottenere una lattina la si deve tagliare in rettangoli (per la superficie laterale) e cerchi (per le basi). Tagliandola in rettangoli non si butta via nulla, ma tagliandola in cerchi si!

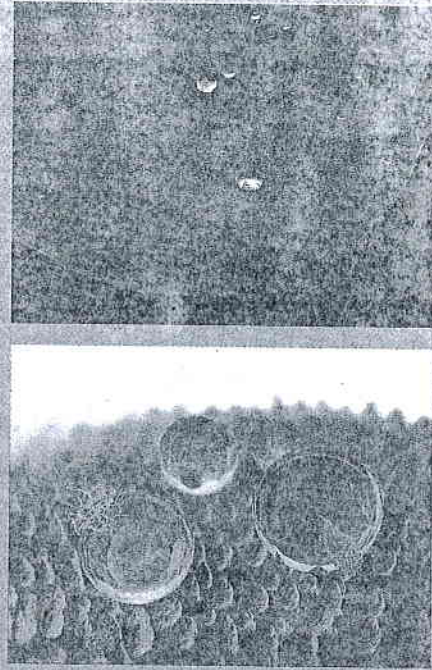




La percentuale di lastra sprecata è invariante rispetto al raggio (in una lastra infinita), quindi è ragionevole aspettarsi che riducendo il raggio si ottengano più basi per metro quadro di lastra a parità di costo. Per quantificare i costi effettivi, naturalmente, si dovrà tener conto anche del volume contenuto, delle superfici laterali e del fatto che le lastre hanno dimensione finita, conducendo a un problema di ottimizzazione non banale. Nelle applicazioni industriali i problemi di ottimizzazione realistici prendono in considerazione tutti i tipi di spese della produzione industriale. In teoria il risultato è un problema di minimizzazione generale di una *funzione costo*, anche se non sarà sempre facile quantificare tutte le possibili spese in un'unica funzione.

In figura abbiamo descritto il "taglio ottimale" di una lastra in cerchi, cioè quello che spreca meno materiale: una struttura a nido d'ape. Si tratta di un risultato già non banale in due dimensioni (in tre dimensioni è noto come la *congettura di Kepler*, 1611) e discuterlo ci porterebbe molto lontano. Ma non è certo un caso che l'evoluzione delle specie suggerisca la risposta a problemi di ottimizzazione anche molto complessi (la forma di un frutto per mi-

nimizzare lo sforzo sul picciolo, la struttura microscopica della superficie di una foglia per massimizzare l'idrorepellenza, ecc.).



### Guida

Sono possibili diversi livelli di lettura abbreviati:

- estremi vincolati di funzioni da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ , senza il teorema delle funzioni implicite e il metodo dei moltiplicatori: Paragrafo 13.2.1 e Paragrafo 13.2.2 (il Paragrafo 13.3.1 è opzionale);
- estremi vincolati di funzioni da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ , inclusi il teorema delle funzioni implicite e il metodo dei moltiplicatori: Paragrafo 13.1.4 e Paragrafo 13.2 (il Paragrafo 13.3 è opzionale);
- teorema delle funzioni implicite, estremi vincolati e metodo dei moltiplicatori per funzioni da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$ : da Paragrafo 13.1.4 a Paragrafo 13.1.6, Paragrafo 13.2, Paragrafo 13.4 e Paragrafo 13.5 (il Paragrafo 13.3 è opzionale).

Nel Capitolo 11 abbiamo visto come determinare gli estremi liberi, anche detti *non vincolati*, di una funzione di più variabili a valori scalari, ovvero i punti di massimo e minimo della funzione appartenenti a un insieme *aperto*  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se  $X$  non è aperto, bisogna considerare anche il caso di punti di estremo appartenenti alla frontiera  $\partial X$ , un problema che porterà al concetto di *estremo vincolato*.

La parte iniziale del capitolo è dedicata ad alcune questioni di interesse indipendente riguardanti la risolubilità di sistemi di equazioni non lineari. In particolare sarà introdotto il concetto di *funzione implicita*, che servirà per studiare gli estremi vincolati.

## 13.1 Sistemi lineari e non lineari

### 13.1.1 Introduzione

In questo capitolo, utilizzeremo alcuni strumenti dell'algebra lineare (si veda l'appendice disponibile sul sito internet). Si consideri il seguente sistema di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{x} \rangle = y_1 \\ \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{x} \rangle = y_2 \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}_m, \mathbf{x} \rangle = y_m \end{cases} \quad (13.1)$$

con  $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$  per  $k = 1, \dots, m$ . Posti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

la (13.1) si scrive anche in forma matriciale:  $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

Se  $n = m$ , è ben noto che la matrice  $A$  è invertibile se e solo se è non singolare:  $\det A \neq 0$ . In tal caso, indicando la matrice inversa con  $A^{-1}$ , per ogni  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  la (13.1) ha una e una sola soluzione  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$$\text{se } m = n \text{ e } \det A \neq 0, \text{ allora: } A\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (13.2)$$

Si ricordi che la condizione  $\det A \neq 0$  è verificata se e solo se i vettori  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  sono linearmente indipendenti.

Se  $1 \leq m < n$ , la (13.2) implica un risultato altrettanto ben noto: se  $m < n$  e se il rango della matrice  $A$  è massimo, cioè  $m$ , ovvero se

i vettori  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  sono linearmente indipendenti,

$m$  incognite possono essere espresse in funzione delle rimanenti  $n - m$ . Infatti, se il rango di  $A$  è  $m$ , esistono  $m$  colonne nella matrice  $A$  tale che la matrice  $m \times m$  che consiste di tali  $m$  colonne è non singolare; a essa si può quindi applicare il risultato precedente. Per esempio, se si tratta delle prime  $m$  colonne di  $A$ , cioè se

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (13.3)$$

si può riscrivere la (13.1) come

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = y_1 - a_{1(m+1)}x_{m+1} \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = y_2 - a_{2(m+1)}x_{m+1} \dots - a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mm}x_m = y_m - a_{m(m+1)}x_{m+1} \dots - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Quindi, per la (13.2), se vale la (13.3) esistono opportune costanti  $c_{ij}$  e  $d_i$  ( $i = 1, \dots, m; j = m+1, \dots, n$ ) tali che

$$\begin{cases} x_1 = c_{1(m+1)}x_{m+1} + c_{1(m+2)}x_{m+2} + \dots + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{2(m+1)}x_{m+1} + c_{2(m+2)}x_{m+2} + \dots + c_{2n}x_n + d_2 \\ \vdots \\ x_m = c_{m(m+1)}x_{m+1} + c_{m(m+2)}x_{m+2} + \dots + c_{mn}x_n + d_m. \end{cases} \quad (13.4)$$

In altre parole, se  $m < n$  e se vale la (13.3), il sistema (13.1) può essere "risolto" esprimendo le prime  $m$  incognite in funzione delle rimanenti  $n - m$ .

Se le equazioni sono *non lineari* la situazione si complica notevolmente. È naturale però chiedersi se tramite il procedimento di *linearizzazione*, ovvero l'utilizzo del concetto di approssimazione lineare, sia possibile intuire come formulare analoghi risultati nel caso non lineare. Più precisamente, data una funzione a valori scalari,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , definita in un insieme aperto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  e differenziabile nel punto  $\mathbf{x}_0 \in X$ , si ha che

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|) \quad \text{per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

*Linearizzare  $f$  intorno a  $\mathbf{x}_0$*  significa sostituire a  $f$  la sua approssimazione lineare:

$$\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle.$$



Se  $f$  è una funzione vettoriale,  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ , tale linearizzazione si effettua componente per componente e l'approssimazione lineare di  $f$  intorno a  $\mathbf{x}_0$  diventa

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (13.5)$$

dove  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$  è la matrice jacobiana che ha come  $i$ -esima riga il gradiente di  $f_i$  in  $\mathbf{x}_0$ :

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Di seguito considereremo separatamente i casi  $m = n$  e  $1 \leq m < n$ . Non sorprende che nel caso non lineare i risultati avranno un carattere strettamente *locale*, ovvero varranno in un intorno sufficientemente piccolo di  $\mathbf{x}_0$ . Lo scopo principale è fornire allo studente uno strumento per interpretarli e per capire l'origine delle loro ipotesi; ometteremo invece quasi tutte le dimostrazioni.

### 13.1.2 $m = n$ : il teorema di inversione locale

Per la (13.2), se  $m = n$  l'approssimazione lineare (13.5) è invertibile in  $\mathbb{R}^n$  se e solo se la matrice jacobiana in  $\mathbf{x}_0$ ,  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ , è non singolare, ovvero se e solo se

$$\nabla f_1(\mathbf{x}_0), \nabla f_2(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla f_n(\mathbf{x}_0) \text{ sono linearmente indipendenti} \quad (13.6)$$

e in questo caso la funzione inversa della (13.5) è data dalla formula

$$\mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}_0 + (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \quad (13.7)$$

dove  $(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1}$  è la matrice inversa di  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ . Infatti, posto  $M := J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + M(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y} &\Leftrightarrow M(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = M^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + M^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)). \end{aligned}$$

Nel caso non lineare vale il seguente risultato.

#### TEOREMA 13.1 Teorema di invertibilità locale

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  in  $X$  e  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Se la matrice  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$  è non singolare, ovvero se vale la (13.6), esiste un intorno  $V$  di  $\mathbf{x}_0$  in cui  $\mathbf{f}$  è iniettiva. La funzione inversa  $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(V) \rightarrow V$  è differenziabile in  $\mathbf{f}(V)$ ,  $\mathbf{f}(V)$  contiene un intorno di  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  e

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1} \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in V. \quad (13.8)$$

Si osservi che se  $\mathbf{f} \in C^1(X)$  e  $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , allora  $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$  in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  (per la proprietà della permanenza del segno), quindi  $(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1}$  è definita in tale intorno. La formula (13.8) per le derivate parziali della funzione inversa è identica a quella del caso lineare (si veda la (13.7)).

Riassumendo, il Teorema 13.1 afferma che la condizione  $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , trovata dopo il processo di linearizzazione intorno al punto  $\mathbf{x}_0$ , garantisce l'invertibilità in un intorno sufficientemente piccolo di  $\mathbf{x}_0$ , ovvero l'*invertibilità locale* di  $\mathbf{f}$ .

La funzione

$$\mathbf{f}(x, y) = (2x + 3y^2, -y + xy)$$

è localmente invertibile se  $(x, y)$  non appartiene alla parabola di equazione  $x = 1 + 3y^2$ . Infatti

$$\det J_{\mathbf{f}}(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2 & 6y \\ y & x - 1 \end{pmatrix} = 2(x - 1 - 3y^2) \neq 0 \quad \text{se } x \neq 1 + 3y^2.$$

**ESEMPIO 13.1**

Discutere l'invertibilità e l'invertibilità locale della funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  così definita:

$$\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

**ESERCIZIO 13.1**

### 13.1.3 $m < n$ : il teorema delle funzioni implicite

Se  $1 \leq m < n$  si considerino, in un intorno di  $\mathbf{x}_0$ , le seguenti  $m$  equazioni non lineari in  $n$  incognite:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(\mathbf{x}_0) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_m(\mathbf{x}_0). \end{cases} \quad (13.9)$$

La linearizzazione (13.5) intorno a  $\mathbf{x}_0$  conduce al sistema lineare

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \langle \nabla f_1(\mathbf{x}_0), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = b_1 \\ \langle \nabla f_2(\mathbf{x}_0), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = b_2 \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\mathbf{x}_0), (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = b_m \end{cases} \quad (13.10)$$

dove  $\mathbf{b} := J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0$  e  $b_k := \langle \nabla f_k(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \rangle$  per  $k = 1, \dots, m$ .

Come abbiamo visto, se

$$\nabla f_1(\mathbf{x}_0), \nabla f_2(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \text{ sono linearmente indipendenti} \quad (13.11)$$

il sistema (13.10) è equivalente a uno in cui  $m$  incognite possono essere espresse in funzione delle rimanenti  $n - m$ . Per esempio, se

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (13.12)$$

il sistema (13.10) può essere “risolto” esprimendo le prime  $m$  incognite in funzione delle rimanenti  $n - m$ . Il seguente risultato afferma che la stessa cosa accade per il sistema originale equazioni non lineari, *localmente in un intorno di  $\mathbf{x}_0$* .

**TEOREMA 13.2** Teorema delle funzioni implicite, o di Dini

Siano  $1 \leq m < n$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^1$  in  $X$  e  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in X$ . Se vale la (13.12), allora esistono un intorno  $\mathcal{U}$  di  $(x_{0(m+1)}, \dots, x_{0n})$  in  $\mathbb{R}^{n-m}$ , un intorno  $\mathcal{V}$  di  $(x_1, \dots, x_m)$  in  $\mathbb{R}^m$  e una e una sola funzione  $\mathbf{g} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ , di classe  $C^1$  in  $\mathcal{U}$ , tali che

$$\begin{aligned} & \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : \mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\} \\ & = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : x_i = g_i(x_{m+1}, \dots, x_n) \forall i = 1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Se vale la (13.12) si dice anche che l'equazione  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  definisce implicitamente le  $m$  funzioni  $g_i$ . La (13.13) e la regola della catena permettono poi di ricavare una formula per le derivate parziali di  $g_1, \dots, g_m$  in  $(x_{0(m+1)}, x_{0(m+2)}, \dots, x_{0n})$ .

Una conseguenza importante del teorema delle funzioni implicite è l'esistenza di curve  $\boldsymbol{\gamma} \in C^1(I)$  passanti per  $\mathbf{x}_0$ , contenute in  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  e tali che  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $t \in I$ . Infatti, scelte  $n - m$  componenti  $\gamma_k(t)$  “liberamente” (cioè come funzioni di classe  $C^1$  in  $I$  tali che  $\gamma_k(t_0) = x_{0k}$  per  $k = m + 1, \dots, n$ ), le  $m$  rimanenti sono prescritte dalle altre come  $\gamma_i(t) := g_i(\gamma_{m+1}(t), \dots, \gamma_n(t))$  per  $i = 1, \dots, m$  e  $t \in I$ . Inoltre, dalla relazione  $\mathbf{f}(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  e dalla regola della catena segue che ogni curva  $\boldsymbol{\gamma}(t)$  che soddisfa tali condizioni verifica la relazione

$$\langle \nabla f_i(\mathbf{x}_0), \boldsymbol{\gamma}'(t_0) \rangle = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, m. \quad (13.14)$$

Poiché il sostegno di  $\boldsymbol{\gamma}$  è contenuto in  $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\}$ , il vettore  $\boldsymbol{\gamma}'(t_0)$  (se diverso da  $\mathbf{0}$ ) può essere interpretato come una “direzione tangente” nel punto  $\mathbf{x}_0$  a tale insieme; la (13.14) quindi implica che tutte le possibili direzioni tangenti all'insieme  $\{\mathbf{x} \in X : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\}$  sono ortogonali agli  $m$  gradienti  $\nabla f_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla f_m(\mathbf{x}_0)$ . Si noti che la (13.14) corrisponde al fatto che nel caso linearizzato  $\langle \nabla f_i(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$  per ogni  $\mathbf{x}$  che verifica la (13.10).

Nonostante il confronto con i sistemi di equazioni lineari, nella sua generalità di funzioni da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$  il teorema delle funzioni implicite può sembrare piuttosto complicato. Per chiarirlo ulteriormente, nel seguito si considerano alcuni casi concreti per valori “bassi” di  $m$  e  $n$ , cominciando dal caso più semplice di una sola equazione di due variabili.

### 13.1.4 $m = 1, n = 2$ : curve di livello

In questo paragrafo, che non presuppone la lettura di quelli precedenti; si considera l'equazione

$$f(x, y) = c$$

dove  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua in un aperto  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $(x, y) \in X$ . È istruttivo partire dal caso lineare,  $f(x, y) = ax + by$ . L'equazione  $ax + by = c$  descrive una retta se  $\nabla f = (a, b) \neq (0, 0)$ . Se  $f_x = a \neq 0$  si può “risolvere”  $x$  in funzione di  $y$ :  $x = g(y) := \frac{c-by}{a}$ . In tal caso la funzione  $g(y)$  è definita implicitamente dall'equazione  $ax + by = c$  e si dice **funzione implicita** relativa all'equazione  $ax + by = c$ . Ovviamente, se  $b \neq 0$ , è possibile esprimere  $y$  in  $x$ :  $y = h(x) := \frac{c-ax}{b}$  e anche  $h(x)$  è una funzione implicita relativa a  $ax + by = c$ .



Sotto opportune condizioni è possibile effettuare una procedura molto simile se  $f$  è una funzione non lineare. Vediamo prima un esempio.

L'equazione  $x^2 + y^2 = 1$  rappresenta la circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine. Ovviamente la circonferenza non è il grafico di una sola funzione, quindi non è possibile rappresentarla come il grafico una sola equazione del tipo  $x = g(y)$  (o  $y = h(x)$ ). Localmente però è possibile esplicitare delle funzioni implicite relative a  $x^2 + y^2 = 1$ : l'equazione  $x = \sqrt{1 - y^2}$ , per  $-1 \leq y \leq 1$ , rappresenta la semicirconferenza "destra"; analogamente  $x = -\sqrt{1 - y^2}$  rappresenta la semicirconferenza sinistra,  $y = \sqrt{1 - x^2}$  la semicirconferenza "superiore" e  $y = -\sqrt{1 - x^2}$  quella "inferiore". Le funzioni  $\pm\sqrt{1 - y^2}$  e  $\pm\sqrt{1 - x^2}$  sono quindi definite implicitamente da  $x^2 + y^2 = 1$ .

In questo esempio i 4 punti  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1)$  giocano un ruolo particolare: non esiste alcun intorno di  $(1, 0)$  o di  $(-1, 0)$  in cui la circonferenza possa essere rappresentata da un'equazione del tipo  $y = h(x)$ , così come intorno ai punti  $(0, \pm 1)$  non è possibile rappresentare la circonferenza con un'equazione del tipo  $x = g(y)$ . Questo accade perché in  $(\pm 1, 0)$  la retta tangente alla circonferenza è verticale, ovvero  $f_x(\pm 1, 0) = 0$  mentre in  $(0, \pm 1)$  è orizzontale, ovvero  $f_y(0, \pm 1) = 0$ ; queste due situazioni corrispondono rispettivamente, nel caso lineare, ai casi particolari  $a = 0$  e  $b = 0$ .

Il teorema delle funzioni implicite generalizza l'esempio precedente: per esempio, se  $f_x \neq 0$  in un punto in cui  $f(x_0, y_0) = c$ , allora esiste un intorno di  $(x_0, y_0)$  in cui l'equazione  $f(x, y) = c$  è equivalente a una del tipo  $x = g(y)$  (si veda la Figura 13.1).

### ESEMPIO 13.2

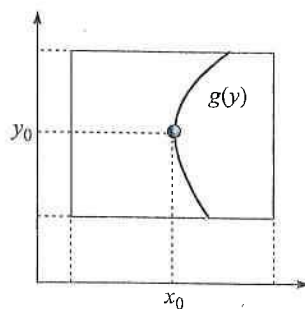


Figura 13.1  $f$  è costante sul grafico di  $g$ .

### TEOREMA 13.3

#### Teorema di Dini, $f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Siano  $X \subset \mathbb{R}^2$  aperto,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $X$  e  $(x_0, y_0) \in X$ . Se  $f_x$  è continua in  $X$  e se

$$f_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad (13.15)$$

esistono un intorno  $\mathcal{U} = (y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2)$  di  $y_0$ , un intorno  $\mathcal{V} = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$  di  $x_0$  e una e una sola funzione  $g: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , continua in  $\mathcal{U}$ , tali che il rettangolo  $\mathcal{V} \times \mathcal{U} = (x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1) \times (y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2)$  è contenuto in  $X$  e

$$\{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : f(x, y) = f(x_0, y_0)\} = \{(x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : x = g(y)\}. \quad (13.16)$$

Se  $f \in C^1(X)$  allora  $g \in C^1(\mathcal{U})$  e

$$g'(y) = -\frac{f_y(g(y), y)}{f_x(g(y), y)} \quad \text{per } y_0 - \varepsilon_2 < y < y_0 + \varepsilon_2. \quad (13.17)$$

### Dimostrazione

Se vale la (13.15), si dice anche che l'equazione  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  definisce implicitamente la funzione  $y \mapsto g(y)$ . Si noti che, una volta dimostrata l'esistenza di  $g'(y)$ , la formula (13.17) per  $g'(y)$  segue dalla regola della catena: per la (13.16), la funzione  $y \mapsto f(g(y), y)$  è costante ( $= c$ ), quindi ha derivata zero, sicché per ogni  $y \in \mathcal{U}$  risulta

$$0 = \frac{d}{dy} f(g(y), y) = f_x(g(y), y)g'(y) + f_y(g(y), y).$$

Se  $f$  è più regolare, anche  $g$  è più regolare e se ne possono calcolare le derivate successive: per esempio, se  $f \in C^2(X)$  allora segue dalla (13.17) che  $g$  è di classe  $C^2$  nell'intorno di  $y_0$  e

$$\begin{aligned} g''(y) &= -\frac{d}{dy} \left( \frac{f_y(g(y), y)}{f_x(g(y), y)} \right) \\ &= -\frac{f_{xy}(g(y), y)g'(y) + f_{yy}(g(y), y)}{f_x(g(y), y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + f_y(g(y), y) \frac{f_{xx}(g(y), y)g'(y) + f_{xy}(g(y), y)}{f_x^2(g(y), y)} \\
 & = \left( \frac{2f_y f_{xy}}{f_x^2} - \frac{f_{yy}}{f_x} - \frac{f_y^2 f_{xx}}{f_x^3} \right) \Big|_{x=g(y)}.
 \end{aligned}$$

Come già evidenziato nel caso dell'equazione della circonferenza, scambiando i ruoli di  $x$  e  $y$  si può applicare il teorema di Dini all'equazione  $f(x, y) = c$  se almeno una delle due derivate parziali di  $f$  non si annulla in  $(x_0, y_0)$ , ovvero se  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Tali punti si dicono *punti regolari* dell'insieme  $\{(x, y) \in X : f(x, y) = c\}$ .

**DEFINIZIONE 13.4**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  in  $X$ . Allora  $(x_0, y_0) \in X$  si dice **punto regolare** dell'insieme  $\{(x, y) \in X : f(x, y) = c\}$  se  $f(x_0, y_0) = c$  e

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0).$$

Segue quindi dal teorema di Dini che in un intorno sufficientemente piccolo di un suo punto regolare, l'insieme delle soluzioni di  $f(x, y) = c$  è il sostegno di una curva cartesiana di classe  $C^1$  (si veda Figura 13.2).

**TEOREMA 13.5**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e connesso e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  in  $X$ . Se  $(x_0, y_0)$  è punto regolare di  $\{(x, y) \in X : f(x, y) = c\}$ , allora esistono un rettangolo

$$R = [x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1] \times [y_0 - \varepsilon_2, y_0 + \varepsilon_2] \subseteq X \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0)$$

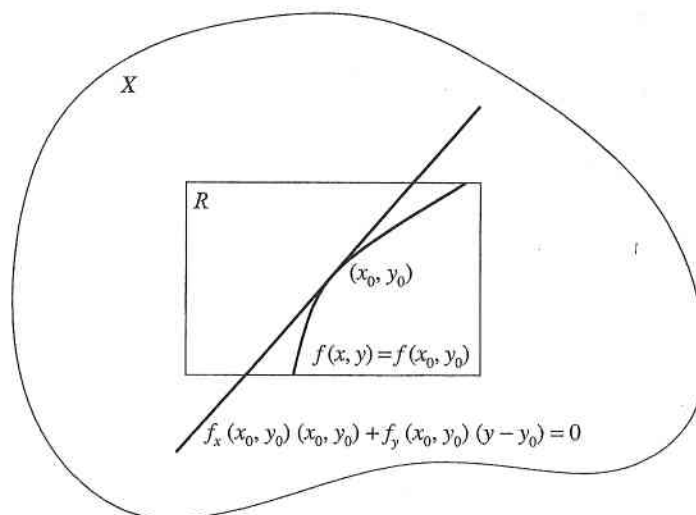
e una curva cartesiana  $\gamma$  di classe  $C^1$  contenuta in  $R$ , tali che i due punti estremi di  $\gamma$  si trovano su due lati opposti del rettangolo e il sostegno di  $\gamma$  è l'insieme  $\{(x, y) \in R : f(x, y) = c\}$ . La retta di equazione

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad (13.18)$$

è tangente al sostegno di  $\gamma$  in  $(x_0, y_0)$ .

Infatti, se  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$  il risultato segue dal Teorema 13.3 scegliendo il rettangolo opportunamente. In particolare la (13.18) segue dalla (13.17). Se  $f_x(x_0, y_0) = 0$ , allora  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$  (essendo  $(x_0, y_0)$  un punto regolare) e basta scambiare i ruoli di  $x$  e  $y$ .

**Figura 13.2** Il Teorema 13.5.

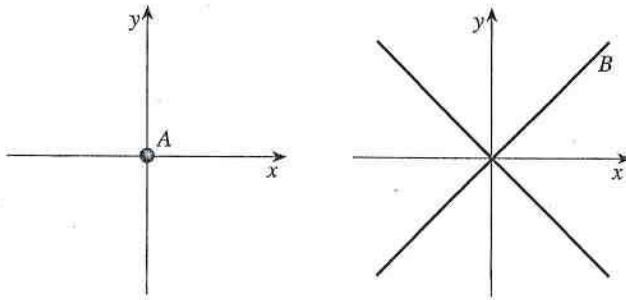




Se  $\{(x, y) \in X : f(x, y) = c\}$  consiste di punti regolari, tale insieme si dice anche **curva di livello** di  $f$  (con un lieve abuso di nomenclatura, identificando curva e disegno) e la retta (13.18) si dice **retta tangente alla curva di livello di  $f$  in  $(x_0, y_0)$** . Per esempio, la circonferenza di centro nell'origine e raggio  $R$  è una curva di livello di  $x^2 + y^2$ .

Nel Teorema 13.5, la condizione che  $(x_0, y_0)$  sia un punto regolare di  $\{(x, y) \in X : f(x, y) = c\}$  è essenziale, come mostra il prossimo esempio.

Il punto  $(0, 0)$  non è un punto regolare di  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$  e neanche di  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$  (si veda Figura 13.3). Nel primo caso  $(0, 0)$  è l'unico punto di  $A$  e chiaramente non valgono i teoremi precedenti. Nel secondo caso  $B$  è l'unione delle due rette di equazione  $x + y = 0$  e  $x - y = 0$  che si intersecano nell'origine, quindi in nessun intorno di  $(0, 0)$  è possibile rappresentare  $B$  come il grafico di una funzione.



Curva di livello



**ESEMPIO 13.3**

Figura 13.3 Gli insiemi  $A$  e  $B$ .

L'ellisse di equazione

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (a, b > 0)$$

consiste di soli punti regolari e, per la (13.18), la retta tangente passante per un suo punto  $(x_0, y_0)$  ha equazione

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

(si veda Figura 13.4).

**ESEMPIO 13.4**

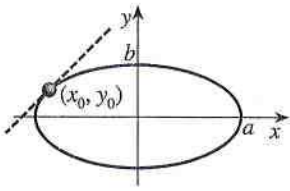


Figura 13.4

Segue dalla (13.18) che nei punti regolari

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ è ortogonale alla retta tangente alla curva di livello di } f \text{ in } (x_0, y_0). \tag{13.19}$$

Come osservato nel Paragrafo 11.2, il gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$  indica la direzione di massima crescita; da ciò segue (si veda Figura 13.5) che la curva di livello di  $f$  passante per  $(x_0, y_0)$  divide il rettangolo  $R$  (indicato nel Teorema 13.5) in due insiemi connessi in cui  $f$  è, rispettivamente, maggiore e minore di  $c$ .

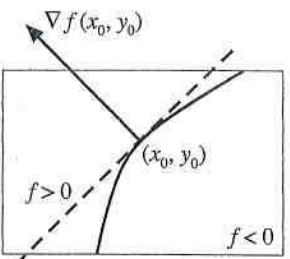


Figura 13.5

Nella Figura 13.6 sono state indicate alcune curve di livello della funzione considerata nell'esempio precedente,  $f(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ . Si osservi che  $f$  ha un minimo libero nell'origine, quindi  $(0, 0)$  è punto critico di  $f$  e la condizione  $\nabla f \neq (0, 0)$  non è verificata nell'origine. Negli altri punti il gradiente è ortogonale alle curve di livello.

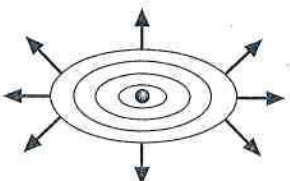
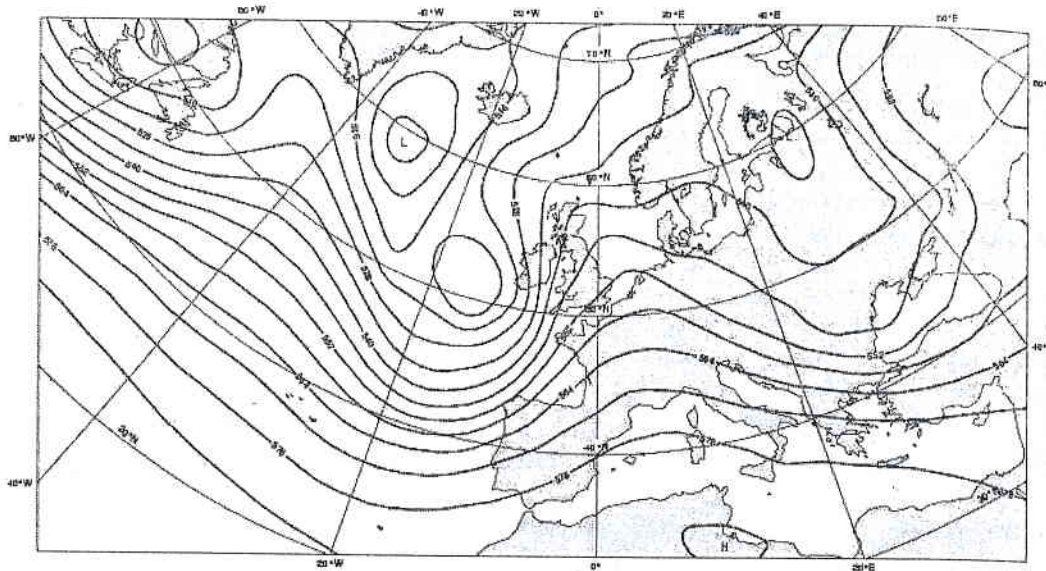


Figura 13.6 Curve di livello e gradienti di  $f(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ .

Un esempio "quotidiano" di curve di livello sono le curve di pressione atmosferica costante indicate in una mappa geografica, dette isobare (si veda Figura 13.7); in tal caso i punti di alta pressione (H) e bassa pressione (L) rappresentano, rispettivamente, i punti di massimo e di minimo della funzione pressione.



**Figura 13.7** Curve di livello della funzione pressione. (Fonte: ECMWF Forecast)



### ESERCIZIO 13.2

Disegnare alcune curve di livello delle seguenti funzioni:

- a)  $f(x, y) = 2x + y - 1$ ;                      c)  $f(x, y) = (x + 3)(y - 2)$ ;  
 b)  $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - 4$ ;                      d)  $f(x, y) = x - (y - 3)^2$ .

### ESERCIZIO 13.3

Trovare un'espressione esplicita per le due funzioni definite implicitamente dall'equazione  $x^2y = 4$  in  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ .

### ESERCIZIO 13.4

Nei seguenti casi determinare l'equazione della retta tangente alla curva di livello di  $f$  nel punto  $(2, 1)$ :

- a)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^5 - 2y$ ;                      b)  $f(x, y) = (x - y) \log(e + xy - x^2 + 2y^2) - 1$ .

### ESERCIZIO 13.5

Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in  $x = 1$  delle funzioni  $x \mapsto g(x)$  definite implicitamente dalle seguenti equazioni:

- a)  $f(x, y) := x^5 - 3x^2y + 3 = f(1, 1)$ ;                      b)  $f(x, y) := \log(xy) - 2x + y = f(1, 1)$ .

### 13.1.5 $m = 1, n = 3$ : l'equazione $f(x, y, z) = c$

Anche nel caso di una sola equazione in tre variabili, si cerca una versione locale di quello che, nel caso *lineare*, si riduce a una semplice osservazione. L'equazione lineare

$$f(x, y, z) := ax + by + cz = d$$

rappresenta un piano nello spazio se e solo se  $\nabla f = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  e in tal caso  $\nabla f = (a, b, c)$  è ortogonale al piano. Per esempio, se  $f_x = a \neq 0$  il piano è il grafico della funzione

$$(y, z) \mapsto g(y, z) = \frac{d - by - cz}{a}$$

detta funzione implicita relativa a  $ax + by + cz = d$ .

Nel caso generale di una funzione *non lineare*,  $f$ , la seguente versione del teorema delle funzioni implicite afferma che l'equazione  $f(x, y, z) = c$  definisce implicitamente una funzione  $(y, z) \mapsto g(y, z)$  in un intorno sufficientemente piccolo di un punto in cui  $f_x \neq 0$ .

**TEOREMA 13.6**

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $X$  e  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$ . Se  $f_x$  è continua in  $X$  e

$$f_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \quad (13.20)$$

esistono un intorno  $\mathcal{U}$  di  $(y_0, z_0)$  in  $\mathbb{R}^2$ , un intorno  $\mathcal{V} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  di  $x_0$  e una e una sola funzione  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , continua in  $\mathcal{U}$ , tali che  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  è contenuto in  $X$  e

$$\{(x, y, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : f(x, y, z) = f(\mathbf{x}_0)\} = \{(x, y, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : x = g(y, z)\}. \quad (13.21)$$

Se  $f \in C^1(X)$  allora  $g \in C^1(\mathcal{U})$  e, per ogni  $(y, z) \in \mathcal{U}$ ,

$$g_y(y, z) = -\frac{f_y(g(y, z), y, z)}{f_x(g(y, z), y, z)}, \quad g_z(y, z) = -\frac{f_z(g(y, z), y, z)}{f_x(g(y, z), y, z)}. \quad (13.22)$$

In altre parole, nelle ipotesi del teorema le equazioni  $f(x, y, z) = f(\mathbf{x}_0)$  e  $x = g(y, z)$  sono equivalenti se ci si limita all'intorno  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$ .

Segue dalla (13.22) che il piano tangente al grafico di  $g$  in  $\mathbf{x}_0$  ha equazione

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0 \quad (13.23)$$

ovvero che  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  è parallelo al vettore  $(1, -g_y(y_0, z_0), -g_z(y_0, z_0))$ .

In analogia con le curve di livello per le funzioni di due variabili,  $(x_0, y_0, z_0)$  si dice **punto regolare** dell'insieme  $\{(x, y, z) \in X : f(x, y, z) = c\}$  se  $f(x_0, y_0, z_0) = c$  e

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Se  $\{(x, y, z) \in X : f(x, y, z) = c\}$  consiste di soli punti regolari, si può chiamarlo "superficie di livello" di  $f$ .

In conclusione, scambiando opportunamente i ruoli di  $x$ ,  $y$  e  $z$ , segue dal teorema delle funzioni implicite che se  $f \in C^1(X)$ , l'insieme  $\{(x, y, z) \in X : f(x, y, z) = c\}$  coincide in intorni sufficientemente piccoli dei suoi punti regolari  $(x_0, y_0, z_0)$  con il grafico di una funzione di due variabili di classe  $C^1$  il cui piano tangente ha la (13.23) come equazione (si confronti con il Teorema 13.5).

In particolare il gradiente  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ , che indica anche in questo caso la direzione di massima crescita di  $f$ , è ortogonale al piano tangente.

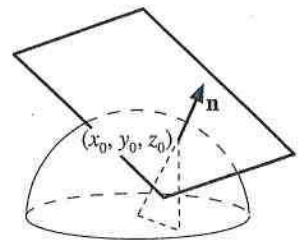
L'equazione  $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = 9$  definisce la sfera di raggio 3 e centro  $(0, 0, 0)$ . Come nel caso della circonferenza nel piano, è possibile esplicitarne le funzioni implicite in un intorno di un generico punto  $(x_0, y_0, z_0)$  della sfera. Ce ne sono sei:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} && \text{se } z_0 > 0 \\ g_2(x, y) &= -\sqrt{9 - x^2 - y^2} && \text{se } z_0 < 0 \\ g_3(y, z) &= \sqrt{9 - y^2 - z^2} && \text{se } x_0 > 0 \\ g_4(y, z) &= -\sqrt{9 - y^2 - z^2} && \text{se } x_0 < 0 \\ g_5(x, z) &= \sqrt{9 - x^2 - z^2} && \text{se } y_0 > 0 \\ g_6(x, z) &= -\sqrt{9 - x^2 - z^2} && \text{se } y_0 < 0. \end{aligned}$$

Il grafico della funzione  $z = g_1(x, y)$  rappresenta la semisfera superiore e così via. Per la (13.23), il piano tangente al grafico di  $g_1$  nel punto  $(x_0, y_0, z_0)$  ( $z_0 > 0$ ) ha equazione

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

(si veda Figura 13.8).

**ESEMPIO 13.5**

**Figura 13.8** La funzione  $g_1(x, y)$  e il suo piano tangente:

$$\mathbf{n} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) / \|\nabla f(x_0, y_0, z_0)\|.$$





$\nabla f \wedge \nabla g$  (si veda l'appendice di algebra lineare disponibile sul sito internet dedicato al libro). Per esempio, se

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

si possono esprimere  $x$  e  $y$  in funzione di  $z$ , ovvero si può utilizzare  $z$  per parametrizzare la retta di intersezione.

Nella seguente versione del teorema delle funzioni implicite, che rappresenta la variante locale e non lineare del ragionamento appena svolto, la retta diventa una curva parametrizzata da  $z$ .

Appendice

### TEOREMA 13.7

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto,  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $X$  e  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in X$ . Se  $f_x, f_y, g_x$  e  $g_y$  sono continue in  $X$  e

$$\det \begin{pmatrix} f_x & g_y \\ g_x & f_y \end{pmatrix} = f_x g_y - g_x f_y \neq 0 \quad \text{in } \mathbf{x}_0 \quad (13.26)$$

allora esistono un intorno  $\mathcal{U} = (z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$  di  $z_0$ , un intorno  $\mathcal{V}$  di  $(x_0, y_0)$  in  $\mathbb{R}^2$  ed esattamente due funzioni:  $h_1, h_2 : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , tali che  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  è contenuto in  $X$ ,  $(h_1(z), h_2(z)) \in \mathcal{V}$  per ogni  $z \in \mathcal{U}$  e

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : f(x, y, z) = f(\mathbf{x}_0), g(x, y, z) = g(\mathbf{x}_0)\} \\ = \{(x, y, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{U} : x = h_1(z), y = h_2(z)\}. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Se  $f, g \in C^1(X)$  allora  $h_1, h_2 \in C^1(\mathcal{U})$  e, per ogni  $z \in \mathcal{U}$ , la retta tangente alla curva  $z \mapsto (h_1(z), h_2(z), z)$  in  $(x, y, z) = (h_1(z), h_2(z), z)$  è perpendicolare a  $\nabla f(x, y, z)$  e  $\nabla g(x, y, z)$ , ossia tangente al prodotto vettoriale  $\nabla f(x, y, z) \wedge \nabla g(x, y, z)$ .

Se  $f, g \in C^1(X)$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  si dice **punto regolare** dell'insieme  $\{(x, y, z) \in X : f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0), g(x, y, z) = g(x_0, y_0, z_0)\}$  se

$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  sono linearmente indipendenti.

Eventualmente permutando  $x, y$  e  $z$ , segue quindi dal Teorema 13.7 che in un intorno sufficientemente piccolo di un suo punto regolare, l'insieme  $\{(x, y, z) \in X : f(x, y, z) = c \text{ e } g(x, y, z) = d\}$  definisce implicitamente una curva il cui vettore tangente nel punto è proporzionale a  $\nabla f \wedge \nabla g$ .

Date le funzioni

$$f(x, y, z) := x^5 y - y^2 \sqrt{z} \quad \text{e} \quad g(x, y, z) := \log(x + y + z) + x^2 \sin(y + z),$$

il punto  $(1, -1, 1)$  appartiene agli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = -2\} \quad \text{e} \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}.$$

Vogliamo sapere se localmente, intorno a  $(1, -1, 1)$ , l'intersezione di tali insiemi definisce una curva. Si calcolano facilmente i gradienti di  $f$  e  $g$  in  $(1, -1, 1)$ :

$$\nabla f(1, -1, 1) = \left(-5, 3, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad \nabla g(1, -1, 1) = (1, 2, 2)$$

quindi, per il Teorema 13.7, la curva esiste in un intorno di  $(1, -1, 1)$ . Inoltre in  $(1, -1, 1)$  esiste la retta tangente alla curva: passa per  $(1, -1, 1)$  e ha direzione

$$\nabla f(1, -1, 1) \wedge \nabla g(1, -1, 1) = \left(7, \frac{19}{2}, -13\right)$$

### ESEMPIO 13.7

ovvero è la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = -1 + 19t \\ z = 1 - 26t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

### ESERCIZIO 13.7

Nei seguenti casi, dire se  $(1, 1, 1)$  è un punto regolare dell'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$  e in tal caso determinare la retta tangente alla curva definita implicitamente dalle seguenti equazioni nel punto  $(1, 1, 1)$ :

- a)  $x^2 + y^4 + z^2 = 3$  e  $x^4 + y^2 + z^4 = 3$ ;  
 b)  $e^{x^2-1} - y \cos(z-1) = 0$  e  $x + y + z = 3$ ;  
 c)  $\log(xyz) = 0$  e  $e^{x+y+z-3} = 1$ .

## 13.2 Estremi vincolati di funzioni di due variabili

### 13.2.1 Nozione di estremo vincolato

Ricordiamo che una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice semplice se è iniettiva tranne al più negli estremi di  $I$ , ovvero  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  a meno che  $t_1, t_2 \in \partial I$ .

Sia  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto. In questo paragrafo si considera il seguente problema:

dati una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e il sostegno  $\Gamma \subseteq X$  di una curva semplice, si cercano gli estremi della restrizione di  $f$  a  $\Gamma$

È opportuno introdurre una nomenclatura specifica per tali estremi.

#### DEFINIZIONE 13.8

Siano  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\Gamma \subseteq X$  il sostegno di una curva semplice. Un punto  $(x_0, y_0) \in \Gamma$  si dice **punto di massimo (relativo, locale) di  $f$  vincolato a  $\Gamma$**  se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $(x_0, y_0)$ ,  $\mathcal{U} \subseteq X$ , tale che

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathcal{U} \cap \Gamma. \quad (13.28)$$

In questo contesto, l'insieme  $\Gamma$  prende il nome di **vincolo**. Ovviamente la definizione di **punto di minimo vincolato** è analoga.

Vincolo

### 13.2.2 Estremi vincolati: metodo diretto

Mostriamo prima, attraverso alcuni esempi, come in certi casi sia possibile determinare i punti di estremo vincolato riconducendosi, attraverso funzioni composte, al caso di una variabile.

#### ESEMPIO 13.8

Si vogliono trovare gli estremi di  $f(x, y) = xy - y^2 + 3$  vincolati a  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 = 1\}$ . Il vincolo è il grafico della funzione  $y \mapsto 1 - y^2$  (una parabola), ossia il sostegno della curva

$$\gamma(y) = (1 - y^2, y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Quindi il problema si riduce allo studio della funzione composta  $h(y) := f(\gamma(y))$ , che è una funzione di una sola variabile:

$$h(y) = f(1 - y^2, y) = (1 - y^2)y - y^2 + 3 = -y^3 - y^2 + y + 3, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Considerando il segno della derivata  $h'(y) = -3y^2 - 2y + 1 = (y + 1)(1 - 3y)$ , si conclude facilmente che  $y = 1/3$  è punto di massimo relativo di  $h$  e  $y = -1$  è un punto di minimo relativo. Quindi i punti  $(8/9, 1/3)$  e  $(0, -1)$  sono, rispettivamente, punto di massimo vincolato e punto di minimo vincolato a  $\Gamma$  di  $f$ .

Determiniamo gli estremi di  $f(x, y) = 3x + 4y + 1$  vincolati all'ellisse di equazione  $9x^2 + 4y^2 = 36$ .

L'ellisse è il sostegno della curva semplice

$$t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (2 \cos t, 3 \sin t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si definisce allora la funzione composta

$$h(t) = f(2 \cos t, 3 \sin t) = 6 \cos t + 12 \sin t + 1 \quad t \in \mathbb{R}$$

la cui derivata si annulla se

$$h'(t) = 6(-\sin t + 2 \cos t) = 0.$$

Perciò (si veda Figura 13.9)  $h'(t) = 0$  ha due soluzioni in  $[0, 2\pi]$ ,

$$t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{e} \quad t_2 = t_1 + \pi \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

(in effetti  $t_1 = \arctg 2$ ) e  $h$  ha un punto di massimo assoluto in  $t_1$  e un punto di minimo assoluto in  $t_2$ . Utilizzando l'equazione del vincolo e la relazione

$$\gamma_2(t_1) = 3 \sin t_1 = 6 \cos t_1 = 3\gamma_1(t_1)$$

si conclude facilmente che  $\gamma_1(t_1) = 2/\sqrt{5}$  e  $\gamma_2(t_1) = 6/\sqrt{5}$ , ovvero  $f$  ha un massimo vincolato nel punto  $(2/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5})$  (in alternativa, basta calcolare  $\sin t_1 = \sin(\arctg 2) = 2/\sqrt{5}$  e  $\cos t_1 = \cos(\arctg 2) = 1/\sqrt{5}$ ). Analogamente si trova che  $f$  ha un minimo vincolato nel punto  $(-2/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5})$ .

I vincoli degli esempi precedenti sono il sostegno di curve  $C^1$  ma lo stesso metodo può essere utilizzato se la curva è di classe  $C^1$  a tratti.

Si cercano gli estremi  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 3$  su  $\Gamma$ , dove  $\Gamma$  è la frontiera del parallelogramma di vertici  $(-2, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(-1, 1)$ .

L'insieme  $\Gamma$  è l'unione dei sostegni  $\Gamma_i$  di quattro curve di classe  $C^1$  come indicato nella Figura 13.10. Su ogni tratto di curva è possibile utilizzare  $x$  come parametro e questo porta a 4 funzioni composte corrispondenti:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= f(x, 2x - 3) = x^2 + 2(2x - 3)^2 - x(2x - 3) + 3 \\ &= 7(x^2 - 3x + 3) && \text{per } 1 \leq x \leq 2 \\ h_2(x) &= f(x, 1) = x^2 - x + 5 && \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ h_3(x) &= f(x, 2x + 3) = 7(x^2 + 3x + 3) && \text{per } -2 \leq x \leq -1 \\ h_4(x) &= f(x, -1) = x^2 + x + 5 && \text{per } -2 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Da uno studio elementare delle 4 funzioni risulta che:

$$\begin{aligned} h_1 &\text{ è decrescente in } [1, 3/2) \text{ e crescente in } (3/2, 2], \\ h_2 &\text{ è decrescente in } [-1, 1/2) \text{ e crescente in } (1/2, 2], \\ h_3 &\text{ è decrescente in } [-2, -3/2) \text{ e crescente in } (-3/2, -1], \\ h_4 &\text{ è decrescente in } [-2, -1/2) \text{ e crescente in } (-1/2, 1]. \end{aligned}$$

## ESEMPIO 13.9

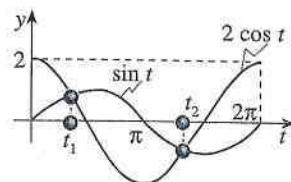
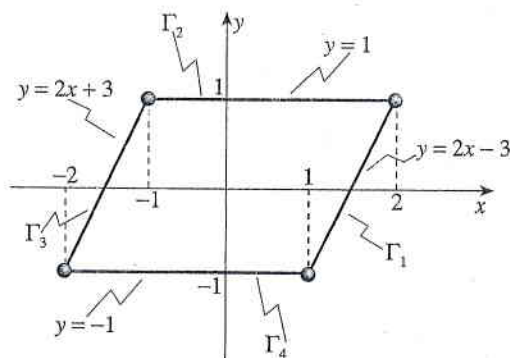


Figura 13.9 Le due soluzioni di  $h'(t) = 0$  se  $t \in [0, 2\pi]$ .

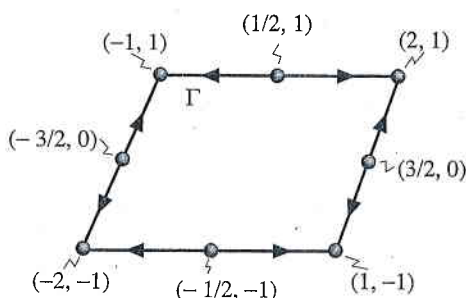
## ESEMPIO 13.10



Figura 13.10



Nella Figura 13.11 abbiamo indicato i versi in cui la funzione  $f$ , ristretta a  $\Gamma$ , cresce. Ovviamente, come si poteva già concludere dallo studio separato delle funzioni  $h_1, \dots, h_4$ , i punti  $(3/2, 0)$ ,  $(1/2, 1)$ ,  $(-3/2, 0)$  e  $(-1/2, -1)$  sono punti di minimo vincolato di  $f$ . Ma dalla Figura 13.11 è altrettanto ovvio che  $f$  ha punti di massimo vincolato in  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-2, -1)$ .

Figura 13.11 Versi di crescita di  $f$  su  $\Gamma$ .

### 13.2.3 Punti critici vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Negli Esempi 13.8 e 13.9 il vincolo è espresso *implicitamente* dall'equazione  $g(x, y) = c$ , ovvero

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = c\}.$$

Consideriamo questo caso in generale: per il Teorema 13.5, in un intorno di un suo punto *regolare*  $(x_0, y_0)$ , il vincolo  $\Gamma$  può essere parametrizzato da una curva *cartesiana*  $\gamma$  passante per  $(x_0, y_0)$ :  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ . Poiché  $\gamma$  è cartesiana, essa verifica la condizione  $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$  ed è quindi definito il versore tangente  $\mathbf{T} = \gamma'(t_0) / \|\gamma'(t_0)\|$ . Se  $(x_0, y_0)$  è punto di estremo vincolato di  $f$ , la funzione composta

$$h(t) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

verifica  $h'(t_0) = 0$ , ovvero, per la regola della catena,

$$f_x(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))\gamma_1'(t_0) + f_y(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))\gamma_2'(t_0) = 0.$$

Possiamo quindi concludere che se  $(x_0, y_0)$  è punto *regolare* di  $\Gamma$ ,

$$\gamma(t_0) \text{ è punto di estremo vincolato di } f \implies \langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{T} \rangle = 0. \quad (13.29)$$

Quindi è naturale dare la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 13.9**

Siano  $f, g \in C^1(X)$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Il punto  $(x_0, y_0) \in X$  si dice **critico o stazionario di  $f$  vincolato a  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = c\}$**  se  $(x_0, y_0)$  è punto regolare di  $\Gamma$  e se

$$D_{\mathbf{T}}f(x_0, y_0) = 0$$

dove  $\mathbf{T}$  è uno dei due versori tangenti in  $(x_0, y_0)$  a  $\Gamma$ .

Quindi la (13.29) implica il seguente risultato.

**TEOREMA 13.10**

Siano  $f, g \in C^1(X)$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, e sia  $(x_0, y_0)$  un punto regolare di  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = c\}$ . Se  $(x_0, y_0)$  è punto di estremo di  $f$  vincolato a  $\Gamma$ , allora  $(x_0, y_0)$  è punto critico di  $f$  vincolato a  $\Gamma$ .

Il seguente risultato è di particolare rilievo.

**TEOREMA 13.11**

Siano  $f, g \in C^1(X)$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto e sia  $(x_0, y_0) \in X$  un punto regolare di  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = c\}$ . Allora  $(x_0, y_0)$  è punto critico di  $f$  vincolato a  $\Gamma$  se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

In tal caso  $\lambda$  si dice **moltiplicatore di Lagrange**.

**Dimostrazione**

$(x_0, y_0)$  è punto critico vincolato se e solo se  $\langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{T} \rangle = 0$ , ovvero se e solo se si verifica uno dei seguenti casi:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

oppure

$\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  e  $\nabla f(x_0, y_0)$  è ortogonale alla retta tangente al vincolo.

D'altra parte, per la (13.19),

$\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  e  $\nabla g(x_0, y_0)$  è ortogonale alla retta tangente al vincolo.

Quindi  $(x_0, y_0)$  è punto critico vincolato se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$  (se  $\lambda = 0$  si ha  $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ ).

Il Teorema 13.11 è alla base del **metodo dei moltiplicatori di Lagrange**: per determinare i punti critici di  $f$  vincolati a  $\Gamma$ , si risolve il seguente sistema di tre equazioni rispetto alle tre variabili  $x$ ,  $y$  e  $\lambda$ :

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = c. \end{cases} \quad (13.30)$$

Riconsideriamo i tre esempi precedenti per trovare i punti critici, ovvero i candidati a punto di estremo vincolato, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Nell'Esempio 13.8  $f(x, y) = xy - y^2 + 1$  e  $g(x, y) = x + y^2 = 1$ , quindi le (13.30) diventano

Metodo dei  
moltiplicatori  
di Lagrange

**ESEMPIO 13.11**

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x - 2y = 2\lambda y \\ x + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \lambda = y \\ 3y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x = 1 - y^2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici vincolati sono

$$(0, -1) \text{ (per } \lambda = -1) \quad \text{e} \quad (8/9, 1/3) \text{ (per } \lambda = 1/3).$$

Nell'Esempio 13.9  $f(x, y) = 3x + 4y + 1$  e  $g(x, y) = 9x^2 + 4y^2 = 36$ , quindi le (13.30) diventano

$$\begin{cases} 3 = 18\lambda x \\ 4 = 8\lambda y \\ 9x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 1 = 6\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 9x^2 + 4y^2 = 36. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni risulta  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Moltiplicando la prima equazione per  $y$  e la seconda per  $3x$  e sottraendo la seconda dalla prima, si trova che  $y - 3x = 0$ , ovvero  $x$  e  $y$  verificano le due equazioni

$$\begin{cases} y = 3x \\ 9x^2 + 4y^2 = 36 \end{cases}$$

da cui si ricavano i due punti critici vincolati  $(2/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5})$  e  $(-2/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5})$ .

Si osservi che in questo caso è facile determinare la natura dei punti critici vincolati. Per il teorema di Weierstrass la funzione  $f$ , essendo continua, ammette massimo e minimo assoluto sull'ellisse (un insieme chiuso e limitato, quindi compatto); gli unici candidati sono i due punti critici e poiché  $f(2/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}) > f(-2/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5})$  si conclude che  $f$  ha un punto di massimo vincolato in  $(2/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5})$  e un punto di minimo vincolato in  $(-2/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5})$ .

Riesaminiamo infine l'Esempio 13.10, in cui  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3$  e il vincolo è il parallelogramma indicato nella Figura 13.10. Non c'è speranza di ottenere, tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i punti di vertice del parallelogramma come punti critici vincolati, non trattandosi di punti regolari del vincolo. Mentre è possibile determinare gli altri punti di estremo vincolato. Per esempio, il punto  $(3/2, 0)$  è la soluzione di

$$\begin{cases} 2x - y = -2\lambda \\ 2y - x = \lambda \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

(per  $\lambda = -3/2$ ).

Diamo infine un'interpretazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange in termini di curve di livello di  $f(x, y)$ . Nell'Esempio 13.9 il vincolo è una curva di livello di  $g(x, y) = x^2/4 + y^2/9$ .

D'altra parte, le curve di livello di  $f(x, y) = 9x + 4y + 1$  sono le rette di equazione

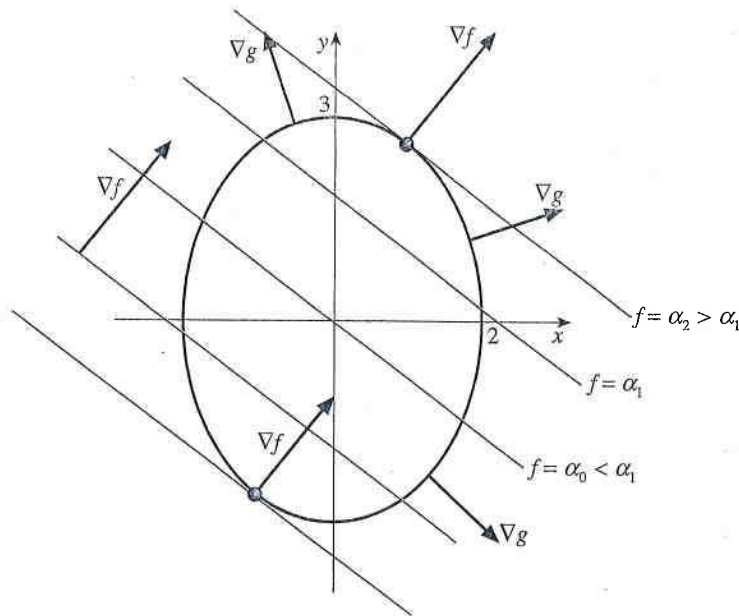
$$3x + 4y = \alpha \in \mathbb{R}$$

tutte di coefficiente angolare  $-3/4$ , indicate nella Figura 13.12.

Utilizzando i livelli di  $f$ , si comprende come si comporta  $f$  sull'ellisse. In particolare è facile intuire quello che già sappiamo per via teorica, ovvero che nei punti di estremo vincolato  $\nabla f$  deve essere normale alla retta tangente all'ellisse.



Figura 13.12



Nei seguenti casi, determinare i punti di estremo di  $f(x, y)$  vincolati a  $\Gamma$ :

- a)  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ ,  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - 2)^2 = x^2 + 4\}$ ;  
 b)  $f(x, y) = y^2 - 5x^2$ ,  $\Gamma$  è il triangolo di vertici  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 3)$ ;  
 c)  $f(x, y) = \frac{1}{3 - xy}$ ,  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ ;  
 d)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\Gamma = \{(x, y) : xy^2 = 16\}$ ;  
 e)  $f(x, y) = x^5 y^3$ ,  $\Gamma = \{(x, y) : x + y = 1\}$ ;  
 f)  $f(x, y) = x^2 + (y - 3)^2$ ,  $\Gamma = \{(x, y) : x = y^2\}$ .

**ESERCIZIO 13.8**

Verificare che, tra tutti i cilindri circolari retti di volume  $V$ , quello di area minima ha raggio  $r_V = \sqrt[3]{V/2\pi}$ , altezza  $h_V = 2r_V$ , e area  $A = 6\sqrt[3]{\pi/4}V^{2/3}$ .

**ESERCIZIO 13.9**

## 13.3 Estremi di funzioni di due variabili

### 13.3.1 Estremi assoluti di funzioni continue su un compatto

Sia  $f : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se l'insieme  $K$  è compatto (chiuso e limitato) e la funzione è continua in  $K$ , allora per il Teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluto. Per il Teorema di Fermat, i punti di massimo e minimo assoluto si trovano:

- a) tra i punti interni di  $K$  in cui  $f$  è differenziabile e  $\nabla f = \mathbf{0}$ ;  
 b) tra i punti interni di  $K$  in cui  $f$  non è differenziabile;  
 c) tra i punti di  $\partial K$ .

Ogni punto di estremo (locale o assoluto) che appartenga a  $\partial K$  è anche un punto di estremo locale di  $f|_{\partial K}$ . Perciò, in particolare, (c) si può sostituire con c') tra i punti di estremo locale di  $f|_{\partial K}$ .

Se siamo interessati solo a stabilire il massimo *assoluto* e il minimo *assoluto* di una funzione continua  $f$  in  $K$ , allora si possono utilizzare i metodi del Capitolo 11 per analizzare i casi (a) e (b), e i metodi descritti nel paragrafo precedente per analizzare il caso (c'). Vediamo due esempi.

**ESEMPIO 13.12**

Si vuole determinare il massimo e il minimo assoluto di  $f(x, y) = 3x + 4y + 1$  su  $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 36\}$ . La funzione  $f$  è differenziabile in  $\overset{\circ}{K}$ , quindi il caso (b) è escluso. Si ha  $\nabla f(x, y) = (3, 4)$ , quindi  $f$  non ammette estremi liberi interni a  $K$ . Nell'Esempio 13.9 abbiamo determinato i punti di estremo di  $f$  vincolati a  $\partial K$ :  $P_1 = (\frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{6}{5}\sqrt{5})$  e  $P_2 = (-\frac{2}{3}\sqrt{5}, -\frac{6}{5}\sqrt{5})$  sono, rispettivamente, punto di massimo e minimo vincolato. Poiché si hanno solo due candidati e, per il Teorema di Weierstrass, il massimo e il minimo assoluto esistono, se ne deduce che  $P_1$  e  $P_2$  sono, rispettivamente, punto di massimo assoluto e punto di minimo assoluto di  $f$  in  $K$ .

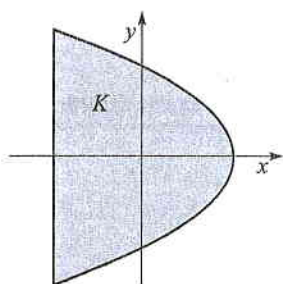
**ESEMPIO 13.13**

Figura 13.13

Si vuole determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione  $f(x, y) = xy - y^2 + 3$  nell'insieme  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 - y^2\}$  (si veda Figura 13.13). La funzione  $f$  è differenziabile in  $\mathbb{R}^2$ , quindi il caso (b) è escluso. Per quanto riguarda il caso (a), si ha

$$\begin{cases} f_x = y = 0 \\ f_y = x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = P_0 = (0, 0),$$

che è un punto interno. Per quanto riguarda il caso (c), parametrizziamo la frontiera con due curve:

$$\gamma_1(y) = (1 - y^2, y), \quad y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \quad \text{e} \quad \gamma_2(y) = (-1, y), \quad y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Gli intervalli di monotonia di  $f \circ \gamma_1$  si determinano come nell'Esempio 13.18 e sono visualizzati in Figura 13.14. Su  $\gamma_2$  si ha

$$h_2(y) = f(-1, y) = 3 - y - y^2, \quad h_2'(y) = -1 - 2y \stackrel{\geq 0}{<} \Leftrightarrow y \stackrel{\geq}{<} -1/2,$$

quindi  $h_2(y)$  è crescente in  $[-\sqrt{2}, -1/2]$  e decrescente in  $[-1/2, \sqrt{2}]$ . Visualizzando anche questa informazione in Figura 13.14, si conclude che

$$\begin{aligned} P_1 = (8/9, 1/3) \text{ e } P_3 = (-1, -1/2) & \text{ sono punti di massimo locale vincolato su } \partial K, \\ P_4 = (0, -1) \text{ e } P_2 = (-1, \sqrt{2}) & \text{ sono punti di minimo locale vincolato su } \partial K. \end{aligned}$$

Insieme al punto critico interno  $(0, 0)$ , si sono quindi determinati cinque candidati, e ciò che resta da fare è confrontare i valori assunti dalla funzione:

$$f(P_2) = 1 - \sqrt{2} < f(P_4) = 2 < f(P_0) = 3 < f(P_1) = 86/27 < f(P_3) = 13/4.$$

Perciò  $\min f = 1 - \sqrt{2}$  e  $\max f = 13/4$ . Si osservi che non è stato necessario stabilire la natura del punto critico interno,  $(0, 0)$ : lo studente verifichi che in effetti si tratta di un punto di sella (si noti che  $f(x, y) - 3 = y(x - y)$  e si usi la definizione).

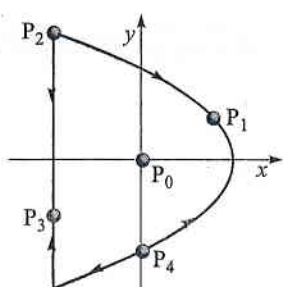


Figura 13.14

**ESERCIZIO 13.10**

Determinare il massimo e il minimo assoluto di  $f$  in  $K$  nei seguenti casi:

- $f(x, y) = x + 2y, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}xy, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- $f(x, y) = x^2(x + y) - y^2 - 4y, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ ;
- $f(x, y) = |1 - x^2 - y^2|, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- $f(x, y) = xy e^{-xy}, K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y, |xy| \leq 1\}$ .

### 13.3.2 Estremi relativi su insiemi chiusi con interno non vuoto

Se si è interessati a determinare non solo il massimo e minimo assoluto (ove esistano) ma, in generale, tutti gli estremi (locali e/o assoluti) di una funzione  $f$  su un insieme  $A$ , servono alcune considerazioni ulteriori. Illustriamo il problema nel caso in cui  $f \in C^1(X)$ , con  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto, e  $A \subset X$  è chiuso con interno non vuoto.

È già noto che:

- 1) un punto *interno* di  $A$  è punto di estremo di  $f$  in  $A$  se e solo se è punto di estremo libero di  $f$ , e si possono utilizzare i metodi descritti nel Paragrafo 11.6 per trovare i punti di estremo di  $f$  in  $A$ ;
- 2) se un punto di estremo di  $f$  in  $A$  appartiene alla frontiera  $\partial A$ , allora è anche punto di estremo di  $f$  vincolato a  $\partial A$ , e si possono utilizzare i metodi descritti nel Paragrafo 13.2 per determinare i punti di estremo di  $f$  vincolati a  $\partial A$ .

Resta quindi da risolvere il seguente problema:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{quando un punto di estremo di } f \text{ vincolato a } \partial A \\ \text{è anche punto di estremo di } f \text{ in } A? \end{array}} \quad (13.31)$$

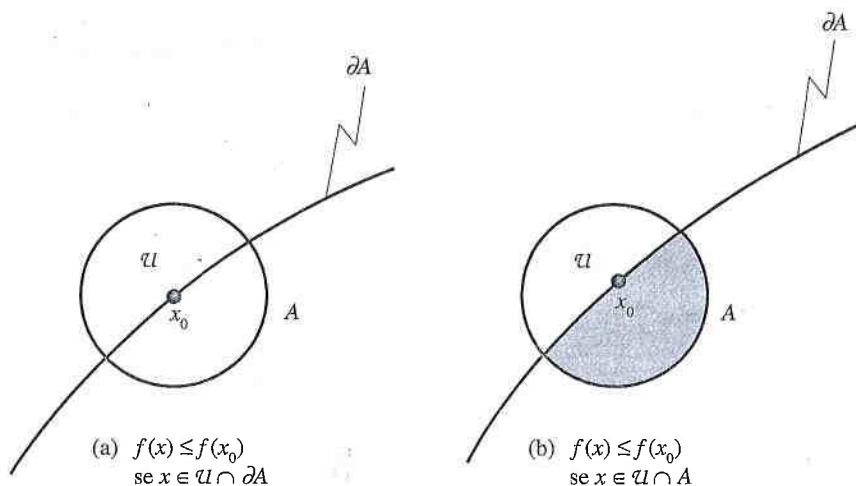
Per capire il senso della domanda ricordiamo che, per esempio,  $(x_0, y_0)$  è punto di massimo di  $f$  vincolato a  $\partial A$  se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $(x_0, y_0)$  tale che  $f((x, y)) \leq f((x_0, y_0))$  per ogni  $(x, y) \in \mathcal{U} \cap \partial A$ ; invece  $(x_0, y_0)$  è punto di massimo di  $f$  in  $A$  se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  tale che  $f((x, y)) \leq f((x_0, y_0))$  per ogni  $(x, y) \in \mathcal{U} \cap A$ . Quindi,

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) \in \partial A \text{ è punto di massimo di } f \text{ in } A \\ \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è punto di massimo di } f \text{ vincolato a } \partial A \end{aligned}$$

ma non vale l'implicazione opposta, come si vede nel seguente esempio.

Siano  $A = [-1, 1] \times \mathbb{R}$  e  $f(x, y) = x + y^2$  per  $(x, y) \in A$ . Allora  $\nabla f(x, y) = (1, 2y) \neq (0, 0)$  per  $(x, y) \in A$ , quindi  $f$  non ha estremi liberi in  $A$ . Utilizzando le tecniche del paragrafo precedente si ottengono gli estremi della restrizione di  $f$  a  $\partial A$ :  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$  sono punti di minimo vincolati a  $\partial A$  e  $f$  non ha punti di massimo vincolato. Si noti che  $f(-1, 0) = -1$  e che  $f(x, y) \geq x \geq -1$  per ogni  $(x, y) \in A$ , quindi  $(-1, 0)$  è punto di minimo assoluto di  $f$  in  $A$ . D'altra parte  $f(1, 0) = 1$  e  $f(x, 0) = x < 1$  per  $-1 \leq x < 1$ , quindi  $(1, 0)$  non è punto di minimo di  $f$  in  $A$ .

#### ESEMPIO 13.14



**Figura 13.15**  $x_0$  è punto di massimo vincolato a  $\partial A$  nel caso (a), punto di massimo in  $A$  nel caso (b).



Per fissare le idee, supponiamo che  $(x_0, y_0) \in \partial A$  sia un punto di *massimo* locale vincolato su  $\partial A$ : esiste quindi un intorno  $\mathcal{U}_0$  di  $(x_0, y_0)$  tale che

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \partial A \cap \mathcal{U}_0. \quad (13.32)$$

Supponiamo inoltre che  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . In tal caso, eventualmente scegliendo  $\mathcal{U}_0$  più piccolo, per ogni  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$  la curva di livello di  $f$ ,

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathcal{U} : f(x, y) = f(x_0, y_0)\},$$

è una curva cartesiana che divide  $\mathcal{U}$  in due aperti connessi,  $\mathcal{U}_+$  e  $\mathcal{U}_-$ , tali che  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_- \cup \Gamma$  e

$$\mathcal{U}_+ = \{(x, y) \in \mathcal{U} : f(x, y) > f(x_0, y_0)\}$$

$$\mathcal{U}_- = \{(x, y) \in \mathcal{U} : f(x, y) < f(x_0, y_0)\}.$$

Si osservi che, per la (13.32),

$$\partial A \cap \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_- \cup \Gamma \quad (13.33)$$

(si veda Figura 13.16). Sono possibili due casi:

a)  $A \cap \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_- \cup \Gamma$ ;

b)  $A \cap \mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{U}_- \cup \Gamma$ .

Se (a) è vera per qualche  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale. Viceversa, se (b) è vera per ogni  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ , allora  $(x_0, y_0)$  non lo è. Per distinguere analiticamente i due casi, ricordiamo che  $\nabla f(x_0, y_0)$  indica la direzione di massima crescita di  $f$ , ovvero  $\mathcal{U}_+$  si trova sempre "dal lato" di  $\Gamma$  indicato da  $\nabla f(x_0, y_0)$  (si veda ancora la Figura 13.16). Perciò ci si trova sempre nel caso (a) oppure sempre nel caso (b). Quindi:

- 1) sia  $(x_0, y_0)$ , punto regolare di  $\partial A$ , un punto di massimo di  $f$  vincolato a  $\partial A$ ;
  - 1a) se  $\nabla f(x_0, y_0)$  punta verso l'interno di  $A$ , allora  $f$  **non** è punto di massimo di  $f$  in  $A$ ;
  - 1b) se  $\nabla f(x_0, y_0)$  punta verso l'esterno di  $A$ , allora  $f$  è punto di massimo di  $f$  in  $A$ .

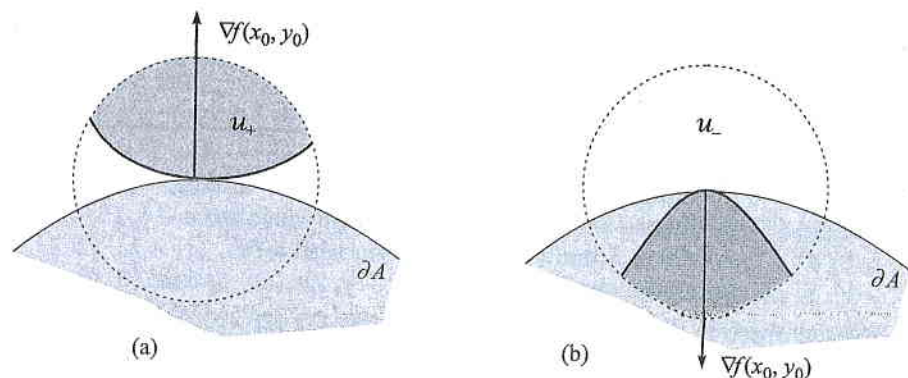
Analogamente:

- 2) sia  $(x_0, y_0)$ , punto regolare di  $\partial A$ , un punto di minimo di  $f$  vincolato a  $\partial A$ ;
  - 2a) se  $\nabla f(x_0, y_0)$  punta verso l'interno di  $A$ , allora  $f$  è punto di minimo di  $f$  in  $A$ ;
  - 2b) se  $\nabla f(x_0, y_0)$  punta verso l'esterno di  $A$ , allora  $f$  **non** è punto di minimo di  $f$  in  $A$ .

#### ESEMPIO 13.15

Riconsideriamo l'Esempio 13.14: poiché nei due punti di minimo vincolato  $\nabla f(\pm 1, 0) = (1, 0)$ , in  $(-1, 0)$  il gradiente punta verso l'interno di  $A$  mentre in  $(1, 0)$  punta verso l'esterno. Quindi  $(-1, 0)$  è un punto di minimo per  $f$  in  $A$  mentre  $(1, 0)$  non lo è. Abbiamo così ritrovato i risultati dell'Esempio 13.14.

Figura 13.16



Si vogliono determinare gli estremi relativi e assoluti di  $f(x, y) = x^2 + y^2$  in  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2xy + y^2 \leq 4\}$ . Si verifica subito che  $(0, 0)$  è il punto di minimo assoluto ed è l'unico punto critico interno ad  $A$ . Per determinare gli estremi di  $f$  vincolati a  $\partial A$  parametrizziamo il vincolo: poiché

$$4 = 3x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + (x + y)^2$$

$\partial A$  è un'ellisse e si può parametrizzare con

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ x + y = 2 \sin t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t \\ y = 2 \sin t - \sqrt{2} \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Studiando la funzione composta

$$h(t) = f(\sqrt{2} \cos t, 2 \sin t - \sqrt{2} \cos t) = 2 \cos^2 t - (2 \sin t + \sqrt{2} \cos t)^2$$

si verifica facilmente che essa ha due punti di minimo,  $t_1 = \pi/4$  e  $t_3 = 5\pi/4$ , e due punti di massimo,  $t_2 = 3\pi/4$  e  $t_4 = 7\pi/4$ , che corrispondono ai punti  $P_1 = (1, \sqrt{2} - 1)$ ,  $P_2 = (-1, \sqrt{2} + 1)$ ,  $P_3 = (-1, 1 - \sqrt{2})$  e  $P_4 = (1, -1 - \sqrt{2})$ . Il gradiente di  $f$ ,  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ , è diretto sempre verso l'esterno di  $A$  (Figura 13.17); perciò  $P_2$  e  $P_4$  sono punti di massimo locale mentre  $P_1$  e  $P_3$  non sono punti di minimo locale. Poiché  $f(P_2) = f(P_4)$ , i due punti sono di massimo assoluto.

Si osservi che, se si è interessati solo agli estremi assoluti, non è necessario valutare la direzione del gradiente di  $f$ : poiché  $P_2$  e  $P_4$  sono gli unici candidati e  $A$  è compatto, il punto di massimo assoluto è uno dei due, come in questo caso, entrambi.

**ESEMPIO 13.16**

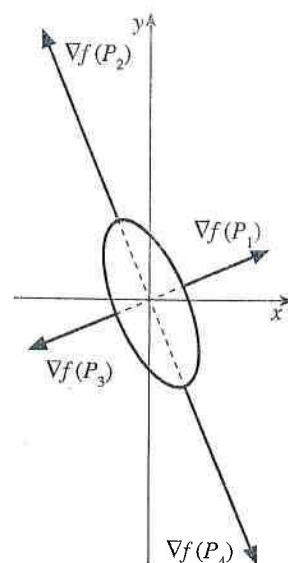


Figura 13.17

Osserviamo che se  $(x_0, y_0)$  è un punto angoloso di  $\partial A$ , non c'è bisogno di valutare il verso di  $\nabla f(x_0, y_0)$ : ci si deve solo accertare che  $\nabla f(x_0, y_0)$  non sia nullo. Per capirlo, supponiamo come prima che  $(x_0, y_0)$  sia un punto di massimo locale vincolato su  $\partial A$ . Se l'angolo  $\alpha$  (indicato in Figura 13.18) è minore di  $\pi$ , dalla (13.33) e dal fatto che  $\Gamma$  è regolare segue che siamo certamente nel caso (a), ovvero  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale; se invece l'angolo è maggiore di  $\pi$ , siamo certamente nel caso (b), ovvero  $(x_0, y_0)$  non lo è. Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo il ragionamento è identico. Quindi:

Sia  $(x_0, y_0)$  un punto di estremo di  $f$  vincolato a  $\partial A$  e un punto angoloso di  $\partial A$ , con  $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ . Allora

$$\alpha < \pi \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ è un punto di estremo di } f \text{ in } A$$

$$\alpha > \pi \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ non è un punto di estremo di } f \text{ in } A.$$

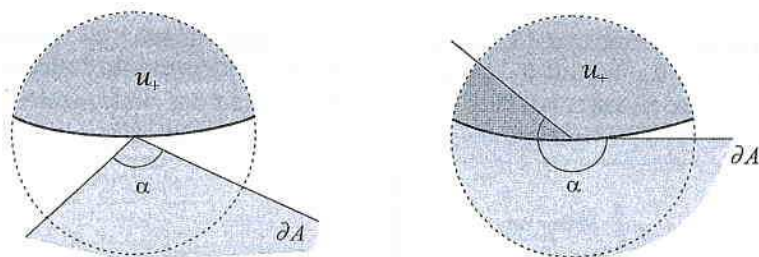
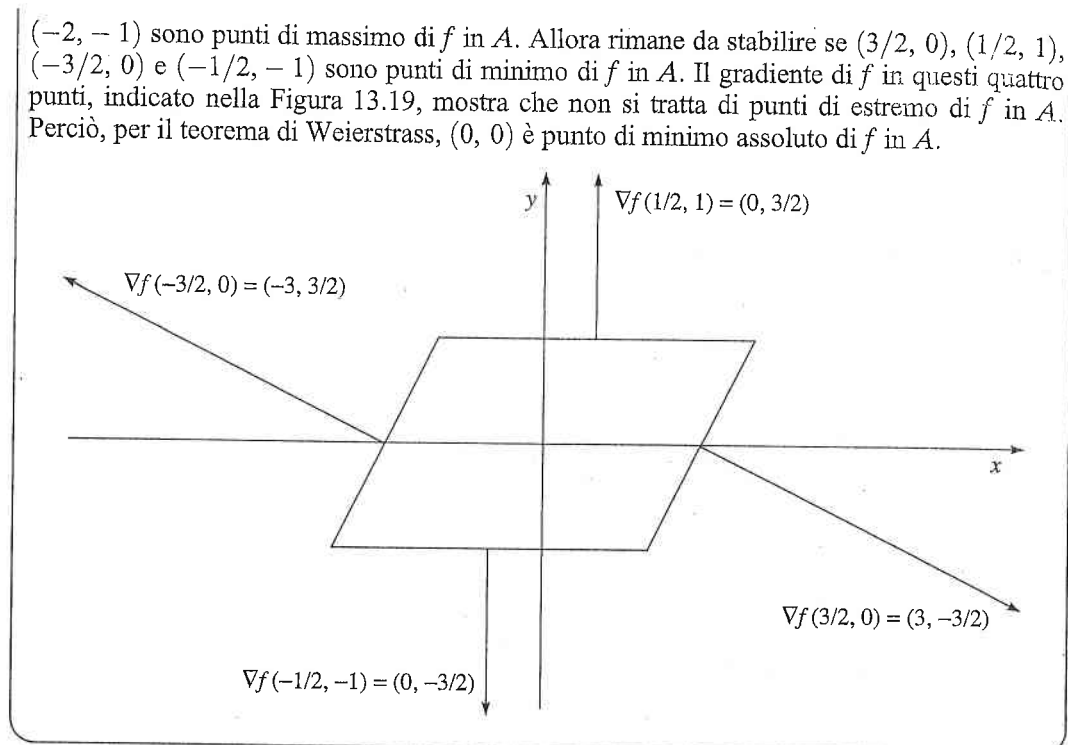


Figura 13.18

Siano  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3$  ( $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ) e  $A = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1, -3 \leq y - 2x \leq 3\}$ . Dunque  $A$  è il parallelogramma indicato in Figura 13.10 e nell'Esempio 13.10 abbiamo trovato 4 punti di minimo vincolato a  $\partial A$ ,  $(3/2, 0)$ ,  $(1/2, 1)$ ,  $(-3/2, 0)$  e  $(-1/2, -1)$ , e 4 punti di massimo vincolati a  $\partial A$ ,  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-2, -1)$ . Si osservi inoltre che  $\nabla f(x, y) = (2x - y, 2y - x)$ , quindi  $(0, 0)$  è l'unico punto di estremo libero in  $A$  (si può usare la matrice hessiana per vedere che si tratta di un punto di minimo di  $f$  in  $A$ ). Per quanto detto prima, i punti angolosi  $(1, -1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(-1, 1)$  e

**ESEMPIO 13.17**

Figura 13.19

**ESERCIZIO 13.11**

Determinare i punti di estremo relativo e assoluto delle seguenti funzioni nell'insieme  $A$  indicato:

- a)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ ;  
 b)  $f(x, y) = 3x - 4y$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;  
 c)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ .

**13.4 Estremi vincolati di funzioni di tre variabili**

Siano  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  con  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto e consideriamo il vincolo

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c\}.$$

La definizione di punto estremo di  $f$  vincolato a  $\Sigma$  è analoga al caso di due variabili trattato precedentemente, ma la definizione di punto critico vincolato richiede qualche attenzione.

Ricordiamo infatti che, per il Teorema 13.6, delle funzioni implicite, in un intorno di un punto regolare  $\mathbf{x}_0$  di  $\Sigma$  (ovvero un punto  $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$  in cui  $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ ),  $\Sigma$  è il grafico di una funzione di *due* variabili a valori scalari (e non di una variabile, come nel caso precedente).

**DEFINIZIONE 13.12**

Siano  $f, g \in C^1(X)$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto. Il punto  $(x_0, y_0, z_0) \in X$  si dice **critico** o **stazionario di  $f$  vincolato a  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c\}$**  se  $(x_0, y_0, z_0)$  è un punto regolare di  $\Sigma$  e se per ogni curva  $\gamma \in C^1(I)$  tale che  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$  e  $\gamma(I) \subseteq \Sigma$ , la funzione composta  $h = f \circ \gamma$  ha derivata nulla in  $t_0$ :

$$h'(t_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Come nel caso di due variabili (si vedano i Teoremi 13.10 e 13.11), si ottiene immediatamente che:



- 1) un punto di estremo vincolato di  $f$  in cui  $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$  è necessariamente un punto critico vincolato;
- 2) un punto regolare  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $\Sigma$  è punto critico vincolato di  $f$  se e solo se esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

In altre parole, anche nel caso di funzioni di tre variabili si può applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: se sono punti regolari di  $\Sigma$ , i punti critici di  $f$  vincolati a  $\Sigma$  risolvono il sistema di 4 equazioni

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = c. \end{cases} \quad (13.34)$$

Sia  $V$  il volume del parallelepipedo  $E = [0, x] \times [0, y] \times [0, z]$ ,

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{se } x > 0, \quad y > 0 \quad \text{e } z > 0,$$

e sia  $A$  l'area totale delle superfici che costituiscono  $\partial E$ :

$$A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx).$$

Si vogliono risolvere i seguenti due **problemi di ottimizzazione con vincolo**:

**Problema 1:** trovare il parallelepipedo che ha maggior volume  $V$  con area  $A$  assegnata, ovvero trovare il punto di massimo di  $V(x, y, z)$  nell'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$  con il vincolo  $A(x, y, z) = \alpha > 0$ .

**Problema 2:** trovare il parallelepipedo che ha l'area minore con volume assegnato, ovvero trovare il punto di minimo di  $A(x, y, z)$  in  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$  con il vincolo  $V(x, y, z) = \beta > 0$ .

Nel problema 1 si cerca il punto di massimo di

$$f(x, y, z) := xyz, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

vincolato a

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(xy + yz + zx) = \alpha\} \quad (\alpha > 0).$$

Allora il sistema (13.34) diventa

$$\begin{cases} yz = 2\lambda(y + z) \\ xz = 2\lambda(x + z) \\ xy = 2\lambda(x + y) \\ xy + xz + yz = \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Poiché  $x, y, z > 0$ , si ha che  $\lambda > 0$  e si ricava dalle prime tre equazioni che  $x = y = z$ . Quindi l'unico punto critico vincolato tale che  $x, y, z > 0$  è

$$P_\alpha = \left( \sqrt{\frac{\alpha}{6}}, \sqrt{\frac{\alpha}{6}}, \sqrt{\frac{\alpha}{6}} \right).$$

Per dimostrare che si tratta di un punto di massimo si considera, dato  $M > 0$ , il sottoinsieme del vincolo per cui  $x, y, z \leq M$ :

$$K_M = \{(x, y, z) \in [0, M] \times [0, M] \times [0, M] : 2(xy + xz + yz) = \alpha\}.$$

$K_M$  è chiuso e limitato, quindi  $f$  ammette massimo assoluto in  $K_M$ . Ovviamente il punto di massimo assoluto non può avere  $x = 0$  o  $y = 0$  o  $z = 0$  perché in tal caso  $f = 0$ . Nei punti di  $K_M$  in cui  $x$  o  $y$  o  $z$  vale  $M$  si può dare una stima dall'alto per il valore di  $f$ : se per esempio  $x = M$ , dal vincolo segue che

#### ESEMPIO 13.18

$$2M(y+z) = \alpha - yz \leq \alpha \implies y \leq \frac{\alpha}{2M} \quad \text{e} \quad z \leq \frac{\alpha}{2M}$$

quindi  $f(M, y, z) = Myz \leq \frac{\alpha^2}{4M} \rightarrow 0$  per  $M \rightarrow +\infty$ . Perciò è possibile scegliere  $M$  così grande che  $f(M, y, z) < f(P_\alpha)$ . Ne segue che il punto di massimo assoluto non può avere neppure  $x = M$  e, ragionando allo stesso modo, neppure  $y = M$  o  $z = M$ : quindi deve coincidere con  $P_\alpha$ .

Infine, osserviamo che nel punto di massimo

$$\text{volume} = f(P_\alpha) = \left(\frac{\alpha}{6}\right)^{3/2}, \quad \text{ovvero} \quad \text{area} = \alpha = 6 \cdot (\text{volume})^{2/3}.$$

Il problema 2 si risolve in modo analogo: in questo caso

$$f(x, y, z) := 2(xy + xz + yz) \quad \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = \beta\}.$$

Allora si deve risolvere il sistema (13.34)

$$\begin{cases} 2(y+z) = \lambda yz \\ 2(x+z) = \lambda xz \\ 2(x+y) = \lambda xy \\ xyz = \beta. \end{cases}$$

Se  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ , le prime tre equazioni implicano che  $\lambda > 0$  e  $x = y = z$ , quindi si trova il punto critico vincolato  $(\sqrt[3]{\beta}, \sqrt[3]{\beta}, \sqrt[3]{\beta})$ . Per concludere che si tratta di un punto di minimo vincolato basta ragionare come sopra con

$$K_M = \{(x, y, z) \in [0, M] \times [0, M] \times [0, M] : xyz = \beta\}$$

in cui  $M$  è una costante sufficientemente grande. Si lasciano i dettagli allo studente interessato.

Non tratteremo il caso di estremi di funzioni  $f(x, y, z)$  in insiemi compatti con interno non vuoto, che si affronta in modo completamente analogo al caso di funzioni di due variabili che è stato considerato nel paragrafo precedente. Invece, nel paragrafo successivo si considera il caso di estremi di  $f$  condizionati a *due* vincoli.

### ESERCIZIO 13.12

Determinare i punti di estremo di  $f$  sul vincolo  $\Gamma = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ :

- $f(x, y, z) = 4x^2 + xy + y^2 + z$ ,  $g(x, y, z) = 4x + y + z - 3$ ;
- $f(x, y, z) = x + y - z$ ,  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ;
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $g(x, y, z) = xyz^2 - 2$ ;
- $f(x, y, z) = x + 2y - 3z$ ,  $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 108$ .

## 13.5 Il caso di funzioni di tre variabili con due vincoli

Esaminiamo ora il caso di una equazione con due vincoli: date tre funzioni  $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  in  $X$ , si vogliono determinare gli estremi di  $f$  vincolati all'insieme

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = c \text{ e } h(x, y, z) = d\}.$$

Ricordiamo che  $(x_0, y_0, z_0)$  si dice punto regolare di  $\Gamma$  se  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  e  $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$  sono linearmente indipendenti, e che in tal caso  $\Gamma$ , in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$ , è il sostegno di una curva che ha in  $(x_0, y_0, z_0)$  una retta tangente perpendicolare a  $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$  e a  $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$  (si veda Teorema 13.7). Perciò la definizione di punto di estremo vincolato e di punto critico vincolato è del tutto ana-

loga al caso di un'equazione di due variabili con un solo vincolo, discusso nel Paragrafo 13.2, e si deduce che un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  è ortogonale al vincolo in  $(x_0, y_0, z_0)$  se e solo se esistono  $\lambda$  e  $\mu \in \mathbb{R}$  tali che

$$\mathbf{v} = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Quindi un punto regolare del vincolo,  $(x_0, y_0, z_0)$ , è un punto critico vincolato se e solo se esistono  $\lambda$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ , detti *moltiplicatori di Lagrange*, tali che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0).$$

Così la ricerca dei punti critici si riduce alla risoluzione del seguente sistema di 5 equazioni

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = c \\ h(x, y, z) = d. \end{cases} \quad (13.35)$$

Si vogliono trovare i punti critici di  $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2$  vincolati a

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) := 3x - 5y + z = 7 \text{ e } h(x, y, z) := x + 2y - 3z = 1\}.$$

Osservando che i gradienti  $\nabla g = (3, -5, 1)$  e  $\nabla h = (1, 2, -3)$  sono linearmente indipendenti, si può utilizzare il sistema (13.35):

$$\begin{cases} 6x = 3\lambda + \mu \\ 2y = -5\lambda + 2\mu \\ -2z = \lambda - 3\mu \\ 3x - 5y + z = 7 \\ x + 2y - 3z = 1. \end{cases}$$

Utilizzando i metodi standard dell'algebra lineare non è difficile determinare l'unica soluzione, in particolare ci sarà un unico punto critico vincolato (è  $(11, -814, -701)/486$ ).

Nell'ultimo esempio è particolarmente facile determinare esplicitamente una parametrizzazione della retta di intersezione dei due piani di equazioni  $3x - 5y + z = 7$  e  $x + 2y - 3z = 1$ . Per esempio, utilizzando  $y$  come parametro si esprimono  $x$  e  $z$  in funzioni di  $y$ :

$$x = \frac{22 + 13y}{10} \quad \text{e} \quad z = \frac{4 + 11y}{10}.$$

Sostituendo queste espressioni nella funzione  $f(x, y, z) = 3x^2 + y^2 - z^2$  si ottiene una funzione che dipende dalla sola variabile  $y$  e non è difficile determinarne gli estremi senza utilizzare i moltiplicatori di Lagrange. In generale però i problemi sono troppo complicati per poter effettuare queste semplificazioni. Quindi è importante avere a disposizione la teoria dei moltiplicatori di Lagrange soprattutto quando il numero di variabili,  $n$ , e il numero di vincoli,  $m$ , aumentano. Nel paragrafo successivo si espone brevemente il caso generale di punti critici di una funzione scalare di  $n$  variabili vincolati a  $m$  vincoli ( $m < n$ ).

Nei seguenti casi, determinare i punti di estremo vincolato di  $f(x, y, z)$  sul vincolo  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0\}$ :

a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $g(x, y, z) = x^2 - y + 2z^2$ ,  $h(x, y, z) = y + z - 1$ ;

b)  $f(x, y, z) = xy + z$ ,  $g(x, y, z) = x + y - 3z$ ,  $h(x, y, z) = 4x + y + z - 2$ .

ESEMPIO 13.19

ESERCIZIO 13.13



### 13.6 Estremi vincolati di funzioni di $n$ variabili: il caso di $m$ vincoli ( $m < n$ )

Siano  $1 \leq m < n$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  di classe  $C^1$  in  $X$  ( $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$ ) e  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Supponiamo che

$$\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \nabla g_2(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}_0) \text{ sono linearmente indipendenti} \quad (13.36)$$

ovvero  $\mathbf{x}_0$  è *punto regolare* del vincolo  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$ . Per il Teorema 13.2, delle funzioni implicite, in un intorno sufficientemente piccolo di  $\mathbf{x}_0$  il vincolo

$$V = \{\mathbf{x} \in X : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)\}$$

è il grafico di una funzione di classe  $C^1$  da un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n-m}$  in  $\mathbb{R}^m$ . Si dice che  $\mathbf{x}_0$  è *punto di estremo di  $f$  vincolato a  $V$*  se è punto di estremo della restrizione di  $f$  a  $V$ . Si dice *punto critico di  $f$  vincolato a  $V$*  se per ogni curva  $\gamma(t)$  contenuta in  $X$ , di classe  $C^1$ , passante per  $\mathbf{x}_0$  ( $\gamma(t_0) = \mathbf{x}_0$ ) e con sostegno nel vincolo ( $\mathbf{g}(\gamma(t)) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $t$ ), si ha che la funzione composta  $h = f \circ \gamma$  ha derivata nulla in  $t_0$ :

$$h'(t_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0.$$

Per la (13.14),  $\gamma'(t_0)$  è ortogonale a  $\nabla g_k(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $k = 1, \dots, m$ , quindi per estendere il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è sufficiente osservare che un vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  è ortogonale a tutte le direzioni tangenti al vincolo in  $\mathbf{x}_0$  se e solo se esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tali che

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0)$$

ovvero se e solo se  $\mathbf{v}$  è combinazione lineare dei gradienti di  $g_1, \dots, g_m$  in  $\mathbf{x}_0$ . Quindi un punto  $\mathbf{x}_0$  che verifica la (13.36) è un punto critico di  $f$  vincolato a  $V$  se e solo se esistono  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  tali che

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}_0)$$

e in tal caso  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  si dicono *moltiplicatori di Lagrange*. Così la ricerca dei punti critici vincolati di  $f$  si riduce alla risoluzione del seguente sistema di  $n + m$  equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{x_1} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_{x_1} g_i(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial_{x_n} g_i(x_1, \dots, x_n) \\ g_1(x_1, \dots, x_n) = g_1(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) = g_m(\mathbf{x}_0). \end{array} \right. \quad (13.37)$$

Si vogliono trovare i punti critici di  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$  condizionati ai vincoli lineari

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) := x_1 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Osservando che i vettori  $\nabla g_1 = (1, -1, 1, 0)$  e  $\nabla g_2 = (1, 0, -1, 1)$  sono linearmente indipendenti, si può utilizzare il sistema (13.37)

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_2 = -\lambda_1 \\ x_3 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ x_4 = \lambda_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

L'unica soluzione di questo sistema lineare è  $x_1 = 1/3$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = -1/3$ ,  $x_4 = 1/3$ ,  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1/3$ .



## FILO ROSSO Integrali multipli e densità (di probabilità)

Nel filo rosso del Capitolo 8 gli integrali sono stati utilizzati per descrivere la massa  $M$  e il baricentro  $x_b$  di una barra di lunghezza  $L$  (identificata con l'intervallo  $[0, L]$ ) e densità di massa lineare  $\rho(x) \geq 0$ :

$$M = \int_0^L \rho(x) dx, \quad x_b = \frac{1}{M} \int_0^L x \rho(x) dx.$$

Con la teoria degli integrali multipli, sviluppata in questo capitolo, queste formule si generalizzano a strutture bidimensionali e tridimensionali. Per esempio, una lastra bidimensionale piana si identifica con un sottoinsieme  $D \subset \mathbb{R}^2$  di densità di massa per unità di area  $\rho(x, y) \geq 0$ : sotto opportune ipotesi su  $D$  e  $\rho$ ,

$$M := \iint_D \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_b := \frac{1}{M} \iint_D \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \left( \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \iint_D y \rho(x, y) dx dy \right).$$

Non solo la massa, ma molte altre quantità hanno una densità: una di queste è la *probabilità di un evento*. Per fare un esempio concreto, supponiamo che  $X \in [0, M]$  rappresenti la temperatura media giornaliera in un dato luogo (0 rappresenta lo "zero assoluto" e  $M$  un valore "irraggiungibile", ad esempio  $100^\circ\text{C}$ ), e  $Y \in [0, N]$  il consumo energetico medio giornaliero in quel dato luogo (anche  $N$  è un valore "irraggiungibile"). Ad ogni sottoinsieme *misurabile*  $\Omega \subset D := [0, M] \times [0, N]$  associamo l'evento  $\{(X, Y) \in \Omega\}$ : per esempio,  $\{(X, Y) \in [0, x] \times [0, y]\}$  indica l'evento

"la temperatura media  $X$  è al più  $x$  e il consumo energetico medio  $Y$  è al più  $y$ ".

Attraverso una *densità di probabilità*  $\rho: D \rightarrow [0, +\infty)$ , si associa all'evento  $\{(X, Y) \in \Omega\}$  la sua probabilità:

$$P\{(X, Y) \in \Omega\} = \iint_{\Omega} \rho(x, y) dx dy.$$

Poiché per ipotesi  $\{(X, Y) \in D\}$  ha probabilità 1, la densità di probabilità deve soddisfare l'ulteriore condizione

$$\iint_D \rho(x, y) dx dy = 1,$$

corrispondente al concetto di massa di  $D$ . A quello di baricentro corrisponde invece il *valore atteso*,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X, Y) &= (E_X(X, Y), E_Y(X, Y)) \\ &= \iint_D \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

un vettore le cui componenti si interpretano intuitivamente come il valore medio assunto da  $X$  e  $Y$  (non necessariamente l'evento più probabile: il valore atteso del lancio di un dado è 3.5, che non è un evento).

Vedremo nel corso del capitolo che, sotto opportune ipotesi, è possibile "ridurre" un integrale doppio a due integrali definiti: per esempio,

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} \rho(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d \rho(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b \rho(x, y) dx \right) dy \quad (*) \end{aligned}$$

per ogni rettangolo  $[a, b] \times [c, d] \subset [0, M] \times [0, N]$ . Grazie a ciò, a partire da  $\rho$  si possono "ricostruire" le densità di probabilità  $\rho_X$  e  $\rho_Y$  associate agli eventi  $\{X \in A\}$  e  $\{Y \in B\}$  considerati separatamente, ovvero

$$P\{X \in A\} = \int_A \rho_X(x) dx$$

$$P\{Y \in B\} = \int_B \rho_Y(y) dy.$$



Vediamo perché. Nel caso di  $X$ , per ogni intervallo  $[a, b] \subseteq [0, M]$  si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho_X(x) dx &= P\{X \in [a, b]\} \\ &= P\{(X, Y) \in [a, b] \times [0, N]\} \\ &= \iint_{[a, b] \times [0, N]} \rho(x, y) dx dy \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_a^b \left( \int_0^N \rho(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Quindi, se per esempio  $\rho$  e  $\rho_X$  sono continue, segue dal Teorema del valor medio che

$$\rho_X(x) = \int_0^N \rho(x, y) dy.$$

Da questa relazione segue che

$$\begin{aligned} E_X(X, Y) &= \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^M x \left( \int_0^N \rho(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_0^M x \rho_X(x) dx = E(X) \end{aligned}$$

Analogamente, se  $\rho$  e  $\rho_Y$  sono continue si ottiene  $E_Y(X, Y) = E(Y)$ . Quindi  $E(X, Y) = (E(X), E(Y))$ , ovvero le componenti del valore atteso dell'evento  $(X, Y)$  coincidono con il valore atteso degli eventi  $X$  e  $Y$ .

Consideriamo ora la relazione tra temperatura e consumo energetico, ovvero la relazione tra i due eventi  $\{X \in A\}$  e  $\{Y \in B\}$ . In generale, due eventi sono *indipendenti* se e solo se la probabilità che si verifichino entrambi è il prodotto delle probabilità che se ne verifichi uno (ad esempio, sono indipendenti due lanci consecutivi di un dado):

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} \cdot P\{Y \in B\}.$$

Quindi i due eventi sono indipendenti se e solo se

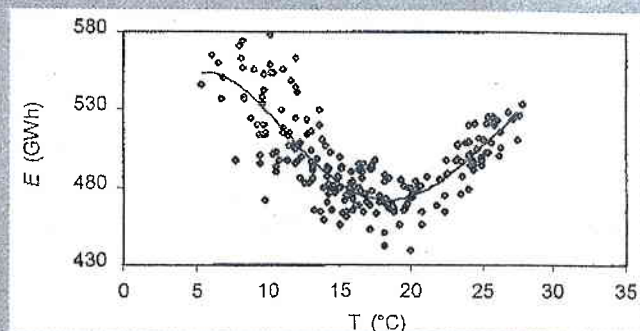
$$\iint_{A \times B} \rho(x, y) dx dy = \left( \int_A \rho_X(x) dx \right) \cdot \left( \int_B \rho_Y(y) dy \right),$$

e ancora dal teorema del valor medio segue che se  $\rho, \rho_X$  e  $\rho_Y$  sono continue, allora

due eventi sono indipendenti se e solo se

$$\rho(x, y) = \rho_X(x) \rho_Y(y).$$

La figura sottostante mostra i dati relativi a temperatura e consumo energetico medio (opportunamente definiti) nei giorni lavorativi in Spagna nel 1998. Gli  $n$  punti "discreti" vanno interpretati come eventi di probabilità  $1/n$ , e a partire da ciò si potrebbe definire una densità di probabilità "continua" con opportune interpolazioni.



Dal grafico si capisce bene che, come suggerisce l'intuizione, i due eventi non sono indipendenti: per esempio,  $\rho$  è zero (o molto piccola, dipende dal metodo di interpolazione scelto) in  $[19, 21] \times [530, 540]$ , mentre sia  $\rho_X$  che  $\rho_Y$  sono positive rispettivamente in  $[19, 21]$  e  $[530, 540]$ .

Un buon modello statistico deve tener conto di molti altri dati: l'umidità (si pensi alla temperatura percepita e all'uso dei condizionatori), il periodo dell'anno (si pensi a come varia il consumo per usi industriali tra agosto e ottobre), eccetera. In questo caso si potrebbe pensare di stimare, a partire da previsioni meteo affidabili e con un margine di incertezza quantificabile, il consumo di energia atteso, in modo da ottimizzarne la produzione: formalizzare e implementare tutto ciò compete al calcolo delle probabilità e alla statistica matematica, ma come abbiamo cercato di far vedere, le basi sono fornite dal calcolo differenziale e integrale.

Il procedimento seguito nel Capitolo 8 per definire il concetto di integrale secondo Riemann può essere esteso direttamente al caso di funzioni di più variabili allorché la funzione sia definita su un  $N$ -intervallo  $Q$ , ossia un insieme del tipo

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N].$$



La teoria degli integrali multipli verrà sviluppata partendo da questo caso particolare e limitandosi ai casi  $N = 2, 3$ , ovvero agli *integrali doppi e tripli*, per non appesantire le notazioni.

## 14.1 Integrali doppi su rettangoli

In questo paragrafo  $Q$  indica il rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  di area  $|Q| = (b - a)(d - c)$ . Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. L'idea è ancora quella di costruire *somme superiori e inferiori* di  $f$  rispetto a *suddivisioni* di  $[a, b] \times [c, d]$ .

### DEFINIZIONE 14.1

Siano  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  suddivisioni di  $[a, b]$  e  $[c, d]$  rispettivamente. L'insieme

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{(x_i, y_j) : x_i \in \mathcal{D}_1, y_j \in \mathcal{D}_2\}$$

si dice **suddivisione** di  $Q = [a, b] \times [c, d]$ .

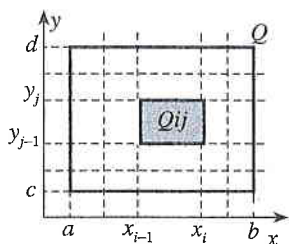


Figura 14.1 Suddivisione di  $Q$ .

Il rettangolo  $Q$  resta quindi scomposto in  $n \times m$  rettangoli

$$Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m$$

di area  $|Q_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$  (si veda Figura 14.1). Posti

$$m_{ij} = \inf_{Q_{ij}} f \quad \text{e} \quad M_{ij} = \sup_{Q_{ij}} f,$$

si dicono **somma superiore**, rispettivamente **somma inferiore**, di  $f$  rispetto alla suddivisione  $\mathcal{D}$  le quantità

$$S(\mathcal{D}, f) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n M_{ij} |Q_{ij}|, \quad s(\mathcal{D}, f) := \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij} |Q_{ij}|.$$

Se  $f \geq 0$ , ogni addendo che compare nelle somme superiori e inferiori rappresenta il volume di un parallelepipedo di base  $Q_{ij}$  e altezza  $M_{ij}$  o  $m_{ij}$  (si veda Figura 14.2). Ovviamente risulta che, per ogni  $\mathcal{D}$  suddivisione di  $Q$ ,

$$(b - a)(d - c) \inf_Q f \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq (b - a)(d - c) \sup_Q f. \quad (14.1)$$

Inoltre  $s(\mathcal{D}', f) \leq S(\mathcal{D}'', f)$  se  $\mathcal{D}'$  e  $\mathcal{D}''$  sono due suddivisioni di  $Q$ , quindi

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f). \quad (14.2)$$

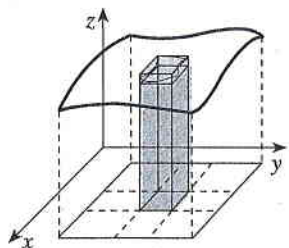


Figura 14.2

### DEFINIZIONE 14.2

Siano  $Q = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. La funzione  $f$  si dice **integrabile (secondo Riemann)** in  $Q$  se  $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$  e si scrive  $f \in \mathcal{R}(Q)$ . Il valore  $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$  si dice **integrale di  $f$  in  $Q$**  e si indica con i simboli

$$\int_Q f, \quad \iint_Q f, \quad \iint_Q f(x, y) \, dx \, dy, \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy.$$

### ESEMPIO 14.1

Le funzioni costanti sono integrabili e  $\iint_Q c = c|Q|$ .



Non ogni funzione limitata è integrabile: siano  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$  e

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \text{ sono razionali} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (14.3)$$

allora  $s(\mathcal{D}, f) = 0 < 1 = S(\mathcal{D}, f)$  per ogni suddivisione  $\mathcal{D}$ , quindi  $f$  non è integrabile.

Se  $f \in \mathcal{R}(Q)$  e  $f \geq 0$  allora  $\iint_Q f$  può essere interpretato come il volume della regione di spazio delimitata da  $Q$  e dal grafico di  $f$  (si veda Figura 14.3).

Di seguito elenchiamo alcuni risultati e proprietà degli integrali che sono del tutto analoghi a quelli del caso unidimensionale e di cui perciò omettiamo la dimostrazione.

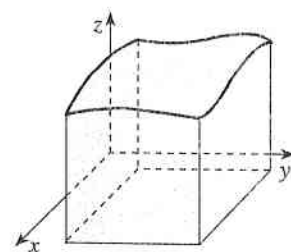


Figura 14.3 Interpretazione geometrica di  $\iint_Q f$  se  $f \geq 0$ .

#### TEOREMA 14.3 Criterio di integrabilità

Sia  $f : Q = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una suddivisione  $\mathcal{D}_\varepsilon$  di  $Q$  tale che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, f) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

#### TEOREMA 14.4

Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$ . Se  $f \in C(Q)$  allora  $f \in \mathcal{R}(Q)$ .

#### TEOREMA 14.5 Proprietà dell'integrale

Siano  $Q = [a, b] \times [c, d]$ ,  $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Allora

- (i)  $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(Q)$  e  $\iint_Q (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_Q f + \beta \iint_Q g$ ;
- (ii) se  $f \geq g$ , allora  $\iint_Q f \geq \iint_Q g$ ;
- (iii)  $|f| \in \mathcal{R}(Q)$  e  $|\iint_Q f| \leq \iint_Q |f|$ ;
- (iv)  $|\iint_Q f| \leq |Q| \sup_Q |f|$ ;
- (v) **Teorema della media**

$$\inf_Q f \leq \frac{1}{|Q|} \iint_Q f \leq \sup_Q f$$

e il valore  $\frac{1}{|Q|} \iint_Q f$  si dice **valor medio di  $f$  su  $Q$** . Se  $f \in C(Q)$ , allora esiste  $(x_0, y_0) \in Q$  tale che

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{|Q|} \iint_Q f.$$

Di particolare rilevanza è il prossimo teorema che fornisce uno strumento per il calcolo degli integrali: sotto opportune ipotesi è possibile ridurre il calcolo di un integrale doppio a quello di due **integrali semplici** (ovvero uni-dimensionali).

#### TEOREMA 14.6 Formule di riduzione su rettangoli

Siano  $Q = [a, b] \times [c, d]$  e  $f \in \mathcal{R}(Q)$ .

- (i) Se, per ogni  $y \in [c, d]$ , la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $[a, b]$  allora la funzione  $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$  è integrabile in  $[c, d]$  e risulta

$$\iint_Q f = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (14.4)$$

- (ii) Se, per ogni  $x \in [a, b]$ , la funzione  $y \mapsto f(x, y)$  è integrabile in  $[c, d]$  allora la funzione  $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$  è integrabile in  $[a, b]$  e risulta

Dimostrazione



$$\iint_Q f = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (14.5)$$

Per interpretare ad esempio la (14.5), osserviamo che, se  $f \geq 0$ ,  $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  è l'area della sezione indicata nella Figura 14.4, e il volume  $\iint_Q f$  è uguale a  $\int_a^b A(x) dx$ .

Quando sia possibile applicare entrambe le formule di riduzione (14.4) e (14.5), risulta

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (14.6)$$

nota anche come formula di *scambio dell'ordine di integrazione*. L'integrazione risulta particolarmente semplice nel caso in cui la funzione sia del tipo  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ , dove  $f_1 \in \mathcal{R}([a, b])$  e  $f_2 \in \mathcal{R}([c, d])$ . Infatti in tal caso, applicando la (14.4) o la (14.5) si ottiene

$$\iint_Q f_1(x)f_2(y) dx dy = \left( \int_a^b f_1(x) dx \right) \left( \int_c^d f_2(y) dy \right).$$

#### ESEMPIO 14.2

Sia  $f : Q = [0, 2] \times [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = y(1 + xy)$ . Essendo continua, per il Teorema 14.4 è integrabile in  $Q$ . Inoltre, per ogni  $y \in [1, 3]$  la funzione  $x \mapsto f(x, y)$  è continua in  $[0, 2]$ , quindi sono soddisfatte le ipotesi della parte (i) del Teorema 14.6: perciò

$$\iint_Q y(1 + xy) dx dy = \int_1^3 \left( \int_0^2 y(1 + xy) dx \right) dy.$$

Per risolvere l'integrale interno, in cui la variabile di integrazione è  $x$ , si tratta  $y$  come un parametro:

$$\int_0^2 y(1 + xy) dx = y \int_0^2 (1 + xy) dx = y \left[ x + y \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} = 2y(1 + y).$$

Si ottiene quindi

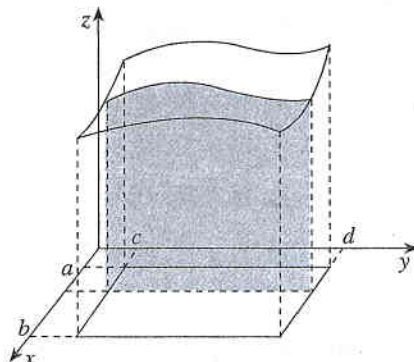
$$\int_1^3 \left( \int_0^2 y(1 + xy) dx \right) dy = \int_1^3 2y(1 + y) dy = \left[ y^2 + \frac{2}{3} y^3 \right]_1^3 = 26 - \frac{2}{3}.$$

Nell'esempio precedente, anche le ipotesi del Teorema 14.6(ii) sono verificate, e l'integrale si sarebbe potuto calcolare applicando la (14.5) anziché la (14.4) (lo studente controlli). I prossimi esempi mostrano tuttavia che in certi casi è opportuno o necessario scegliere la strada migliore.

Figura 14.4

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

$$\iint_Q f = \int_a^b A(x) dx$$



## ESEMPIO 14.3

Si vuole calcolare

$$\iint_Q xy \cos(xy^2) dx dy, \quad Q = [0, \pi] \times [1, 2].$$

Applichiamo la parte (ii) del Teorema 14.6, di cui sono verificate le ipotesi:

$$\iint_Q xy \cos(xy^2) dx dy = \int_0^\pi \left( \int_1^2 xy \cos(xy^2) dy \right) dx.$$

Per risolvere l'integrale interno, si considera  $x$  come parametro; mediante la sostituzione  $t = xy^2$ , ovvero " $dt = 2xy dy$ ", si ottiene

$$\iint_Q xy \cos(xy^2) dx dy = \int_0^\pi \left( \int_x^{4x} \frac{1}{2} \cos t dt \right) dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} (\sin(4x) - \sin x) dx = -1.$$

Lo studente controlli che l'utilizzo della (14.4) anziché della (14.5) rende lo svolgimento più laborioso.

## ESEMPIO 14.4

Sia  $Q = [1, 2] \times [1, 3]$  e  $f(x, y) = x^3 e^{yx^2}$ . Si verifica facilmente la validità delle ipotesi del Teorema 14.6 e sarebbe possibile applicare sia la (14.4) sia la (14.5). Ma di fatto solo applicando la (14.5) si riesce a determinare il valore dell'integrale: osservando che  $x^2 e^{yx^2} = \frac{\partial}{\partial y} e^{yx^2}$ , si ottiene che

$$\begin{aligned} \iint_Q x^3 e^{yx^2} dx dy &= \int_1^2 \left( \int_1^3 x^3 e^{yx^2} dy \right) dx \\ &= \int_1^2 x \left[ e^{yx^2} \right]_{y=1}^{y=3} dx = \int_1^2 x (e^{3x^2} - e^{x^2}) dx = \frac{1}{6} (e^{12} - e^3) - \frac{1}{2} (e^4 - e). \end{aligned}$$

Utilizzando invece la (14.4), risulta:

$$\begin{aligned} \iint_Q x^3 e^{yx^2} dx dy &= \int_1^3 \left( \int_1^2 x^3 e^{yx^2} dx \right) dy = \int_1^3 \left( \left[ \frac{x^2}{2y} e^{yx^2} \right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{x}{y} e^{yx^2} dx \right) dy \\ &= \int_1^3 \left( \left[ \frac{x^2}{2y} e^{yx^2} \right]_{x=1}^{x=2} - \left[ \frac{e^{yx^2}}{2y^2} \right]_{x=1}^{x=2} \right) dy = \int_1^3 \left[ \left( \frac{2}{y} - \frac{1}{2y^2} \right) e^{4y} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right) e^y \right] dy. \end{aligned}$$

Come sappiamo, le primitive di funzioni del tipo  $\frac{e^{ay}}{y}$  e  $\frac{e^{ay}}{y^2}$  non sono esprimibili elementarmente.

## ESERCIZIO 14.1

Dopo aver verificato l'integrabilità delle seguenti funzioni sull'insieme indicato, si calcoli l'integrale:

- a)  $f(x, y) = x/(1+y)$ ,  $Q = [0, 1] \times [2, 3]$ ;  
 b)  $f(x, y) = 1/(x+2y)^2$ ,  $Q = [1, 2] \times [0, 1]$ ;  
 c)  $f(x, y) = x/(1+xy)$ ,  $Q = [0, 1] \times [0, 2]$ ;  
 d)  $f(x, y) = x \sin(xy)$ ,  $Q = [1, 2] \times [2, 3]$ ;  
 e)  $f(x, y) = y/\sqrt{x^2 + 2y^2}$ ,  $Q = [1, 2] \times [0, 1]$ ;  
 f)  $f(x, y) = \frac{1}{y^3} e^{\frac{x}{y}}$ ,  $Q = [0, 1] \times [1, 2]$ ;  
 g)  $f(x, y) = \log(1+x+2y)$ ,  $Q = [0, 1] \times [2, 4]$ ;  
 h)  $f(x, y) = \sqrt{|x-y|}$ ,  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

## 14.2 Integrali doppi: il caso generale

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Per *definire* il concetto di integrale di  $f$  in una regione  $\Omega$  che non sia un rettangolo, possiamo ricondurci al caso precedente.

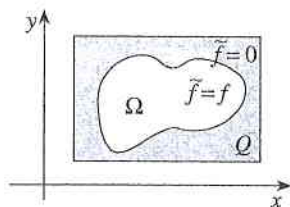


Figura 14.5

### DEFINIZIONE 14.7

Siano  $\Omega \subset Q = [a, b] \times [c, d]$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Posto

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in Q \setminus \Omega, \end{cases}$$

la funzione  $f$  si dice **integrabile** in  $\Omega$ ,  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ , se  $\tilde{f}$  è integrabile in  $Q$ ; in tal caso si pone

$$\iint_{\Omega} f := \iint_Q \tilde{f}.$$

È facile verificare che la definizione di integrabilità non dipende dalla scelta del rettangolo  $Q$ .

Si osservi che in generale la funzione  $\tilde{f}$ , estensione con 0 di  $f$  a  $Q$  (si veda Figura 14.6), non sarà continua nei punti della frontiera  $\partial\Omega$ ; per esempio, se  $f \equiv 1$  in  $\Omega$  allora  $f$  è discontinua in tutti i punti di  $\partial\Omega$  (si veda Figura 14.6). Si intuisce allora che il problema dell'integrabilità è legato alle proprietà della regione  $\Omega$ . Per affrontare questo problema si introduce la classe di insiemi limitati nei quali la funzione  $f \equiv 1$  è integrabile.

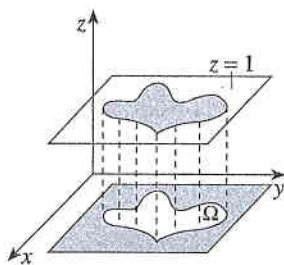


Figura 14.6

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \in Q \setminus \Omega \end{cases}$$

### DEFINIZIONE 14.8

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e  $f(x) \equiv 1$  per  $x \in \Omega$ . L'insieme  $\Omega$  si dice **misurabile (secondo Peano-Jordan)** se  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ . In tal caso il valore dell'integrale si dice **misura (o area)** di  $\Omega$  e si indica con  $|\Omega|$ :

$$|\Omega| := \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy.$$

Si osservi che se  $\Omega$  è un rettangolo  $|\Omega|$  è proprio la sua area.

L'estensione con 0 della funzione  $f \equiv 1$  in  $\Omega$  a  $\mathbb{R}^2$  si dice anche **funzione caratteristica di  $\Omega$** :

$$\mathbf{1}_{\Omega}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Per le Definizioni 14.7 e 14.8,  $\Omega$  è misurabile se  $\mathbf{1}_{\Omega}$  è integrabile nei rettangoli contenenti  $\Omega$ . Non è quindi sorprendente che la misurabilità di un insieme è completamente determinata dalla sua frontiera, l'insieme dei punti di discontinuità di  $\mathbf{1}_{\Omega}$ .

### Dimostrazione

### TEOREMA 14.9

Un insieme limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è misurabile se e solo se  $\partial\Omega$  è misurabile e  $|\partial\Omega| = 0$ .

Un insieme misurabile  $\Gamma$  con  $|\Gamma| = 0$  si dice **insieme di misura nulla**, quindi  $\Omega$  è misurabile se e solo se  $\partial\Omega$  è di misura nulla.

La dimostrazione del Teorema 14.9 si basa sul criterio di integrabilità nei rettangoli del Teorema 14.3. Questo vale anche per il seguente teorema, come si può facilmente intuire dalla sua stessa formulazione.

### TEOREMA 14.10

#### Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla

Un insieme  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  è di misura nulla se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero finito

### Dimostrazione



di rettangoli  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, N_\varepsilon$ , tali che

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |Q_i| < \varepsilon.$$

Ad esempio, un segmento di retta o un poligono di  $k$  lati sono insiemi di misura nulla. Lo sono anche i grafici di funzione, sotto ipotesi opportune:

#### TEOREMA 14.11

Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $[a, b]$ . Allora graf  $g$  è di misura nulla.

#### Dimostrazione

$g \in \mathcal{R}(a, b)$  se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\mathcal{D}_\varepsilon$ , suddivisione di  $[a, b]$ , tale che

$$S(\mathcal{D}_\varepsilon, g) - s(\mathcal{D}_\varepsilon, g) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \quad (14.7)$$

dove  $M_i$  e  $m_i$  sono, rispettivamente, l'estremo superiore e inferiore di  $g$  in  $[x_{i-1}, x_i]$ . Posto  $Q_i := [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , è chiaro che il grafico di  $f$  è contenuto in  $\bigcup_{i=1}^n Q_i$  (si veda Figura 8.2) e, per la (14.7), che  $\sum_{i=1}^n |Q_i| < \varepsilon$ .

Non è difficile provare che anche il sostegno di una curva regolare a tratti  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è di misura nulla. Non si deve tuttavia confondere la misura (secondo Peano-Jordan) del sostegno con la lunghezza della curva: la prima è una misura "bidimensionale", la seconda è "unidimensionale". Per esempio, le circonferenze nel piano di raggio 1 hanno lunghezza  $2\pi$ , mentre la loro misura è zero.

I criteri forniti nei Teoremi 14.3 e 14.10 hanno varie implicazioni.

#### TEOREMA 14.12

- (i) Se  $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$  è di misura nulla e  $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ , allora  $\Gamma_0$  è di misura nulla.
- (ii) L'unione e l'intersezione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile.
- (iii) Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato,  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e  $\Omega_1 \subseteq \Omega$  misurabile. Allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ .

Dimostrazione

Risulta che l'integrabilità della funzione caratteristica  $\mathbf{1}_\Omega$  in  $\Omega$  implica l'integrabilità di tutte le funzioni continue e limitate in  $\Omega$ .

#### TEOREMA 14.13

Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitato e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se  $\Omega$  è misurabile e  $f \in C(\Omega \setminus \Gamma)$ , con  $\Gamma$  misurabile e  $|\Gamma| = 0$ , allora  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ .

In particolare una funzione continua in un insieme misurabile e chiuso (quindi compatto) è integrabile (poiché è limitata).

Il Teorema 14.13 segue dall'osservazione che l'insieme dei punti di discontinuità dell'estensione  $\tilde{f}$  di  $f$  con 0 a un rettangolo contenente  $\Omega$  è sottoinsieme di  $\partial\Omega$ , quindi, per i Teoremi 14.9 e 14.12(i), è di misura nulla. Dunque il Teorema 14.13 è conseguenza immediata del seguente risultato.

#### TEOREMA 14.14

Sia  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata. Se l'insieme di punti di discontinuità di  $f$  ha misura nulla, allora  $f \in \mathcal{R}([a, b] \times [c, d])$ .

Dimostrazione





che  $h_1 \leq h_2$  in  $[c, d]$  e

$$\{(x, y) : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}. \quad (14.10)$$

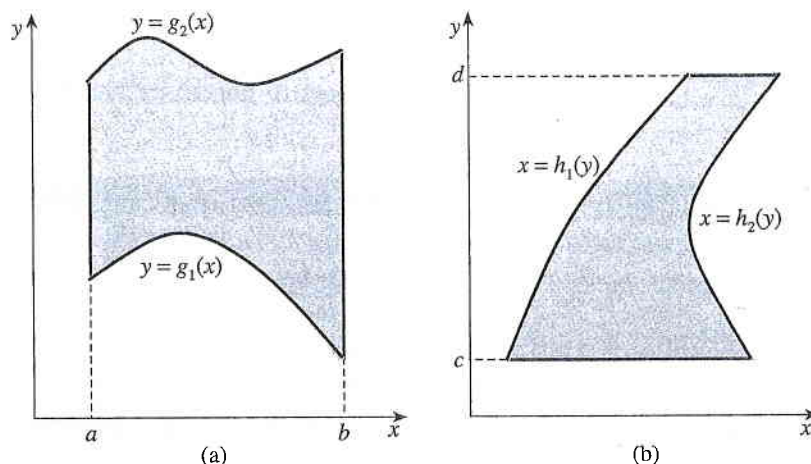


Figura 14.7 Domini semplici rispetto all'asse y (a) e all'asse x (b).

In altre parole, un dominio  $\Omega$  è semplice rispetto all'asse y se, presa una qualunque retta parallela all'asse y, tale retta o non interseca  $\Omega$ , o lo interseca in *un solo* intervallo (chiuso); ad esempio, il dominio in Figura 14.8 non è semplice rispetto ad y perché la retta  $x = x_0$  lo interseca in due intervalli disgiunti.

Spesso un insieme non è scritto direttamente come un dominio semplice. Per riconoscerlo ed esprimerlo analiticamente come tale è estremamente utile aiutarsi con le rappresentazioni grafiche.

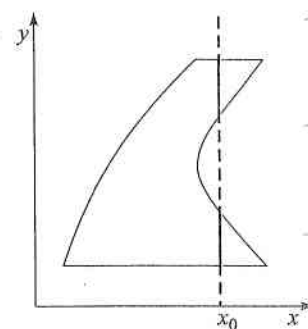


Figura 14.8

L'insieme  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$  è un dominio semplice rispetto all'asse y. Per verificarlo, procediamo prima per via puramente analitica. Poiché

$$|y| \leq 1 - |x| \Leftrightarrow |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|, \quad (14.11)$$

si può scrivere  $\Omega$  in modo equivalente come

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|\}.$$

Da ciò si sarebbe tentati di concludere che  $\Omega$  verifica la (14.9) (ovvero che è semplice). Tuttavia questa espressione non coincide con quella della Definizione 14.16, perché le due funzioni  $g_1(x) = |x| - 1$  e  $g_2(x) = 1 - |x|$  non sono necessariamente ordinate. Si ha

$$g_1(x) \leq g_2(x) \Leftrightarrow |x| - 1 \leq 1 - |x| \Leftrightarrow 2|x| \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

e altrimenti l'insieme degli  $y \in \mathbb{R}$  tali che  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  è vuoto. Perciò si può scrivere  $\Omega$  in modo equivalente come

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|\};$$

adesso (e solo adesso) si può concludere che  $\Omega$  è semplice rispetto all'asse y.

Si noti che  $\Omega$  si rappresenta per via grafica in modo elementare a partire dalla (14.11): è l'insieme di tutte le coppie  $(x, y)$  che stanno sotto al grafico di  $x \mapsto 1 - |x|$  e sopra il grafico di  $x \mapsto |x| - 1$  (si veda la Figura 14.9). Dalla figura risulta del tutto ovvio che  $x \in [-1, 1]$ .

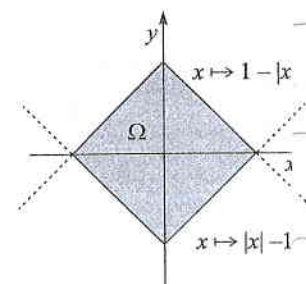


Figura 14.9

ESEMPIO 14.5

La frontiera di un dominio semplice è di misura nulla, essendo l'unione di 4 insiemi di misura nulla: 2 grafici di funzioni continue, quindi integrabili, e 2 segmenti di retta. Per il Teorema 14.9, un dominio semplice è quindi misurabile, ma va sottolineato che anche senza ricorrere alla teoria generale degli insiemi misurabili si può dimostrare elementarmente che le funzioni continue in domini semplici sono integrabili.



**TEOREMA 14.17** Formule di riduzione per domini semplici

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio semplice rispetto a uno degli assi. Se  $f \in C(\Omega)$  allora  $f$  è integrabile in  $\Omega$  e valgono le seguenti formule:

(i) se  $\Omega = \{(x, y) : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  e  $g_1, g_2 \in C([a, b])$ , allora

$$\iint_{\Omega} f = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx; \quad (14.12)$$

in particolare  $\Omega$  è misurabile e

$$|\Omega| := \iint_{\Omega} 1 dx dy = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x)) dx;$$

(ii) se  $\Omega = \{(x, y) : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$  e  $h_1, h_2 \in C([c, d])$ , allora

$$\iint_{\Omega} f = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy; \quad (14.13)$$

in particolare  $\Omega$  è misurabile e

$$|\Omega| := \iint_{\Omega} 1 dx dy = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y)) dy.$$

Si osservi che la misura di  $\Omega$  coincide con il concetto di area introdotto nel Capitolo 8.

La tesi del Teorema 14.17 continua a valere quando  $f$  non è continua nei punti della frontiera di  $\Omega$ , ma in tal caso dovremo richiedere che  $f$  sia limitata.

**Dimostrazione**

Dimostriamo solo la (14.12). Sia  $Q = [a, b] \times [c, d]$  un rettangolo contenente  $\Omega$ . Poiché  $f \in C(\Omega)$ , l'estensione  $\tilde{f}$  di  $f$  a  $Q$  sarà discontinua al più nei punti di  $\partial\Omega$ ; in particolare, per ogni  $x \in [a, b]$  la funzione  $y \mapsto \tilde{f}(x, y)$  da  $[c, d]$  in  $\mathbb{R}$  ha al più due punti di discontinuità,  $y = g_1(x)$  e  $y = g_2(x)$ , quindi è integrabile in  $[c, d]$ . Possiamo allora applicare la (14.5); ricordando che  $f = 0$  in  $Q \setminus \Omega$ , si ottiene:

$$\iint_{\Omega} f = \iint_Q \tilde{f} = \int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

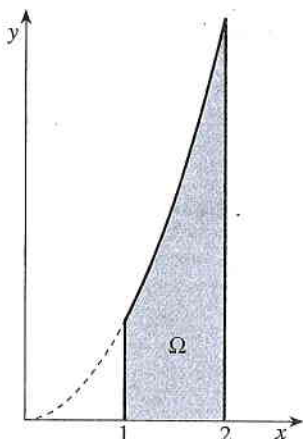
**ESEMPIO 14.6**

Figura 14.10

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}.$$

Evidentemente, si veda Figura 14.10,  $\Omega$  è semplice rispetto ad entrambi gli assi e possiamo quindi applicare le formule di riduzione. In questo caso conviene utilizzare la (14.12):

$$\iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy = \int_1^2 \left( \int_0^{x^2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) dx.$$

L'integrale più interno si risolve con la sostituzione  $t = y/x$ :

$$\int_0^{x^2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{x^2} \frac{dy}{x(1 + (y/x)^2)} = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = [\arctg t]_{t=0}^{t=x} = \arctg x.$$

Perciò, integrando per parti, si conclude che

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_1^2 \operatorname{arctg} x dx = [x \operatorname{arctg} x]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= [x \operatorname{arctg} x]_{x=1}^{x=2} - \frac{1}{2} [\log(1+x^2)]_{x=1}^{x=2} = 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : -1 + x^2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]\}.$$

Come nell'esempio precedente possiamo applicare sia la (14.12) sia la (14.13) (si veda Figura 14.11). Utilizzando la (14.12) si ha:

$$\iint_{\Omega} xy dx dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{-1+x^2}^{\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{2} (1-x^2 - (x^2-1)^2) dx = 0.$$

Alternativamente, si può osservare che  $\Omega$  è simmetrico rispetto all'asse  $y$ , ovvero  $(x, y) \in \Omega$  se e solo se  $(-x, y) \in \Omega$ , e che  $f(x, y) = xy$  è "dispari rispetto a  $x$ ", ovvero  $f(-x, y) = -f(x, y)$ .

#### ESEMPIO 14.7

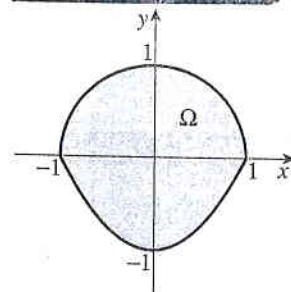


Figura 14.11

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} \frac{x \sin y}{y} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2x, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

Come suggerisce la Figura 14.12, il dominio è semplice rispetto a entrambi gli assi. Tuttavia, se provassimo a integrare prima rispetto a  $y$  e poi rispetto a  $x$  (ovvero utilizzando la (14.12)) non riusciremmo a determinare il valore dell'integrale poiché le primitive di  $(\sin y)/y$  non sono esprimibili elementarmente. Rappresentiamo allora  $\Omega$  come dominio semplice rispetto all'asse  $x$ , ovvero attraverso la (14.10). Anzitutto determiniamo l'ordinata del punto di intersezione, oltre l'origine, tra retta e circonferenza. Semplici calcoli forniscono  $y = 8/5$ , quindi  $(x, y) \in \Omega$  se e solo se  $y \in [0, 8/5] =: [c, d]$ . Inoltre

$$y \leq 2x \Leftrightarrow x \geq \frac{y}{2} =: h_1(y)$$

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 1, x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2} =: h_2(y).$$

Pertanto

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[0, \frac{8}{5}\right], \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2} \right\}.$$

e risulta

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x \sin y}{y} dx dy &= \int_0^{8/5} \left( \int_{y/2}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} x \frac{\sin y}{y} dx \right) dy \\ &= \int_0^{8/5} \left( \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{\sin y}{y} \right) dy = \int_0^{8/5} \left( y - \frac{5}{8} y^2 \right) \frac{\sin y}{y} dy = 1 - \frac{5}{8} \sin \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

#### ESEMPIO 14.8

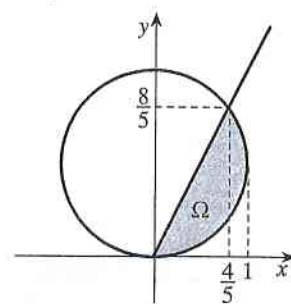


Figura 14.12

Le proprietà dell'integrale (i)-(v), enunciate nel Teorema 14.5 per funzioni integrabili su un rettangolo, continuano a valere per funzioni integrabili su un dominio semplice  $\Omega$ . Inoltre vale la seguente proprietà di additività rispetto al dominio di integrazione, che segue dal Teorema 14.15.

**TEOREMA 14.18**

Siano  $\Omega_1, \dots, \Omega_n$  domini semplici in  $\mathbb{R}^2$  tali che, per ogni  $i \neq j$ ,  $\Omega_i$  e  $\Omega_j$  non hanno punti interni comuni:  $(\Omega_i \cap \Omega_j) \subseteq (\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j)$ . Sia  $f: \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile in  $\Omega_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Allora  $f$  è integrabile in  $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n$  e

$$\iint_{\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_n} f = \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega_i} f. \quad (14.14)$$

Come mostra il prossimo esempio, il teorema aumenta notevolmente l'applicabilità delle formule di riduzione per i domini semplici.

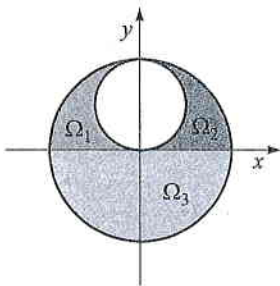
**ESEMPIO 14.9**

Figura 14.13

L'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$$

non è semplice (si veda la Figura 14.13). Tuttavia si può scomporre, per esempio, in tre domini semplici:

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq -\sqrt{1-(y-1)^2}\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], \sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 0\}.$$

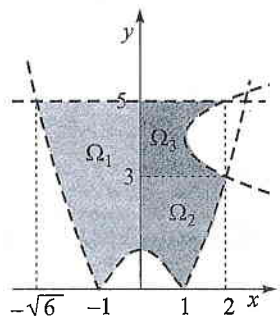
**ESEMPIO 14.10**

Figura 14.14

Si vuole calcolare l'area dell'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x^2 - 1| \leq y \leq 5, x \leq 1 + (y-4)^2\}.$$

I grafici delle funzioni che compaiono nella definizione di  $\Omega$  si tracciano in modo elementare con i metodi del Capitolo 2. Dalla Figura 14.14 risulta che  $\Omega$  non è semplice, ma può essere scomposto in tre domini semplici:

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{6}, 0], |x^2 - 1| \leq y \leq 5\},$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], |x^2 - 1| \leq y \leq 3\},$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [3, 5], 0 \leq x \leq 1 + (y-4)^2\}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_{-\sqrt{6}}^0 \left( \int_{|x^2-1|}^5 dy \right) dx + \int_0^2 \left( \int_{|x^2-1|}^3 dy \right) dx + \int_3^5 \left( \int_0^{1+(y-4)^2} dx \right) dy \\ &= \int_{-\sqrt{6}}^0 (5 - |x^2 - 1|) dx + \int_0^2 (3 - |x^2 - 1|) dx + \int_3^5 (1 + (y-4)^2) dy. \end{aligned}$$

Ci siamo quindi ricondotti al calcolo di tre integrali di funzione di una variabile, che si risolvono con i metodi del Capitolo 8. Ad esempio

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{6}}^0 (5 - |x^2 - 1|) dx &= 5\sqrt{6} - \int_{-\sqrt{6}}^{-1} (x^2 - 1) dx - \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx \\ &= 5\sqrt{6} + \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{6}}^{-1} - \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 4\sqrt{6} - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Analogamente

$$\int_0^2 (3 - |x^2 - 1|) dx = 4, \quad \int_3^5 (1 + (y - 4)^2) dy = \frac{8}{3},$$

e quindi  $|\Omega| = 4\sqrt{6} + 16/3$ . Si noti che si poteva anche procedere in modo più "geometrico" (come spesso accade per il calcolo dell'area), sottraendo all'area di  $\tilde{\Omega}$  quella di  $P$  (si veda la Figura 14.15):

$$|\Omega| = |\tilde{\Omega}| - |P| = \int_{-\sqrt{6}}^2 \left( \int_{|x^2-1|}^5 dy \right) dx - \int_3^5 \left( \int_{1+(y-4)^2}^2 dx \right) dy$$

(lo studente controlli che il risultato è lo stesso).

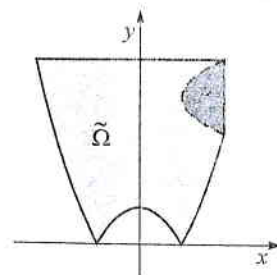


Figura 14.15

Stabilire se i seguenti insiemi sono semplici rispetto a uno o entrambi gli assi e rappresentarli nella forma (14.9) o (14.10) (oppure, ove possibile, entrambe). Darne anche una rappresentazione grafica:

- $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq 4y \leq 3x, x^2 + y^2 \leq 25\}$ ;
- $\Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 4], y \geq x^2\}$ ;
- $\Omega = \{(x, y) : x \in [-1, 1], x^2 \geq y^3\}$ ;
- $\Omega = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ ;
- $\Omega = \{(x, y) : 1-x \leq y \leq 3-x, x-1 \leq y \leq x\}$ ;
- $\Omega = \{(x, y) : x^{2/3} + y^{2/3} \leq 4^{2/3}\}$ ;
- $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y^2 \geq x\}$ .

#### ESERCIZIO 14.3

Per i seguenti integrali doppi, verificare che il dominio è semplice rispetto a entrambi gli assi e scambiare l'ordine di integrazione:

- $\int_0^2 \left( \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x, y) dy \right) dx;$
- $\int_0^1 \left( \int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\frac{1}{2}(1-x)} f(x, y) dy \right) dx.$
- $\int_0^1 \left( \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \right) dy;$

#### ESERCIZIO 14.4

Calcolare i seguenti integrali:

- $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x + e^{-x} \leq y \leq \frac{5}{2} \right\};$
- $\iint_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (x+1)^2, 0 \leq x \leq 5-y \right\};$
- $\iint_{\Omega} \cos(\pi y) dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| \leq y \leq \frac{1}{2}x \right\};$
- $\iint_{\Omega} |y-2x^2| dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x \leq 3\};$
- $\iint_{\Omega} x^2 y dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y, x^2 + y^2 \leq 2\};$
- $\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 3-2x \leq y \leq 5-2x\};$
- $\iint_{\Omega} \frac{x}{1+y+x} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x \geq 0, 3x \leq y < x+1\};$

#### ESERCIZIO 14.5

- h)  $\iint_{\Omega} (x+y)e^{x^2+y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\};$   
 i)  $\iint_{\Omega} e^{y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : 0 \leq \frac{1}{4}x \leq y \leq \sqrt[3]{x}, y \leq 1\};$   
 j)  $\iint_{\Omega} x^2 y dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : -3 \leq y \leq x^2 + 1 \leq 2\} \cap \{(x, y) : -\frac{1}{2}|y| \leq x < 1\};$   
 k)  $\iint_{\Omega} \sqrt{y^2 - x^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : y \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{2x}\};$   
 l)  $\iint_{\Omega} |(1+x)y - 1 + x| dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$

### 14.3 Cambiamento delle variabili di integrazione per gli integrali doppi

Quanto vedremo può essere interpretato come una generalizzazione del metodo di integrazione per sostituzione per le funzioni di una variabile.

Siano,  $D, E \subseteq \mathbb{R}^2$  aperti, misurabili e  $\psi : D \rightarrow \psi(D) = E$  una funzione biettiva:

$$\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)).$$

La funzione  $\psi$  definisce il cambiamento di variabili

$$(u, v) \mapsto (x, y), \quad \begin{cases} x = \psi_1(u, v) \\ y = \psi_2(u, v) \end{cases} \text{ se } (u, v) \in D.$$

Siano  $\Omega \subseteq \psi(D)$  misurabile,  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$  e consideriamo

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy.$$

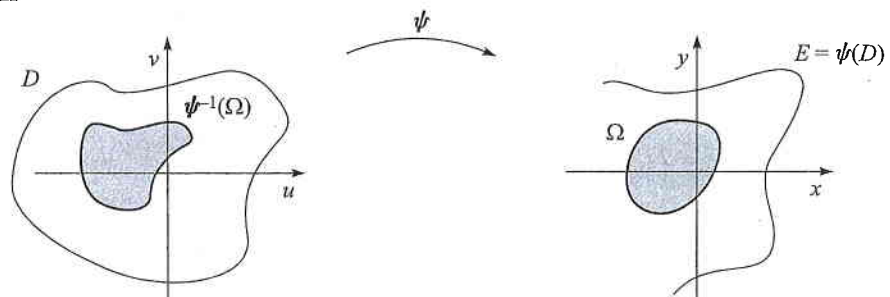
Procedendo euristico, se operassimo il cambiamento di variabili stabilito da  $\psi$ , avremmo un integrale esteso a  $\psi^{-1}(\Omega)$  di  $f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$  (si veda Figura 14.16). Ovviamente un primo problema è stabilire come si trasforma l'elemento d'area  $dx dy$ .

Più precisamente, sia  $R$  uno dei rettangoli indotti da una suddivisione  $\mathcal{D}$  di un rettangolo  $Q$  contenente  $D$  (stiamo quindi considerando il piano  $u-v$ ), cioè il rettangolo  $R$  di vertici

$$A_0 = (u, v), \quad B_0 = (u+h, v), \quad C_0 = (u+h, v+k), \quad D_0 = (u, v+k)$$

(si veda Figura 14.17). L'area di  $R$  è  $hk$  e vogliamo sapere quanto è l'area dell'immagine di  $R$  (nel piano  $x-y$ ) sotto la trasformazione  $\psi$ . Si noti che i 4 vertici si trasformano in

Figura 14.16



$$A_1 = (x, y) := (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)),$$

$$B_1 = (\psi_1(u+h, v), \psi_2(u+h, v))$$

$$= \left( x + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} h + o(h), y + \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} h + o(h) \right) \text{ per } h \rightarrow 0,$$

$$C_1 = (\psi_1(u+h, v+k), \psi_2(u+h, v+k))$$

$$= \left( x + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} h + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} k + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \right.$$

$$\left. y + \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} h + \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \right) \text{ per } (h, k) \rightarrow (0, 0),$$

$$D_1 = (\psi_1(u, v+k), \psi_2(u, v+k))$$

$$= \left( x + \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} k + o(k), y + \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} k + o(k) \right) \text{ per } k \rightarrow 0.$$

Quindi in prima approssimazione l'immagine del rettangolo  $R$  è il parallelogramma individuato dal vertice  $(x, y)$  e dai due vettori

$$\mathbf{v}_1 = \left( \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} h, \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} h \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \left( \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} k, \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} k \right)$$

(si veda Figura 14.18) la cui area (si veda l'Appendice di Algebra lineare sul sito internet) è il valore assoluto di

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} h & \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} k \\ \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} h & \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} k \end{pmatrix} \\ = hk \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} = hk \det J_\psi(u, v)$$

dove  $J_\psi(u, v)$  è la matrice jacobiana definita da

$$J_\psi(u, v) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2(u, v)}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (14.15)$$

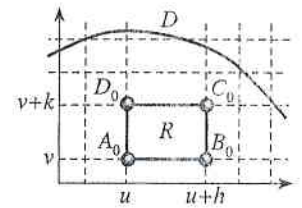
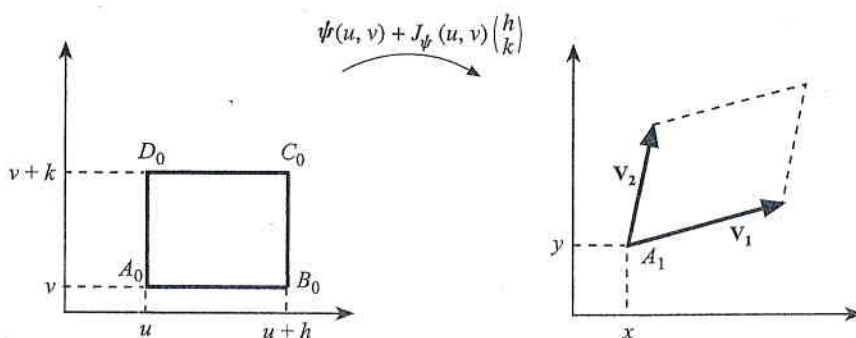


Figura 14.17

Appendice

Figura 14.18 Approssimazione lineare di un cambiamento di variabili  $\psi$ .



(si veda anche la (11.37)). Si può quindi interpretare  $|\det J_\psi(u, v)|$  come il fattore che misura la variazione infinitesima dell'area indotta dalla trasformazione  $\psi$  nel punto  $(u, v)$ .

Il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione, formalizza quanto suggerito da questo calcolo.

**TEOREMA 14.19** Cambiamento delle variabili di integrazione

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto limitato,  $\psi : D \rightarrow \Psi(D)$  biettiva,  $\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), \psi_2(u, v))$  per  $(u, v) \in D$  e  $\psi_1, \psi_2 \in C^1(D)$ . Sia  $J_\psi(u, v)$  la matrice jacobiana definita dalla (14.15). Se  $\psi_1, \psi_2$  e le loro derivate parziali sono limitate in  $D$  e se  $\det J_\psi(u, v) \neq 0$  per  $(u, v) \in D$ , allora:

- (i)  $S \subseteq D$  è misurabile se e solo se  $\psi(S)$  è misurabile;  
 (ii) se  $S \subseteq D$  è misurabile e  $f \in C(\psi(S))$  è limitata, vale la formula

$$\iint_{\psi(S)} f(x, y) dx dy = \iint_S f(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)) |\det J_\psi(u, v)| du dv. \quad (14.16)$$

Di solito si applica questo risultato a insiemi  $S$  e  $\psi(S)$  che sono (unione finita di) domini semplici; nei prossimi paragrafi si illustreranno i cambiamenti di variabile di uso più frequente.

L'ipotesi che  $\det J_\psi \neq 0$  in  $D$  garantisce (si veda il teorema di inversione locale, Teorema 13.1) che  $\psi^{-1}$  è una funzione  $C^1$  in un intorno di ogni punto di  $D$ . Quindi  $\psi^{-1}$  gode della stessa proprietà di  $\Psi$  e inoltre

$$J_{\psi^{-1}}(x, y) = (J_\psi(u, v))^{-1}, \quad \text{dove } (x, y) = \psi(u, v). \quad (14.17)$$

Di fatto, per applicare la (14.16), la condizione  $\det J_\psi \neq 0$  in  $D$  può essere indebolita richiedendo che valga eccetto al più in un insieme di misura nulla.

### 14.3.1 Coordinate polari

Le coordinate polari di centro  $(x_0, y_0)$  sono state introdotte nel Paragrafo 10.4.3; esse possono essere interpretate come una funzione  $\psi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\begin{cases} x = \psi_1(\rho, \varphi) = x_0 + \rho \cos \varphi \\ y = \psi_2(\rho, \varphi) = y_0 + \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (14.18)$$

La scelta di  $[0, 2\pi)$  come dominio di  $\varphi$  è solo esemplificativa; in effetti si può considerare  $\psi : [0, +\infty) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $I$  un qualunque intervallo di ampiezza  $2\pi$ , ad esempio  $(-\pi, \pi]$ .

**ESEMPIO 14.11**

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  il cerchio di centro  $(-3, 4)$  e raggio  $R$ , ovvero

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3)^2 + (y - 4)^2 \leq R^2\}.$$

Utilizzando la (14.18) con  $(x_0, y_0) = (-3, 4)$ , si ha

$$\psi(\rho, \varphi) \in \Omega \Leftrightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R^2 \Leftrightarrow \rho \leq R.$$

Perciò in coordinate polari il cerchio  $\Omega$  è rappresentato rispetto al centro  $(-3, 4)$  da

$$S = \{(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) : \rho \leq R\} = [0, R] \times [0, 2\pi).$$

L'insieme di equazione cartesiana  $x \geq y^2$  si rappresenta in coordinate polari rispetto al centro  $(0, 0)$  come

$$\{(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) : \cos \varphi \geq \rho \sin^2 \varphi\}.$$

Chiaramente  $\psi$  è di classe  $C^1$  e la matrice jacobiana è

$$J_\psi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix};$$

quindi

$$|\det J_\psi| = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho \quad (14.19)$$

(si veda Figura 14.19). Si noti però che se  $\rho \in [0, \infty)$  la funzione  $\psi$  non è biunivoca (infatti  $\psi(0, \varphi) = (x_0, y_0)$  per ogni  $\varphi$ ), e se  $\varphi \in [0, 2\pi)$  l'insieme di definizione non è aperto. Per utilizzare  $\psi$  nel Teorema 14.19 si dovrebbe quindi considerare la restrizione di  $\psi$  a  $D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ . Tuttavia, poiché l'insieme  $\mathbb{R}^2 \setminus \psi(D) = \{(x, 0) : x \geq 0\}$  ha misura nulla, anche gli insiemi  $S \setminus D$  e  $\psi(S) \setminus \psi(D)$  hanno misura nulla (purché  $S$  sia misurabile e limitato): perciò sono trascurabili rispetto all'operazione di integrazione. Ricordando la (14.19), dal Teorema 14.19 si ottiene:

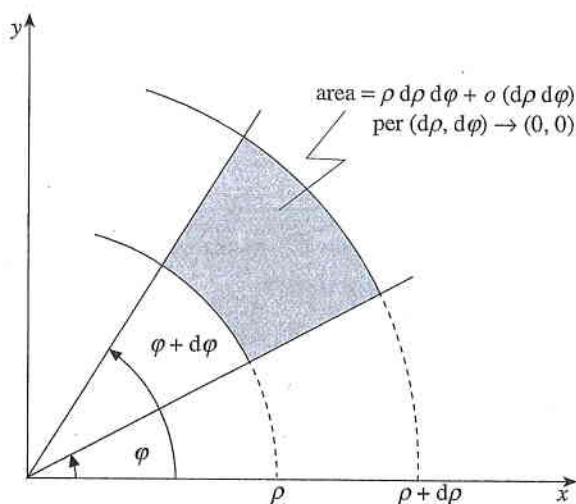


Figura 14.19 Elemento d'area in coordinate polari.

**COROLLARIO 14.20**

Siano  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\psi$  definita dalla (14.18) ed  $S \subset \mathbb{R}^2$  misurabile e limitato. Allora

$$\iint_{\Omega = \psi(S)} f(x, y) dx dy = \iint_S f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (14.20)$$

per ogni  $f \in C(\psi(S))$  limitata.

**Dimostrazione**

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Si utilizzano le coordinate polari con centro nell'origine  $((x_0, y_0) = (0, 0))$  e angolo  $\varphi \in I = [0, 2\pi)$ . Sostituendo la (14.18) nelle disuguaglianze che definiscono  $\Omega$ , si ottiene

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq x &\Leftrightarrow 0 \leq \rho \sin \varphi \leq \rho \cos \varphi \stackrel{\rho \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq \sin \varphi \leq \cos \varphi \stackrel{\varphi \in I}{\Leftrightarrow} \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ x^2 + y^2 \leq 4 &\Leftrightarrow \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \leq 4 \Leftrightarrow \rho^2 \leq 4 \stackrel{\rho \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq \rho \leq 2. \end{aligned}$$

Perciò

$$\Omega = \psi(S) \quad \text{con } S = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \pi/4\} = [0, 2] \times [0, \pi/4]$$

(si veda Figura 14.20). Osservando che  $\Omega$  è misurabile e  $f \in C(\Omega)$ , possiamo applicare la (14.20);

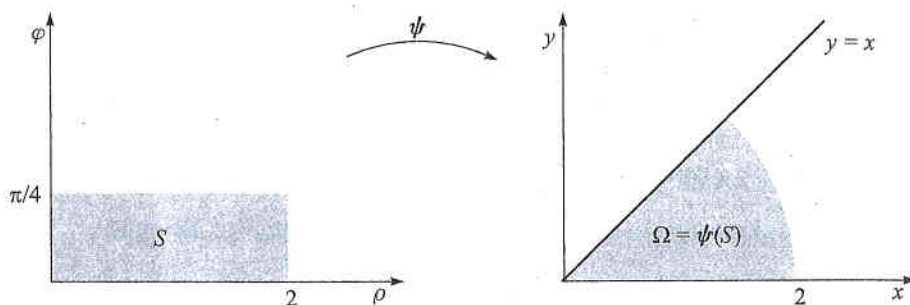
**ESEMPIO 14.12**

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \iint_{[0,2] \times [0, \pi/4]} \rho^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi.$$

Applicando le formule di riduzione su rettangoli si conclude che

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \left( \int_0^2 \rho^3 \, d\rho \right) \left( \int_0^{\pi/4} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Figura 14.20



### ESEMPIO 14.13

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

ovvero  $\Omega$  è il cerchio di centro  $(1, 0)$  e raggio 1. Utilizziamo le coordinate polari. Il problema è quello di scegliere in quale punto porre il centro del sistema. La definizione di  $\Omega$  suggerisce di scegliere come centro il punto  $(1, 0)$ , mentre quella della funzione integranda, essendo la distanza del punto dall'origine, suggerisce  $(0, 0)$ . Di fatto nel primo caso (centro in  $(1, 0)$ ) la funzione  $f \circ \psi$  risulta più complicata dal punto di vista del calcolo dell'integrale. Poniamo allora

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in I,$$

dove  $I$  è un intervallo di ampiezza  $2\pi$  (si veda Figura 14.21). Sostituendo nella disuguaglianza che definisce  $\Omega$ , si ottiene

$$x^2 + y^2 - 2x = \rho(\rho - 2 \cos \varphi) \leq 0 \stackrel{\rho \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi.$$

Perciò

$$S = \{(\rho, \varphi) \in [0, +\infty) \times I : 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi\}.$$

Per caratterizzare  $S$  come dominio semplice, si osserva che  $0 \leq 2 \cos \varphi$  se e solo se  $\varphi \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \cap I$ . Conviene perciò scegliere  $I = (-\pi, \pi]$  (in modo da non spezzare l'intervallo in cui varia  $\varphi$ ): si ha quindi

$$S = \{(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times (-\pi, \pi] : \varphi \in [-\pi/2, \pi/2], 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi\}.$$

Poiché  $S$  è semplice rispetto all'asse  $\rho$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho \right) d\varphi = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} \left[ \sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} = \frac{32}{9}. \end{aligned}$$

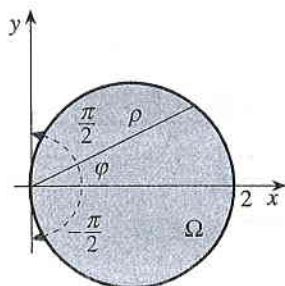


Figura 14.21

### ESEMPIO 14.14

Si vuole calcolare, utilizzando le coordinate polari,

$$\iint_{\Omega} \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \, dx \, dy$$



dove

$$\Omega = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}(x-1), x \in [1, 2]\}$$

(si veda Figura 14.22). In questo caso è naturale porre

$$x = 1 + \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

In tal caso

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \geq 1,$$

$$0 \leq y \leq \sqrt{3}(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \sin \varphi \leq \sqrt{3} \cos \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in [0, \pi/3],$$

$$1 \leq x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \rho \cos \varphi \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho \leq 1/\cos \varphi.$$

Perciò

$$S = \{(\rho, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) : \varphi \in [0, \pi/3], 1 \leq \rho \leq 1/\cos \varphi\}.$$

Poiché  $1 \leq 1/\cos \varphi$  per ogni  $\varphi \in [0, \pi/3]$ ,  $S$  è un dominio semplice. Pertanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/3} \left( \int_1^{1/\cos \varphi} \frac{\rho \cos \varphi}{\rho^2} \rho d\rho \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/3} (1 - \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

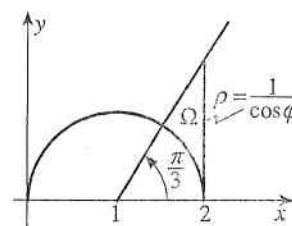


Figura 14.22

Sia da calcolare l'integrale

$$\iint_{\Omega} xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

Osserviamo (si veda Figura 14.23) che tanto il dominio  $\Omega$  quanto la funzione integranda sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, ovvero  $f(x, y) = f(y, x)$  e  $(x, y) \in \Omega$  se e solo se  $(y, x) \in \Omega$ . Perciò, posto  $\tilde{\Omega} := \Omega \cap \{(x, y) : y \leq x\}$ , si ha

$$\iint_{\Omega} xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_{\tilde{\Omega}} xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Passando in coordinate polari (con centro nell'origine) e ragionando come nei precedenti esempi si ottiene

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= 2 \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{2 \sin \varphi} \rho^{11/3} \sin \varphi \cos \varphi d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{3 \cdot 2^{17/3}}{14} \int_0^{\pi/4} (\sin \varphi)^{17/3} \cos \varphi d\varphi = \frac{9 \cdot 2^{1/3}}{70}. \end{aligned}$$

Siano  $O = (0, 0)$ ,  $A = (2, 0)$ ,  $B = (2, 2)$ . Esprimere il segmento  $AB$  e il triangolo di vertici  $O$ ,  $A$  e  $B$  in coordinate polari.

Rappresentare graficamente i seguenti insiemi:

- $\{(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) : 0 \leq \rho \leq 5, \pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4\}$ ;
- $\{(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) : 0 \leq \rho \leq 2/\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ;
- $\{(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) : 0 \leq \rho \leq \varphi \leq 0, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$ .

Calcolare i seguenti integrali:

$$a) \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{5/2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\};$$

#### ESEMPIO 14.15

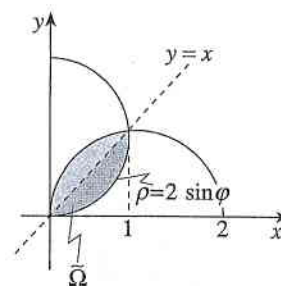


Figura 14.23

#### ESERCIZIO 14.6

#### ESERCIZIO 14.7

#### ESERCIZIO 14.8

- b)  $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\};$
- c)  $\iint_{\Omega} |x+y| dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\};$
- d)  $\iint_{\Omega} xy dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x-1\};$
- e)  $\iint_{\Omega} x dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 1\};$
- f)  $\iint_{\Omega} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\};$
- g)  $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x^2\};$
- h)  $\iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$

### 14.3.2 Altri cambiamenti di variabili

Illustriamo, attraverso esempi, alcuni altri cambiamenti di variabile.

#### ESEMPIO 14.16

#### Coordinate ellittiche

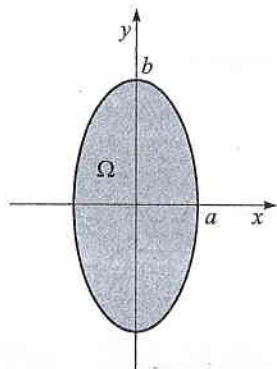


Figura 14.24

Siano  $a, b > 0$ . Si vuole calcolare l'area dell'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

$\Omega$  è limitato da una ellisse di centro nell'origine e semiassi  $a$  e  $b$  (si veda la Figura 14.24). Per parametrizzarlo è utile considerare una generalizzazione delle coordinate polari, le *coordinate ellittiche*:

$$x = \psi_1(\rho, \varphi) = a \rho \cos \varphi, \quad y = \psi_2(\rho, \varphi) = b \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in I,$$

dove  $I$  è un intervallo di ampiezza  $2\pi$ . Nel caso in esame, ovviamente, scegliamo  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Sostituendo, si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$$

e quindi

$$\psi(S) = \Omega, \quad S = \{(\rho, \varphi) \in [0, +\infty) \times I : \rho \leq 1\} = [0, 1] \times I,$$

$$J_{\psi}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -a \rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |\det J_{\psi}| = ab\rho.$$

Si osservi che  $|\det J_{\psi}|$  differisce dal corrispondente valore nella trasformazione in coordinate polari per un fattore moltiplicativo,  $ab$ . Pertanto

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} dx dy = \iint_{[0, 1] \times I} ab \rho d\rho d\varphi = |I| ab \int_0^1 \rho d\rho = \pi ab.$$

#### ESEMPIO 14.17

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} \sqrt{4x^2 + 9y^2} dx dy, \quad \text{dove} \quad \Omega = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq -\frac{2}{3}x, 4x^2 + 9y^2 \leq 4\}.$$

In questo caso  $\Omega$  è una porzione di ellisse (Figura 14.25); quindi conviene operare il seguente cambiamento di variabili:

$$x = \frac{1}{2} \rho \cos \varphi, \quad y = \frac{1}{3} \rho \sin \varphi, \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in I,$$

da cui  $|\det J_\psi| = \rho/6$  (si veda l'esempio precedente). Scegliendo  $I = (-\pi, \pi]$ , si ha

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Leftrightarrow \cos \varphi \geq 0 && \varphi \in I &\Leftrightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] \\ y \geq -\frac{2}{3}x &\Leftrightarrow \cos \varphi + \sin \varphi \geq 0 && \varphi \in I &\Leftrightarrow \varphi \in [-\pi/4, 3\pi/4], \\ 4x^2 + 9y^2 \leq 4 &\Leftrightarrow \rho^2 \leq 4 && \rho \geq 0 &\Leftrightarrow \rho \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Quindi  $S = [0, 2] \times [-\pi/4, \pi/2]$  e

$$\iint_{\Omega} \sqrt{4x^2 + 9y^2} \, dx \, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \frac{1}{6} \rho^2 \, d\rho \, d\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

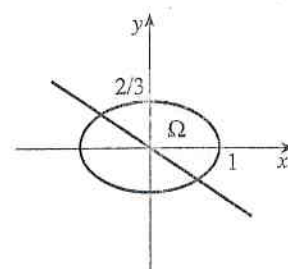


Figura 14.25

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} (x+y) \log(x-y) \, dx \, dy, \quad \Omega = \{(x, y) : 1-x \leq y \leq 3-x, \frac{1}{2}+y \leq x \leq 1+y\}$$

(Figura 14.26). Conviene porre

$$x+y = u, \quad x-y = v$$

ovvero

$$x = \psi_1(u, v) = \frac{u+v}{2}, \quad y = \psi_2(u, v) = \frac{u-v}{2}.$$

Quindi  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  è una trasformazione lineare descritta dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

perciò  $J_\psi = M$  e  $|\det M| = 1/2$ .

Inoltre si ottiene immediatamente che  $\psi^{-1}(\Omega) = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{2} \leq v \leq 1\}$ , da cui

$$\iint_{\Omega} (x+y) \log(x-y) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \left( \int_1^3 u \log v \, du \right) dv = \log 2 - 1.$$

## ESEMPIO 14.18

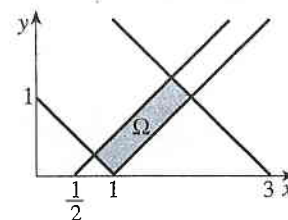


Figura 14.26

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} e^{\frac{2x-y}{x+3y}} \, dx \, dy, \quad \Omega = \{(x, y) : y \geq 0, x \geq 0, 1 \leq x+3y \leq 2\}.$$

Ragionando come nell'esempio precedente, si pone

$$u = 2x - y, \quad v = x + 3y,$$

ovvero  $x = \frac{3u+v}{7}, y = \frac{2v-u}{7}$ . Si verifica facilmente che

$$\psi^{-1}(\Omega) = \{(u, v) : v \in [1, 2], -v/3 \leq u \leq 2v\}$$

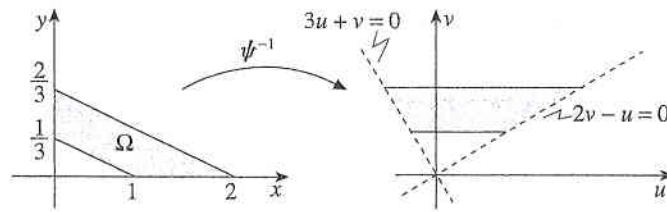
(Figura 14.27) e che  $|\det J_\psi| = 1/7$ . Perciò

$$\iint_{\Omega} e^{\frac{2x-y}{x+3y}} \, dx \, dy = \frac{1}{7} \int_1^2 \left( \int_{-v/3}^{2v} e^{u/v} \, du \right) dv = \frac{1}{7} \int_1^2 v [e^2 - e^{-1/3}] dv = \frac{3}{14} (e^2 - e^{-1/3}).$$

## ESEMPIO 14.19



Figura 14.27



## ESEMPIO 14.20

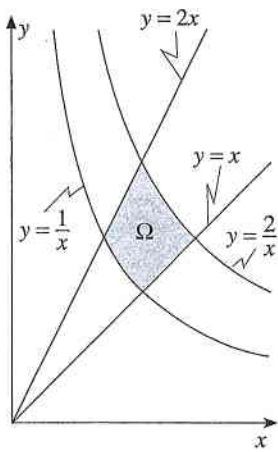


Figura 14.28

Si vuole calcolare (Figura 14.28)

$$\iint_{\Omega} \frac{x^3}{y} \sin(xy) dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x < y \leq 2x, 1 < xy < 2\}$$

La struttura della funzione integranda e quella del dominio suggeriscono il seguente cambiamento di variabili:

$$\frac{x}{y} = u, \quad xy = v.$$

Si osservi che la funzione

$$(x, y) \mapsto \left( \frac{x}{y}, xy \right), \quad y \neq 0$$

non è iniettiva; lo è però la sua restrizione all'insieme  $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ , che è il caso che stiamo esaminando (infatti  $x < 2x$  se e solo se  $x > 0$ , e in tal caso  $xy > 1$  implica  $y > 0$ ). Per calcolare il determinante della matrice jacobiana della funzione  $\psi$  nota la sua inversa  $\psi^{-1}$  ricordiamo la (14.17),  $J_{\psi^{-1}}(x, y) = (J_{\psi}(u, v))^{-1}$ , da cui segue che

$$|\det J_{\psi}(u, v)| = \frac{1}{|\det J_{\psi^{-1}}(x, y)|}.$$

Risulta

$$J_{\psi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ y & x \end{pmatrix}$$

cosicché

$$|\det J_{\psi^{-1}}| = \frac{2x}{y} \quad \text{e} \quad |\det J_{\psi}(u, v)| = \frac{u}{2}.$$

Per quanto riguarda il dominio, abbiamo:

$$\psi^{-1}(\Omega) = \{(u, v) : 1/2 \leq u < 1, 1 < v < 2\} = \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \times [1, 2]$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{x^5}{y^3} \sin(xy) dx dy &= \frac{1}{2} \iint_{[1/2, 1] \times [1, 2]} u^3 v \sin v du dv \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{4} u^4 \right]_{u=1/2}^{u=1} \right) \left( [\sin v - v \cos v]_{v=1}^{v=2} \right) = \frac{15}{128} (\sin 2 - 2 \cos 2 - \sin 1 + \cos 1). \end{aligned}$$

## ESERCIZIO 14.9

Calcolare i seguenti integrali:

a)  $\iint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} dx dy, \quad \Omega$  è il triangolo di vertici  $(1, 0), (2, 0), (2, 2)$ ;

- b)  $\iint_{\Omega} \frac{\log(x+y)}{x-y} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x-1, x \leq 3-y\};$
- c)  $\iint_{\Omega} \frac{x^4}{y^2} \operatorname{arctg}(xy) dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x < y \leq 3x, xy < 2\}.$
- d)  $\iint_{\Omega} \frac{y^2}{x} dx dy, \quad \Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2x^2, y^2 \leq x \leq 3y^2\}.$

### 14.4 Integrali doppi impropri

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si vuole generalizzare il concetto di integrale di  $f$  in  $\Omega$  senza assumere che  $f$  o  $\Omega$  siano limitati. Per separare i tre concetti fondamentali, procederemo in tre passi: insiemi misurabili, funzioni non negative e il caso generale. Considereremo solo funzioni continue in  $\Omega$  tranne al più un insieme di misura nulla.

**Guida**

Gli integrali impropri di funzioni di più variabili non vengono richiamati successivamente nel testo.

#### 14.4.1 Misura di insiemi non limitati

**DEFINIZIONE 14.21**

Un sottoinsieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice **misurabile** (secondo Peano-Jordan) se  $\Omega \cap R$  è misurabile per ogni rettangolo  $R \subseteq \mathbb{R}^2$ , e in tal caso

$$|\Omega| = \sup \{ |\Omega \cap R| : R \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ rettangolo} \}$$

si dice **misura** o **area** di  $\Omega$ . Se  $|\Omega| < +\infty$  si dice che  $\Omega$  ha misura (o area) finita.

Se  $\Omega$  è limitato, la nozione di insieme misurabile appena data coincide con quella della Definizione 14.8. Il valore dell'estremo superiore non cambia se ci si limita a considerare rettangoli "abbastanza grandi": infatti, se  $R' \supset R$ , allora  $|\Omega \cap R'| \geq |\Omega \cap R|$ . In effetti, per ogni successione  $\{R_n\}$  di rettangoli tali che

$$R_n \subset R_{n+1} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \mathbb{R}^2,$$

$\Omega$  è misurabile se e solo se  $\Omega \cap R_n$  è misurabile definitivamente per  $n \rightarrow +\infty$ , e in tal caso

$$|\Omega| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |\Omega \cap R_n|.$$

In particolare, sono misurabili tutti gli insiemi  $\Omega$  tali che, per ogni  $n$ ,  $\Omega \cap R_n$  è unione finita di domini normali.

L'insieme

$$\Omega = \{(x, y) : x > 0, 1 < y < x^{-1/2}\}$$

è misurabile, ha misura finita e  $|\Omega| = 1$ . Per l'osservazione precedente possiamo limitarci a considerare i quadrati  $R_n = [-n, n]^2$  con  $n > 1$ . L'insieme  $\Omega \cap R_n$  è un dominio semplice rispetto ad entrambi gli assi (in Figura 14.29,  $\Omega \cap R_3$ ) e quindi è misurabile per ogni  $n$ : perciò  $\Omega$  è misurabile. Per determinarne la misura, conviene esprimerlo come dominio semplice rispetto all'asse  $x$ :

$$\Omega \cap R_n = \{(x, y) : y \in [1, n], 0 < x < y^{-2}\}.$$

Perciò

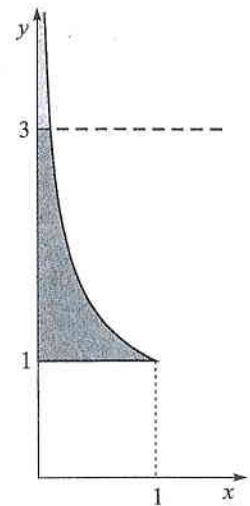
$$|\Omega \cap R_n| = \iint_{\Omega \cap R_n} dx dy = \int_1^n \left( \int_0^{y^{-2}} dx \right) dy = \int_1^n y^{-2} dy = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$


Figura 14.29

**ESEMPIO 14.21**

Continuano a valere le proprietà elementari: unione e intersezione di due insiemi misurabili è misurabile, e ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla ha misura nulla. Inoltre, un insieme è misurabile se e solo se la sua frontiera è misurabile e ha misura nulla.

**ESERCIZIO 14.10**

Dire se i seguenti insiemi sono misurabili e in tal caso determinarne la misura:

- a)  $B(0, 1) \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ;      d)  $\{(x, y) : x > 0, 0 < y \leq x^\alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ ;      e)  $\{(x, y) : x > 0, 1 < y < x^\alpha\}, \alpha \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $\{(x, y) : x \geq 2, 0 < y < 1/(x \log^2 x)\}$ ;      f)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B((0, n), 2^{-n})$ .

**14.4.2 Integrabilità in senso improprio: funzioni non negative**

Si vuole generalizzare il concetto di integrale di una funzione  $f$  su un insieme misurabile  $\Omega$  senza assumere che  $f$  oppure  $\Omega$  siano limitati. Come nel paragrafo precedente, l'idea è quella di "invadere"  $\Omega$  con insiemi limitati. Stavolta però dovremo anche assicurarci che  $f$  sia integrabile su tali insiemi. Perciò definiamo l'insieme

$$\mathcal{T} = \{T \subseteq \Omega : T \text{ misurabile e limitato, } f \text{ limitata in } T, f \in \mathcal{R}(T)\} \quad (14.21)$$

e supponiamo che gli elementi di  $\mathcal{T}$  "invadano"  $\Omega$  nel senso che

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall \text{ rettangolo } R \exists T \in \mathcal{T} : |\Omega \cap R \setminus T| < \varepsilon. \quad (14.22)$$

Per il Teorema 14.14, ogni funzione limitata in  $\Omega$  e continua in  $\Omega$  tranne al più su un insieme di misura nulla soddisfa la (14.22): infatti  $T = \Omega \cap R \in \mathcal{T}$ .

**DEFINIZIONE 14.22**

Sia  $\Omega$  misurabile, e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  non negativa e tale che valga la (14.22). Il valore

$$\iint_{\Omega} f := \sup_{T \in \mathcal{T}} \iint_T f$$

si dice **integrale (improprio) di  $f$  su  $\Omega$** . Se tale valore è finito, allora  $f$  si dice **integrabile (in senso improprio)** in  $\Omega$ .

Affinché la nozione di integrale appena data coincida con quella data in precedenza se  $\Omega$  ed  $f$  sono limitati ed  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ , è cruciale che  $f \geq 0$ : in tal caso  $\Omega \in \mathcal{T}$  e il sup è assunto per  $T = \Omega$ . Per funzioni integrabili in senso improprio, restano vere la linearità dell'integrale (si veda (i) del Teorema 14.5) e l'additività rispetto al dominio di integrazione (si veda la (14.8)).

Come nel caso della misura di insiemi, è sufficiente considerare una successione di insiemi che "invadono"  $\Omega$ .

**TEOREMA 14.23**

Sia  $\Omega$  misurabile, e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  non negativa e tale che valga la (14.22). Per ogni successione di insiemi  $\{T_n\} \subset \mathcal{T}$  tale che

$$T_n \subset T_{n+1} \text{ e } \forall T \in \mathcal{T} \exists n_0 : T \subseteq T_{n_0}, \quad (14.23)$$

si ha

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{T_n} f(x, y) dx dy.$$



**Dimostrazione**

Trattiamo solo il caso in cui  $\iint_{\Omega} f < +\infty$ , l'altro è del tutto analogo. Poiché  $T_n \subset T_{n+1}$  e  $f$  è non negativa, la successione degli integrali di  $f$  su  $T_n$  è monotona crescente. Quindi

$$\ell := \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{T_n} f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \iint_{T_n} f \leq \iint_{\Omega} f.$$

Per provare la disuguaglianza opposta, osserviamo che, per definizione di estremo superiore, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $T \in \mathcal{T}$  tale che

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy - \varepsilon &\leq \iint_T f(x, y) dx dy \stackrel{(14.23)}{\leq} \iint_{T_{n_0}} f(x, y) dx dy \\ &\stackrel{(14.23)}{\leq} \iint_{T_n} f(x, y) dx dy \quad \forall n \geq n_0. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  si ottiene  $\iint_{\Omega} f \leq \ell + \varepsilon$ . Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  si conclude che  $\iint_{\Omega} f \leq \ell$  e il teorema è dimostrato.

Come già sappiamo, le primitive della funzione di Gauss,  $x \mapsto e^{-x^2}$ , non sono esprimibili elementarmente. Tuttavia, come abbiamo annunciato nel Paragrafo 8.7.1, utilizzando gli integrali doppi è possibile calcolare il valore del suo integrale improprio esteso ad  $\mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

La funzione

$$f : \Omega = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)},$$

è integrabile in  $T_n = [0, n] \times [0, n]$  per ogni  $n$  (in quanto continua e limitata).

Si osservi che

$$\iint_{T_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^n e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Valutiamo l'integrale doppio. Come illustra la Figura 14.30, per le proprietà degli integrali

$$\iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} \leq \iint_{T_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{C_{\sqrt{2}n}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

dove  $C_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Utilizzando le coordinate polari, risulta:

$$\iint_{C_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{[0, n] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\varphi = \frac{\pi}{4} \left[ -e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=n} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}).$$

Perciò si ha:

$$\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-n^2}} \leq 2 \int_0^n e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-2n^2}},$$

da cui, passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$  e applicando il teorema del confronto, si ottiene

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}.$$

Abbiamo così provato il risultato anticipato nella (8.50).

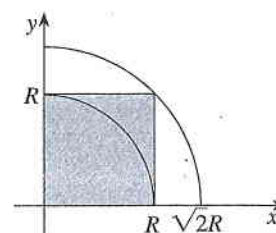
**ESEMPIO 14.22**

Figura 14.30

Talvolta le caratteristiche del dominio o della funzione integranda suggeriscono di passare in coordinate polari: in tal caso sceglieremo  $T_n$  a simmetria sferica.

**ESEMPIO 14.23**

Proviamo che

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 2 \quad (14.24)$$

e che

$$\iint_{B(0,1)} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy < +\infty \Leftrightarrow \alpha < 2. \quad (14.25)$$

Per quanto riguarda la (14.24), scegliamo  $T_n = B(0, n) \setminus B(0, 1)$ :

$$\iint_{B(0,n) \setminus B(0,1)} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_1^n \rho^{1-\alpha} dr d\varphi = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} (n^{2-\alpha} - 1) & \text{se } \alpha \neq 2 \\ 2\pi \log n & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

e la (14.24) segue passando al limite per  $n \rightarrow +\infty$ . Per quanto riguarda (14.25), si ragiona allo stesso modo: in questo caso  $\Omega = B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$  e si sceglie, per esempio,  $T_n = B(0, 1) \setminus B(0, 1/n)$ .

Le (14.24) e (14.25) rappresentano l'analogo, in due dimensioni, delle condizioni di integrabilità delle funzioni potenza espresse nella (8.44) e (8.43). Si noti che il valore critico di  $\alpha$  è diverso (in generale, dipende dalla dimensione dello spazio ambiente).

L'integrabilità di una funzione dipende in modo sostanziale dalla geometria del dominio di integrazione.

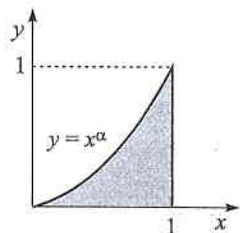
**ESEMPIO 14.24**

Figura 14.31

Si vogliono determinare gli  $\alpha > 0$  per i quali la funzione  $f(x, y) = x^{-3/2}$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega_\alpha = \{(x, y) : x \in (0, 1], 0 < y < x^\alpha\}$ . Per escludere la singolarità in  $x = 0$ , scegliamo

$$T_n = \Omega_\alpha \cap \{x \geq 1/n\} = \{(x, y) : x \in [1/n, 1], 0 < y < x^\alpha\}.$$

Poiché  $T_n$  è normale rispetto a  $y$ , si ottiene

$$\iint_{T_n} x^{-3/2} dx dy = \int_{1/n}^1 \int_0^{x^\alpha} x^{-3/2} dy dx = \int_{1/n}^1 x^{\alpha-3/2} dx.$$

Pertanto  $x^{-3/2}$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega_\alpha$  se e solo se  $\alpha > 1/2$ .

Come nel caso di una variabile, vale il seguente risultato.

**TEOREMA 14.24** Teorema del confronto

Siano  $\Omega$ ,  $f_1$  e  $f_2$  come in (14.22). Se  $f_1(x) \leq f_2(x)$  per ogni  $x \in \Omega$  (tranne al più su un insieme di misura nulla), allora

$$\iint_{\Omega} f_1 \leq \iint_{\Omega} f_2.$$

In particolare

$$\iint_{\Omega'} f \leq \iint_{\Omega} f \quad \text{per ogni } \Omega' \subset \Omega \text{ misurabile}$$

(basta scegliere  $f_2 = f$  e definire  $f_1$  come l'estensione di  $f$  a 0 fuori di  $\Omega'$ ).

## ESEMPIO 14.25

La funzione  $f(x, y) = 1/\sqrt{\sin(x^2 - xy + y^2)}$  è integrabile in senso improprio in  $B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$ . Infatti, ricordando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ( $2|xy| \leq x^2 + y^2$ ) si ottiene

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq x^2 - xy + y^2 \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \leq \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Ricordando che la funzione  $t \mapsto \sin t$  è crescente in  $(0, \pi/2)$ , si ottiene quindi

$$\sin(x^2 - xy + y^2) \geq \sin\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right) \quad \forall (x, y) \in B(0, 1).$$

Inoltre  $\sin t \geq t/2$  definitivamente per  $t \rightarrow 0^+$ , quindi esiste  $r \in (0, 1)$  tale che

$$\sqrt{\sin(x^2 - xy + y^2)} \geq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{per ogni } (x, y) \in B(0, r).$$

Dal Teorema 14.24, applicato in  $B(0, r)$  con  $f_1 = f$  e  $f_2(x, y) = 2/\sqrt{x^2 + y^2}$ , che è integrabile in senso improprio (si veda la (14.25)), si deduce che

$$\iint_{B(0, r)} f(x, y) dx dy < +\infty$$

e la conclusione segue dall'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione, in quanto  $f$  è continua e limitata in  $B(0, 1) \setminus B(0, r)$ .

## ESERCIZIO 14.11

Dire se le seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio in  $\Omega$ :

- a)  $f(x, y) = e^{-x}$ ,  $\Omega = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ ;
- b)  $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ ,  $\Omega = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ ;
- c)  $f(x, y) = e^{-x}$ ,  $\Omega = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq x^2\}$ ;
- d)  $f(x, y) = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ ,  $\Omega = \{(x, y) : 0 < y < 1/\sqrt{x}\}$ ;
- e)  $f(x, y) = 1/\log(1 + xy)$ ,  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- f)  $f(x, y) = 1/\log(1 + xy)$ ,  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 < y < x^2\}$ .

## 14.4.3 Integrabilità in senso improprio: il caso generale

La Definizione 14.22 estende il concetto già noto di integrabilità solo se  $f \geq 0$ : per esempio, la funzione  $f(x, y) = x$  ha integrale nullo in  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , mentre

$$\sup_{T \in \mathcal{I}} \iint_T x dx dy = \iint_{[0, 1] \times [-1, 1]} x dx dy = 1.$$

Quindi nel caso di funzioni che cambiano segno serve una nozione diversa, in cui si separano parte positiva e parte negativa di  $f$ .

## DEFINIZIONE 14.25

Sia  $\Omega$  misurabile, e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che valga la (14.22). Se almeno uno dei due addendi è finito, il valore

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f_+(x, y) dx dy - \iint_{\Omega} f_-(x, y) dx dy$$

si dice **integrale improprio** di  $f$  in  $\Omega$ . Se tale valore è finito, allora  $f$  si dice **integrabile (in senso improprio)** in  $\Omega$ .



Per funzioni integrabili in senso improprio restano valide la linearità dell'integrale e l'additività rispetto al dominio di integrazione. Si noti inoltre che se  $f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ , allora per definizione lo sono anche  $f_+$  ed  $f_-$ , e si ha

$$\iint_{\Omega} |f| = \iint_{\Omega} f_+ + \iint_{\Omega} f_- < +\infty.$$

Quindi anche  $|f|$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ . Viceversa, se  $|f|$  è integrabile in senso improprio, poiché  $0 \leq f_+ \leq |f|$  e  $0 \leq f_- \leq |f|$ , anche  $f_+$  ed  $f_-$ , e quindi  $f$ , sono integrabili in senso improprio in  $\Omega$ . In conclusione

$f$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega \Leftrightarrow |f|$  è integrabile in senso improprio in  $\Omega$ .

In altre parole, l'integrabilità in senso improprio di una funzione di due variabili ricalca la nozione di assoluta integrabilità per funzioni di una variabile.

#### ESEMPIO 14.26

Si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2 + y^2 - 4}{(1 + 2x^2 + 3y^2)^\alpha} dx dy \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Si separano parte positiva e parte negativa:

$$f_+(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 4}{(1 + 2x^2 + 3y^2)^\alpha} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 4)}, \quad f_-(x, y) = \frac{4 - x^2 - y^2}{(1 + 2x^2 + 3y^2)^\alpha} \mathbf{1}_{B(0, 4)}.$$

Poiché  $f_-$  è continua e limitata in  $B(0, 4)$ , e nulla altrimenti,  $f_-$  è integrabile in  $\mathbb{R}^2$ . Per quanto riguarda  $f_+$ , osserviamo che

$$2(x^2 + y^2) < 1 + 2x^2 + 3y^2 < 1 + 3x^2 + 3y^2 < 4(x^2 + y^2) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 4),$$

quindi (per la (14.24) e il Teorema 14.24)  $f_+$  è integrabile in  $\mathbb{R}^2$  se e solo se  $\alpha > 1$ .

#### ESERCIZIO 14.12

Dire se le seguenti funzioni sono integrabili in senso improprio in  $\Omega$ :

a)  $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \Omega = B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\};$

b)  $f(x, y) = \frac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \Omega = B(0, 1) \setminus \{(0, 0)\};$

c)  $f(x, y) = e^{-x-y} \sin(x+y), \quad \Omega = \mathbb{R}^2;$

d)  $f(x, y) = \frac{1}{x-y}, \quad \Omega = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \neq y\}.$

#### Guida

Nel seguito, gli integrali tripli sono utilizzati esclusivamente per il teorema della divergenza in  $\mathbb{R}^3$  (Paragrafo 16.3). Le coordinate sferiche sono introdotte qui e poi utilizzate nel Capitolo 15.

## 14.5 Integrali tripli

La teoria sviluppata nei paragrafi precedenti si estende senza difficoltà al caso di integrali tripli. Per completezza, se ne illustrano brevemente i punti principali senza fornire dimostrazioni.

Ovviamente, i rettangoli devono essere sostituiti da parallelepipedi. Sia quindi

$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$$

e sia  $\mathcal{D}_i$  una suddivisione di  $[a_i, b_i]$ ,  $i = 1, \dots, 3$ . L'insieme  $\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$  si dice **suddivisione** di  $Q$ . Se

$$\mathcal{D}_1 = \{a_1 = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_{n_1} = b_1\}$$

$$\mathcal{D}_2 = \{a_2 = y_0 < \dots < y_j < \dots < y_{n_2} = b_2\}$$

$$\mathcal{D}_3 = \{a_3 = z_0 < \dots < z_k < \dots < z_{n_3} = b_3\}$$

$Q$  resta suddiviso in  $n_1 \times n_2 \times n_3$  parallelepipedi  $Q_{ijk}$ , il cui volume è  $|Q_{ijk}| := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$ . Se  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata, posti

$$m_{ijk} = \inf_{Q_{ijk}} f \quad \text{e} \quad M_{ijk} = \sup_{Q_{ijk}} f$$

si definiscono **somma superiore** e, rispettivamente, **somma inferiore** di  $f$  rispetto alla suddivisione  $\mathcal{D}$  le quantità

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i,j,k} M_{ijk} |Q_{ijk}| \quad \text{e} \quad s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i,j,k} m_{ijk} |Q_{ijk}|.$$

Si dice che  $f$  è **integrabile** in  $Q$ , e si scrive  $f \in \mathcal{R}(Q)$ , se

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f);$$

tale valore prende il nome di **integrale (triplo)** di  $f$  in  $Q$  e si indica con i simboli

$$\iiint_Q f, \quad \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz, \quad \int_Q f, \quad \int_Q f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Con le ovvie modifiche, continuano a valere i Teoremi 14.3 e 14.4 e le proprietà dell'integrale. Anche le definizioni relative al caso generale sono analoghe: una funzione  $f$  si dice **integrabile** in un sottoinsieme limitato  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^3$ , e si scrive  $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ , se la funzione

$$\tilde{f} := \begin{cases} f & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{in } Q \setminus \Omega \end{cases}$$

è integrabile in  $Q$ , dove  $Q$  è un (qualunque) parallelepipedo contenente  $\Omega$ ; un insieme  $\Omega$  si dice **misurabile** (secondo Peano-Jordan) in  $\mathbb{R}^3$  se  $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{R}(\Omega)$ , e la sua **misura** o **volume** è

$$|\Omega|_3 := \iiint_Q \mathbf{1}_\Omega dx dy dz = \iiint_\Omega dx dy dz.$$

Sottolineiamo che la misura, oggetto di questo paragrafo, è tridimensionale, ovvero, come è intuitivo, legata al concetto di volume. Quando non vi sia pericolo di equivoci, si scrive anche  $|\Omega|$  al posto di  $|\Omega|_3$ .

Inoltre continuano a valere le seguenti caratterizzazioni:

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ e misurabile} \Leftrightarrow \partial\Omega \text{ e misurabile e } |\partial\Omega|_3 = 0;$$

e  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  è di misura nulla se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero finito,  $N_\varepsilon$ , di parallelepipedi  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, N_\varepsilon$ , tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |Q_i|_3 < \varepsilon.$$

È possibile quindi dimostrare che le funzioni limitate e continue tranne in un sottoinsieme di misura nulla sono integrabili in parallelepipedi (si veda il Teorema 14.14).

Infine, l'analogo del Teorema 14.11 assume la forma seguente:

se  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  è limitato e  $g \in \mathcal{R}(S)$  allora graf  $g$  ha misura nulla

### ESEMPIO 14.27

Oltre ai punti, segmenti, curve regolari ecc., hanno misura (tridimensionale) nulla anche porzioni di piano, come

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z = 0\}$$

(essendo il grafico di una funzione), la sfera

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(essendo l'unione del grafico delle due funzioni  $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  e  $(x, y) \mapsto -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ) e la porzione di cilindro

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in [-1, 1]\}$$

(essendo l'unione del grafico delle due funzioni  $(x, z) \mapsto \sqrt{1 - x^2}$  e  $(x, z) = -\sqrt{1 - x^2}$ ,  $x, z \in [-1, 1]$ ).

## 14.5.1 Formule di riduzione

Come si è visto, gli strumenti fondamentali per il calcolo degli integrali doppi sono le formule di riduzione. Cominciamo dal caso dei parallelepipedi.

### TEOREMA 14.26 Formule di riduzione su parallelepipedi

Siano  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  e  $f \in \mathcal{R}(Q)$ .

(i) Se, per ogni  $(x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ , la funzione  $z \mapsto f(x, y, z)$  è integrabile in  $[a_3, b_3]$ , allora la funzione  $(x, y) \mapsto \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$  è integrabile in  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  e vale

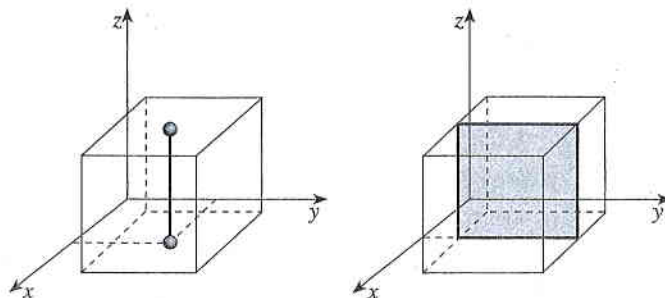
$$\iiint_Q f = \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (14.26)$$

(ii) Se, per ogni  $x \in [a_1, b_1]$ , la funzione  $(y, z) \mapsto f(x, y, z)$  è integrabile in  $[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ , allora la funzione  $x \mapsto \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dy dz$  è integrabile in  $[a_1, b_1]$  e vale

$$\iiint_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \iint_{[a_2, b_2] \times [a_3, b_3]} f(x, y, z) dy dz \right) dx. \quad (14.27)$$

La formula (14.26) si dice di **integrazione per fili**, la (14.27) prende il nome di **formule di integrazione per strati** (si veda la Figura 14.32).

Figura 14.32 Integrazione per fili e strati.





La tesi del Teorema 14.26(i) è stata enunciata nel caso in cui la funzione  $f$  risulti integrabile rispetto a  $z$ , per ogni coppia  $(x, y)$  fissata. Scambiando nell'enunciato  $z$  con  $x$ , o  $z$  con  $y$ , continuano a valere formule analoghe alla (14.21).

Se agli integrali doppi che compaiono in tali formule possiamo applicare la (14.4) o la (14.5), il calcolo di un integrale triplo è così ricondotto al calcolo di tre integrali semplici. In particolare, se  $f \in C(Q)$ , allora

$$\boxed{\int \int \int_Q f = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx} \quad (14.28)$$

e formule analoghe valgono scambiando l'ordine di integrazione.

Si vuole calcolare

$$\int \int \int_{\Omega} (x + yz) dx dy dz, \quad \Omega = [0, 1] \times [2, 3] \times [0, 1].$$

Applicando la (14.28) (con  $x$  e  $y$  scambiati), si ottiene

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} (x + yz) dx dy dz &= \int_2^3 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 (x + yz) dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_2^3 \left( \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2}y \right) dx \right) dy = \int_2^3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \right) dy = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} - 1 = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Le formule (14.21) (integrazione per fili) e (14.22) (integrazione per strati) si possono estendere a opportune classi di domini. La classe opportuna per operare una integrazione per fili è quella dei *domini semplici rispetto a uno degli assi*: per esempio, l'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in E \subseteq \mathbb{R}^2, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\} \quad (14.29)$$

si dice **semplice rispetto all'asse  $z$**  se  $E$  è misurabile in  $\mathbb{R}^2$  e se  $g_1, g_2 \in C(E)$  sono tali che  $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in E$  (si veda Figura 14.33). I domini semplici rispetto a un asse sono misurabili in  $\mathbb{R}^3$ , e vale la seguente formula di integrazione per fili (si veda Figura 14.33):

#### TEOREMA 14.27 Formule di riduzione per domini semplici

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  semplice rispetto all'asse  $z$ , della forma (14.29). Se  $f \in C(\Omega)$  è limitata allora

$$\int \int \int_{\Omega} f = \int \int_E \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (14.30)$$

#### ESEMPIO 14.28

#### Integrazione per fili

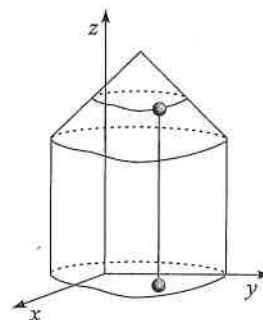


Figura 14.33

Si vuole calcolare

$$\int \int \int_{\Omega} y dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 1, -(y^2 + z^2) < x \leq 1\}.$$

L'insieme  $\Omega$  è semplice rispetto all'asse  $x$ ,  $f$  è continua quindi, utilizzando le formule di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\Omega} y dx dy dz &= \int \int_{\{y^2+z^2 \leq 1\}} \left( \int_{-(y^2+z^2)}^1 y dx \right) dy dz \\ &= \int \int_{\{y^2+z^2 \leq 1\}} y(1 + y^2 + z^2) dy dz = 0 \end{aligned}$$

#### ESEMPIO 14.29

in virtù delle simmetrie della funzione integranda rispetto al dominio di integrazione: l'insieme  $\{y^2 + z^2 \leq 1\}$  è simmetrico rispetto all'asse  $y$  e la funzione  $y(1 + y^2 + z^2)$  è dispari rispetto a  $y$  (ovvero  $f(-y, z) = -f(y, z)$ ).

In particolare, il calcolo del volume di un dominio semplice rispetto a un asse assume una forma molto semplice: nelle ipotesi del Teorema 14.17,

$$|\Omega| = \iint_E (g_2(x, y) - g_1(x, y)) dx dy.$$

Integrazione per strati

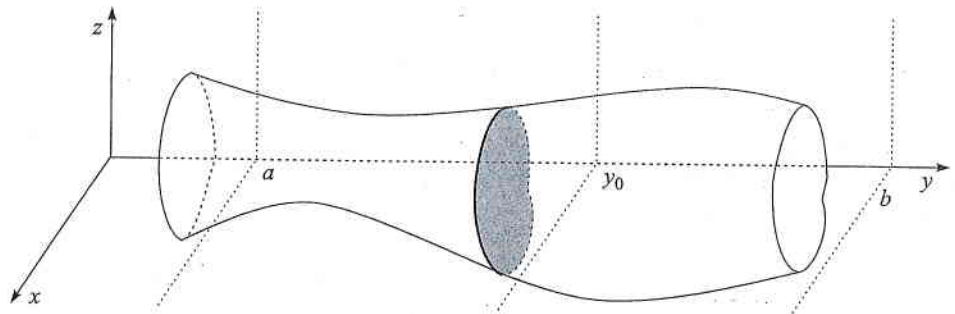
Per estendere il metodo di integrazione per strati, per esempio rispetto all'asse  $y$ , si consideri un un insieme misurabile  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Supponiamo che, come in Figura 14.34,  $\Omega$  sia compreso tra due piani di equazione  $y = a$  e  $y = b$ , ovvero

$$\Omega = \Omega \cap (\mathbb{R} \times [a, b] \times \mathbb{R}), \tag{14.31}$$

e sia tale che

$$\Omega_y = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in \Omega\} \text{ è misurabile per ogni } y \in [a, b]. \tag{14.32}$$

Figura 14.34



Allora vale la seguente formula di riduzione:

**TEOREMA 14.28** Formula di riduzione per strati

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un insieme misurabile che soddisfa (14.31) ed (14.32). Se  $f \in C(\Omega)$  è limitata, allora

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \iint_{\Omega_y} f(x, y, z) dx dz \right) dy.$$

**ESEMPIO 14.30**

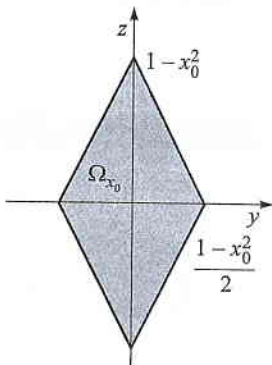


Figura 14.35

Si vuole calcolare il volume della regione

$$\Omega = \{(x, y, z) : 2|y| + |z| \leq 1 - x^2\}.$$

Anzitutto si osserva che  $\Omega \subset [-1, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (altrimenti  $1 - x^2 < 0$ ). Per  $x_0 \in (-1, 1)$  fissato, la sezione di  $\Omega$  con il piano  $x = x_0$  è un rombo di diagonali  $2(1 - x_0^2)$  e  $(1 - x_0^2)$ : infatti (si veda Figura 14.35)

$$2|y| + |z| \leq 1 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 + 2|y| - 1 \leq z \leq 1 - x_0^2 - 2|y|.$$

È conveniente perciò integrare per strati:

$$|\Omega|_3 = \int_{-1}^1 \left( \iint_{R_x} dy dz \right) dx = \int_{-1}^1 \text{Area}(R_x) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{16}{15}.$$

Si vuole calcolare

$$I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Si può integrare sia per fili che per strati. Nel primo caso, si osserva che  $\Omega$  è un dominio semplice rispetto all'asse  $z$ :

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in E, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}, \quad E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Quindi

$$I = \iint_E \left( \int_0^{x^2+y^2} z dz \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_E (x^2 + y^2)^2 dx dy,$$

e passando in coordinate polari si ottiene

$$I = \frac{1}{2} \int_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \rho^5 d\rho d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \rho^5 d\rho \right) d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Integrando per strati, si osserva che  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 1]$  e che per ogni  $z$  fissato  $\Omega_z$  è una corona circolare di raggi  $\sqrt{z}$  e 1, quindi di area  $\pi(1 - z)$ : perciò

$$I = \int_0^1 \left( z \iint_{\Omega_z} dx dy \right) dz = \int_0^1 \pi z(1 - z) dz = \pi \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Un caso particolare di integrazione per strati riguarda il volume dei **solidi di rotazione**. Consideriamo l'insieme

$$\Omega = \{(x, y, z) : z \in [c, d], x^2 + y^2 \leq (f(z))^2\}$$

dove  $f \in \mathcal{R}([c, d])$  (Figura 14.36). L'insieme  $\Omega$  può essere pensato come il **solido di rotazione** ottenuto ruotando l'insieme  $F = \{(y, z) : z \in [c, d], 0 \leq y \leq |f(z)|\}$  attorno all'asse  $z$ .

Le sezioni di  $\Omega$  con i piani  $z = z_0$  sono cerchi  $C_{z_0}$  di raggio  $|f(z_0)|$  e, quindi, area  $\pi|f(z_0)|^2$ . Perciò integrando per strati otteniamo

$$\text{Volume}(\Omega) = \int_c^d \left( \iint_{C_z} dx dy \right) dz = \pi \int_c^d (f(z))^2 dz. \quad (14.33)$$

Se per esempio  $f(z) = \log(2 + z)$ ,  $z \in [0, 1]$ , allora

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\Omega) &= \pi \int_0^1 \log^2(2 + z) dz = \pi \left\{ [(z + 2) \log^2(2 + z)]_0^1 - \int_0^1 2 \log(2 + z) dz \right\} \\ &= \pi(3 \log^2 3 - 2 \log^2 2 - 6 \log 3 + 4 \log 2 + 2). \end{aligned}$$

Si vuole determinare il volume del solido ottenuto ruotando la funzione  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, \pi]$  intorno all'asse  $x$  (si veda Figura 14.37). Il solido è in questo caso descritto da:

$$\Omega = \{(x, y, z) : x \in [0, \pi], y^2 + z^2 \leq \sin^2 x\}.$$

Applicare la (14.33) con  $x$  e  $z$  scambiati equivale a integrare per strati, osservando che ciascuna sezione  $\Omega_x$  è una circonferenza di raggio  $\sin x$  (quindi ha area  $\pi \sin^2 x$ ). Si ottiene

$$|\Omega|_3 = \int_0^\pi |\Omega_x| dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

### ESEMPIO 14.31

### Solidi di rotazione

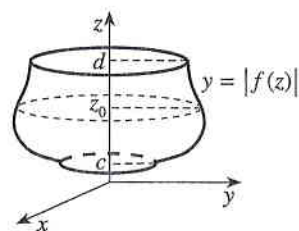


Figura 14.36

### ESEMPIO 14.32

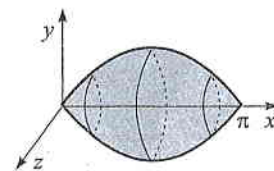


Figura 14.37



## ESERCIZIO 14.13

Calcolare i seguenti integrali:

- a)  $\iiint_{\Omega} (2x - 3y) dx dy dz$ ,  $\Omega = [0, 1] \times [-1, 2] \times [0, 2]$ ;  
 b)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ;  
 c)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + yz) dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1 - |yz|\}$ ;  
 d)  $\iiint_{\Omega} e^{x^2} dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, -1 \leq z \leq 4\}$ ;  
 e)  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ ,  $\Omega$  è il tetraedro di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ;  
 f)  $\iiint_{\Omega} 1 dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y\}$ .

### 14.5.2 Cambiamento di variabili. Coordinate cilindriche e sferiche

Il Teorema 14.19 si estende senza ulteriori difficoltà al caso tridimensionale. Siano  $D, E \subseteq \mathbb{R}^3$  aperti misurabili e  $\psi : D \rightarrow \psi(D) = E$  biunivoca e di classe  $C^1$  in  $D$ :

$$(x, y, z) = \psi(u, v, w) = (\psi_1(u, v, w), \psi_2(u, v, w), \psi_3(u, v, w)).$$

Sia  $J_{\psi}$  la matrice jacobiana:

$$J_{\psi}(u, v, w) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \psi_1(u, v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_2(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \psi_2(u, v, w)}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_3(u, v, w)}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3(u, v, w)}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3(u, v, w)}{\partial w} \end{pmatrix}. \quad (14.34)$$

Se  $\psi$  e le sue derivate parziali sono limitate in  $D$  e  $\det J_{\psi}(u, v, w) \neq 0$  per ogni  $(u, v, w) \in D$ , allora, se  $T \subseteq D$  è misurabile e  $f \in C(\psi(T))$  è limitata, vale la formula:

$$\iiint_{\psi(T)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T (f \circ \psi)(u, v, w) |\det J_{\psi}(u, v, w)| du dv dw. \quad (14.35)$$

Di particolare importanza sono i passaggi in *coordinate cilindriche* e *sferiche*.

Spesso è utile utilizzare le coordinate polari per i piani orizzontali lasciando la coordinata cartesiana  $z$  invariata: le **coordinate cilindriche di asse**  $(x_0, y_0)$  sono definite dalla funzione  $\psi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di componenti

$$\begin{cases} x = \psi_1(\rho, \varphi, z) = x_0 + \rho \cos \varphi \\ y = \psi_2(\rho, \varphi, z) = y_0 + \rho \sin \varphi \\ z = \psi_3(\rho, \varphi, z) = z. \end{cases} \quad (14.36)$$

Coordinate  
cilindriche

## ESEMPIO 14.33

L'insieme di disequazioni  $0 \leq \rho < 3$  e  $0 < z < 4$  indica un cilindro verticale di raggio 3 e altezza 4.

La funzione  $\psi$  è di classe  $C^1$  e la matrice jacobiana è

$$J_\psi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

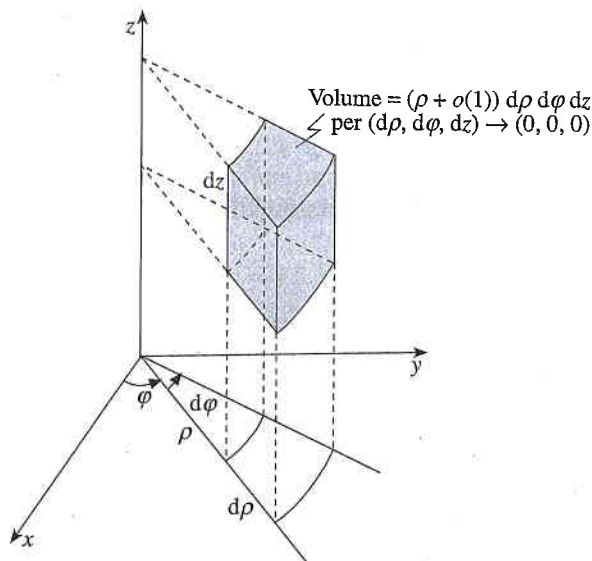
quindi (si veda la Figura 14.38)

$$|J_\psi(\rho, \varphi, z)| = \rho.$$

Come per le coordinate polari in  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi$  è invertibile solo nel dominio  $D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ ; in tal caso l'immagine  $\psi(D)$  è tutto lo spazio privato del semipiano  $y = y_0, x \geq x_0$ , che però ha misura (tridimensionale) nulla. Quindi la formula (14.35) diventa:

$$\iint_{\Omega=\psi(S)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz \quad (14.37)$$

per ogni insieme misurabile e limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ .



**Figura 14.38** Elemento di volume in coordinate cilindriche.

Si vuole calcolare

$$I := \iiint_{\Omega} \frac{z-3}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy dz$$

dove  $\Omega = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3 - \sqrt{9 - x^2 - y^2}\}$ . Utilizzando la (14.36), abbiamo

$$\Omega = \psi(T) \quad \text{con} \quad T = \{(\rho, \varphi, z) : \varphi \in [0, 2\pi), 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq z \leq 3 - \sqrt{9 - \rho^2}\}.$$

Dalla (14.37) otteniamo:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_T \frac{z-3}{\rho} \rho d\rho d\varphi dz = \iint_{[1,2] \times [0,2\pi]} \left( \int_0^{3-\sqrt{9-\rho^2}} (z-3) dz \right) d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[1,2] \times [0,2\pi]} [(z-3)^2]_{z=0}^{z=3-\sqrt{9-\rho^2}} d\rho d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[1,2] \times [0,2\pi]} (-\rho^2) d\rho d\varphi = -\frac{1}{2} \left( \int_1^2 \rho^2 d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) = -\frac{7}{3} \pi. \end{aligned}$$

#### ESEMPIO 14.34

## ESEMPIO 14.35

Si vuole calcolare

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz, \quad \Omega = \{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, -x^2 \leq z \leq 2-x-y\}.$$

Si verifica facilmente che  $-x^2 \leq 2-x-y$  in  $\{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ . Perciò integrando per fili si ottiene

$$\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz = \iint_{\{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}} x(2-x-y+x^2) \, dx \, dy.$$

L'ultimo integrale può essere calcolato utilizzando il seguente sistema di coordinate polari

$$\begin{cases} x = 1 + \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (14.38)$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \iint_{\{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}} x(2-x-y+x^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \rho(1 + \rho \cos \varphi)(2 + \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi) \, d\rho \, d\varphi \\ &= \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} (2\rho + 2\rho^3 \cos^2 \varphi + \rho^2(\cos \varphi - \sin \varphi) - \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi + \rho^4 \cos^3 \varphi) \, d\rho \, d\varphi. \end{aligned}$$

Ricordando che l'integrale di funzioni del tipo  $\sin^k x$ ,  $\cos^k x$ ,  $k$  dispari, su un periodo è zero, il calcolo si riduce a quello dell'integrale dei primi due termini:

$$\iiint_T x \, dx \, dy \, dz = \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} (2\rho + 2\rho^3 \cos^2 \varphi) \, d\rho \, d\varphi = \frac{5}{2}\pi.$$

## Coordinate sferiche

Fissato un punto  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ , le **coordinate sferiche di centro  $\mathbf{x}_0$**  sono definite dalla funzione  $\psi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  di componenti

$$\begin{cases} x = \psi_1(\rho, \varphi, \theta) = x_0 + \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \psi_2(\rho, \varphi, \theta) = y_0 + \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \psi_3(\rho, \varphi, \theta) = z_0 + \rho \cos \theta \end{cases} \quad (14.39)$$

Geometricamente  $\rho$  è la distanza fra i punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$\theta$  è l'angolo tra i vettori  $(0, 0, 1)$  e  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  e  $\varphi$  l'angolo tra i vettori  $(1, 0, 0)$  e  $(x-x_0, y-y_0, 0)$  (si veda Figura 14.39).

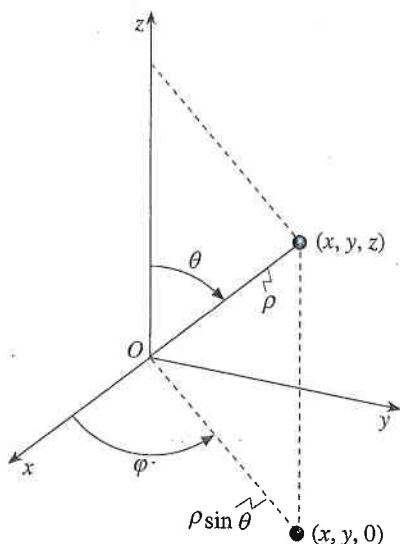
## ESEMPIO 14.36

Sia  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Le disequazioni  $1 \leq r < 2$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  e  $0 < \varphi < \pi$  individuano l'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y > 0, z < 0\}$ .

È facile verificare che  $\psi$  è biunivoca in  $D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  con  $\psi(D) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ . La matrice jacobiana è

$$J_{\psi} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\rho \sin \theta \end{pmatrix}$$





$$|\det J_\psi| = \rho^2 \sin \theta \neq 0.$$

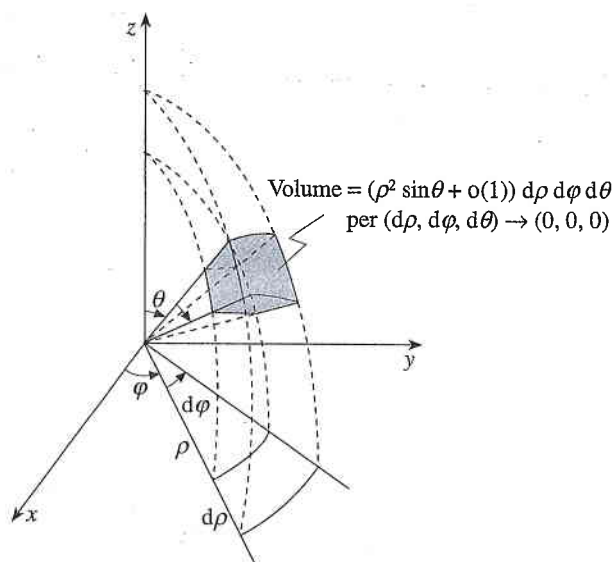
da cui (si veda Figura 14.40).

La (14.35) diventa allora

$$\iiint_{\Omega=\psi(T)} f \, dx \, dy \, dz \quad (14.40)$$

$$= \iiint_T f(x_0 + \rho \sin \theta \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \theta \sin \varphi, z_0 + \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

per un qualunque insieme  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  misurabile e limitato, visto che  $|\mathbb{R}^3 \setminus \psi(D)|_3 = 0$ .



**Figura 14.40** Elemento di volume in coordinate sferiche.

Si vuole calcolare il volume della palla di centro l'origine e raggio  $R$ ,  $B_R$ :

$$\iiint_{B_R} dx \, dy \, dz.$$

Passando alle coordinate sferiche, si ha

$$B_R = \psi(T) \quad \text{con} \quad T = \{(\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \rho \leq R, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\}$$

**ESEMPIO 14.37**

quindi

$$\begin{aligned} \text{Volume}(B_R) &= \iiint_T \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \\ &= \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) \left( \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

### ESEMPIO 14.38

Si vuole calcolare

$$\iint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad \Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq 2\}.$$

Utilizzando le *coordinate sferiche*, abbiamo (si veda Figura 14.41)

$$\Omega = \psi(T) \quad \text{con } T = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) : 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \frac{2}{\cos \theta} \leq \rho \leq 4, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

Allora per la (14.40) e osservando che  $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin \theta$ , otteniamo:

$$\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \iiint_T \rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =: I.$$

Osservando che la funzione integranda non dipende da  $\varphi$ , integrando (per fili) prima rispetto a  $\varphi$ , si ha immediatamente:

$$I = 2\pi \iint_D \rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta \, d\rho \, d\theta,$$

dove  $D = \{(\rho, \theta) : \theta \in [0, \frac{\pi}{3}], \frac{2}{\cos \theta} \leq \rho \leq 4\}$  (ovvero,  $D$  è la proiezione sul piano  $\rho\theta$  di  $T$ ). Applicando la (14.13), risulta:

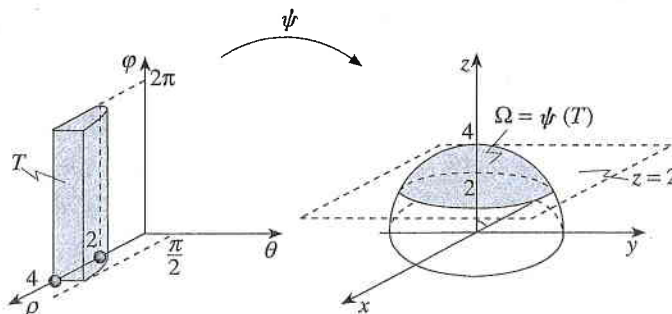
$$\begin{aligned} \iint_D \rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta \sin^2 \theta \left( \int_{\frac{2}{\cos \theta}}^4 \rho^4 \, d\rho \right) d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( 4^5 \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{32}{\cos^4 \theta} \sin^2 \theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{5} \left[ 4^5 \frac{\sin^3 \theta}{3} - \frac{32}{3} \operatorname{tg}^3 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{96\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso dell'uguaglianza

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^4 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \frac{d}{d\theta} (\operatorname{tg} \theta).$$

In conclusione il valore cercato è  $I = \frac{192\sqrt{3}\pi}{5}$ .

Figura 14.41



La struttura della funzione integranda,  $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ , e del dominio  $T$  suggeriscono però l'uso delle coordinate cilindriche e l'integrazione per strati paralleli al piano  $\rho\varphi$ . Seguendo tale strada, si ottiene

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \iiint_V z\rho^2 d\rho d\varphi dz$$

con  $V = \{(\rho, \varphi, z) : 2 \leq z \leq 4, \varphi \in [0, 2\pi], 0 \leq \rho \leq \sqrt{16 - z^2}\}$ , e

$$\begin{aligned} \iiint_V z\rho^2 d\rho d\varphi dz &= 2\pi \int_2^4 z \left( \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \rho d\rho \right) dz = \frac{2\pi}{3} \int_2^4 z(16 - z^2)^{3/2} dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[ -\frac{(16 - z^2)^{5/2}}{5} \right]_2^4 = \frac{2\pi}{15} (12)^{5/2} = \frac{192}{5} \sqrt{3}\pi. \end{aligned}$$

Si vuole calcolare

$$\iiint_{\Omega} \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$$

dove  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 + z^2}\}$ . Conviene scegliere un sistema di coordinate sferiche con centro in  $\mathbf{0}$  tale che il piano equatoriale  $\theta = \frac{\pi}{2}$  corrisponda al piano  $x$ - $z$ :

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \sin \varphi. \end{cases}$$

Rispetto a questa trasformazione di coordinate si ha

$$\Omega = \psi(T) \quad \text{con } T = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 2, \frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi, \varphi \in \left[ \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \right] \right\}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \log(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz &= \iiint_T \log(1 + \rho) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta \\ &= \pi \left( \int_0^2 \rho^2 \log(1 + \rho) d\rho \right) \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \left( 3 \log 3 - \frac{8}{9} \right). \end{aligned}$$

**ESEMPIO 14.39**

Calcolare i seguenti integrali:

a)  $\iiint_T x dx dy dz, \quad T = \{(x, y, z) : z^2 + x^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x - z\};$

b)  $\iiint_T dx dy dz, \quad T = \{(x, y, z) : (x - 1)^2 + y^2 \leq \sqrt{z(1 - z)}\};$

c)  $\iiint_T \frac{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2} dx dy dz, \quad T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 4, z^2 + x^2 + y^2 \geq 1\};$

d)  $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{2x + y + z}} dx dy dz, \quad T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq -2x - y\}.$

**ESERCIZIO 14.14**

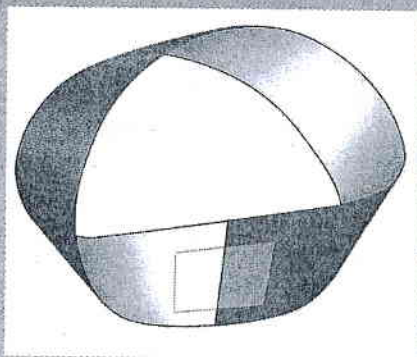


## FILO ROSSO Le (due?) facce di una superficie

In questo capitolo parleremo di superfici nello spazio, oggetti bidimensionali senza spessore nello spazio tridimensionale. Trattandosi di oggetti che incontriamo nella vita quotidiana, abbiamo già un'idea intuitiva dei concetti di superficie e di faccia di una superficie: i piani nello spazio hanno due facce, una superficie sferica o cubica ha due facce (interna ed esterna), una cintura o una moneta (pensate come oggetti bidimensionali) hanno due facce. Per distinguere le due facce basta dipingerle in due colori diversi. Poniamoci una domanda apparentemente semplice:

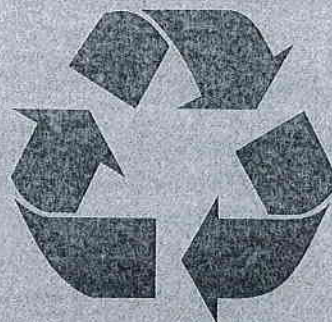
*È sempre possibile individuare due facce distinte di una superficie?*

Sorprendentemente il problema è stato affrontato solo nel XIX secolo da due allievi del grande matematico tedesco Carl Friedrich Gauss: August Ferdinand Möbius e Johann Benedict Listing. Indipendentemente hanno scoperto quello che oggi si chiama *nastro di Möbius*, una *superficie per cui non è possibile identificare due facce distinte*.



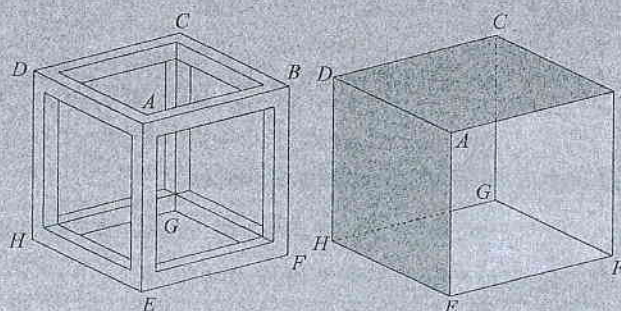
La costruzione è semplice: si prende un nastro con due facce, una colorata di bianco e l'altra di grigio. Dopo una torsione del nastro di  $180^\circ$  si uniscono le due estremità. A causa della torsione il bianco e il grigio non combaciano nel punto di unione: questo fa già capire che non è possibile distinguere due facce della superficie.

Un altro modo per vederlo è far camminare una formica sul nastro: dopo un giro, la formica apparirà "sulla faccia opposta del nastro", come è stato visualizzato da Maurits Cornelius Escher in alcune delle sue opere. Anche il simbolo per i prodotti riciclabili è ispirato dal nastro di Möbius.



Il nastro di Möbius ha delle proprietà sorprendenti. Per esempio il suo bordo (un oggetto unidimensionale) è il sostegno di un'unica curva. Oppure, quando proviamo a tagliare il nastro a metà seguendo il lato lungo, non otteniamo due nastri disgiunti, ma un solo nastro, ovviamente più lungo. Due domande: nel nuovo nastro è possibile distinguere due facce? Cosa succede se si taglia ancora il nuovo nastro a metà?

In questo capitolo formalizzeremo il concetto di superficie e la possibilità di distinguere le sue facce, ovvero l'*orientabilità di una superficie* (e, ove esista, del suo bordo). Prima di farlo cerchiamo di capire se abbiamo veramente intuito di che cosa si tratti attraverso due esempi.



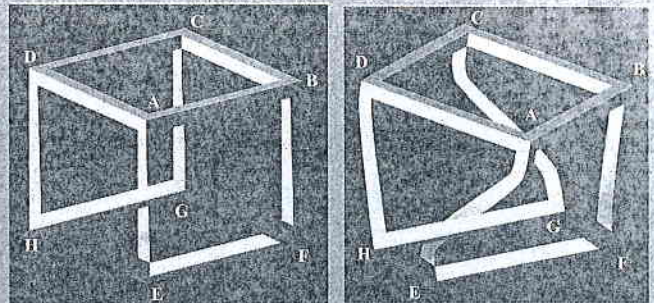


Prendiamo prima un cubo (il cui scheletro è rappresentato in figura) e consideriamo i quattro quadrati  $ABCD$ ,  $DAEH$ ,  $HEFG$  e  $GFBC$ . In tal modo si ottiene una superficie che chiaramente ha due lati (corrispondenti con l'esterno e con l'interno del cubo). Si osservi che il bordo della superficie è il sostegno di due curve chiuse e disgiunte: una passa per i vertici  $A, E, F, B$ , l'altra per  $D, H, G, C$ .

Ora prendiamo il "cubo di Necker", altro oggetto che ha affascinato Escher. Ovviamente non si tratta di un cubo, come si vede subito quando si lo gira un po'.

Costruiamo una superficie unendo quattro "quadrati" (ovviamente non sono affatto quadrati, sono essi stessi delle superfici, ma manteniamo il linguaggio dell'illusione ottica...)  $ABCD$ ,  $DAEH$ ,  $HEFG$  e  $GFBC$  (si possono costruire i quattro

"quadrati" in modo tale che si intersechino solo negli spigoli). Si ottiene così una superficie che ha ancora come bordo i sostegni di due curve chiuse e disgiunte, passanti per i vertici  $A, E, F, B$  e  $D, H, G, C$ . La domanda: la superficie ottenuta ha due facce? Sarebbe utile rifletterci prima di affrontare la formalizzazione matematica dei concetti intuitivi.



## 15.1 Superfici in $\mathbb{R}^3$

Geometricamente il concetto di "superficie" nello spazio è intuitivo, così come il fatto che per descrivere (parametrizzare) una "superficie" servono *due* parametri reali,  $u$  e  $v$ . Tuttavia la formalizzazione matematica del concetto non è banale. Facciamo due esempi.

a) Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Il suo grafico,

$$\Sigma = \{(x, y, x^2 + y^2) : (x, y) \in D\},$$

è riportato in Figura 15.1: si tratta di una porzione di **paraboloide**. La "superficie"  $\Sigma$  si può interpretare come l'immagine della funzione

$$D \ni (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3$$

e in questo caso è "parametrizzata" da  $(x, y) \in D$ .

b) La **sfera** di raggio  $R$  è il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  definito da (si veda Figura 15.2)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Per "parametrizzare" la sfera utilizziamo le coordinate sferiche introdotte nel Capitolo 14: poiché per definizione tutti i punti hanno distanza  $R$  dall'origine, si può scrivere

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta. \end{cases}$$

Quindi  $\Sigma$  è l'immagine della funzione

$$[0, 2\pi] \times [0, \pi] \ni (\varphi, \theta) \mapsto R(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

e i parametri sono  $(\varphi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ .

### ESEMPIO 15.1

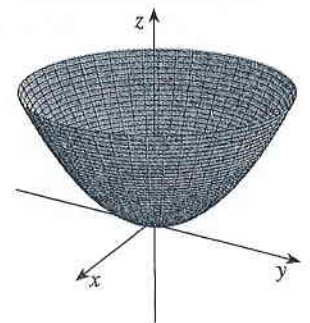


Figura 15.1 Una porzione di paraboloide.

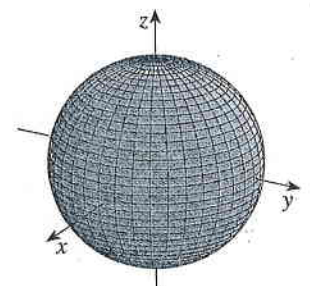


Figura 15.2 Una sfera.

Generalizziamo questi due esempi.

Ricordiamo che una curva di Jordan  $\gamma_D$  individua un insieme aperto limitato  $D$ , detto interno della curva, la cui frontiera è il sostegno di  $\gamma_D$ .

**DEFINIZIONE 15.1**

Un sottoinsieme  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  si dice **superficie elementare** se esistono un sottoinsieme  $D$  di  $\mathbb{R}^2$ , interno di una curva di Jordan, e una funzione  $\sigma : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua in  $\overline{D}$  e iniettiva in  $D$ ,

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad \text{per } (u, v) \in \overline{D},$$

tali che  $\Sigma = \sigma(\overline{D})$ . La funzione  $\sigma$  si dice **parametrizzazione** di  $\Sigma$ . Una superficie elementare si dice **cartesiana** se  $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$  oppure  $\sigma(u, v) = (u, f(u, v), v)$  oppure  $\sigma(u, v) = (f(u, v), u, v)$  con  $f \in C(\overline{D})$ .

Al contrario di quanto è stato fatto per le curve, in questa definizione si assegna la parola chiave *superficie* all'immagine della funzione  $\sigma$  anziché alla funzione stessa. Questa scelta corrisponde al fatto che in questo caso non vi sono particolari aspetti cinematici da sottolineare, mentre l'attenzione è concentrata essenzialmente sugli aspetti geometrici: per esempio, nella Definizione 15.1 si richiede che la parametrizzazione sia iniettiva in  $D$ ; si sta cioè descrivendo un concetto corrispondente a quello di sostegno di una curva semplice.

Si osservi inoltre che le superfici descritte dalla definizione sono insiemi limitati. Per includere le più comuni superfici non limitate, per esempio il piano o il paraboloido, basta sostituire  $D$  con  $\mathbb{R}^2$ . Non ci soffermeremo oltre su questo argomento.

**ESEMPIO 15.2**

a) L'immagine della funzione

$$\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \overline{B}_R$$

(si ricorda che  $B_R \subset \mathbb{R}^2$  è la palla di centro nell'origine e raggio  $R$ ) è una superficie elementare cartesiana (si veda Figura 15.1).

b) La sfera  $S_R$  di centro nell'origine e raggio  $R$  è una superficie elementare (non cartesiana) di parametrizzazione

$$\sigma(u, v) = (R \cos u \sin v, R \sin u \sin v, R \cos v), \quad (u, v) \in \overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

c) Siano  $R > 0$  e  $r \in (0, R)$ ; il **toro** è la superficie elementare (non cartesiana) di parametrizzazione

$$\sigma(u, v) = ((R+r \cos v) \cos u, (R+r \cos v) \sin u, r \sin v), \quad (u, v) \in \overline{D} = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

(si veda Figura 15.3).

Figura 15.3 Un toro.

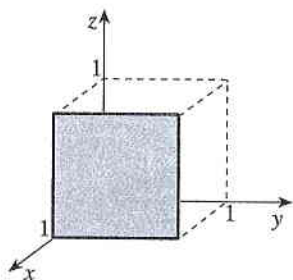
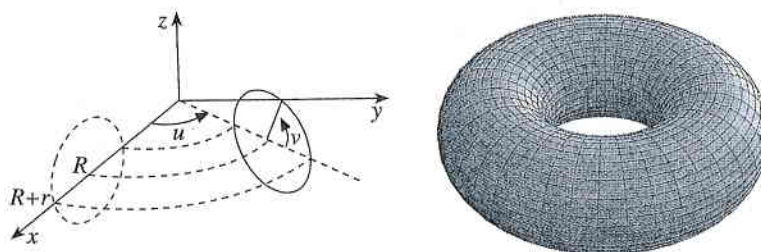


Figura 15.4 Una faccia di un cubo.



d) Ciascuna faccia del cubo di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  e  $(0, 1, 1)$  è una superficie elementare cartesiana: per esempio la faccia contenente i vertici  $(1, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  può essere parametrizzata dalla funzione  $\sigma(u, v) = (1, u, v)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . (si veda Figura 15.4).

È immediato osservare che esiste una differenza topologica tra la sfera e il toro da una parte e la porzione di paraboloido e la faccia del cubo dall'altra: tutti i punti delle



prime due sono “circondati” da altri punti della superficie stessa, mentre le seconde due hanno un *bordo*.

**DEFINIZIONE 15.2**

Sia  $\Sigma$  una superficie elementare. Un punto  $\mathbf{x} \in \Sigma$  si dice **punto interno** a  $\Sigma$  se esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}$  e una parametrizzazione  $\sigma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di  $\mathcal{U} \cap \Sigma$  tale che  $\mathbf{x} \in \sigma(D)$ . Si dice **interno** di  $\Sigma$ , e si indica con  $\Sigma'$ , l'insieme dei punti interni a  $\Sigma$ ; si dice **bordo** di  $\Sigma$ , e si scrive  $\partial\Sigma$ , l'insieme dei punti che non sono interni:

$$\begin{aligned}\Sigma' &= \{\mathbf{x} \in \Sigma : \mathbf{x} \text{ è interno a } \Sigma\}, \\ \partial\Sigma &= \{\mathbf{x} \in \Sigma : \mathbf{x} \text{ non è interno a } \Sigma\} = \Sigma \setminus \Sigma'.\end{aligned}$$

Se  $\partial\Sigma = \emptyset$ , si dice che la superficie è **senza bordo**.

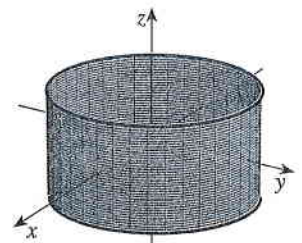
Il punto cruciale della definizione di punto interno è la richiesta che, per una opportuna parametrizzazione,  $\mathbf{x}$  sia l'immagine di un punto dell'aperto  $D$ , ovvero *interno* a  $D$ , e non della sua frontiera.

- a) Sono interni alla porzione di paraboloido dell'Esempio 15.2a tutti i punti dell'immagine di  $B_R$ . Il suo bordo è la circonferenza  $\{(x, y, R^2) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$ .
- b) La superficie laterale del cilindro di asse  $x = y = 0$ , raggio  $R$  e altezza  $2h$  è una superficie elementare (non cartesiana) di parametrizzazione

$$\sigma(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v), \quad (u, v) \in \bar{D} = [0, 2\pi] \times [-h, h].$$

Da ciò segue che tutti i punti  $(x, y, z) \in \Sigma$  tali che  $|z| < h$  e  $y \neq 0$  sono interni. I punti con  $y = 0$  restano esclusi perché sono immagine di punti della frontiera di  $D$  ( $u = 0$  o  $u = 2\pi$ ); tuttavia, per simmetria, ci si aspetta che anch'essi siano interni (si veda Figura 15.5). Per provarlo si deve scegliere un'altra parametrizzazione: in questo caso basta modificare il dominio della precedente, prendendo per esempio  $D_1 = [-\pi, \pi] \times [-h, h]$ . Invece la condizione  $|z| < h$  è sostanziale: il bordo è costituito dalle due circonferenze  $\{(R \cos u, R \sin u, \pm h) : u \in [0, 2\pi]\}$ .

- c) Procedendo in modo analogo a (b), ovvero prendendo varie parametrizzazioni della superficie in esame, si verifica che il toro e la sfera non hanno bordo, ovvero tutti i loro punti sono punti interni.

**ESEMPIO 15.3**

**Figura 15.5** La superficie laterale di un cilindro.

Tutte le superfici incontrate negli esempi precedenti hanno una parametrizzazione di classe  $C^1(D)$ . Tuttavia, la regolarità della funzione  $\sigma$  non è una condizione sufficiente per l'esistenza del *piano tangente* a  $\Sigma$ . Come si vedrà adesso, la situazione è analoga a quella delle curve, in cui per l'esistenza della retta tangente è anche necessario che il vettore tangente non si annulli.

Sia  $(u_0, v_0) \in D$  e sia  $(u(t), v(t))$  ( $t \in I$ ) una curva *regolare* in  $D$  che passa per  $(u_0, v_0)$ :  $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$  per qualche  $t_0 \in I$  e  $(u'(t_0), v'(t_0)) \neq (0, 0)$ . Applicando la funzione  $\sigma$  alla curva contenuta in  $D$ , otteniamo una curva contenuta nella superficie:  $\gamma(t) := \sigma(u(t), v(t))$ ,  $t \in I$ , è una curva contenuta in  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  con vettore tangente

$$\begin{aligned}\gamma'(t_0) &= \frac{d\sigma(u(t_0), v(t_0))}{dt} \\ &= \left( \frac{dx(u(t_0), v(t_0))}{dt}, \frac{dy(u(t_0), v(t_0))}{dt}, \frac{dz(u(t_0), v(t_0))}{dt} \right).\end{aligned}$$

Per la regola della catena,

$$\begin{aligned}\frac{dx(u(t_0), v(t_0))}{dt} &= x_u(u_0, v_0)u'(t_0) + x_v(u_0, v_0)v'(t_0) \\ \frac{dy(u(t_0), v(t_0))}{dt} &= y_u(u_0, v_0)u'(t_0) + y_v(u_0, v_0)v'(t_0) \\ \frac{dz(u(t_0), v(t_0))}{dt} &= z_u(u_0, v_0)u'(t_0) + z_v(u_0, v_0)v'(t_0)\end{aligned}$$

ovvero, più sinteticamente,

$$\boldsymbol{\gamma}'(t_0) = \frac{d}{dt} \boldsymbol{\sigma}(u(t_0), v(t_0)) = u'(t_0)\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) + v'(t_0)\boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0) \quad (15.1)$$

dove

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_u(u, v) &:= (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \\ \boldsymbol{\sigma}_v(u, v) &:= (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v)).\end{aligned}$$

Segue quindi dalla (15.1) che, poiché  $(u'(t_0), v'(t_0)) \neq (0, 0)$ , la curva  $\boldsymbol{\gamma}$  è regolare in  $t_0$  se

$$\text{i vettori } \boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \text{ e } \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0) \text{ sono linearmente indipendenti.} \quad (15.2)$$

Si noti che la retta tangente a  $\boldsymbol{\gamma}$  in  $\boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0)$  si trova nel piano

$$\Pi := \{\boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0) + \lambda\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) + \mu\boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \quad (15.3)$$

(infatti, per la (15.2),  $\Pi$  è effettivamente un piano!).  $\Pi$  è il piano ortogonale al vettore

$$\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0), \quad (15.4)$$

ovvero il piano di equazione  $\langle \boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0), \mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0) \rangle = 0$ :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (15.5)$$

$$\text{dove } \begin{cases} (x_0, y_0, z_0) := \boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0) \\ (a, b, c) := \boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

Questi ragionamenti, di natura completamente locale, suggeriscono la seguente definizione.

#### DEFINIZIONE 15.3

Sia  $\Sigma$  una superficie elementare e  $\mathbf{x}_0 \in \Sigma'$ .  $\Sigma$  si dice **regolare** in  $\mathbf{x}_0$  se esistono un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}_0$  e una parametrizzazione  $\boldsymbol{\sigma} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  di  $\Sigma \cap \mathcal{U}$  tale che:

(i)  $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(D)$ ;

(ii) vale la (15.2) nel punto  $(u_0, v_0) \in D$  tale che  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\sigma}(u_0, v_0)$ .

In tal caso il piano  $\Pi$  di equazione (15.5) si dice **piano tangente** a  $\Sigma$  in  $\mathbf{x}_0$ , e i due versori

$$\pm \frac{\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0)}{\|\boldsymbol{\sigma}_u(u_0, v_0) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u_0, v_0)\|}$$

si dicono **versori normali** a  $\Sigma$  in  $\mathbf{x}_0$ .  $\Sigma$  si dice **regolare** se tutti i punti interni sono regolari.

Non è difficile provare che le definizioni del piano tangente e dei versori normali sono consistenti, ovvero indipendenti dalla parametrizzazione scelta.

#### ESEMPIO 15.4

Riconsideriamo alcune superfici incontrate in precedenza.

a) La porzione di paraboloido dell'Esempio 15.2a è regolare: infatti i vettori

$$\sigma_u(u, v) = (1, 0, 2u), \quad \sigma_v(u, v) = (0, 1, 2v)$$

sono linearmente indipendenti per ogni  $(u, v) \in B_R$ :

$$\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} = (-2u, -2v, 1). \quad (15.6)$$

Per esempio, il piano tangente al paraboloide in  $(0, R/2, R^2/4) = \sigma(0, R/2)$  ha equazione  $-yR + z + R^2/4 = 0$ .

b) La sfera  $S_R$  è regolare. Utilizzando la parametrizzazione dell'Esempio 15.2b, si ottiene che i vettori

$$\begin{aligned} \sigma_u(u, v) &= (-R \sin u \sin v, R \cos u \sin v, 0) \\ \sigma_v(u, v) &= (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, -R \sin v) \end{aligned}$$

sono ben definiti e linearmente indipendenti per ogni  $(u, v) \in D$ :

$$\begin{aligned} \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) &= -R^2 \sin v (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \\ &= -R \sin v \sigma(u, v). \end{aligned} \quad (15.7)$$

Pertanto  $S_R$  è regolare in ogni punto di  $\sigma(D)$ .

Resta da esaminare il meridiano  $\{(R \sin v, 0, R \cos v) : v \in [0, \pi]\}$ , ovvero l'immagine dei punti di  $\partial D$ . Scegliendo la stessa parametrizzazione con  $D = (-\pi, \pi) \times (0, \pi)$  si ottiene la regolarità di  $S_R$  su tale meridiano esclusi gli estremi, ovvero esclusi i poli  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ . Questi ultimi si possono trattare scambiando il ruolo di  $y$  e  $z$  oppure considerando le due parametrizzazioni  $(x, y) \mapsto \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

Per determinare il piano tangente alla sfera nel punto  $\mathbf{x}_0 = (R/2, R/2, R/\sqrt{2})$  si può utilizzare la parametrizzazione dell'Esempio 15.2b, poiché  $\mathbf{x}_0$  è immagine del punto  $(u, v) = (\pi/4, \pi/4) \in D$ : dall'equazione del piano tangente e dalla (15.7) segue che il piano tangente ha equazione  $x + y + \sqrt{2}z - 2R = 0$ .

c) Procedendo in modo analogo a (b) si verifica che la superficie laterale del cilindro e il toro sono superfici regolari.

Il seguente risultato, basato sul teorema di invertibilità locale, ribadisce la natura locale del concetto di regolarità:

#### TEOREMA 15.4

*Sia  $\Sigma$  una superficie elementare regolare in  $\mathbf{x}$ . Allora esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}$  tale che  $\Sigma \cap \mathcal{U}$  è il grafico di una funzione differenziabile.*

Dimostrazione 

Il teorema è utile, per esempio, per provare che una data superficie non è regolare in un punto.

La superficie  $\Sigma$  del tronco di cono di raggio  $R$  e altezza  $h$  è una superficie elementare cartesiana parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = \left( u, v, \frac{h}{R} \sqrt{u^2 + v^2} \right), \quad (u, v) \in \overline{B_R}.$$

Si verifica facilmente che il bordo di  $\Sigma$  è la circonferenza di equazioni  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = h$ . Poiché la funzione  $(u, v) \mapsto \frac{h}{R} \sqrt{u^2 + v^2}$  non è derivabile in  $(0, 0)$ ,  $\Sigma$  è regolare in tutti i punti tranne in  $(0, 0, 0)$ .

#### ESEMPIO 15.5

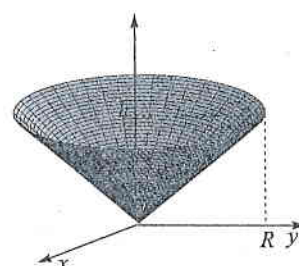


Figura 15.6



**Esercizio 15.1**

Siano  $A, B, C > 0$ . Verificare che l'ellissoide di parametrizzazione

$$\sigma(u, v) = (A \cos u \sin v, B \sin u \sin v, C \cos v), \quad (u, v) \in \bar{D} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

è una superficie regolare senza bordo e determinarne il piano tangente in  $(0, B/\sqrt{2}, C/\sqrt{2})$ .

**Esercizio 15.2**

Provare che la faccia del cubo, il toro (Esempio 15.2) e la superficie laterale del cilindro (Esempio 15.3) sono superfici elementari regolari.

**15.2 Integrali di superficie**

In questo paragrafo introduciamo per le superfici i concetti di area e di integrale. Ricordiamo che per Teorema 14.13 ogni funzione continua e limitata in un insieme aperto e misurabile è integrabile.

**Definizione 15.5**

Sia  $\Sigma$  una superficie elementare regolare di parametrizzazione  $\sigma: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $D$  misurabile, e sia  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|$  limitato in  $D$ . Si dice **area di  $\Sigma$**  il numero

$$A(\Sigma) := \iint_D \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

La definizione è motivata dalla seguente osservazione: ragionando come nel Paragrafo 14.3, l'immagine dell'approssimazione lineare di  $\sigma$  (intorno al punto  $(u_0, v_0) \in D$ ) del rettangolo  $[u_0, u_0 + du] \times [v_0, v_0 + dv]$  è il parallelogramma determinato dal vertice  $\sigma(u_0, v_0)$  e dai vettori  $\sigma_u(u_0, v_0) du$  e  $\sigma_v(u_0, v_0) dv$  e tale parallelogramma ha area

$$dS = \|\sigma_u(u_0, v_0) \wedge \sigma_v(u_0, v_0)\| \, du \, dv.$$

**Esempio 15.6**

Si vuole calcolare l'area della sfera  $S_R$ . Utilizzando la parametrizzazione in coordinate sferiche, sappiamo (si veda la (15.7)) che

$$\|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| = R^2 |\sin v| \|(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)\| = R^2 |\sin v|.$$

Perciò

$$A(S_R) = \iint_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} R^2 |\sin v| \, du \, dv = R^2 \left( \int_0^{2\pi} du \right) \left( \int_0^\pi \sin v \, dv \right) = 4\pi R^2.$$

Se  $\Sigma$  è *cartesiana*, per esempio se  $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , allora

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-f_u, -f_v, 1) \quad \text{e} \quad \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2},$$

da cui segue la formula per l'area del grafico della funzione  $(u, v) \mapsto f(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ :

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v)} \, du \, dv. \quad (15.8)$$

Si vuole determinare l'area della porzione  $\Sigma$  del paraboloide di equazione  $z = x^2 + y^2$  interna al settore sferico  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ .

La struttura di  $D$  segue dalla relazione  $(x^2 + y^2)^2 = z^2 \leq 2 - x^2 - y^2$ :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2) \leq 2\}.$$

Quindi, poiché  $z_x(x, y) = 2x$  e  $z_y(x, y) = 2y$ , si ottiene

$$A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Passando in coordinate polari con centro nell'origine, si ottiene con semplici calcoli

$$(r, \varphi) \in E = \{(r, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, \pi/2] : r^4 + r^2 - 2 \leq 0\} = [0, 1] \times [0, \pi/2]$$

(quindi  $D$  è semplicemente un quarto di cerchio). Perciò

$$A(\Sigma) = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\varphi = \frac{\pi}{24} (5^{3/2} - 1).$$

Si può dimostrare (ma non lo facciamo) che l'area di una superficie elementare regolare non dipende dalla sua parametrizzazione.

La seguente definizione generalizza il concetto di integrale curvilineo di prima specie al caso delle superfici.

#### DEFINIZIONE 15.6

Sia  $\Sigma$  una superficie elementare regolare di parametrizzazione  $\sigma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  la cui area sia ben definita. Sia  $f : \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}$  continua e limitata. Il numero

$$\iint_{\Sigma} f \, dS := \iint_D f(\sigma(u, v)) \|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\| \, du \, dv. \quad (15.9)$$

si dice **integrale di superficie** di  $f$  in  $\Sigma$ .

Qui, e nel seguito, una superficie "la cui area è ben definita" è una superficie che verifica le ipotesi della Definizione 15.5: in particolare,  $D$  misurabile e  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|$  limitato.

Calcoliamo

$$\iint_{\Sigma} x(y^2 + z^2) \, dS$$

dove  $\Sigma$  è la superficie di equazione  $x = yz, y^2 + z^2 \leq 9, z \geq y^2$ . Si noti che  $\Sigma$  è una superficie cartesiana regolare di parametrizzazione  $\sigma(u, v) = (uv, u, v)$  nel dominio  $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 9, v \geq u^2\}$ . Allora (si veda anche la (15.8))

$$\iint_{\Sigma} x(y^2 + z^2) \, dS = \iint_D uv(u^2 + v^2) \sqrt{1 + v^2 + u^2} \, du \, dv.$$

Utilizzando la simmetria del dominio e della funzione integranda rispetto a  $u$ , è facile concludere che l'integrale vale 0.

Sotto opportune condizioni, i concetti di area e integrale di superficie si potrebbero estendere a superfici non regolari. Non approfondiamo l'argomento e ci limitiamo ad un esempio.

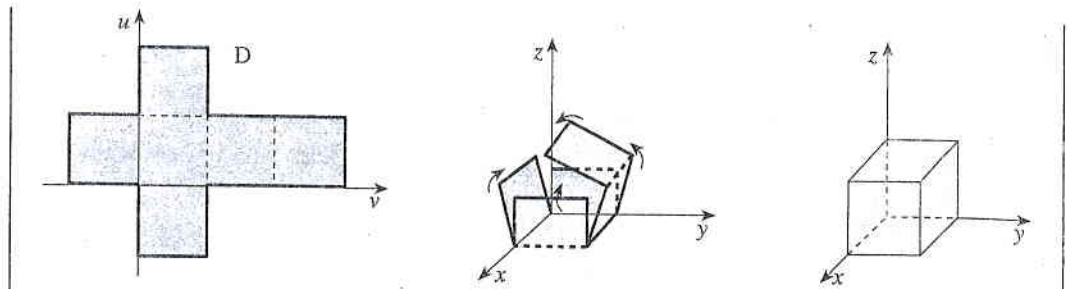
Il cubo è una superficie elementare: si può costruire un'unica parametrizzazione  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  così come si procederebbe con forbici e carta (si veda la Figura 15.7 e l'Esercizio 15.4).

#### ESEMPIO 15.7

#### ESEMPIO 15.8

#### ESEMPIO 15.9

**Figura 15.7** Il cubo come superficie elementare.



A causa della presenza di spigoli, il cubo non è una superficie regolare. Tuttavia (si veda ancora la figura) gli spigoli sono l'immagine di un numero finito di segmenti, ovvero di un insieme  $S \subset \bar{D}$  di misura nulla, quindi "trascurabile"; inoltre, fuori da  $S$  si ha  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = 1$  (si veda ancora l'Esercizio 15.4): perciò

$$\iint_{D \setminus S} \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv = \iint_{D \setminus S} du dv = |D \setminus S| = |D| = 6L^2,$$

che coincide con il valore dell'area del cubo definita in modo elementare.

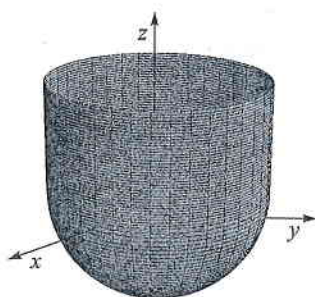
Svolgendo l'Esercizio 15.4, lo studente si renderà conto che è poco naturale utilizzare un'unica parametrizzazione per "calcolare" l'area del cubo: intuitivamente, essa è la somma delle aree delle sei "facce" che lo compongono. Nel Paragrafo 15.5 formalizzeremo il concetto di "superficie composta da superfici elementari regolari"; per ora ci limitiamo a introdurre le seguenti notazioni:

siano  $\Sigma_i (i = 1, \dots, n)$  superfici la cui area è ben definita e che non hanno punti interni in comune ( $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$  se  $i \neq j$ ), e sia  $f$  una funzione continua e limitata in  $\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$ ; allora si scrive

$$A\left(\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i\right) := \sum_{i=1}^n A(\Sigma_i) \quad \text{e} \quad \iint_{\bigcup_{i=1}^n \Sigma_i} f dS := \sum_{i=1}^n \iint_{\Sigma_i} f dS. \quad (15.10)$$

Con questa notazione, possiamo dire che l'area del cubo di lato  $L$  (inteso come unione delle sue sei facce) vale  $6L^2$ . Illustriamo la seconda formula nella (15.10) con un esempio.

#### ESEMPIO 15.10



**Figura 15.8**

Sia  $\Sigma_1$  la superficie laterale del cilindro di asse  $x = y = 0$ , raggio 1 e altezza 1 (si veda l'Esempio 15.3b, e  $\Sigma_2$  la semisfera  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ . Allora

$$\Sigma_1' \cap \Sigma_2' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in (0, 1)\} \cap \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\} = \emptyset.$$

Si vuole calcolare  $\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} z dS$  (si veda Figura 15.8). La superficie laterale cilindrica  $\Sigma_1$  è parametrizzata da

$$\sigma_1 : (\varphi, z) \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, z), \quad D_1 = [0, 2\pi] \times [0, 1]$$

e si ha

$$\sigma_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \sigma_z = (0, 0, 1), \quad \sigma_\varphi \wedge \sigma_z = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0),$$

da cui  $\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_z\| = 1$  e

$$\int_{\Sigma_1} z dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z dz d\varphi = \pi.$$

La semisfera è parametrizzata come nell'Esempio 15.6, da cui si ricava che

$$\int_{\Sigma_2} z dS = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi \cos v |\sin v| dv du = -\pi.$$

Perciò l'integrale cercato vale 0.



- a) Determinare l'area della porzione di superficie cilindrica di equazione  $x^2 + y^2 = 2y$  interna alla sfera di centro nell'origine e raggio 2;
- b) calcolare  $\iint_{\Sigma} z^2 dS$ , dove  $\Sigma$  è la semisfera di equazione  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ;
- c) calcolare  $\iint_{\Sigma} yz dS$ , dove  $\Sigma$  è la porzione di superficie  $z = y^2$  contenuta in  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x^2 - 3y^2\}$ ;
- d) calcolare  $\iint_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} (x^2 + y^2) dS$ , dove  $\Sigma_1$  è la porzione di sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  contenuta in  $z \leq 0$  e  $\Sigma_2 = \{(x, y, 1 - x^2 - y^2) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

## ESERCIZIO 15.3

- a) Dimostrare che il cubo è una superficie elementare utilizzando la parametrizzazione  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  illustrata nella Figura 15.7, e verificare che  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = 1$  a meno di un insieme di misura nulla.
- b) Dimostrare che l'insieme  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  dell'Esempio 15.10 può essere definito come una superficie elementare regolare.

## ESERCIZIO 15.4

## 15.3 Superfici elementari orientabili

Per introdurre i concetti di orientabilità di superfici elementari *regolari* conviene partire dal caso più semplice di una superficie *cartesiana*  $\Sigma$ . Se per esempio  $\Sigma$  è parametrizzata da  $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , i due versori normali a  $\Sigma$  in  $\mathbf{x} = \sigma(u, v)$  sono dati da

$$\pm \frac{\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)}{\|\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)\|} = \pm \frac{(-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)}{(1 + f_u^2(u, v) + f_v^2(u, v))^{1/2}}. \quad (15.11)$$

Si noti che la terza componente è sempre o positiva o negativa, mai zero; perciò è possibile selezionare in ciascun punto il versore normale che punta "verso l'alto",

$$\mathbf{n}^+ := \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} \quad (15.12)$$

(si veda la Figura 15.9) e quello che punta "verso il basso",  $\mathbf{n}^- := -\mathbf{n}^+$ . La funzione  $\mathbf{n}^+ : \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}^3$  individua la "faccia superiore" di  $\Sigma$ ; analogamente,  $\mathbf{n}^- := -\mathbf{n}^+$  individua la faccia "inferiore".

Si osservi che le funzioni  $\mathbf{n}^+$  e  $\mathbf{n}^-$  sono *continue* in  $\Sigma'$ . In effetti è proprio questo il punto fondamentale della costruzione: in ciascun punto di  $\Sigma'$  viene selezionato uno dei due versori normali in modo che l'orientazione sia coerente su tutta la superficie, individuando due facce "globali". In generale, cioè se non si abbia a che fare con superfici cartesiane, si parlerà delle due possibili *orientazioni* di  $\Sigma$  anziché delle due facce:

## DEFINIZIONE 15.7

Una superficie elementare regolare  $\Sigma$  si dice **orientabile** se esiste una funzione  $\mathbf{n}^+ : \Sigma' \rightarrow S_1$ , detta **normale a  $\Sigma$** , tale che:

- $\mathbf{n}^+(\mathbf{x})$  è uno dei due versori normali a  $\Sigma$  in  $\mathbf{x}$ ;
- la funzione  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{n}^+(\mathbf{x})$  è continua in  $\Sigma'$ .

Si scrive per brevità  $\Sigma^+$  per indicare la coppia  $(\Sigma, \mathbf{n}^+)$ , ovvero per indicare che è fissata su  $\Sigma$  l'orientazione  $\mathbf{n}^+$ ; analogamente,  $\Sigma^-$  corrisponde alla coppia  $(\Sigma, \mathbf{n}^-)$ . Comunque la scelta tra  $\mathbf{n}^+$  e il suo opposto  $\mathbf{n}^-$  è puramente convenzionale.

Tutte le superfici regolari incontrate negli esempi precedenti sono orientabili.

## Guida

Il paragrafo è utilizzato solo per i teoremi della divergenza e del rotore in  $\mathbb{R}^3$  (Paragrafo 16.3 e Paragrafo 16.4).

## Orientazione di una superficie cartesiana

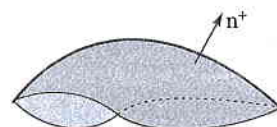


Figura 15.9

## ESEMPIO 15.11

- a) Il paraboloido è orientabile, essendo una superficie cartesiana. La normale  $\mathbf{n}^+$  può essere scritta esplicitamente utilizzando la (15.11) e osservando che  $(x, y, z) = \boldsymbol{\sigma}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$  solo se  $(x, y) = (u, v)$ :

$$\mathbf{n}^+(x, y, z) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{(1 + 4u^2 + 4v^2)^{1/2}} \Big|_{(u, v) = \boldsymbol{\sigma}^{-1}(x, y, z)} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{(1 + 4x^2 + 4y^2)^{1/2}}.$$

In questo caso  $\mathbf{n}^+$  individua la “faccia superiore”.

- b) Per la sfera  $S_R$ , è geometricamente intuitivo che il campo vettoriale  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$  è normale (con questa scelta del segno il campo “punta verso l'esterno” della palla di cui  $S_R$  è frontiera). Se l'intuizione non ci soccorre, si può procedere utilizzando la parametrizzazione dell'Esempio 15.2b: segue dalla (15.7) che per  $\mathbf{x}$  non appartenente al meridiano  $\{y = 0, x \geq 0\}$ , i versori normali a  $S_R$  in  $\mathbf{x}$  sono

$$\mathbf{n}^+(\mathbf{x}) = -\frac{R \sin v \boldsymbol{\sigma}(u, v)}{\|R \sin v \boldsymbol{\sigma}(u, v)\|} \Big|_{(u, v) = \boldsymbol{\sigma}^{-1}(\mathbf{x})} = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = -\frac{\mathbf{x}}{R}$$

e  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$ . Si verifica che  $\mathbf{n}^+$  e  $\mathbf{n}^-$  sono continue su  $S_R$ .

Come si mostra nel prossimo esempio, non tutte le superfici sono orientabili. A questo riguardo osserviamo che se  $\boldsymbol{\gamma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva semplice e chiusa con sostegno contenuto in una superficie  $\Sigma$  orientabile, allora per composizione la funzione  $t \mapsto \mathbf{n}^+(\boldsymbol{\gamma}(t))$  è continua e  $\mathbf{n}^+(\boldsymbol{\gamma}(b)) = \mathbf{n}^+(\boldsymbol{\gamma}(a))$ .

## ESEMPIO 15.12

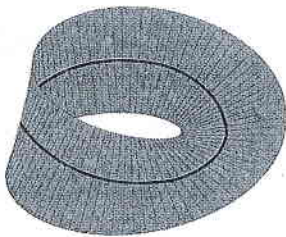


Figura 15.10 Il nastro di Möbius non è orientabile.

Si prenda un rettangolo di un materiale elastico (cuoio, per esempio) con le due facce colorate rispettivamente di rosso e di blu. Ora, esistono due modi per far combaciare due lati opposti: facendo coincidere i vertici consecutivi si ottiene la superficie laterale di un cilindro; viceversa, facendo coincidere i vertici opposti si ottiene una superficie elementare chiamata nastro di Möbius. La versione analiticamente più semplice di **nastro di Möbius** è la superficie di parametrizzazione

$$\boldsymbol{\sigma}(u, v) := \left( \left( R + v \cos \frac{u}{2} \right) \cos u, \left( R + v \cos \frac{u}{2} \right) \sin u, v \sin \frac{u}{2} \right) \\ \text{per } (u, v) \in \bar{D} = [0, 2\pi] \times [-h, h].$$

Nel caso del cilindro le due facce sono chiaramente distinguibili (hanno un colore diverso l'una dall'altra); nel secondo, invece (si veda Figura 15.10), non si riesce a distinguere le due facce, ovvero il nastro di Möbius non è orientabile: per verificarlo, basta osservare che la curva chiusa indicata nella Figura 15.10 è tale che  $\mathbf{n}(\boldsymbol{\gamma}(b)) = -\mathbf{n}(\boldsymbol{\gamma}(a))$ .

Di particolare rilevanza è il concetto di *flusso di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  attraverso una superficie orientabile*.

## DEFINIZIONE 15.8

Sia  $\Sigma^+$  una superficie orientabile la cui area è ben definita, e sia  $\mathbf{v}: \Sigma' \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale continuo e limitato. Allora si dice **flusso di  $\mathbf{v}$  attraverso  $\Sigma^+$**  il numero

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{v}) := \iint_{\Sigma} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle dS.$$

Se  $\mathbf{v}$  è per esempio la velocità di un liquido che scorre attraverso una superficie, il flusso indica la *portata volumetrica* del liquido attraverso la superficie. Ovviamente il flusso dipende dalla orientazione della superficie: cambiando orientazione il flusso cambia segno.

Se  $\Sigma$  è una superficie elementare parametrizzata da  $\sigma: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  con *normale indotta dalla parametrizzazione*, ovvero  $\mathbf{n}^+ = \sigma_u \wedge \sigma_v / \|\sigma_u \wedge \sigma_v\|$ , per la (15.9) si ha che

$$\Phi_{\Sigma^+}(\mathbf{v}) = \iint_D \langle \mathbf{v}(\sigma(u, v)), \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle du dv.$$

**ESEMPIO 15.13**

Sia  $\Sigma$  la porzione di piano di equazione  $3x + 4y - 2z = 5$  contenuta nei tre semispazi  $x \geq 0, y \geq 0$  e  $x + y \leq 1$ , e sia  $\mathbf{n}^+$  la normale tale che  $\langle \mathbf{n}^+, \mathbf{e}_1 \rangle > 0$ . Si vuole determinare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{v} = (2y, 2z, 3 - x)$  attraverso  $\Sigma^+$ .

Il piano di equazione  $3x + 4y - 2z = 5$  può essere parametrizzato da  $\sigma(u, v) = (u, v, (3u + 4v - 5)/2)$  per  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ; limitando  $\sigma$  a  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$ , si ottiene una parametrizzazione di  $\Sigma$ . Ricordando la (15.11), la normale indotta da  $\sigma$  è

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|} = \frac{(-3/2, -2, 1)}{\sqrt{29/4}}.$$

In particolare  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{e}_1 \rangle < 0$ , quindi  $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}$ . Perciò

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma^+} &= - \iint_D \langle \mathbf{v}(\sigma(u, v)), \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle du dv \\ &= - \iint_D \langle (2v, 2(3u + 4v - 5)/2, 3 - u), (-3/2, -2, 1) \rangle du dv \\ &= \iint_D (7u + 11v - 13) du dv = \int_0^1 \left( \int_0^{1-v} (7u + 11v - 13) du \right) dv \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 (19 - 34v + 15v^2) dv = -7/2. \end{aligned}$$

Provare che il bordo del nastro di Möbius è il sostegno di un'unica curva,

$$\gamma(t) = ((R + h \cos(t/2)) \cos t, (R + h \cos(t/2)) \sin t, h \sin(t/2)), \quad t \in [0, 4\pi].$$

- a) Determinare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{v} = (x, y, z)$  attraverso la superficie sferica di raggio  $R$  orientata in modo che  $\mathbf{n}^+ = \mathbf{x}/R$ ;  
 b) determinare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{v} = (x, y, z^2)$  attraverso la porzione di superficie conica parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u), \quad (u, v) \in [1, 2] \times [0, \pi]$$

con normale indotta dalla parametrizzazione.

**ESERCIZIO 15.5****ESERCIZIO 15.6**

## 15.4 Orientazione del bordo di superfici elementari

L'ultimo concetto essenziale per il seguito è quello di orientazione del bordo di una superficie  $\Sigma$ . Ci si limita per il momento a esporlo nel caso in cui  $\Sigma$  sia una superficie elementare *invertibile*:

**DEFINIZIONE 15.9**

Una superficie elementare  $\Sigma$  si dice **invertibile** se ammette una parametrizzazione  $\sigma: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  iniettiva in  $\bar{D}$ .

**Guida**

Il paragrafo è utilizzato solo per il teorema del rotore in  $\mathbb{R}^3$  (Paragrafo 16.4).



Se  $\Sigma$  è una superficie invertibile, allora  $\partial\Sigma = \sigma(\partial D)$ . Perciò ogni superficie invertibile ha bordo, e se è regolare è orientabile: basta scegliere

$$\mathbf{n}^+(\mathbf{x}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}_u(u, v) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u, v)}{\|\boldsymbol{\sigma}_u(u, v) \wedge \boldsymbol{\sigma}_v(u, v)\|} \Big|_{(u, v) = \sigma^{-1}(\mathbf{x})}$$

Si noti che qui abbiamo scelto come orientazione positiva  $\Sigma^+$  quella indotta dalla parametrizzazione.

Sia ora  $\gamma_D$  una curva di Jordan il cui interno è  $D$ . Ricordiamo che  $\gamma_D$  è orientata positivamente Definizione 12.2 se  $\partial D$  è “percorso” da  $\gamma_D$  in senso antiorario. Poiché  $\sigma$  è iniettiva in  $\bar{D}$ , il bordo  $\partial\Sigma$  è il sostegno della curva semplice e chiusa  $\gamma = \sigma \circ \gamma_D$ . Perciò l'orientazione di  $\gamma_D$  e la parametrizzazione  $\sigma$  inducono un'orientazione di  $\partial\Sigma$ : quella che corrisponde con l'orientazione positiva di  $\gamma_D$  si dice *orientazione positiva di  $\partial\Sigma$  indotta da  $\sigma$*  e  $\partial\Sigma^+$  e  $\partial\Sigma^-$  indicano il bordo di  $\Sigma$  orientato positivamente o negativamente rispetto a  $\sigma$ . Se  $\gamma$  è regolare a tratti è ben definito, tranne al più in un numero finito di punti, il **versore tangente positivo**  $\mathbf{T}^+ = \gamma' / \|\gamma'\|$  e in tal caso  $\partial\Sigma^+$  corrisponde alla coppia  $(\partial\Sigma, \mathbf{T}^+)$ .

Dalle due osservazioni precedenti segue che sia l'orientazione di  $\Sigma$  che quella di  $\partial\Sigma$  dipendono dalla parametrizzazione. Risulta però che l'accoppiamento tra  $\Sigma^+$  e  $\partial\Sigma^+$ , ovvero tra  $\mathbf{n}^+$  e  $\mathbf{T}^+$ , non dipende dalla parametrizzazione di  $\Sigma$ . Ciò si può intuire se si ricorda che con l'orientazione positiva  $\gamma_D$  percorre  $\partial D$  tenendo l'interno  $D$  a sinistra: questa caratteristica è conservata, indipendentemente dalla parametrizzazione scelta, dalla composizione  $\gamma = \sigma \circ \gamma_D$ . Perciò

$$\text{l'orientazione positiva di } \partial\Sigma^+ \text{ è quella con cui un osservatore in piedi su } \Sigma^+ \text{ percorre } \partial\Sigma \text{ tenendo } \Sigma \text{ alla propria sinistra} \quad (15.13)$$

(si veda la Figura 15.11).

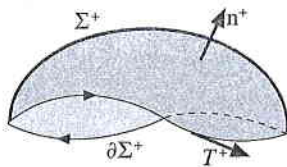


Figura 15.11

#### ESEMPIO 15.14

Riconsideriamo la parametrizzazione  $\sigma(u, v) = (1, u, v)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , della faccia “destra”  $\Sigma$  del cubo dell'Esempio 15.2d, rispetto a cui è immediato verificare che  $\Sigma$  è regolare e invertibile. Si ha  $\boldsymbol{\sigma}_u = (0, 1, 0)$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_v = (0, 0, 1)$  quindi  $\mathbf{n}^+(\mathbf{x}) = (1, 0, 0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Sigma$ . L'orientazione positiva del bordo di  $\Sigma$  è stata indicata nella Figura 15.12.

Un'altra parametrizzazione di  $\Sigma$  è data dalla funzione  $\sigma_*(u, v) := (1, v, u)$ ,  $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Lo studente verifichi che in tal caso cambiano le orientazioni positive sia della superficie (ora  $\mathbf{n}_*^+ = (-1, 0, 0)$ ) che del suo bordo.

#### ESEMPIO 15.15

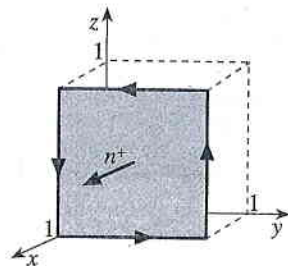


Figura 15.12

Sia  $\Sigma$  la porzione di sfera di parametrizzazione

$$\sigma : (\varphi, \theta) \mapsto (\sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi \sin \theta, \cos \theta), \quad (\varphi, \theta) \in \bar{D} := \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right] \times \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right].$$

Si verifica facilmente che la funzione  $\sigma$  è iniettiva in  $\bar{D}$  e regolare in  $D$ , quindi  $\Sigma$  e il suo bordo sono orientabili. Si noti che  $\partial\Sigma$  è il sostegno di una curva chiusa e regolare a tratti:  $\partial\Sigma$  è l'unione dei sostegni di quattro curve regolari  $\gamma_i = \sigma \circ \gamma_{D,i}$ , dove  $\gamma_{D,i}$  sono i quattro segmenti che compongono la frontiera di  $D$ , percorsi in senso antiorario:

$$\gamma_1 = \sigma \circ \gamma_{D,1} = (\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/3,$$

$$\gamma_2 = \sigma \circ \gamma_{D,2} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin \theta, \frac{1}{2} \sin \theta, \cos \theta \right), \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4,$$

$$\gamma_3 = \sigma \circ \gamma_{D,3} = \left( -\frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \varphi, -\frac{1}{2} \sqrt{2} \cos \varphi, \frac{1}{2} \sqrt{2} \right), \quad \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/3,$$

$$\gamma_4 = \sigma \circ \gamma_{D,4} = \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \theta, \frac{1}{2} \sqrt{2} \sin \theta, \cos \theta \right), \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4.$$

Si noti che l'orientazione di  $\Sigma$  indotta da  $\sigma$  corrisponde alla normale diretta verso l'esterno della sfera,  $\mathbf{n}^+(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , in accordo con la (15.13).

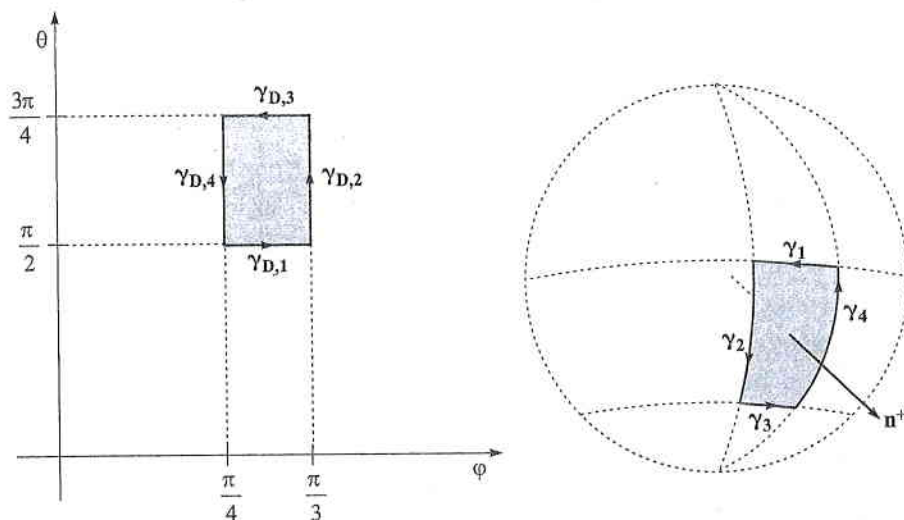


Figura 15.13

Sia  $\Sigma$  il quarto di sfera di equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  determinato dalle disuguaglianze  $x \geq 0$  e  $z \geq 0$ . Studiare l'orientazione di  $\Sigma$  e di  $\partial\Sigma$  indotta dalle seguenti parametrizzazioni  $\sigma_i : D_i \rightarrow \Sigma$  e verificare che l'osservazione (15.13) sia sempre rispettata:

$$D_1 = \{(u, v) : u > 0, u^2 + v^2 < 4\}, \quad \sigma_1(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2});$$

$$D_2 = \{(u, v) : u > 0, u^2 + v^2 < 4\}, \quad \sigma_2(u, v) = (\sqrt{4 - u^2 - v^2}, v, u).$$

**ESERCIZIO 157**

## 15.5 Superfici composte

Torniamo alla questione della superficie "composta da superfici elementari regolari" a cui abbiamo solo accennato calcolando l'area, per esempio, del cubo. Lo faremo pensando principalmente al problema dell'orientabilità di tali superfici. Per esempio, consideriamo l'unione di tre facce di un cubo, che vorremmo definire come una superficie composta da tre superfici elementari regolari e invertibili e di cui vorremo definire il concetto di orientabilità (si veda Figura 15.14).

Guidati dall'intuizione geometrica, si trovano facilmente le due distinte facce di  $\Sigma$ . Per esempio, una di esse è caratterizzata dai tre vettori normali  $\mathbf{n}_1^+$ ,  $\mathbf{n}_2^+$  e  $\mathbf{n}_3^+$  indicati nella Figura 15.14. I tre vettori determinano l'orientazione delle superfici elementari  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  e  $\Sigma_3$ . Nella stessa figura sono indicate le orientazioni corrispondenti di  $\partial\Sigma_i$ : si noti che esse sono opposte nei tratti appartenenti a  $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$  ( $i \neq j$ ). Inoltre il bordo di  $\Sigma$  risulta essere una curva orientata.

Ripetendo questa procedura nei casi di una sfera (composta per esempio da due emisferi orientati) o di un cubo (composto dalle sei facce), si giunge sempre alla stessa conclusione: un'orientazione coerente (parliamo sempre di un concetto puramente intuitivo) di due superfici elementari conduce a orientazioni opposte dei tratti di bordo in comune e a un'orientazione coerente di  $\partial\Sigma$ .

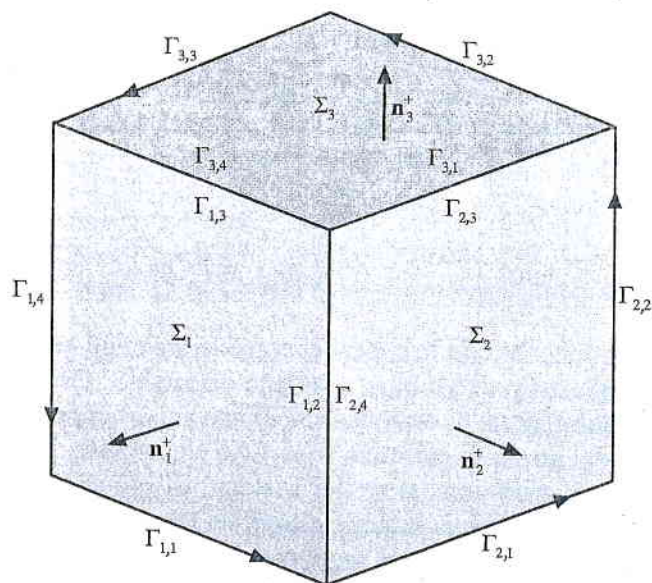
Per generalizzare gli esempi considerati, diamo una definizione di superficie composta che ci assicura che le varie superfici elementari che la compongono siano disposte in modo analogo alla Figura 15.14:

**Guida**

In molte situazioni pratiche e di laboratorio, le superfici hanno spigoli (cubi, pilastri, ecc.). Il paragrafo consente di formulare anche in queste situazioni il teorema della divergenza (Paragrafo 16.3) e del rotore (Paragrafo 16.4), due risultati di particolare importanza applicativa.



**Figura 15.14** Una superficie composta.



#### DEFINIZIONE 15.10

Un insieme limitato  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  si dice **superficie composta** in  $\mathbb{R}^3$  se è l'unione di un numero finito,  $n$ , di superfici elementari regolari e invertibili  $\Sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) tali che:

- (i)  $\partial\Sigma_i$  è l'unione di un numero finito,  $m_i$ , di sostegni  $\Gamma_{i,p}$  di curve semplici  $\gamma_{i,p}$ , ( $p = 1, \dots, m_i$ );
- (ii) due superfici elementari hanno in comune al più il bordo:  $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$  per ogni  $i \neq j$ ;
- (iii) ogni superficie elementare ha in comune almeno un sostegno con un'altra superficie: per ogni  $i$  esiste  $j \neq i$  tale che  $\Gamma_{i,p} = \Gamma_{j,q}$  per qualche  $p \in \{1, \dots, m_i\}$  e  $q \in \{1, \dots, m_j\}$ ;
- (iv) se due sostegni non coincidono, ovvero se  $\Gamma_{i,p} \neq \Gamma_{j,q}$ , allora la loro intersezione  $\Gamma_{i,p} \cap \Gamma_{j,q}$  contiene al più gli estremi, detti vertici;
- (v) ciascun sostegno coincide con al più un altro sostegno;
- (vi) per ogni vertice  $\mathbf{x}$  esiste un intorno  $\mathcal{U}$  di  $\mathbf{x}$  tale che ogni coppia di punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Sigma \cap \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}\}$  esiste una curva  $\gamma$  con sostegno in  $\Sigma \cap \mathcal{U} \setminus \{\mathbf{x}\}$  di estremi  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ .

Il **bordo** di  $\Sigma$ ,  $\partial\Sigma$ , è l'unione di quei  $\Gamma_{i,p}$  per cui non esiste un  $\Gamma_{j,q}$  ( $j \neq i$ ) tale che  $\Gamma_{i,p} = \Gamma_{j,q}$ . Se  $\partial\Sigma = \emptyset$  si parla di **superficie senza bordo**.

Ciascuna delle richieste (i) – (v) si può capire bene guardando la Figura 15.14. La (vi) serve ad escludere autointersezioni in un vertice (per una superficie elementare ciò è assicurato dall'iniettività).

Così come il cubo è sia una superficie elementare che una superficie composta, allo stesso modo si può verificare che tutte le superfici incontrate negli esempi precedenti sono superfici composte e che la definizione di bordo è consistente con la precedente: per esempio, per la sfera  $S_R$  si possono scegliere come superfici elementari i due emisferi parametrizzati da  $z \mapsto \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , e per il cono le due superfici che si ottengono tagliandolo con un piano passante per l'asse. La definizione di punto interno regolare e di superficie regolare è identica a quella delle superfici elementari e non la ripetiamo. Infine, l'area di una superficie composta  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  è ben definita se lo è l'area di ciascuna  $\Sigma_i$ , e in tal caso area e integrale di superficie sono dati dalla (15.10).

Gli esempi precedenti suggeriscono come definire l'orientabilità di una superficie composta:



**DEFINIZIONE 15.11**

Una superficie composta  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  si dice **orientabile** se esistono parametrizzazioni  $\sigma_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$  di ciascuna superficie elementare  $\Sigma_i$  tali che  $\partial\Sigma_i^+ = \partial\Sigma_j^-$  su  $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$ , ovvero l'orientazione positiva di  $\partial\Sigma_i$  indotta da  $\sigma_i$  e l'orientazione positiva di  $\partial\Sigma_j$  indotta da  $\sigma_j$  sono opposte su  $\partial\Sigma_i \cap \partial\Sigma_j$ . In tal caso si pone

$$\mathbf{n}^+(\mathbf{x}) = \frac{\partial_u \sigma_i \wedge \partial_v \sigma_i}{\|\partial_u \sigma_i \wedge \partial_v \sigma_i\|} \Big|_{(u,v)=\sigma_i^{-1}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Sigma'_i$$

Secondo questa definizione tutte le superfici considerate negli esempi precedenti, con l'unica eccezione del nastro di Möbius, risultano orientabili. Osserviamo che sarebbe possibile dare una definizione di orientazione di una superficie composta che non utilizzi l'orientazione del bordo di ciascuna superficie elementare.

Ricordiamo che  $\partial\Sigma$  può consistere dei sostegni di più di una curva chiusa. Per esempio il bordo della superficie laterale cilindrica consiste di due circonferenze (si veda Figura 15.5). In generale vale il seguente risultato, che, a posteriori, è una giustificazione del nome "bordo orientato".

**TEOREMA 15.12**

Sia  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$  una superficie composta orientabile. Allora il bordo  $\partial\Sigma$  è il sostegno di  $N$  curve chiuse  $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_N$  tali che il verso di percorrenza di  $\tilde{\gamma}_i$  coincide con l'orientamento di  $\partial\Sigma_i^+$  su  $(\text{im } \tilde{\gamma}_i) \cap \partial\Sigma_j$ .

Dimostrazione 

Si distinguono quindi anche nel caso di una superficie composta due possibili orientazioni di  $\partial\Sigma$ , indicate con  $\partial\Sigma^+$  e  $\partial\Sigma^-$ .

Si noti che il versore  $\mathbf{n}^+(\mathbf{x})$  è definito solo nei punti che non appartengono al bordo di una delle superfici elementari di cui consiste  $\Sigma$ . Risulta però possibile *estendere con continuità* la funzione  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{n}^+(\mathbf{x})$  a tutti i punti regolari di  $\Sigma'$ . In particolare vale il seguente risultato.

**TEOREMA 15.13**

Sia  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i$  una superficie composta regolare e orientabile. Allora è possibile estendere  $\mathbf{n}^+(\mathbf{x})$  a ogni  $\mathbf{x} \in \Sigma'$  in modo tale che la funzione  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{n}^+(\mathbf{x})$  è continua in  $\Sigma'$ .

Dimostrazione 

Si osservi che, come per le superfici elementari, sia l'orientazione della superficie sia quella del bordo dipendono dalle parametrizzazioni, ma l'accoppiamento tra i due ne è indipendente.

Verificare che il tetraedro di vertici  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$  è una superficie composta orientabile.

**ESERCIZIO 15.8**

Sia  $\Sigma_1$  la superficie laterale del cilindro  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$  e  $\Sigma_2$  un suo "coperchio":  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 8z = 9\}$ . Mostrare che  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  è orientabile e indicare il legame tra le possibili orientazioni di  $\Sigma_i$  e  $\partial\Sigma_i$  e quelle di  $\Sigma$ ,  $\partial\Sigma$ .

**ESERCIZIO 15.9**



## FILO ROSSO Gli operatori differenziali " $\nabla \wedge$ " e " $\nabla \cdot$ "

Il *rotore* è un operatore differenziale che associa ad un campo vettoriale  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^1$  ( $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto) un altro campo vettoriale definito in  $\Omega$ :

$$\text{rot } \mathbf{F} := ((F_3)_y - (F_2)_z, (F_1)_z - (F_3)_x, (F_2)_x - (F_1)_y).$$

Si usa anche un'altra notazione, puramente formale ma utile per ricordarsi la formula:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}.$$

Anche la *divergenza* è un operatore differenziale che agisce su un campo vettoriale  $\mathbf{F}$ , ma gli associa invece una funzione *scalare*:

$$\text{div } \mathbf{F} = (F_1)_x + (F_2)_y + (F_3)_z \quad (= \langle \nabla, \mathbf{F} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{F}).$$

Divergenza e rotore costituiscono due concetti fondamentali della fisica matematica. Per esempio, giocano un ruolo centrale nella descrizione dell'evoluzione dei campi elettromagnetici, le cosiddette *leggi di Maxwell* (James Clerk Maxwell, "A Treatise on Electricity and Magnetism", 1873) e dei fluidi, le cosiddette *equazioni di Navier-Stokes* (Claude Louis Marie Henri Navier, "Mémoire sur les lois du mouvement des fluides", 1822, e George Gabriel Stokes, "On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids", 1845).

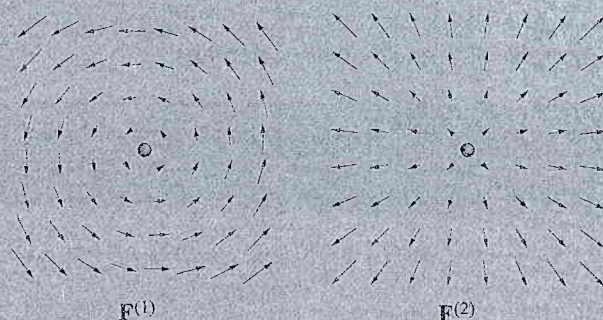
In questo capitolo vedremo come interpretare i due operatori tramite due fondamentali identità integrali, il *teorema della divergenza* e il *teorema del rotore*. Per sviluppare un minimo di intuizione consideriamo due campi vettoriali,

$$\mathbf{F}^{(1)}(x, y, z) = (y, -x, 0),$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(x, y, z) = (x, y, 0).$$

I loro rotore e divergenza sono, per ogni  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\text{rot } \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) = (0, 0, 2), \quad \text{rot } \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) = (0, 0, 0), \\ \text{div } \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{div } \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) = 2.$$



Nella figura sono stati visualizzati  $\mathbf{F}^{(1)}$  e  $\mathbf{F}^{(2)}$  in un arbitrario piano orizzontale ( $z = \text{costante}$ ):  $\mathbf{F}^{(1)}$  sembra "ruotare intorno" all'asse parallelo a  $\text{rot } \mathbf{F}$ , mentre  $\mathbf{F}^{(2)}$  sembra "divergere" da tale asse.

Il concetto intuitivo suggerito dalla parola "ruotare" si traduce nel concetto di *circuitazione* di  $\mathbf{F}^{(i)}$  lungo una curva chiusa  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} \omega^{(i)}, \quad \omega^{(i)} = F_1^{(i)} dx + F_2^{(i)} dy + F_3^{(i)} dz.$$

Dato  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  e scegliendo per  $\gamma$  la circonferenza  $\gamma_{\varepsilon}(\mathbf{x})$  di raggio  $\varepsilon > 0$ , centro  $\mathbf{x}$  e sostegno nel piano  $z = \text{costante}$ , si calcola la circuitazione

$$\int_{\gamma_{\varepsilon}(\mathbf{x})} \omega^{(i)} = \begin{cases} 2\pi\varepsilon^2 & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{se } i = 2. \end{cases}$$

Questo suggerisce di interpretare  $\|\text{rot } \mathbf{F}^{(i)}\|$  come la *densità di circuitazione per unità di area nel piano ortogonale a  $\text{rot } \mathbf{F}^{(i)}$* . In questo capitolo vedremo come il *teorema di Stokes* confermerà questa interpretazione per campi vettoriali generici. Ovviamente tale interpretazione chiarisce la nozione di *campo vettoriale irrotazionale* ( $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ ) introdotta nel Capitolo 12.

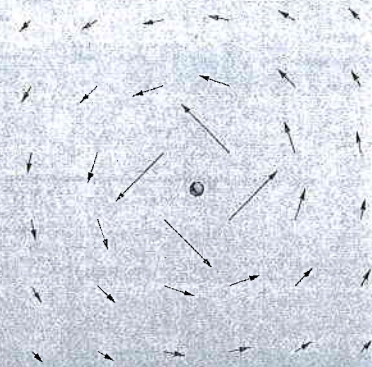
Analogamente il *teorema della divergenza* fornirà la possibilità di interpretare  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x})$  come la



densità di flusso relativo a  $\mathbf{F}$ , per unità di volume, uscente da  $\mathbf{x}$ . Vedremo nell'Esempio 16.6 che, per esempio, la divergenza è lo strumento opportuno per formulare la legge di *conservazione della massa*. Per rendersi conto dell'importanza applicativa di  $\nabla \wedge$  e  $\nabla \cdot$  basta considerare qualche esempio. Se  $\mathbf{v}$  rappresenta il campo di velocità di un fluido, l'equazione  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  esprime l'*incomprimibilità* del fluido, mentre  $\boldsymbol{\omega} := \operatorname{rot} \mathbf{v}$  si dice *vorticità* del fluido. Nelle equazioni di Maxwell, il campo magnetico  $\mathbf{B}$  e il campo elettrico  $\mathbf{E}$  sono tali che  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  e  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  è proporzionale alla densità di carica elettrica. Le equazioni di Maxwell forniscono anche un esempio utile per far capire il limite dell'intuizione:  $\operatorname{rot} \mathbf{F}^{(1)} = (0, 0, 2)$ , ma dividendo  $\mathbf{F}^{(1)}$  per  $x^2 + y^2$  si ottiene un campo vettoriale irrotazionale:

$$\operatorname{rot} \left( \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = (0, 0, 0)$$

se  $(x, y) \neq (0, 0)$ .



Come abbiamo visto nel filo rosso del Capitolo 12, tale campo rappresenta, a meno di una costante moltiplicativa, il campo magnetico generato da un filo infinito (l'asse  $z$ ) percorso da una corrente elettrica: il lavoro del campo lungo qualunque circuitazione che non racchiuda l'asse  $z$  è nullo, mentre non è nullo se la circuitazione racchiude tale asse (si veda l'Esempio 12.12).

## 16.1 Divergenza e rotore

In questo capitolo si introducono due risultati, di fondamentale importanza applicativa, che connettono un integrale doppio su un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  a un integrale curvilineo sulla sua frontiera  $\partial\Omega$  (il teorema della divergenza nel piano), un integrale triplo a un integrale di superficie (il teorema della divergenza nello spazio), e un integrale di superficie a un integrale curvilineo (il teorema del rotore). Quindi, in generale, si "abbassa" la dimensione dell'insieme su cui si integra: in questo senso, tali risultati possono essere considerati come l'analogo in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  del teorema fondamentale del calcolo per integrali su  $\mathbb{R}$ , in cui si riduce l'integrale di una funzione su un intervallo (un insieme di "dimensione uno") al valore di una sua primitiva in due punti (un insieme di "dimensione zero").

Per semplicità, faremo l'ipotesi che le funzioni coinvolte siano sufficientemente regolari: se  $\Omega$  è chiuso, una funzione  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **di classe**  $C^1(\Omega)$  se esistono un aperto  $X \supseteq \Omega$  e una funzione  $\tilde{f} \in C^1(X)$  tale che  $\tilde{f} \equiv f$  in  $\Omega$ , e in tal caso su  $\partial\Omega$  si pone  $\nabla f = \nabla \tilde{f}$ . Un campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è **di classe**  $C^1(\Omega)$  se lo sono le sue componenti.

La **divergenza** di un campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , di classe  $C^1(\Omega)$ , è definita come segue:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Si noti che la divergenza è una grandezza scalare, ovvero  $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})$  è un numero reale. Per esempio,

Divergenza di un campo vettoriale



$$\text{se } n = 2, \quad \operatorname{div}(v_1, v_2) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = (v_1)_x + (v_2)_y,$$

$$\text{se } n = 3, \quad \operatorname{div}(v_1, v_2, v_3) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = (v_1)_x + (v_2)_y + (v_3)_z.$$

Poiché, formalmente,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), (v_1, \dots, v_n) \right\rangle$$

si scrive anche

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \langle \nabla, \mathbf{v} \rangle = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Se  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  e  $\mathbf{v}$  è un campo vettoriale di classe  $C^1$ , allora vale la seguente relazione, analoga alla regola della catena:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(fv_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left( f \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \langle \nabla f, \mathbf{v} \rangle.$$

Se  $u \in C^2(\Omega)$ , è ben definita la funzione  $\Delta u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , usualmente detta **laplaciano** di  $u$ :

$$\Delta u(\mathbf{x}) \doteq \operatorname{div}(\nabla u(\mathbf{x})) = \operatorname{div}(u_{x_1}(\mathbf{x}), \dots, u_{x_n}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}(\mathbf{x}).$$

Rotore di un campo vettoriale

Il **rotore** di un campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , di classe  $C^1(\Omega)$ , è stato già incontrato nel Capitolo 12:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := \left( (v_2)_z - (v_3)_y, (v_3)_x - (v_1)_z, (v_1)_y - (v_2)_x \right) \quad \text{in } \Omega.$$

Si usa anche un'altra notazione, puramente formale ma utile per ricordarsi la formula:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

(lo studente controlli sviluppando il determinante rispetto alla prima riga). Se  $\mathbf{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$  è un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^2$ , ovvero  $\mathbf{v} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , lo si identifica con il campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da  $\mathbf{v}(x, y, z) = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0)$ , e si definisce di conseguenza

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := \left( 0, 0, (v_2)_x - (v_1)_y \right).$$

### ESERCIZIO 16.1

Calcolare la divergenza e il rotore dei seguenti campi vettoriali:

- $\mathbf{v}(x, y) = (x^2 y^3, y^2 - xy + 1)$ ;
- $\mathbf{v}(x, y) = (x \sin^2(xy), y \cos^2(xy))$ ;
- $\mathbf{v}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ ;
- $\mathbf{v}(x, y, z) = \nabla f$ ,  $f(x, y) = (x + y) \log(x - y) - z$ .

## 16.2 Il teorema della divergenza nel piano

È utile partire dal caso in cui  $\Omega$  è un dominio semplice del piano. Un dominio semplice, per esempio rispetto a  $x$ ,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

si dice **dominio semplice regolare a tratti** se  $\alpha, \beta \in C^1([c, d])$  e  $\alpha(y) < \beta(y)$  per ogni  $y \in (c, d)$ . In tal caso la frontiera  $\partial\Omega$  è il sostegno di una curva di Jordan  $\gamma$ , che si assume orientata positivamente (ovvero in modo da tenere  $\Omega$  a sinistra, si veda Figura 16.1). Poiché  $\gamma$  è regolare a tratti, se  $\omega \in C(\partial\Omega)$  e  $f \in C(\partial\Omega)$  sono, rispettivamente, una forma differenziale e una funzione, allora gli integrali

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega := \int_{\gamma} \omega, \quad \int_{\partial\Omega} f \, ds := \int_{\gamma} f \, ds \quad (16.1)$$

sono invarianti per curve orientate equivalenti (con lo stesso verso nel primo caso, indipendentemente dal verso nel secondo), quindi ben definiti.

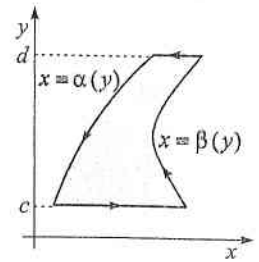


Figura 16.1

### TEOREMA 16.1 Formule di Green per domini semplici

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio semplice regolare a tratti e sia  $f \in C^1(\Omega)$ . Allora

$$\iint_{\Omega} f_x \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega^+} f \, dy, \quad (16.2)$$

$$\iint_{\Omega} f_y \, dx \, dy = - \int_{\partial\Omega^+} f \, dx. \quad (16.3)$$

#### Dimostrazione

Supponiamo che  $\Omega$  sia un dominio semplice rispetto a  $x$  (altrimenti scambiamo  $x$  con  $y$ ):  $\Omega = \{(x, y) : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$ .

Dimostriamo prima la (16.2). Utilizzando le formule di riduzione (si veda il Paragrafo 14.2.1) si ha che

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f_x \, dx \, dy &= \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_x(x, y) \, dx = \int_c^d (f(\beta(y), y) - f(\alpha(y), y)) \, dy \\ &= \int_c^d f(\beta(y), y) \, dy + \int_d^c f(\alpha(y), y) \, dy. \end{aligned}$$

D'altra parte, ricordando l'invarianza per curve equivalenti con lo stesso verso, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} f \, dy &= \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(x, c) \cdot 0 \, dy + \int_c^d f(\beta(y), y) \cdot 1 \, dy \\ &\quad + \int_{\beta(d)}^{\alpha(d)} f(x, d) \cdot 0 \, dy + \int_d^c f(\alpha(y), y) \cdot 1 \, dy \end{aligned}$$

e quindi le due espressioni coincidono.

Dimostriamo ora la (16.3). Si osservi che, posto  $F(y) := \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx$ , si ha

$$F'(y) = f(\beta(y), y)\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) \, dx.$$

Integrando rispetto a  $y$  in  $(c, d)$  e utilizzando le formule di riduzione, si ottiene

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(\beta(y), y)\beta'(y)dy - \int_c^d f(\alpha(y), y)\alpha'(y)dy + \int \int_{\Omega} f_y,$$

ovvero, ricordando la definizione di  $F$ ,

$$- \int \int_{\Omega} f_y = \int_c^d f(\beta(y), y)\beta'(y)dy - \int_c^d f(\alpha(y), y)\alpha'(y)dy + \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f dx - \int_{\alpha(d)}^{\beta(d)} f dx.$$

D'altra parte, sempre per l'invarianza per curve equivalenti con lo stesso verso,

$$\int_{\partial\Omega^+} f dx = \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f dx + \int_c^d f(\beta(y), y)\beta'(y)dy - \int_{\alpha(d)}^{\beta(d)} f dx - \int_c^d f(\alpha(y), y)\alpha'(y)dy$$

e quindi le due espressioni coincidono.

### ESEMPIO 16.1

Si vuole calcolare l'integrale della forma differenziale  $\omega = xydx + (3x + 2y)dy$  sulla frontiera del quadrato  $\Omega = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  orientata positivamente. Si potrebbe utilizzare la definizione e parametrizzare i quattro tratti di curva (lo studente controlli). Tuttavia, è più semplice utilizzare le formule di Green:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega^+} \omega &= \int_{\partial\Omega^+} xy dx + \int_{\partial\Omega^+} (3x + 2y)dy \\ &= - \int \int_{\Omega} x dx dy + \int \int_{\Omega} 3 dx dy = \int \int_{\Omega} 3 dx dy = 12 \end{aligned}$$

(la penultima uguaglianza segue dal fatto che  $x$  è dispari e  $\Omega$  è simmetrico rispetto all'asse  $y$ ).

Le formule di Green sono vere in una classe estremamente più ampia di insiemi del piano: basti notare che se il dominio è semplice rispetto a entrambi gli assi, per provarle è sufficiente utilizzare la prima parte della dimostrazione, in cui non si usa la regolarità della frontiera (se non per dar senso alla scrittura "integrale sulla frontiera orientata", ma si potrebbe superare questo ostacolo). Trattare questo argomento ci porterebbe fuori dagli scopi del testo. Piuttosto, è importante osservare che, anche se la frontiera è regolare a tratti, le formule di Green valgono in una classe molto più ampia di insiemi, che chiamiamo *domini regolari a tratti* (si veda Figura 16.2):

### DEFINIZIONE 16.2

Un insieme misurabile  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  si dice **dominio regolare a tratti** se:

- (i)  $\Omega$  è la chiusura di un aperto connesso limitato;
- (ii)  $\partial\Omega$  è l'unione disgiunta dei sostegni di  $K$  curve di Jordan  $\gamma_k$  regolari a tratti, orientate in modo tale da percorrere  $\partial\Omega$  tenendo  $\Omega$  a sinistra.

Posto

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega := \sum_{k=1}^K \int_{\gamma_k} \omega, \quad \int_{\partial\Omega} f ds := \sum_{k=1}^K \int_{\gamma_k} f ds, \quad (16.4)$$

vale il seguente risultato:

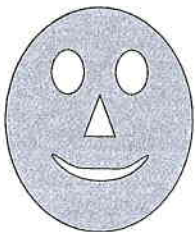


Figura 16.2



**TEOREMA 16.3**

Se  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  è un dominio regolare a tratti, allora le formule di Green (16.2) e (16.3) valgono per ogni  $f \in C^1(\Omega)$ .

Svolgiamo la dimostrazione facendo l'ulteriore ipotesi che  $\Omega$  possa essere suddiviso in un numero finito di domini semplici regolari a tratti mediante un numero finito di "tagli" paralleli agli assi (si veda Figura 16.3).

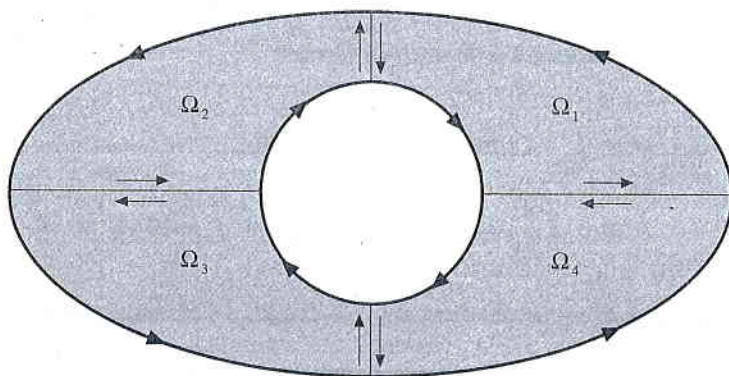
**Dimostrazione**

Supponiamo inoltre che esistano  $N$  domini semplici regolari a tratti,  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), tali che

$$a) \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i,$$

$$b) \overset{\circ}{\Omega}_i \cap \overset{\circ}{\Omega}_j = \emptyset \text{ per ogni } i \neq j,$$

$$c) \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \text{ è il sostegno di un numero finito di curve regolari per ogni } i \neq j.$$



Proviamo solo la (16.2) (l'altra si ottiene allo stesso modo). Sia  $\tilde{\gamma}_i$  una parametrizzazione di  $\partial\Omega_i$  orientata positivamente. Per l'additività dell'integrale e il Teorema 16.1,

$$\iint_{\Omega} f_x dx dy = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} f_x dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{\tilde{\gamma}_i} f dy.$$

Per (b) e (c), i tratti di  $\tilde{\gamma}_i$  che intersecano  $\partial\Omega_j$  e i tratti di  $\tilde{\gamma}_j$  che intersecano  $\partial\Omega_i$  sono equivalenti e con verso opposto (si veda Figura 16.4). Quindi il loro contributo si cancella, e nella somma a destra compaiono solo curve il cui sostegno appartiene a  $\partial\Omega$ :

$$\iint_{\Omega} f_x dx dy = \sum_{i=1}^N \iint_{\Omega_i} f_x dx dy = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma_{ij}} f dy,$$

dove

$$\gamma_{i,1} \cup \dots \cup \gamma_{i,M_i} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \quad i = 1, \dots, N.$$

Per (b), tali curve si incontrano in al più un numero finito di punti; per (a), l'unione dei loro sostegni coincide con  $\partial\Omega$ ; per (ii) della Definizione 16.2, e per la scelta dell'orientazione di  $\tilde{\gamma}_i$ , il verso delle loro parametrizzazioni coincide con quello delle curve  $\gamma_k$ . Pertanto

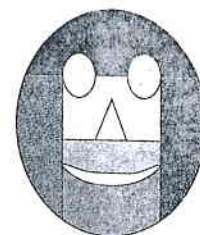


Figura 16.3

Figura 16.4

$$\iint f_x dx dy = \sum_{k=1}^K \int_{\gamma_k} f dy = \int_{\partial\Omega^+} f dy.$$

Il prossimo risultato raccoglie alcune semplici conseguenze delle formule di Green: la prima è un'utile formula per il calcolo di aree, le seconde due costituiscono il primo esempio di "formule di integrazione per parti in  $\mathbb{R}^n$ ".

#### COROLLARIO 16.4

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regolare a tratti.

(i) Per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tale che  $\lambda + \mu = 1$

$$|\Omega| = \int_{\partial\Omega^+} x dy = - \int_{\partial\Omega^+} y dx = \int_{\partial\Omega^+} \lambda x dy - \mu y dx. \quad (16.5)$$

(ii) Siano  $f, g \in C^1(\Omega)$ . Allora

$$\iint_{\Omega} fg_x dx dy = \int_{\partial\Omega^+} fg dy - \iint_{\Omega} gf_x dx dy$$

e

$$\iint_{\Omega} fg_y dx dy = - \int_{\partial\Omega^+} fg dx - \iint_{\Omega} gf_y dx dy.$$

Infatti la dimostrazione è immediata: per il punto (i) si applicano le formula di Green con  $f = x$  e  $f = y$  (l'ultima uguaglianza è una conseguenza delle prime due), mentre (ii) segue dalla formula per la derivata di un prodotto ( $(fg)_x = f_x g + fg_x$  ecc.).

#### ESEMPIO 16.2

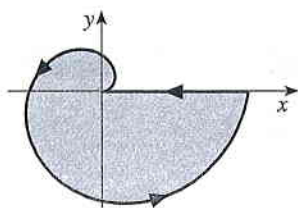


Figura 16.5

Si vuole calcolare l'area della regione  $\Omega$  delimitata dal sostegno della curva  $\gamma = (t \cos t, t \sin t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ , e dal segmento che congiunge i punti  $(0, 0)$  e  $(2\pi, 0)$ . È chiaro che conviene utilizzare la (16.5) piuttosto che il calcolo diretto dell'area. Si noti che la curva  $\gamma$  è orientata positivamente rispetto a  $\Omega$  e che il contributo sul segmento è in ogni caso nullo ( $y = 0$  oppure " $dy = 0$ "). Utilizzando per esempio  $|\Omega| = \int_{\partial\Omega^+} x dy$ , ovvero  $\mu = 0$ , si ottiene

$$|\Omega| = \int_{\partial\Omega^+} x dy = \int_0^{2\pi} t \cos t (\sin t + t \cos t) dt,$$

che non è di immediata soluzione; analogamente per  $\lambda = 0$ . Se invece si sceglie  $\lambda = \mu = 1/2$  il calcolo si semplifica drasticamente e si ottiene

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^+} (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (t \cos t (\sin t + t \cos t) - t \sin t (\cos t - t \sin t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{8\pi^3}{6}. \end{aligned}$$

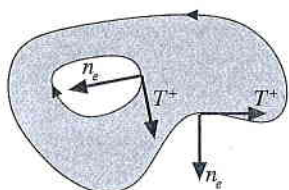


Figura 16.6 Normale esterna e vettore tangente positivo.

Se  $\Omega$  è un dominio regolare a tratti, su  $\partial\Omega$  è definito, tranne al più in un numero finito di punti, il **vettore tangente positivo**  $\mathbf{T}^+$ : se  $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$  è una delle curve che percorre  $\partial\Omega$ , ed è regolare in  $t \in (a, b)$  e  $\gamma(t) = \mathbf{x}$ , si pone

$$\mathbf{T}^+(\mathbf{x}) = \frac{(x'(t), y'(t))}{\|\gamma'(t)\|}. \quad (16.6)$$

Il vettore  $\mathbf{n}_e$  ortogonale a  $\mathbf{T}^+$  che punta verso l'esterno di  $\Omega$  si dice **normale esterna** a  $\Omega$ :

$$\mathbf{n}_e(\mathbf{x}) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\boldsymbol{\gamma}'(t)\|}. \quad (16.7)$$

Siamo ora in grado di formulare il primo dei due risultati fondamentali preannunciati nell'introduzione.

### TEOREMA 16.5 Teorema della divergenza nel piano

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regolare a tratti e sia  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  un campo vettoriale a valori in  $\mathbb{R}^2$ , limitato e di classe  $C^1$  in  $\Omega$ . Allora

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle ds = \int_{\partial\Omega^+} v_1 dy - v_2 dx.$$

### Dimostrazione

Sia  $[a, b] \ni t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$  una delle curve che percorrono  $\partial\Omega$ :

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\gamma}} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle ds &= \int_a^b \langle \mathbf{v}(\boldsymbol{\gamma}(t)), \mathbf{n}_e(\boldsymbol{\gamma}(t)) \rangle \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| dt && \text{(per la def. di integrale} \\ & && \text{curvilineo di I specie)} \\ &= \int_a^b (v_1(\boldsymbol{\gamma}(t))y'(\boldsymbol{\gamma}(t)) - v_2(\boldsymbol{\gamma}(t))x'(\boldsymbol{\gamma}(t))), dt && \text{(per la def. di } \mathbf{n}_e) \\ &= \int_{\boldsymbol{\gamma}} v_1 dy - v_2 dx && \text{(per la def. di integrale curvilineo di II specie)} \end{aligned}$$

Poiché questa identità vale per ciascuna delle curve  $\boldsymbol{\gamma}_k$  che percorrono  $\partial\Omega$ , sommando rispetto a  $k$  e utilizzando le formule di Green si ottiene

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle ds = \int_{\partial\Omega^+} v_1 dy - v_2 dx \stackrel{(16.2)-(16.3)}{=} \iint_{\Omega} ((v_1)_x + (v_2)_y) dx dy$$

e l'integrando a destra coincide con la divergenza di  $\mathbf{v}$ .

Si vuole calcolare

$$\int_{\boldsymbol{\gamma}} (\cos x + 6y^2) dx + (3x - e^{-y^2}) dy, \quad \text{dove } \boldsymbol{\gamma}(t) = (\sin t, \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

La curva  $\boldsymbol{\gamma}$  è ovviamente una curva di Jordan il cui interno è il cerchio di raggio 1,  $B_1$ , e  $\boldsymbol{\gamma}$  è orientata negativamente. Perciò

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{\gamma}} (\cos x + 6y^2) dx + (3x - e^{-y^2}) dy &= - \iint_{B_1} \operatorname{div} (3x - e^{-y^2}, -\cos x - 6y^2) dx dy \\ &= - \iint_{B_1} (3 - 12y) dx dy = -3|B_1| = -3\pi. \end{aligned}$$

Si noti che il calcolo diretto sarebbe risultato più laborioso.

### ESEMPIO 16.3

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema della divergenza (con  $(v_2, -v_1)$  al posto di  $(v_1, v_2)$ ) si ottiene ciò che nel Paragrafo 16.4 sarà interpretato come il *teorema del rotore nel piano*:

### TEOREMA 16.6 Teorema del rotore nel piano

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio regolare a tratti e sia  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  un campo vettoriale a valori in  $\mathbb{R}^2$ , limitato e di classe  $C^1$  in  $\Omega$ . Allora



$$\iint_{\Omega} \langle \text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{e}_3 \rangle dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle ds = \int_{\partial\Omega^+} v_1 dx + v_2 dy.$$

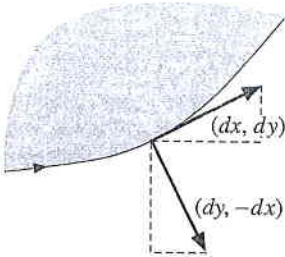


Figura 16.7

Le uguaglianze tra integrali curvilinei di prima e seconda specie, che abbiamo scritto esplicitamente nei due enunciati precedenti, sono sintetizzate in modo formale dalle uguaglianze

$$\mathbf{n}_e ds = (dy, -dx), \quad \mathbf{T}^+ ds = (dx, dy) \quad (16.8)$$

(si veda Figura 16.7). Nei prossimi paragrafi motiveremo la nomenclatura normalmente utilizzata per i due integrali curvilinei che compaiono nei teoremi della divergenza e del rotore:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle ds = \text{flusso di } \mathbf{v} \text{ uscente da } \Omega$$

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle ds = \text{circuitazione di } \mathbf{v} \text{ lungo } \partial\Omega.$$

**ESEMPIO 16.4**

Sia  $\Omega = B(0, 1)$  in  $\mathbb{R}^2$ . Si vogliono calcolare il flusso uscente da  $\Omega$  e la circuitazione lungo  $\partial\Omega$  del campo vettoriale  $\mathbf{v} = (xy, y^2)$ . Applicando i teoremi della divergenza e del rotore, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle ds &= \iint_{\Omega} \left( (xy)_x + (y^2)_y \right) dx dy = \iint_{\Omega} 3y dx dy = 0 \\ \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle ds &= \iint_{\Omega} \left( (y^2)_x - (xy)_y \right) dx dy = \iint_{\Omega} -x dx dy = 0. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 16.2**

Calcolare l'integrale di  $\omega$  su  $\partial\Omega^+$  nei seguenti casi:

- a)  $\omega = (x + \arctg(e^{y^2})) dy$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1, -x \leq y \leq 1\}$ ;  
 b)  $\omega = (x - y^3) dx + (y^3 + x^3) dy$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**ESERCIZIO 16.3**

Calcolare l'area della regione  $\Omega$  delimitata dalle seguenti curve:

- a)  $\gamma(t) = ((1 + \sin t) \cos t, -(1 + \sin t) \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;  
 b)  $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

**ESERCIZIO 16.4**

Calcolare il flusso di  $\mathbf{v}$  uscente da  $\Omega$  nei seguenti casi:

- a)  $\mathbf{v} = (y^3 + x^3, y^3 - e^x)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0\}$ ;  
 b)  $\mathbf{v} = (x + y^2 - 3, y + x^2 - 6)$ ,  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0\}$ .

**16.3 Il teorema della divergenza nello spazio**

Per generalizzare il teorema della divergenza agli integrali tripli, è necessario precisare la nozione di *normale esterna* a un insieme  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $\partial\Omega$  consista di superfici (elementari o composte) orientabili e senza bordo a due a due disgiunte (si pensi per esempio alla corona sferica  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq \|\mathbf{x}\| \leq 3\}$  la cui frontiera è formata dalle due sfere di raggio 2 e 3). Sia  $\Sigma$  una di esse: allora su  $\Sigma$  è ben definita

e continua (tranne al più sul sostegno di un numero finito di curve semplici, gli eventuali "spigoli" di  $\Sigma$ ) la normale  $\mathbf{n}^+$  e la sua opposta  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$ . La **normale esterna**  $\mathbf{n}_e$  a  $\Omega$  su  $\Sigma$  è, tra le due, quella che "punta verso l'esterno" di  $\Omega$ , ovvero tale che

$$\mathbf{x} + t\mathbf{n}_e \notin \Omega \quad \text{per ogni } t > 0 \text{ sufficientemente piccolo.}$$

Quindi  $\mathbf{n}_e$  induce un'orientazione su  $\Sigma$ : nel caso di superfici elementari è ovvio, ma è vero anche per superfici composte (anche se non lo dimostriamo; tale questione è legata all'osservazione successiva alla Definizione 15.11). Si può perciò dare, in analogia con i domini piani, la seguente definizione:

**DEFINIZIONE 16.7**

Un insieme misurabile  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  si dice **regolare a tratti** se:

- (i)  $\Omega$  è la chiusura di un aperto connesso limitato;
- (ii)  $\partial\Omega$  è l'unione disgiunta di  $K$  superfici orientabili  $\Sigma_k^+$ , senza bordo e la cui l'area è ben definita, orientate secondo la normale esterna.

Posto

$$\int_{\partial\Omega} f dS := \sum_{k=1}^K \int_{\Sigma_k} f dS, \quad (16.9)$$

è possibile dimostrare, ma non lo faremo, che se  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  è dominio regolare a tratti, allora vale il *teorema della divergenza*, nel senso che

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle dS \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (16.10)$$

La verifica è particolarmente semplice nel caso in cui  $\Omega$  è anche un dominio semplice rispetto a tutti gli assi:

**TEOREMA 16.8**

Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un dominio semplice rispetto a tutti gli assi e regolare a tratti. Allora vale la (16.10).

**Dimostrazione**

Si indica con  $(\mathbf{n}_e)_i \in \mathbb{R}$  l' $i$ -esima componente di  $\mathbf{n}_e$ :  $\mathbf{n}_e = ((\mathbf{n}_e)_1, (\mathbf{n}_e)_2, (\mathbf{n}_e)_3)$ . Supponiamo di aver dimostrato le tre formule di Green nella forma seguente:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f_x dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} f (\mathbf{n}_e)_1 dS, \\ \iiint_{\Omega} f_y dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} f (\mathbf{n}_e)_2 dS, \\ \iiint_{\Omega} f_z dx dy dz &= \int_{\partial\Omega} f (\mathbf{n}_e)_3 dS. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Sia  $\mathbf{v}_e = (v_1, v_2, v_3)$ : Sostituendo  $f = v_1$  nella prima,  $f = v_2$  nella seconda,  $f = v_3$  nella terza, e sommando, si ottiene la (16.10). Restano quindi da dimostrare le tre uguaglianze. Si dimostra solo la (16.11): essendo  $\Omega$  semplice rispetto a tutti gli assi, la dimostrazione delle altre due è identica. Sia quindi

$$\Omega = \{(x, y, z) : \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y), (x, y) \in D\}$$

dove  $D$  è chiuso e misurabile e  $\alpha, \beta \in C(D)$ . Allora, integrando per fili,

$$\iiint_{\Omega} f_z = \iint_D f(x, y, \beta(x, y)) dx dy - \iint_D f(x, y, \alpha(x, y)) dx dy.$$

Si noti che sulla superficie "superiore"  $\Sigma_1 := \{(x, y, \beta(x, y)) : (x, y) \in D\}$

$$\mathbf{n}_e = \frac{(-\beta_x, -\beta_y, 1)}{\sqrt{1 + \beta_x^2 + \beta_y^2}}$$

(si veda anche la (15.11)), quindi

$$\iint_D f(x, y, \beta(x, y)) dx dy = \iint_{\Sigma_1} f(\mathbf{n}_e)_3 dS.$$

Analogamente, sulla superficie "inferiore"  $\Sigma_2 := \{(x, y, \alpha(x, y)) : (x, y) \in D\}$

$$\mathbf{n}_e = \frac{(\alpha_x, \alpha_y, -1)}{\sqrt{1 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2}}$$

e

$$- \iint_D f(x, y, \alpha(x, y)) dx dy = \iint_{\Sigma_2} f(\mathbf{n}_e)_3 dS.$$

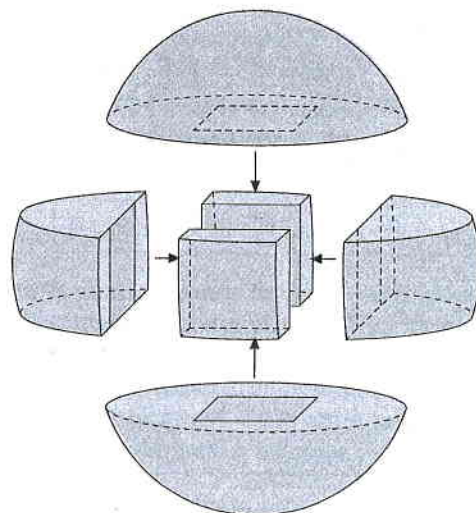
Poiché  $(\mathbf{n}_e)_3 = 0$  sulle (eventuali) parti verticali di  $\partial\Omega$  abbiamo trovato la (16.11).

Con argomenti simili a quelli usati nel piano, la dimostrazione della validità di (16.10) si estende a un dominio regolare a tratti che può essere suddiviso in un numero finito di domini semplici rispetto a tutti gli assi attraverso un numero finito di "tagli" paralleli ai piani coordinati  $x = y = 0$ ,  $x = z = 0$ ,  $y = z = 0$ . È opportuno illustrare il ragionamento che sta alla base di tale affermazione attraverso un esempio.

#### ESEMPIO 16.5

Siano  $B_4 \subset \mathbb{R}^3$  la palla di raggio 4 e  $\Omega_0$  il cubo di lato 2, entrambi centrati nell'origine. Sia  $\Omega$  la chiusura di  $B_4 \setminus \Omega_0$ . Allora  $\partial\Omega$  consiste di due superfici disgiunte, senza bordo e orientabili:  $\partial\Omega_0 \cup \partial B_4$ . Su  $\partial B_4$  la normale esterna a  $\Omega$  è quella esterna alla palla  $B_4$ , mentre su  $\partial\Omega_0$  è quella interna al cubo  $\Omega_0$ .

Utilizziamo come tagli porzioni di piano, come indicato in Figura 16.8, per decomporre  $\Omega$  in 6 domini semplici rispetto a tutti gli assi e regolari a tratti. Per il Teorema 16.14, a ognuno di essi si può applicare il Teorema 16.8: sommando, gli integrali sulle superfici elementari comuni a due distinti domini semplici si elidono, essendo i due vettori normali esterni opposti. Si conclude che vale la (16.10).



**Figura 16.8** Suddivisione del dominio  $\Omega$  dell'Esempio 16.5: in colore il bordo di  $\Omega$ .



Come anticipato nel capitolo 15, l'integrale su  $\partial\Omega$  nella (16.10) rappresenta il **flusso di  $\mathbf{v}$  uscente da  $\Omega$** . Secondo il teorema della divergenza, quindi, l'integrale di  $\text{div } \mathbf{v}$  in un contenitore  $\Omega$  è uguale al flusso di  $\mathbf{v}$  uscente da  $\Omega$ ; questa interpretazione è alla base della sua grande rilevanza applicativa.

Siano  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  la densità e la velocità in  $\mathbf{x} \in X$  al tempo  $t \in (t_1, t_2)$  di un fluido contenuto in un contenitore  $X$ , un insieme aperto in  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  siano di classe  $C^1$ . Sia  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  la palla di raggio  $\varepsilon > 0$  e centro  $\mathbf{x}_0 \in X$ . Allora

$$M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t) := \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

è la massa del fluido contenuto in  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  al tempo  $t$ .

Posto  $\text{div}(\rho\mathbf{v}) = (\rho v_1)_x + (\rho v_2)_y + (\rho v_3)_z$ , ovvero la divergenza riguarda le sole variabili spaziali  $x, y$  e  $z$  (e non quella temporale,  $t$ ), si ha, per il teorema delle divergenze, che

$$\iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \langle \rho\mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle \, dS.$$

Integrando nell'intervallo temporale  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ , con  $t_0 \in (t_1, t_2)$  ed  $\varepsilon > 0$  tale che  $t_0 \pm \varepsilon \in (t_1, t_2)$ , a destra dell'uguaglianza si ottiene la massa totale che esce da  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  attraverso  $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  tra i tempi  $t_0 - \varepsilon$  e  $t_0 + \varepsilon$ . Chiaramente questa quantità è uguale a  $M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0 + \varepsilon) - M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0 - \varepsilon)$ , quindi

$$\int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \left( \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \right) dt = M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0 + \varepsilon) - M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0 - \varepsilon).$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0 + \varepsilon) - M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t_0 - \varepsilon) &= \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \frac{\partial M_\varepsilon(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \, dt \\ &= \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \left( \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \rho_t(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} \right) dt \end{aligned}$$

dove abbiamo scambiato l'operazione di integrazione rispetto a  $\mathbf{x}$  e quella di derivazione rispetto a  $t$  (si confronti con il Teorema 11.10). Dividendo per la lunghezza dell'intervallo temporale,  $2\varepsilon$ , e per il volume di  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ , si ottiene quindi

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} \left( \frac{1}{|B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)|} \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} (\rho_t(\mathbf{x}, t) - \text{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t))) \, d\mathbf{x} \right) dt = 0$$

per ogni  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo. L'integrale rappresenta la media della funzione integranda nell'insieme  $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ ; quindi, essendo l'integranda una funzione continua, converge a  $\rho_t(\mathbf{x}_0, t_0) - \text{div}(\rho(\mathbf{x}_0, t_0)\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t_0))$  per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  (si confronti con il (v) del Teorema 14.5), ovvero  $\rho_t - \text{div}(\rho\mathbf{v})$  si annulla in  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Per l'arbitrarietà di  $\mathbf{x}_0$  e  $t_0$ , abbiamo trovato che  $\rho$  e  $\mathbf{v}$  verificano l'equazione

$$\rho_t - \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } X \times (t_1, t_2)$$

detta anche **equazione di continuità** o **legge di conservazione di massa**.

Si noti che in questo esempio emergono in modo del tutto naturale integrali in  $\mathbb{R}^4$ , che per semplicità espositiva non sono stati trattati esplicitamente nel Capitolo 14. Tuttavia, come già osservato, non vi è alcuna differenza sostanziale; in particolare i due risultati cui si è fatto riferimento (teoremi di derivazione sotto integrale e della media integrale), seppur enunciati rispettivamente per integrali semplici e integrali doppi, restano validi in  $\mathbb{R}^n$ .

Cerchiamo di dare un'interpretazione "locale" della divergenza di un campo vettoriale di classe  $C^1(\Omega)$ . Per ogni  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  e  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo

### ESEMPIO 16.6

Equazione di continuità

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)|} \iiint_{B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \frac{\text{flusso di } \mathbf{v} \text{ uscente da } B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)}{\text{volume di } B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \quad (16.12)$$

e poiché la quantità a sinistra converge a  $\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0))$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si potrebbe dire che  $\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0))$  rappresenta la densità di flusso “uscente da  $\mathbf{x}_0$ ” per unità di volume.

Tale interpretazione, anche se poco precisa se non si ricorda la (16.12), è utile quando si definiscono matematicamente concetti fisici o quando, viceversa, si devono interpretare fisicamente certe equazioni matematiche. Per esempio, un *fluido incompressibile* si definisce matematicamente richiedendo che la sua velocità  $\mathbf{v}$  verifichi l'equazione  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

**ESEMPIO 16.7**

Si vuole calcolare il flusso del vettore  $\mathbf{v} = (x^2, y^2, z^2)$  uscente dal tetraedro  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ , ovvero  $\iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle dS$ .  
Applichiamo il teorema della divergenza e utilizziamo le formule di riduzione:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n}_e \rangle dS &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(x^2, y^2, z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2x + 2y + 2z) \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 16.5**

Determinare il flusso di  $\mathbf{v}$  uscente da  $\Omega$  nei seguenti casi:

- a)  $\mathbf{v} = \nabla(x^2 + y^2) + z^2$ ,  $\Omega$  un qualunque dominio regolare a tratti di area 1;  
 b)  $\mathbf{v} = (x^2 + e^y, y^2, -2z)$ ,  $\Omega = B_1$ ;  
 c)  $\mathbf{v} = (x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 1\}$ .

**16.4 Il teorema del rotore****Dimostrazione****TEOREMA 16.9** Teorema del rotore o di Stokes nello spazio

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  aperto e sia  $\Sigma \subset \Omega$  una superficie orientabile la cui area è ben definita. Supponiamo che il bordo orientato  $\partial\Sigma^+$  sia l'unione disgiunta dei sostegni di un numero finito di curve regolari a tratti, e sia  $\mathbf{T}^+$  il corrispondente versore tangente. Se  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  è di classe  $C^1$  in  $\Omega$ , allora

$$\iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle dS = \int_{\partial\Sigma^+} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle ds = \int_{\partial\Sigma^+} (v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz).$$

Nella dimostrazione, in rete, si tratta solo il caso delle superfici elementari regolari e invertibili. Ricordiamo che il Teorema 16.6, il teorema del rotore nel piano, è un caso particolare del Teorema 16.9.

L'integrale curvilineo su  $\partial\Omega$  ( $\partial\Sigma$ ) che compare nel teorema del rotore nel piano (nello spazio) si dice **circuitazione di  $\mathbf{v}$  lungo  $\partial\Omega$  ( $\partial\Sigma$ )**.

Come nel caso della divergenza, si può dare un'interpretazione locale al rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  (pensato per esempio come una velocità) di classe  $C^1(\Omega)$ . Infatti, dati  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ , un versore  $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$  e  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo, sia  $D_\varepsilon \subset \Omega$  il disco ortogonale a  $\mathbf{n}$ , di centro  $\mathbf{x}_0$  e di raggio  $\varepsilon$ , orientato secondo il verso di  $\mathbf{n}$  (cioè  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+$ ). Allora

$$\frac{1}{|D_\varepsilon|} \iint_{D_\varepsilon} \langle \operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle dS = \frac{\text{circuitazione di } \mathbf{v} \text{ lungo } \partial D_\varepsilon^+}{\text{area di } D_\varepsilon} \quad (16.13)$$

e poiché la quantità a sinistra converge a  $\langle \text{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)), \mathbf{n} \rangle$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si potrebbe dire che

$\langle \text{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)), \mathbf{n} \rangle$  rappresenta la densità di circuitazione (orientata) ortogonale a  $\mathbf{n}$  attorno a  $\mathbf{x}_0$  per unità di area.

Sia questa interpretazione del rotore sia quella, data in precedenza, della divergenza, fanno intuire la centralità degli “operatori differenziali”  $\text{div}$  e  $\text{rot}$  nella descrizione matematica di molti fenomeni in diversi ambiti della fisica (ma non solo) quali la fluidodinamica (descrizione di vortici) e l'elettromagnetismo (circuitazione di correnti, generazione di campi elettromagnetici, vortici in superconduttività ecc.). Per esempio, divergenza e rotore compaiono nella descrizione dell'interazione tra campo elettrico e magnetico, le equazioni di Maxwell.

Data la curva  $\gamma(t) = (-1, 2 \cos t, 3 \sin t)$  per  $t \in [0, 2\pi]$  si vuole determinare la circuitazione lungo  $\gamma$  del campo vettoriale  $\mathbf{v}(x, y, z) = (yz^3, xy^2, xz)$ :

$$\oint_{\gamma} xy^2 dy + xz dz = \int_0^{2\pi} \left( -(2 \cos t)^2 (-2 \sin t) - (3 \sin t)(3 \cos t) \right) dt = 0.$$

Si noti che lo stesso risultato segue dal teorema di Stokes: sia  $\Sigma$  la superficie regolare e “piana” contenuta nel piano  $x = -1$  e limitata dal sostegno della curva  $\gamma$ . Allora  $\mathbf{n}^+ = (1, 0, 0)$  in ogni punto di  $\Sigma$  e poiché

$$\text{rot } \mathbf{v} = (0, 3yz^2 - z, y^2 - z^3) \quad \text{per } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

si ha che  $\langle \text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle$  si annulla in  $\Sigma$  e il risultato segue immediatamente.

Si noti che il secondo metodo fornisce come risultato 0 per qualsiasi curva chiusa e regolare  $\gamma$  contenuta in un piano di equazione  $x = x_0$  ( $x_0 \in \mathbb{R}$ ).

## ESEMPIO 16.8

Si vuole calcolare la circuitazione di  $\mathbf{v} = (x, y^2, xz)$  lungo  $\partial\Sigma^+$ , dove  $\Sigma^+$  è la porzione di sfera di raggio  $R$  contenuta nel primo ottante con orientazione indotta dalla normale esterna.

Applichiamo il teorema del rotore. Si ha  $\text{rot } \mathbf{v} = (0, -z, 0)$  e  $\mathbf{n}^+ = (x, y, z)/R$ , per cui  $\langle \text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{n}^+ \rangle = -yz/R$ . Quindi, utilizzando gli strumenti del Paragrafo 15.2 (si confronti in particolare l'Esempio 15.6),

$$\int_{\partial\Sigma^+} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}^+ \rangle ds = -\frac{1}{R} \int_{\Sigma} yz \, dS = -R^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin u \sin^2 v \cos v \, du \, dv = -\frac{R^3}{3}.$$

Naturalmente è anche possibile procedere con il calcolo diretto di  $\int_{\partial\Sigma^+} x \, dx + y^2 \, dy + xz \, dz$ , parametrizzando opportunamente il bordo di  $\Sigma$ ; lo studente controlli (prestando attenzione alle orientazioni).

## ESEMPIO 16.9

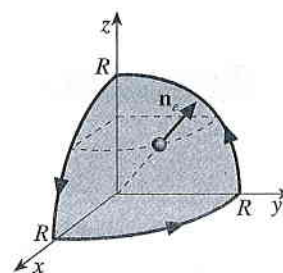


Figura 16.9

Calcolare la circuitazione di  $\mathbf{v}$  lungo  $\partial\Sigma^+$  nei seguenti casi:

- $\mathbf{v} = (-y, x^2, e^{z^2})$ ,  $\Sigma^+$  è la porzione del paraboloido di equazione  $z = 9 - x^2 - y^2$  contenuta nel semispazio  $z \geq 0$  con  $\langle \mathbf{n}^+, \mathbf{e}_3 \rangle > 0$ ;
- $\mathbf{v} = (y, z, x)$ ,  $\Sigma^+$  è l'intersezione tra il cilindro di equazione  $x^2 + y^2 \leq 2$  e il piano di equazione  $x + y + z = 0$  orientata verso l'alto.

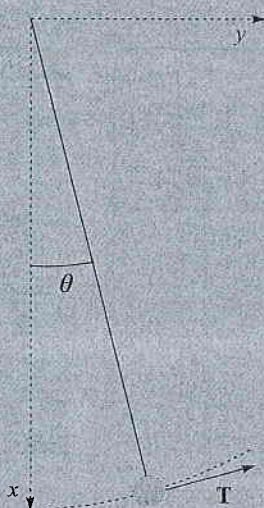
## ESERCIZIO 16.6



## FILO ROSSO

## Risonanze

La risonanza è la tendenza di un sistema fisico a oscillare con ampiezza maggiore vicino a certe frequenze. A queste *frequenze di risonanza* una forza esterna anche molto piccola può causare oscillazioni di grande ampiezza. Il concetto è ben noto: per esempio un diapason, che produce onde alla frequenza di 440 Hz, fa vibrare un identico diapason posto nelle vicinanze con la stessa frequenza. La risonanza può anche avere delle conseguenze fatali. Nel 1940 un forte vento causò una risonanza meccanica che portò alla distruzione del ponte di Tacoma (non per caso i soldati hanno l'ordine di interrompere la marcia quando attraversano un ponte...). Vedremo altri esempi al termine di questo filo rosso.



La matematica aiuta a capire, approfondire e quantificare il fenomeno della risonanza. Consideriamo per esempio un pendolo idealizzato. Una massa puntiforme  $m$  è imperniata ad un punto mediante un'asta rigida e senza massa di lunghezza  $R$ ; il moto è bidimensionale (la massa in figura non attraversa questa pagina), quindi la massa si muove lungo la circonferenza di raggio  $R$ : descriviamo la sua posizione al tempo  $t$  mediante la curva  $\gamma(t) = (R \cos \theta(t), R \sin \theta(t))$ , quindi l'accelerazione  $\mathbf{a}(t)$  è

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \gamma''(t) \\ &= \underbrace{R \theta''(-\sin \theta, \cos \theta)}_{\text{componente tangente}} - \underbrace{R (\theta')^2 (\cos \theta, \sin \theta)}_{\text{componente normale}}. \end{aligned}$$

D'altra parte, la massa è soggetta alla forza di gravità,  $\mathbf{F} = (mg, 0)$ . Per la Legge di Newton,

$$\langle m\mathbf{a} - \mathbf{F}, \mathbf{T} \rangle = 0 \Leftrightarrow \theta''(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0,$$

dove  $\omega_0^2 = g/R$  e  $\mathbf{T} = (\sin \theta, \cos \theta)$ .

Si tratta di una *equazione differenziale ordinaria*, l'oggetto di studio di questo capitolo. Supponiamo che il pendolo compia solo piccole oscillazioni attorno alla configurazione di *equilibrio stabile*,  $\theta = 0$  (si veda il Paragrafo 17.7): in tal caso  $|\theta| \ll 1$ , ovvero  $\sin \theta \sim \theta$ , e in prima approssimazione (ovvero *linearizzando* il problema, si veda ancora il Paragrafo 17.7) possiamo considerare il moto come descritto dall'equazione

$$\theta''(t) + \omega_0^2 \theta(t) = 0, \quad (*)$$

una *equazione del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti costanti*. Vedremo nel Paragrafo 17.3 che, assegnate posizione e velocità iniziali, ad esempio  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\theta'(0) = 0$ , l'equazione ammette un'unica soluzione,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Perciò il pendolo idealizzato oscilla periodicamente, con *frequenza naturale*  $\omega_0$  e periodo  $2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{R/g}$ : abbiamo cioè costruito un "orologio a gravità". In particolare il periodo è più breve se l'asta è più corta (si pensi al metronomo, per cui valgono considerazioni identiche) o se la gravità è più forte (un semplice metodo di verifica dell'ellitticità del pianeta Terra).

Per rendere meno idealizzata la situazione si deve tener conto della resistenza (meccanica, nel perno, e aerodinamica). Il modo più semplice è suppor-



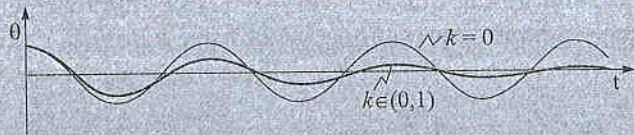
re una resistenza proporzionale alla velocità; in tal modo si ottiene

$$\theta''(t) + 2k\omega_0\theta'(t) + \omega_0^2\theta(t) = 0, \quad (\Delta)$$

dove  $k \geq 0$  è una costante adimensionale. Se  $k < 1$ , e con le stesse condizioni iniziali di prima, l'unica soluzione è

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-k\omega_0 t} \left( \cos(\omega_k t) + \frac{k\omega_0}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \right),$$

$$\omega_k = \omega_0 \sqrt{1 - k^2}.$$



Come si vede, la soluzione oscilla intorno a  $\theta = 0$  (se invece  $k \geq 1$  la soluzione non oscilla, si pensi a un pendolo immerso nel miele, si veda l'Esercizio 17.8). La frequenza  $\omega_k$  del sistema è diversa, ma ancora costante, e il moto è *smorzato* dalla funzione esponenziale: ad ogni ciclo, l'angolo massimo raggiunto dal pendolo è più piccolo del precedente.

Supponiamo ora di applicare una *forza esterna*, per esempio attraverso un motore collegato al perno. Si ottengono allora equazioni del tipo

$$\theta''(t) + 2k\omega_0\theta'(t) + \omega_0^2\theta(t) = g(t). \quad (\square)$$

Se si applica una forza periodica, ad esempio  $g(t) = f_0 \sin(\omega t)$  ( $f_0, \omega \in \mathbb{R}$ ), allora la *soluzione generale* è data da

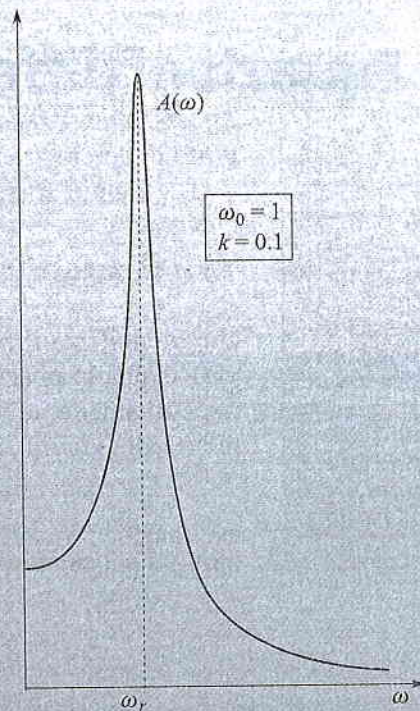
$$\theta(t) = \underbrace{e^{-k\omega_0 t} (c_1 \cos(\omega_k t) + c_2 \sin(\omega_k t))}_{\text{transitorio}} - \underbrace{f_0 A \sin(\omega t + \delta)}_{\text{regime}},$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega_0^2\omega^2}},$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono opportune costanti di integrazione e  $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$  (si veda l'Esercizio 17.8). Come si vede, per tempi lunghi la parte transitoria decade a zero, e l'unico contributo che sopravvive è quello dovuto alla forza esterna. La fase  $\delta$  e, come si vede, l'ampiezza  $f_0 A$  delle oscillazioni dipendono dalla frequenza naturale  $\omega_0$ . In particolare, un semplice studio di funzione mostra che, al variare di  $\omega$ ,

$$\max_{\omega \in (0, +\infty)} A(\omega) = A(\omega_r) = \sqrt{1 - k^2} / (2k),$$

$$\omega_r := \omega_0 \sqrt{1 - 2k^2}.$$



Si noti che  $A(\omega_r) \rightarrow +\infty$  per  $k \rightarrow 0^+$ : quando la resistenza è piccola, l'ampiezza delle oscillazioni è molto grande se la frequenza della forza applicata è vicino a  $\omega_r$ :  $\omega_r$  è la *frequenza di risonanza* del sistema. Perciò, se  $\omega \approx \omega_r$  il pendolo inizierà a roteare pericolosamente (violando fra l'altro l'ipotesi di piccole oscillazioni). D'altra parte ciò può essere vantaggioso: in regime di risonanza una forza molto piccola,  $f_0 \ll 1$ , è sufficiente per generare oscillazioni di ampiezza ragionevole.

Le equazioni viste finora descrivono più in generale un *oscillatore armonico* (\*), che può essere smorzato ( $\Delta$ ) e forzato ( $\square$ ). Altri esempi classici di oscillatore armonico sono le molle, i sistemi acustici e i circuiti di tipo RLC (resistenza-induttanza-capacità); in quest'ultimo caso  $\theta$  rappresenta la differenza di potenziale ai capi di un condensatore e la funzione  $g$  è una forza elettromotrice data (nel caso particolare appena visto, un generatore di corrente alternata). Sul sito internet del testo è disponibile il collegamento con alcuni filmati che illustrano il fenomeno di risonanza in questi tre casi: un motore che fa muovere una molla operando a frequenze diverse (risonanza meccanica, come quella del pendolo), il classico esempio del bicchiere che si disintegra quando "entra in risonanza" con un suono esterno (risonanza acustica), e un circuito RLC che accende una lampadina (R) sincronizzando opportunamente capacità e induttanza (risonanza elettromagnetica).



## Guida

Per la lettura di questo capitolo sono sufficienti le nozioni acquisite fino al Capitolo 8 e pochi concetti di base del calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali (continuità e derivate parziali; la nozione di funzione lipschitziana è richiamata esplicitamente). Fa eccezione il Paragrafo 17.5.4 (metodo di Frobenius ed equazioni di Bessel) che richiede la conoscenza delle serie di potenze (Paragrafo 9.3) e che comunque è opzionale.

Gran parte dei fenomeni fisici e ingegneristici (ma anche chimici, biologici, economici...) sono descritti da *equazioni differenziali*: si tratta di equazioni la cui incognita è una funzione e in cui compaiono le derivate della funzione incognita. Nei casi in cui l'incognita è funzione di una sola variabile indipendente, si parla di *equazioni differenziali ordinarie* (EDO), che sono l'oggetto di questo capitolo (spesso nel seguito parleremo per brevità di "equazioni differenziali" o di "equazioni").

L'esempio forse più familiare di equazione differenziale ordinaria è la legge di Newton,

$$my''(t) = F(t, y(t), y'(t)) \quad (17.1)$$

che modella il moto di un punto materiale di massa  $m$  lungo una guida verticale:  $y(t)$  indica la posizione del punto sulla guida, quindi  $y'(t)$  e  $y''(t)$  ne rappresentano rispettivamente la velocità e l'accelerazione. Per esempio, se la forza è dovuta unicamente alla gravità, si ha

$$my''(t) = -mg \quad (17.2)$$

(con  $g$  l'accelerazione di gravità) che si può integrare elementarmente ottenendo

$$y'(t) = -gt + A \quad \text{e} \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + At + B.$$

Le costanti  $A$  e  $B$  dipendono da altre condizioni che caratterizzano il moto; per esempio se la particella è inizialmente ferma in  $y = 0$ , allora  $y(0) = y'(0) = 0$  da cui  $A = B = 0$ .

Un altro esempio classico di EDO è il decadimento di una sostanza radioattiva. La radioattività  $y(t)$  di una sostanza decresce col tempo in modo proporzionale alla radioattività stessa:

$$y'(t) = -ay(t) \quad (17.3)$$

(la costante di proporzionalità  $a > 0$  dipende dalla sostanza in esame).

In generale un'equazione differenziale è scritta nella forma

$$f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (17.4)$$

dove  $f$  è una funzione definita in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+2}$ , a valori in  $\mathbb{R}$ : per esempio, nella (17.1)  $f$  è data da

$$f(t, y, y', y'') = my'' - F(t, y, y').$$

Vi sono vari modi per classificare le equazioni differenziali; a questo scopo ci riferiamo alla forma generale (17.4). Anzitutto si individua l'**ordine**,  $n$ , ovvero l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita che compaiono nell'equazione: le (17.1) e (17.2) sono del secondo ordine, mentre la (17.3) è del primo ordine. Un'equazione si dice **lineare** se  $f$  è lineare rispetto a  $y, \dots, y^{(n)}$ : le (17.2) e (17.3) sono lineari, mentre la (17.1) non lo è in generale. Un'equazione si dice **omogenea** se lo è la funzione  $f$  rispetto a  $y, \dots, y^{(n)}$ , ovvero se esiste  $k \in \mathbb{R}$  tale che

$$f(t, \lambda y, \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k f(t, y, \dots, y^{(n)}) \quad \text{per ogni } \lambda > 0.$$

Per esempio, la (17.3) è omogenea (con  $k = 1$ ). Un'equazione si dice **autonoma** se  $f$  non dipende da  $t$ , e si dice **in forma normale** se la derivata di ordine massimo è determinata esplicitamente in funzione delle altre, ovvero se

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$



Oltre a una singola equazione, spesso nelle applicazioni compaiono *sistemi di equazioni differenziali ordinarie*: per esempio, una reazione chimica tra due sostanze è descritta dalle rispettive concentrazioni  $y(t)$  e  $z(t)$ , collegate tra loro da due equazioni.

## 17.1 Equazioni lineari del primo ordine

Dati un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e due funzioni  $a, b \in C(I)$ , consideriamo la seguente equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$y' = ay + b \quad \text{in } I. \quad (17.5)$$

Una funzione  $y \in C^1(I)$  si dice soluzione di (17.5) se

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \quad \text{per } x \in I. \quad (17.6)$$

In generale la (17.5) avrà infinite soluzioni; per esempio, tutte le funzioni costanti sono soluzioni dell'equazione  $y' = 0$  in  $\mathbb{R}$ . Per selezionarne una occorre dunque imporre delle condizioni ulteriori. Dati  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ , una soluzione  $y$  di (17.5) che verifica  $y(x_0) = y_0$  si dice soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ay + b & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (17.7)$$

L'equazione (17.5) è omogenea se  $b(x) = 0$  per ogni  $x \in I$  e non omogenea altrimenti. L'equazione

$$y' = ay \quad \text{in } I \quad (17.8)$$

si dice **equazione omogenea associata** alla (17.5).

Consideriamo prima l'equazione omogenea associata alla (17.5). Supponiamo che  $y$  sia soluzione di  $y' = ay$  in  $I$  e che  $y(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ . Allora

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = a(x) \quad \text{per } x \in I \quad \Rightarrow \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int a(x) dx + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}.$$

Con un'integrazione per sostituzione, si ottiene

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log|y(x)| \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = e^{\int a(x) dx + C_0} = e^{C_0} e^{\int a(x) dx}.$$

Ponendo  $C = \pm e^{C_0} \neq 0$  si ottiene

$$y(x) = \pm e^{C_0} e^{\int a(x) dx} = C e^{\int a(x) dx}$$

per ogni  $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . A posteriori si verifica facilmente che  $y(x) = C e^{\int a(x) dx}$  è infatti una soluzione per ogni  $C \in \mathbb{R}$  (quindi anche per  $C = 0$ ). La costante  $C$  si può considerare come una costante di integrazione, eventualmente determinata dalla condizione  $y(x_0) = y_0$  nel problema (17.7). Il seguente teorema riassume questi risultati e afferma inoltre che non ci sono altre soluzioni.

### TEOREMA 17.1

Siano  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo,  $a \in C(I)$  e  $A(x)$  una primitiva di  $a$  in  $I$ .

(i) Tutte le soluzioni di  $y' = ay$  in  $I$  sono  $y(x) = C e^{A(x)}$  con  $C \in \mathbb{R}$ .

(ii) Dati  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione

L'equazione omogenea

$$y(x) = y_0 e^{A(x)-A(x_0)}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy  $\begin{cases} y' = ay & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

Soluzione  
(o integrale)  
generale

Quanto affermato nella parte (i) può essere rinunciato dicendo che

$$Ce^{A(x)}, C \in \mathbb{R}$$

è la **soluzione generale** o l'**integrale generale** della (17.8).

#### Dimostrazione

(i)  $y(x) = Ce^{A(x)}$  è soluzione:  $y'(x) = Ce^{A(x)}A'(x) = y(x)a(x)$ . Sia ora  $y(x)$  qualsiasi soluzione di  $y' = ay$  in  $I$ . Posto  $z(x) := e^{-A(x)}y(x)$ ,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \left( e^{-A(x)}y(x) \right)' = -A'(x)e^{-A(x)}y(x) + e^{-A(x)}y'(x) \\ &= -ae^{-A}y + e^{-A}ay = 0 \end{aligned}$$

quindi  $z = C$  in  $I$  per qualche  $C \in \mathbb{R}$ , ovvero  $y = Ce^{A(x)}$ .

(ii) Segue dalla prima parte:  $y = Ce^{A(x)}$  e  $y(x_0) = y_0$ , quindi  $C = e^{-A(x_0)}y_0$  ovvero  $y = Ce^{A(x)} = e^{A(x)-A(x_0)}y_0$ .

#### ESEMPIO 17.1

Si vuole determinare l'integrale generale dell'equazione  $y' = -7y$  in  $\mathbb{R}$ . Si ha  $a(x) = -7$ , una cui primitiva è  $A(x) = -7x$ . Perciò  $y(x) = Ce^{-7x}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  è l'integrale generale cercato.

#### ESEMPIO 17.2

Si vuole determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x}y & \text{in } [0, +\infty) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Si ha  $a(x) = \sqrt{x}$ , una cui primitiva è  $A(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ . Perciò l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = Ce^{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tra queste soluzioni si seleziona quella che verifica la condizione  $y(0) = 2$ :

$$y(0) = Ce^0 \stackrel{!}{=} 2 \Leftrightarrow C = 2$$

(si usa il punto esclamativo per sottolineare che l'uguaglianza è imposta). Perciò la soluzione del problema di Cauchy è  $y(x) = 2e^{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}$ .

L'equazione non  
omogenea

Studiamo ora l'equazione *non omogenea*:

$$y' = ay + b \quad \text{in } I. \quad (17.9)$$

Siano  $y(x)$  e  $\tilde{y}(x)$  soluzioni della (17.9). Posto  $z(x) := y(x) - \tilde{y}(x)$ , si ha che

$$z'(x) = y'(x) - \tilde{y}'(x) = ay(x) + b - a\tilde{y}(x) - b = a(y(x) - \tilde{y}(x)) = az(x)$$

ovvero  $z$  è soluzione dell'equazione omogenea associata:  $z' = az$ . Per il Teorema 17.1  $z(x) = Ce^{\int a(x)dx}$ , ovvero  $y(x) = z(x) + \tilde{y}(x) = \tilde{y}(x) + Ce^{\int a(x)dx}$ . Abbiamo così ottenuto il seguente risultato.

**TEOREMA 17.2**

Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $a, b \in C(I)$  e  $A(x)$  una primitiva di  $a$  in  $I$ . Se  $\tilde{y}$  è una soluzione di (17.9), allora tutte le soluzioni di (17.5) sono  $y(x) = \tilde{y}(x) + Ce^{A(x)}$  con  $C \in \mathbb{R}$ .

Rimane dunque il problema di determinare una soluzione  $\tilde{y}(x)$ , detta **soluzione particolare**, dell'equazione non omogenea. Di seguito presentiamo due possibili metodi.

Soluzione particolare

**1. Variazione della costante (metodo sistematico)**

Si cerca una soluzione nella forma  $K(x)e^{A(x)}$ , dove  $A(x)$  è una primitiva di  $a$  in  $I$ . Sostituendo nell'equazione  $y' = ay + b$  si ha

$$K'(x)e^{A(x)} + K(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)K(x)e^{A(x)} + b(x) \Rightarrow K'(x) = b(x)e^{-A(x)}.$$

Allora, se  $K$  è una primitiva di  $b(x)e^{-A(x)}$  in  $I$ , la funzione  $\tilde{y}(x) = K(x)e^{A(x)}$  è la soluzione cercata e, per il Teorema 17.2, abbiamo dimostrato la prima parte del seguente risultato.

**TEOREMA 17.3**

Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $a, b \in C(I)$  e  $A(x)$  una primitiva di  $a$  in  $I$ .

(i) Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea  $y' = ay + b$  in  $I$  sono

$$y(x) = (C + K(x))e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

dove  $K(x)$  è una primitiva di  $b(x)e^{-A(x)}$  in  $I$ .

(ii) Dati  $x_0 \in I$  e  $y_0 \in \mathbb{R}$ , la funzione

$$y(x) = (y_0 + K(x) - K(x_0))e^{A(x) - A(x_0)}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy (17.7).

La dimostrazione della (ii) è identica a quella del Teorema 17.1(ii).

Si vogliono determinare le soluzioni dell'equazione

$$y' = -2y + 3 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea associata,  $y' = -2y$ , è dato da  $Ce^{-2x}$  per  $C \in \mathbb{R}$ . Seguendo il metodo della variazione della costante si pone  $\tilde{y}(x) = K(x)e^{-2x}$ . Sostituendo  $\tilde{y}(x)$  nell'equazione non omogenea, abbiamo  $K'(x)e^{-2x} = 3$  ovvero

$K' = 3e^{+2x}$ . Integrando, si ottiene  $K(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + C$ . Scegliendo per esempio

$K(x) = \frac{3}{2}e^{2x}$ , si conclude che  $\tilde{y}(x) = \frac{3}{2}e^{2x}e^{-2x} = \frac{3}{2}$  è soluzione dell'equazione non omogenea e tutte le soluzioni sono

$$y(x) = \frac{3}{2} + Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

**ESEMPIO 17.3**

Procedendo come nell'esempio precedente si trova che le soluzioni di  $y' = 2xy + x^2$  in  $\mathbb{R}$  sono  $y(x) = (C + K(x))e^{x^2}$ , in cui  $K$  è una primitiva di  $x^2e^{-x^2}$ :

$$K(x) = \int x^2 e^{-x^2} dx.$$

Non è possibile però esprimere  $K$  in termini di funzioni elementari.

**ESEMPIO 17.4**



## 2. Metodi ad hoc per ricavare $\tilde{y}(x)$

Qualche volta è possibile “intuire” la forma di una soluzione particolare  $\tilde{y}(x)$  di  $y' = ay + b$ . Per esempio, nell'Esempio 17.3 ci si poteva aspettare l'esistenza di una soluzione costante:  $\tilde{y}(x) = c_0$ . Sostituendo  $\tilde{y} = c_0$  nell'equazione si trova immediatamente il valore della costante:  $0 = -2c_0 + 3$ , ossia  $c_0 = 3/2$ . Illustriamo questo metodo con qualche esempio.

### ESEMPIO 17.5

Si consideri l'equazione

$$y' = 3y + 4x^3 + 2x^2 - x + 1 \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (17.10)$$

Osservando che la derivata di un polinomio è ancora un polinomio, si cerca una soluzione particolare nella forma

$$\tilde{y}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Sostituendo risulta che

$$3ax^2 + 2bx + c = 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d + 4x^3 + 2x^2 - x + 1$$

ovvero, raccogliendo i termini con le stesse potenze,

$$(3a + 4)x^3 + (-3a + 3b + 2)x^2 + (-2b + 3c - 1)x + (-c + 3d + 1) = 0.$$

L'uguaglianza è verificata per ogni  $x \in \mathbb{R}$  se e solo se

$$\begin{cases} 3a + 4 = 0 \\ -3a + 3b + 2 = 0 \\ -2b + 3c - 1 = 0 \\ -c + 3d + 1 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$a = -\frac{4}{3}, \quad b = -2, \quad c = -1, \quad d = -\frac{2}{3}.$$

Allora  $\tilde{y}(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - \frac{2}{3}$  è soluzione di (17.10) e tutte le soluzioni di (17.10) sono

$$y(x) = Ce^{3x} - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - \frac{2}{3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che il metodo della variazione della costante avrebbe portato al calcolo dell'integrale  $\int (4x^3 + 2x^2 - x + 1)e^{-3x} dx$ , la cui soluzione richiede 3 integrazioni per parti.

### ESEMPIO 17.6

Si consideri l'equazione

$$y' = 2y + 3e^{\lambda x} \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (17.11)$$

Con argomenti analoghi a quelli usati nell'esempio precedente, si cerca una soluzione nella forma

$$\tilde{y}(x) = ae^{\lambda x}.$$

Sostituendo nella (17.11), si ha

$$\lambda ae^{\lambda x} = 2ae^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

ovvero  $\lambda a = 2a + 3$ . Ricordiamo che  $\lambda$  è dato e che dobbiamo ricavare  $a$ :

$$(\lambda - 2)a = 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{\lambda - 2} \quad (\lambda \neq 2).$$

Dunque, se  $\lambda \neq 2$ , le soluzioni di (17.11) sono

$$y(x) = Ce^{2x} + \frac{3}{\lambda - 2} e^{\lambda x}.$$

Se  $\lambda = 2$  l'equazione diventa

$$y' = 2y + 3e^{2x}.$$

Poiché  $e^{2x}$  è soluzione dell'equazione omogenea associata, non è sorprendente che non si riesca a trovare una soluzione dell'equazione non omogenea della stessa forma. Risulta conveniente cercare una soluzione nella forma  $\tilde{y}(x) = bxe^{2x}$ :

$$be^{2x} + 2bxe^{2x} = 2bxe^{2x} + 3e^{2x} \Leftrightarrow be^{2x} = 3e^{2x}$$

ovvero  $b = 3$ . La soluzione generale è allora

$$y(x) = Ce^{2x} + 3xe^{2x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Si consideri l'equazione

$$y' = -y + 3 \sin(4x). \quad (17.12)$$

Si cerca una soluzione nella forma

$$y(x) = a \sin(4x) + b \cos(4x).$$

Allora

$$4a \cos(4x) - 4b \sin(4x) = -a \sin(4x) - b \cos(4x) + 3 \sin(4x)$$

ossia

$$(4a + b) \cos(4x) + (a - 4b - 3) \sin(4x) = 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Risolviendo  $a$  e  $b$  da

$$\begin{cases} 4a + b = 0 \\ a - 4b = 3 \end{cases}$$

si ottiene che  $a = 3/17$ ,  $b = -12/17$ . L'integrale generale della (17.12) è

$$y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{17} (3 \sin(4x) - 12 \cos(4x)) \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Si osservi che nell'esempio precedente si è cercata una soluzione particolare composta dalle funzioni seno e coseno anche se  $b$  è composta dalla sola funzione seno.



Se l'equazione è lineare, è possibile "separare i problemi".

Per trovare l'integrale generale di  $y' = y + xe^{3x} + \cos x$  si risolve preliminarmente l'omogenea, il cui integrale generale è  $Ce^x$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Per determinare una soluzione particolare conviene utilizzare la struttura lineare dell'equazione: se  $\tilde{y}_1$  è soluzione di  $y' = y + xe^{3x}$  e  $\tilde{y}_2$  è soluzione di  $y' = y + \cos x$ , allora  $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$  è soluzione dell'equazione in esame. Procedendo come nell'esempio precedente, si ottiene

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

(lo studente controlli). Per determinare  $\tilde{y}_1$  si cerca una soluzione di  $y' = y + xe^{3x}$  della forma

### ESEMPIO 17.7

### ESEMPIO 17.8

$$\tilde{y}_1(x) = axe^{3x} + be^{3x}.$$

Allora

$$ae^{3x} + 3axe^{3x} + 3be^{3x} = axe^{3x} + be^{3x} + xe^{3x}$$

ovvero

$$\begin{cases} a + 3b = b \\ 3a = a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = Ce^x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} xe^{3x} - \frac{1}{4} e^{3x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Volendo, è possibile unificare i precedenti casi particolari: rimandiamo il lettore interessato alla (17.43).

### ESERCIZIO 17.1

Trovare gli integrali generali delle seguenti equazioni differenziali:

- |                        |  |
|------------------------|--|
| a) $y' = -4y$          | e) $y' = \frac{1}{1-x^2} y \quad (-1 < x < 1)$                           |
| b) $y' = 3x + 1$       | f) $y' = \frac{1}{1-x^2} y + \frac{4x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$ |
| c) $y' = -4y + 3x + 1$ | g) $y' = 3y + e^{2x}$  |
| d) $y' = y + \sin(2x)$ | h) $y' = 2y + e^{2x}$  |

### ESERCIZIO 17.2

Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\begin{cases} y' = xy & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 3; \end{cases}$ | b) $\begin{cases} y' = 2y + x - 1 + x \sin x & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases}$ |
|---|--|

## 17.2 Equazioni e sistemi in forma normale

L'equazione  $y' = f(x, y)$  in  $I$ , dove  $f(x, y)$  è una funzione di due variabili definita per  $x \in I$  e  $y \in J$  ( $I$  e  $J$  intervalli), è un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale. Una funzione  $y \in C^1(I)$  si dice soluzione di  $y' = f(x, y)$  in  $I$  se  $y'(x) = f(x, y(x))$  per ogni  $x \in I$ .

### 17.2.1 Equazioni del primo ordine a variabili separabili

Il più semplice esempio è quello delle equazioni a variabili separabili del primo ordine:

$$y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad (17.13)$$

con  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  e  $J$  intervalli di  $\mathbb{R}$ ). Per analizzare l'equazione si generalizza il metodo utilizzato nel paragrafo precedente per risolvere equazioni lineari omogenee. Anzitutto si osserva che

se  $y_0$  è uno zero di  $h$ , allora  $y(x) = y_0$  è soluzione di (17.13).

Si procede ora formalmente (in particolare, ignorando possibili divisioni per zero e questioni di integrabilità): dividendo ambo i membri di (17.13) per  $h(y(x))$ , si ottiene



$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x). \quad (17.14)$$

Siano  $G(x)$  una primitiva di  $g(x)$  e  $F(y)$  una primitiva di  $1/h(y)$ . Integrando ambo i membri si ottiene

$$G(x) + C = \int g(x) dx \stackrel{(17.14)}{=} \int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int \frac{dy}{h(y)} = F(y(x)).$$

Se  $F$  è invertibile in un intervallo  $J' \subseteq J$  e  $G(x) + C \in F(J')$  per ogni  $x \in I' \subseteq I$ , si ottiene quindi

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + C) \quad \text{per ogni } x \in I'.$$

Il procedimento formale appena descritto pone altre questioni, oltre alle possibili divisioni per zero e alla regolarità di  $g$  ed  $h$ , legate alla scelta degli intervalli e, in ultima analisi, all'esistenza e unicità delle soluzioni. Per affrontarle, conviene partire da due esempi significativi.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} & \text{in } \mathbb{R} \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (17.15)$$

Utilizzando il procedimento appena illustrato, si ottiene

$$y^{-1/3} y' = 1 \Rightarrow \int y^{-1/3} dy = \int dx \Rightarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = x + C.$$

Poiché  $y(0) = 0$  si ha  $C = 0$ , quindi

$$y(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}x\right)^3} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}x^3}. \quad (17.16)$$

Si noti che  $y(x)$  è solo definita per valori non negativi di  $x$  e che è soluzione del problema di Cauchy in  $[0, +\infty)$ . È quindi naturale chiedersi:

- (i) esiste una soluzione del problema di Cauchy, (17.15), in tutto  $\mathbb{R}$ ?
- (ii) la soluzione del problema di Cauchy in  $[0, +\infty)$  (o in  $\mathbb{R}$ , se esiste) è unica?

Per rispondere a entrambe le domande basta osservare che  $y = 0$  è soluzione della (17.15): quindi esiste una soluzione in tutto  $\mathbb{R}$ , e la soluzione (17.16) in  $[0, +\infty)$  non è unica! Neanche la soluzione del problema di Cauchy in tutto  $\mathbb{R}$  è unica: oltre alla soluzione  $y = 0$ , la seguente funzione è soluzione in  $\mathbb{R}$ :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}x^3} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(si noti che  $y \in C^1(\mathbb{R})!$ ). In realtà il problema di Cauchy (17.15) ha un numero infinito di soluzioni: (si veda Figura 17.1): per ogni  $a \geq 0$  si ha la soluzione

$$y_a(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}(x-a)^3} & \text{se } x \geq a \\ 0 & \text{se } x < a. \end{cases}$$

### ESEMPIO 17.9

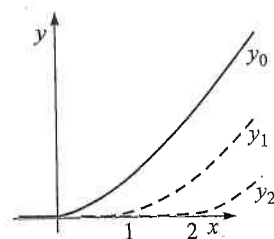


Figura 17.1

## ESEMPIO 17.10

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 & \text{in } \mathbb{R} \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (17.17)$$

Procedendo formalmente si ha

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow y^{-2} dy = dx \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int dx \Rightarrow -y^{-1} = x + C.$$

La condizione  $y(0) = 1$  determina la costante:  $C = -1$ , quindi

$$-\frac{1}{y} = x - 1 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{1-x}$$

(Figura 17.2). Si osservi che la funzione  $y$  non è definita in  $x = 1$ , infatti si verifica facilmente che  $y$  è una soluzione del problema di Cauchy in  $(-\infty, 1)$  e  $y(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 1^-$ . Seguirà dal teorema successivo che si tratta dell'unica soluzione in  $(-\infty, 1)$  e che la (17.17) non ha soluzione in  $\mathbb{R}$ .

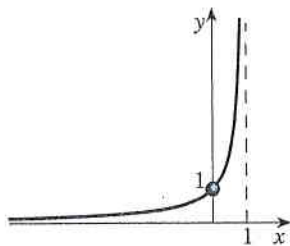


Figura 17.2  
 $x \mapsto 1/(1-x)$ .

### 17.2.2 Risultati di esistenza e unicità per il problema di Cauchy

I due esempi precedenti mostrano che nel caso di equazioni differenziali *non lineari* si osservano dei fenomeni che non si sono presentati nel caso delle equazioni lineari: le soluzioni possono non esistere per tutti gli intervalli  $I$  e, se esistono, possono non essere determinate unicamente dalla condizione aggiuntiva del tipo  $y(x_0) = y_0$  ( $x_0 \in I$ ).

Il seguente risultato fornisce la giusta struttura per affrontare tali questioni.

#### Dimostrazione

#### TEOREMA 17.4

Sia  $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua che è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile  $y$ , ovvero per ogni rettangolo chiuso e limitato  $R \subset (a, b) \times (c, d)$  esiste  $L_R$  tale che

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2| \quad \text{se } (x, y_1), (x, y_2) \in R. \quad (17.18)$$

Dati  $x_0 \in (a, b)$  e  $y_0 \in (c, d)$ , esiste un intervallo aperto  $I = (a_0, b_0) \subseteq (a, b)$ , l'intervallo massimale di esistenza, tale che:

(i) **(esistenza della soluzione)**  $x_0 \in I$  ed esiste una soluzione  $y \in C^1(I)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (17.19)$$

(ii) **(massimalità dell'intervallo)**

$$y(x) \rightarrow c \quad \text{oppure} \quad y(x) \rightarrow d \quad \begin{cases} \text{per } x \rightarrow a_0^+ & \text{se } a_0 > a \\ \text{per } x \rightarrow b_0^- & \text{se } b_0 < b \end{cases}$$

(iii) **(unicità della soluzione)** il problema di Cauchy (17.19) non ha altre soluzioni in  $I$ .

Per illustrare tale risultato, oltre alla Figura 17.3, è utile richiamare gli esempi precedenti. Nell'Esempio 17.10 l'intervallo massimale di esistenza  $I = (-\infty, 1)$  non coincide con l'intervallo  $(a, b) = \mathbb{R}$  e  $y \rightarrow d = +\infty$  per  $x \rightarrow b_0^- = 1^-$ . In altre parole, per equazioni non lineari l'intervallo massimale di esistenza non è un dato bensì

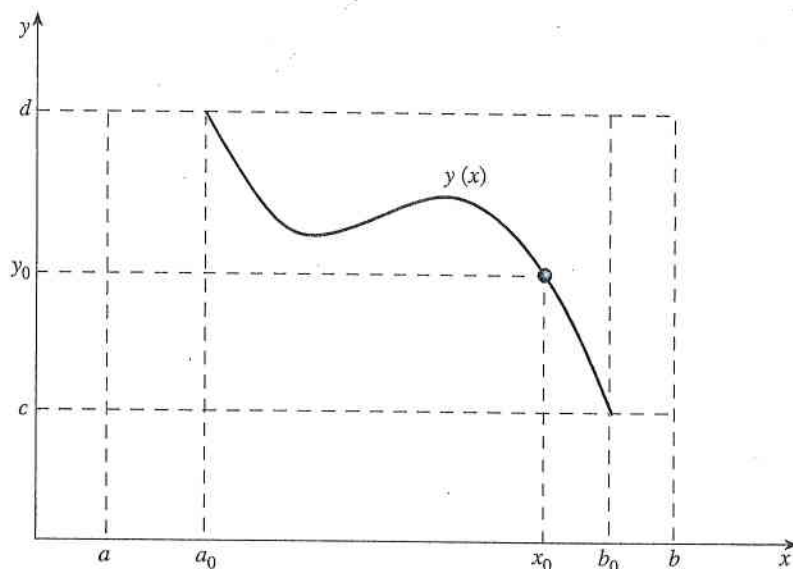


Figura 17.3

un'incognita del problema di Cauchy: va quindi determinato insieme alla soluzione, e in generale dipende sia dall'equazione sia dalla condizione iniziale.

L'Esempio 17.9 mette in evidenza la condizione (17.18) come garanzia per l'unicità della soluzione, infatti la funzione  $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$  non la verifica.

La (17.18) è verificata se  $f_y$  esiste ed è continua in  $(a, b) \times (c, d)$ : in tal caso  $f_y$  è limitata in ogni sottoinsieme compatto e nella (17.18) si può scegliere  $L_R = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in R\}$ .

Se l'equazione è a variabili separabili, ossia se  $f(x, y) = g(x)h(y)$ , le ipotesi del Teorema 17.4 equivalgono a  $g \in C((a, b))$ ,  $h \in C((c, d))$  e  $h$  lipschitziana in ogni intervallo chiuso  $[c', d'] \subset (c, d)$  (che è certamente verificata se  $h \in C^1((c, d))$ ). Sotto queste ipotesi, il Teorema 17.4 fornisce la struttura per verificare i risultati che si ottengono applicando il procedimento formale descritto in precedenza.

Al variare di  $a \neq 1$ , si vuole determinare l'intervallo massimale  $I$  di esistenza della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1/(1-y) & \text{in } I \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Anzitutto si osserva che le ipotesi del Teorema 17.4 sono verificate (perché  $a \neq 1$ , punto in cui la funzione  $h(y) = (1-y)^{-1}$  non è definita). Perciò dovremo trovare un'unica soluzione per ogni  $a \neq 1$ . Procedendo formalmente si ha

$$\begin{aligned} \int (1-y)dy &= \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2}(1-y)^2 = x + C \Rightarrow |y-1| = \sqrt{C-2x} \\ &\Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{C-2x}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale  $y(0) = a$  si ottiene  $C = (a-1)^2$ , ovvero

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 2x} = 1 \pm |a-1| \sqrt{1 - \frac{2x}{(a-1)^2}}.$$

Infine si osserva che una sola delle due funzioni verifica la condizione iniziale; il suo dominio è l'intervallo massimale di esistenza:

$$y_a(x) = 1 + (a-1) \sqrt{1 - \frac{2x}{(a-1)^2}} \quad \text{per } x \in I_a := \left(-\infty, \frac{1}{2}(a-1)^2\right).$$

## ESEMPIO 17.11



Si noti che  $y_a(x) \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow \frac{1}{2}(a-1)^2$ , ovvero la soluzione tende verso la frontiera del dominio di  $h$  per  $x \rightarrow \partial I_a$ .

**ESEMPIO 17.12**

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2y^2}{1-x^2} & \text{in } I \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

dove  $I$  è l'intervallo massimale di esistenza. Si noti che  $2y^2/(1-x^2)$  non è definita in  $x = \pm 1$ ; quindi, poiché 0 deve appartenere a  $I$  e  $I$  è un intervallo, deve essere  $I \subseteq (-1, 1)$ .

Per il Teorema 17.4, il problema ammette un'unica soluzione. Per determinarla procediamo formalmente:

$$\int y^{-2} dy = \int \frac{2}{1-x^2} dx = \int \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$

da cui

$$-\frac{1}{y} = \log \frac{1+x}{1-x} + C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{C - \log \frac{1+x}{1-x}} \quad (17.20)$$

Poiché  $y(0) = 3$  si ha  $C = 1/3$ :

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{3} - \log \frac{1+x}{1-x}}$$

Si noti che il denominatore si annulla in  $x_0 = (\sqrt[3]{e} - 1)/(\sqrt[3]{e} + 1)$  e poiché  $0 < x_0 < 1$  si verifica facilmente che  $y(x)$  è l'unica soluzione del problema di Cauchy in  $I = (-1, x_0)$ . Si osservi che  $y(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow x_0^-$  e  $y(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow (-1)^+$  (lo studente controlli che quest'ultimo limite non è in contraddizione con la tesi del Teorema 17.4(ii)).

**ESEMPIO 17.13**

Si considera l'equazione dell'esempio precedente con una diversa condizione iniziale:

$$\begin{cases} y' = \frac{2y^2}{1-x^2} & \text{in } I \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

In tal caso basta osservare che  $h(0) = y^2|_{y=0} = 0$ ; quindi la funzione costante  $y(x) = 0$  è soluzione del problema e  $I = \mathbb{R}$ . Si noti che procedendo come nell'esempio precedente e sostituendo  $y(0) = 0$  nella (17.20), si ottiene  $0 = 1/C$  che non fornisce alcun valore (finito) di  $C$ .

Se, nella tesi del Teorema 17.4, l'intervallo massimale di esistenza  $I = (a_0, b_0)$  coincide con l'intervallo  $(a, b)$ , si dice che la soluzione esiste globalmente. Per esempio le equazioni lineari  $y' = ay + b$  ammettono soluzioni globali, mentre l'equazione  $y' = y^2$  non sempre ne ha (come si è visto nell'Esempio 17.10). In realtà la crescita lineare di  $f(x, y)$  rispetto a  $y$  risulta essere una condizione sufficiente per avere soluzioni globali. Più precisamente vale il seguente risultato.

**Dimostrazione****TEOREMA 17.5** Esistenza globale

Siano soddisfatte le ipotesi del Teorema 17.4 e sia  $(c, d) = \mathbb{R}$ . Se  $f$  verifica la **condizione di crescita al più lineare rispetto a  $y$**  in  $(a, b)$ , ovvero se esiste una funzione  $K \in C((a, b))$  tale che

$$|f(x, y)| \leq K(x)(1 + |y|) \quad \text{per ogni } x \in (a, b), y \in \mathbb{R}$$

allora la soluzione  $y$  esiste globalmente in  $(a, b)$ :  $a_0 = a$  e  $b_0 = b$ .

Se  $f(x, y) = y^\alpha$ , per qualsiasi  $\alpha > 1$  le soluzioni non sono necessariamente globali (si veda l'Esercizio 17.3); perciò l'esponente  $\alpha = 1$  risulta essere critico per avere sempre soluzioni globali.

In generale non è possibile trovare una formula esplicita per la soluzione di un'equazione differenziale non lineare. Esistono vari metodi numerici, spesso molto raffinati, per approssimare la soluzione con l'aiuto di un calcolatore. Il più semplice funziona così: si prende un intervallo  $[x_0 - c, x_0 + c] \subset (a, b)$ , dividendolo in  $N$  intervalli di lunghezza  $h > 0$ , e si costruisce un'approssimazione  $y_N(x)$ , cominciando dall'intervallo compreso tra  $x_0 - h$  e  $x_0 + h$ ,

$$y_N(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0) \quad \text{se } x_0 - h \leq x \leq x_0 + h;$$

poi si utilizzano i valori di  $y_N$  negli estremi  $x_0 \pm h$  per estenderla all'intervallo compreso tra  $x_0 - 2h$  e  $x_0 + 2h$ ,

$$y_N(x) = \begin{cases} y_N(x_0 + h) + f(x_0 + h, y_N(x_0 + h))(x - x_0 - h) & \text{se } x_0 + h < x \leq x_0 + 2h \\ y_N(x_0 - h) + f(x_0 - h, y_N(x_0 - h))(x - x_0 + h) & \text{se } x_0 - 2h \leq x < x_0 - h; \end{cases}$$

infine si ripete tale procedimento fino a estendere  $y_N$  all'intervallo  $[x_0 - c, x_0 + c]$ . È possibile dimostrare che, per  $c$  sufficientemente piccolo, esiste  $y \in C^1([x_0 - c, x_0 + c])$  tale che  $y_N(x) \rightarrow y(x)$  per  $N \rightarrow +\infty$  per ogni  $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$  e che  $y$  è soluzione del problema di Cauchy in  $[x_0 - c, x_0 + c]$ . Infatti questo "metodo costruttivo" è uno dei modi per dimostrare l'esistenza locale di una soluzione, cioè di una soluzione del problema di Cauchy in un intorno sufficientemente piccolo di  $x_0$ .

## ESERCIZIO 17.3

Sia  $\alpha > 1$ . Mostrare che

$$y(x) = \frac{1}{(1 - (\alpha - 1)x)^{1/(\alpha - 1)}}, \quad x \in I_\alpha := \left(-\infty, \frac{1}{\alpha - 1}\right)$$

è soluzione di

$$\begin{cases} y' = y^\alpha & \text{in } I_\alpha \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

nell'intervallo massimale di esistenza  $I_\alpha$ .

## ESERCIZIO 17.4

Determinare l'intervallo massimale di esistenza del problema di Cauchy dell'Esempio 17.12 con la condizione  $y(0) = -3$  invece di  $y(0) = 3$ .

## ESERCIZIO 17.5

Determinare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

a)  $\begin{cases} y' = y(y + 3) & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = -6 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y' = x(1 + y^2) & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} y' = \operatorname{tg} y & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

d)  $\begin{cases} y' = \operatorname{tg} y & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = -\frac{5\pi}{6} \end{cases}$

(suggerimento: si ricordi che  $\text{im}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e che  $\sin y = -\sin(y + \pi)$ );

e) 
$$\begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{y(x^2+x-2)} & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

f) 
$$\begin{cases} y' = \log|\cos(\pi(y-3)) + 2| & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 8. \end{cases}$$

### 17.2.3 Sistemi di equazioni del primo ordine ed equazioni di ordine $n$

Consideriamo il seguente sistema di  $n$  equazioni differenziali in forma normale:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad \text{per } x \in (a, b) \quad (17.21)$$

dove  $f_i$  sono  $n$  funzioni di  $n+1$  variabili definite per  $x \in (a, b)$  e  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{V}$  ( $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  è un insieme aperto). È naturale utilizzare una notazione vettoriale per il sistema (17.21):

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \text{dove } \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (17.22)$$

In analogia con il caso  $n = 1$ , una funzione vettoriale  $\mathbf{y} : (a, b) \rightarrow \mathcal{V}$ , di classe  $C^1$  in  $(a, b)$ , si dice soluzione della (17.22) se  $y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$  per ogni  $i = 1, \dots, n$  ed ogni  $x \in (a, b)$ .

Il sistema (17.22) diventa un problema di Cauchy se si specifica il valore della funzione  $\mathbf{y}$  in un punto  $x_0 \in (a, b)$ :

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_0 \in \mathcal{V}. \quad (17.23)$$

Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} u' = 2u - 3xv - \sin(uv) & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ v' = 3u + v & \text{per } x \in \mathbb{R} \\ u'(0) = -5 \\ v'(0) = 2 \end{cases}$$

è un problema di Cauchy per un sistema di due equazioni differenziali (in questo caso  $\mathbf{y} = (u, v)$ ).

Il seguente risultato è una generalizzazione immediata dei Teoremi 17.4 e 17.5.

#### TEOREMA 17.6

Siano  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) : (a, b) \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana rispetto a  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ , ovvero per ogni sottoinsieme compatto  $K$  di  $(a, b) \times \mathcal{V}$  esiste  $L_K$  tale che

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\| \leq L_K \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \quad \text{per ogni } (x, \mathbf{y}_1), (x, \mathbf{y}_2) \in K. \quad (17.24)$$

Dati  $x_0 \in (a, b)$  e  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{V}$ , esiste un intervallo aperto  $I = (a_0, b_0) \subseteq (a, b)$ , l'intervallo massimale di esistenza, tale che:

(i) (esistenza della soluzione)  $x_0 \in I$  ed esiste una soluzione  $\mathbf{y} \in C^1(I)$  del problema



di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) & \text{in } I \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0; \end{cases} \quad (17.25)$$

(ii) (massimalità dell'intervallo) per ogni compatto  $K \subset \mathcal{V}$

$$\mathbf{y}(x) \notin K \text{ definitivamente per } \begin{cases} x \rightarrow a_0^+ & \text{se } a_0 > a \\ x \rightarrow b_0^- & \text{se } b_0 < b; \end{cases}$$

(iii) (unicità della soluzione) il problema di Cauchy (17.25) non ha altre soluzioni in  $I$ ;

(iv) (esistenza globale) Se  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{f}$  verifica la condizione di crescita al più lineare rispetto a  $\mathbf{y}$  in  $(a, b)$ , ovvero se esiste una funzione  $K \in C((a, b))$  tale che

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y})\| \leq K(x)(1 + \|\mathbf{y}\|) \quad \text{per ogni } x \in (a, b), \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

allora la soluzione  $\mathbf{y}$  di (17.25) esiste globalmente in  $(a, b)$ :  $a_0 = a$  e  $b_0 = b$ .

Omettiamo la dimostrazione, che è una generalizzazione di quella nel caso  $n = 1$ . In particolare lo studente può controllare che la dimostrazione della parte (iv) è del tutto analoga a quella del Teorema 17.5 (basta sostituire a  $(y^2(x))' = 2y(x)y'(x)$  l'identità  $\|\mathbf{y}^2(x)\|' = 2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}' \rangle$ ).

Ogni equazione di ordine  $n$  in forma normale si può o riscrivere come un sistema di  $n$  equazioni del primo ordine. Consideriamo prima il caso  $n = 2$ :

$$y'' = g(x, y, y'), \quad x \in (a, b). \quad (17.26)$$

Ponendo  $v(x) = y'(x)$  e sostituendo, si ottiene  $v' = g(x, y, v)$ ; la (17.26) è quindi equivalente a un sistema di due equazioni in due incognite,  $\mathbf{y}(x) = (y(x), v(x))$ :

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = g(x, y, v) \end{cases} \quad x \in (a, b). \quad (17.27)$$

In particolare, il problema di Cauchy per un'equazione del secondo ordine contiene in generale due condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y') & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = v_0. \end{cases} \quad (17.28)$$

Lo studente è invitato a riformulare il Teorema 17.6 per il problema (17.28) ponendo  $\mathbf{y} = (y, y')$  e  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = (y', g(x, y, y'))$ .

In generale, data l'equazione di ordine  $n$

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (17.29)$$

ponendo  $\mathbf{y} = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$  e  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ , dove

$$f_1(x, \mathbf{y}) = y', \dots, f_{n-1}(x, \mathbf{y}) = y^{(n-1)}, f_n(x, \mathbf{y}) = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

si ottiene che (17.29) è equivalente al sistema  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ . Il problema di Cauchy per (17.29) contiene quindi in generale  $n$  condizioni iniziali:

$$y(x_0) = y_{0,0}, y'(x_0) = y_{0,1}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \mathbf{y}_0 = (y_{0,0}, \dots, y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^n.$$

### 17.3 Equazioni lineari del secondo ordine

Dati un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e funzioni  $b, c, g \in C(I)$ ,

$$y'' + by' + cy = g \quad \text{in } I \quad (17.30)$$

è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Una funzione  $y \in C^2(I)$  si dice soluzione di (17.30) se  $y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = g(x)$  per  $x \in I$ . Se inoltre, dati  $x_0 \in I$  e  $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ , risulta  $y(x_0) = y_0$  e  $y'(x_0) = v_0$ ,  $y$  si dice soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -by' - cy + g & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0. \end{cases} \quad (17.31)$$

Posto, come sopra,  $v(x) = y'(x)$ , si ottiene che la (17.31) è equivalente al seguente sistema di due equazioni lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} y' = v & \text{in } I \\ v' = -bv - cy + g & \text{in } I \\ y(x_0) = y_0 \\ v(x_0) = v_0. \end{cases} \quad (17.32)$$

Segue quindi dal Teorema 17.6 che per ogni  $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ , la (17.31) ha un'unica soluzione globale.

#### TEOREMA 17.7

Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$  e  $b, c, g \in C(I)$ . Allora esiste una e una sola soluzione del problema (17.31).

Il caso omogeneo

Per caratterizzare l'integrale generale di (17.30) e la soluzione di (17.31), consideriamo prima l'equazione omogenea associata alla (17.30):

$$y'' + by' + cy = 0 \quad \text{in } I. \quad (17.33)$$

In questo caso ci si aspetta la presenza di due parametri: infatti il problema di Cauchy richiede di soddisfare due condizioni iniziali e, per esempio, l'integrale generale di  $y'' = 0$  è  $y(x) = \alpha x + \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Nel caso della (17.33), ci si aspetta quindi una soluzione generale del tipo

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

dove  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni *linearmente indipendenti*:

#### DEFINIZIONE 17.8

Siano  $b, c \in C(I)$ . Due soluzioni  $y_1$  e  $y_2$  dell'equazione (17.33) si dicono **linearmente indipendenti** se

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Si dicono **linearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti.

Come nel caso di due vettori linearmente dipendenti, si ha:

se  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni linearmente dipendenti della (17.33), allora differiscono per una costante moltiplicativa:  
 $y_1 = C y_2$  oppure  $y_2 = C y_1$  in  $I$ .

Per caratterizzare soluzioni linearmente indipendenti della (17.33), si utilizza il **determinante wronskiano**: date due funzioni  $y_1, y_2$  derivabili in  $I$ , si pone

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x), \quad x \in I.$$

Vale il seguente:

#### LEMMA 17.9

Siano  $b, c \in C(I)$ . Due soluzioni  $y_1$  e  $y_2$  dell'equazione (17.33) sono linearmente indipendenti in  $I$  se e solo se esiste  $x_0 \in I$  tale che  $W(x_0) \neq 0$ .

#### Dimostrazione

Dimostriamo l'affermazione contraria ed equivalente:  $y_1$  e  $y_2$  sono linearmente dipendenti in  $I$  se e solo se  $W(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ . Se  $y_1$  e  $y_2$  sono linearmente dipendenti, ovvero se esiste  $C \neq 0$  tale che  $y_2(x) = Cy_1(x)$  per ogni  $x \in I$ , allora

$$W(x) = Cy_1(x)y_1'(x) - Cy_1(x)y_1'(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Se viceversa  $W(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ , fissato  $x_0 \in I$  il sistema

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = 0 \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione non banale  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ . Quindi la funzione  $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$  risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -by' - cy & \text{in } I \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte tale problema ammette anche la soluzione identicamente nulla, e per il Teorema 17.7 la soluzione è unica: perciò  $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ , ovvero  $y_1$  e  $y_2$  sono linearmente dipendenti.

Sottolineiamo che, grazie al lemma precedente, per verificare che due soluzioni  $y_1$  e  $y_2$  dell'equazione differenziale (17.33) sono linearmente indipendenti, basta verificare l'indipendenza lineare dei vettori  $(y_1(x_0), y_1'(x_0))$  e  $(y_2(x_0), y_2'(x_0))$ .

Le funzioni  $y_1 = \cos x$  e  $y_2 = \sin x$  sono due soluzioni linearmente indipendenti di

$$y'' + y = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Infatti  $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0$  e  $y_2'(0) = 1$  e, com'è ben noto, i vettori  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  sono linearmente indipendenti. Si osservi inoltre che per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   $y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$  è, per il Teorema 17.7, l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & \text{in } \mathbb{R} \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta. \end{cases}$$

Nell'esempio precedente, non è difficile dimostrare che l'equazione  $y'' + y = 0$  non ha altre soluzioni, ovvero  $\alpha \cos x + \beta \sin x$  è la soluzione generale di  $y'' + y = 0$ . Più in generale la linearità del problema porta alla seguente caratterizzazione delle soluzioni.

#### ESEMPIO 17.14



**TEOREMA 17.10**

Siano  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $x_0 \in I$  e  $b, c, g \in C(I)$ .

(i) Le soluzioni  $y_1$  e  $y_2$  dell'equazione omogenea (17.33) tali che

$$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1$$

sono linearmente indipendenti.

(ii) Se  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (17.33), la soluzione generale della (17.33) è

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(iii) Sia  $\tilde{y}(x)$  una soluzione dell'equazione (17.30) e siano  $y_1$  e  $y_2$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (17.33). Allora la soluzione generale della (17.33) è

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) + \tilde{y}(x) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La parte (ii) afferma in sostanza che l'insieme delle soluzioni della (17.33) costituisce uno spazio vettoriale di dimensione 2.

**Dimostrazione**

(i) Segue immediatamente dal Lemma 17.9.

(ii) Per la struttura lineare,  $y = \alpha y_1 + \beta y_2$  è soluzione della (17.33) per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Viceversa, sia  $\bar{y}$  una qualunque soluzione della (17.33). Poiché  $W(x_0) \neq 0$ , il sistema

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = \bar{y}(x_0) \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = \bar{y}'(x_0) \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione  $(\alpha, \beta)$ . Poiché  $\bar{y}(x)$  e  $y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$  risolvono lo stesso problema di Cauchy (con dati iniziali  $y(x_0) = \bar{y}(x_0)$  e  $y'(x_0) = \bar{y}'(x_0)$ ), per il Teorema 17.7 esse coincidono.

(iii) Si ragiona come nel caso del primo ordine: se  $y$  e  $\tilde{y}$  sono due qualsiasi soluzioni della (17.30), allora  $y - \tilde{y}$  risolve l'omogenea associata, quindi per la parte (ii)  $y - \tilde{y} = \alpha y_1 + \beta y_2$  per  $\alpha, \beta$  opportuni.

Contrariamente al caso di un'equazione del primo ordine, in generale non è possibile trovare una formula "esplicita" per la soluzione di (17.30). Un'eccezione è il caso particolare, ma importante, in cui i coefficienti  $b$  e  $c$  sono costanti in  $I$ .

**17.3.1 Equazioni omogenee a coefficienti costanti**

Consideriamo l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0). \quad (17.34)$$

Per il Teorema 17.10, per determinare la soluzione generale della (17.34) è sufficiente trovare due soluzioni linearmente indipendenti. L'idea generale è quella di cercare soluzioni del tipo  $y(x) = e^{\lambda x}$ ; sostituendo nella (17.34) si ottiene l'**equazione caratteristica** associata alla (17.34):

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (17.35)$$

Si distinguono tre casi:

- (i)  $b^2 - 4ac > 0$ . In tal caso (17.35) ha due soluzioni reali distinte  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Perciò  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$  e  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  sono soluzioni della (17.34). Inoltre sono linearmente indipendenti:  $W(x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii)  $b^2 - 4ac = 0$ . In tal caso (17.35) ha una soluzione reale  $\lambda = -b/(2a) \in \mathbb{R}$  (con molteplicità 2). Perciò  $y_1(x) = e^{\lambda x}$  è soluzione della (17.34). Per individuare una seconda soluzione linearmente indipendente, si applica il metodo di variazione delle costanti: posto  $y_2(x) = K(x)e^{\lambda x}$ , si ha

$$0 \stackrel{!}{=} ay_2'' + by_2' + cy_2 = e^{\lambda x} [a(K'' + 2\lambda K' + \lambda^2 K) + b(K' + \lambda K) + cK]$$

$$\stackrel{(17.35)}{=} e^{\lambda x} [a(K'' + 2\lambda K') + bK'] \stackrel{\lambda = -b/(2a)}{=} aK'',$$

perciò  $K(x)$  è lineare. Si sceglie ad esempio  $K(x) = x$ , ovvero  $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ , e si verifica che  $y_1$  e  $y_2$  sono linearmente indipendenti:  $W(x) = e^{2\lambda x} \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

- (iii)  $b^2 - 4ac < 0$ . In tal caso (17.35) ha due soluzioni complesse coniugate,  $\lambda = \mu \pm i\omega$ . I due candidati che emergono,  $y_{\pm}(x) = e^{(\mu \pm i\omega)x} = e^{\mu x}(\cos(\omega x) \pm i \sin(\omega x))$ , non sono però funzioni a valori reali. I candidati corretti si ottengono come loro combinazione lineare (una operazione naturale da compiere, visto che l'equazione è lineare):

$$y_1(x) = e^{\mu x} \cos(\omega x) = \frac{1}{2}(y_+ + y_-), \quad y_2(x) = e^{\mu x} \sin(\omega x) = \frac{1}{2i}(y_+ - y_-).$$

Infine, si verifica che  $y_1$  e  $y_2$  sono linearmente indipendenti:  $W(x) = \omega e^{2\mu x} \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  ( $\omega \neq 0$  perché siamo nel caso (iii)).

È ora sufficiente applicare il Teorema 17.10 per concludere che:

#### TEOREMA 17.11

Siano  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

- (i) Se  $b^2 - 4ac > 0$ , dette  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  le due soluzioni reali dell'equazione caratteristica (17.35), la soluzione generale dell'equazione omogenea (17.34) è

$$y(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}.$$

- (ii) Se  $b^2 - 4ac = 0$ , detta  $\lambda \in \mathbb{R}$  la soluzione (reale) dell'equazione caratteristica (17.35), la soluzione generale dell'equazione omogenea (17.34) è

$$y(x) = (\alpha + \beta x)e^{\lambda x}.$$

- (iii) Se  $b^2 - 4ac < 0$  e  $\lambda = \mu \pm i\omega$  sono le due soluzioni complesse dell'equazione caratteristica (17.35), la soluzione generale dell'equazione omogenea (17.34) è

$$y(x) = e^{\mu x}(\alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)).$$

Le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \\ y'' - 4y &= 0 \\ y'' - 3y' + 2y &= 0 \\ y'' + 2y' + 5y &= 0 \\ y'' + 6y' + 9y &= 0 \end{aligned}$$

hanno, rispettivamente, equazioni caratteristiche

#### ESEMPIO 17.15

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$$

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \pm 2i$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3.$$

Quindi, per il teorema precedente, le soluzioni generali corrispondenti sono:

$$\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x), \quad \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}, \quad \alpha e^x + \beta e^{2x}, \\ e^{-x}(\alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x)), \quad (\alpha + \beta x)e^{-3x},$$

dove  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### 17.3.2 Equazioni non omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (17.36)$$

dove  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $g \in C(\mathbb{R})$ . Per il Teorema 17.10 (iii), basta trovare una soluzione  $\tilde{y}(x)$  della (17.36). Come nel caso delle equazioni del primo ordine, distinguiamo due metodi.

#### 1. Variazione delle costanti

Sia  $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$  la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (17.36):  $ay'' + by' + cy = 0$ . Cerchiamo una soluzione della (17.36) della forma

$$y(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

Allora

$$y'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x) + A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x).$$

Come si può immaginare, derivando ulteriormente tale espressione arriveremmo a equazioni differenziali del secondo ordine, per  $A$  e per  $B$ , a coefficienti variabili. Per evitare le derivate seconde  $A''(x)$  e  $B''(x)$  nell'espressione per  $y''(x)$ , imponiamo la condizione

$$A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Così facendo

$$y'(x) = A(x)y_1'(x) + B(x)y_2'(x)$$

$$y''(x) = A(x)y_1''(x) + B(x)y_2''(x) + A'(x)y_1'(x) + B'(x)y_2'(x)$$

e sostituendo nella (17.36) abbiamo

$$a(Ay_1'' + By_2'') + b(Ay_1' + By_2') + c(Ay_1 + By_2) + a(A'y_1' + B'y_2') = g(x).$$

Poiché  $y_1$  e  $y_2$  sono soluzioni dell'equazione omogenea associata, l'ultima equazione si riduce a:  $a(A'y_1' + B'y_2') = g(x)$ . Dunque, siamo giunti a due equazioni per  $A'$  e  $B'$ :

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \frac{g(x)}{a} \end{cases} \quad (17.37)$$



Per l'indipendenza lineare di  $y_1$  e  $y_2$ , il Lemma 17.9 garantisce che  $W(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , ovvero per ogni  $x \in \mathbb{R}$  la (17.37) ha una e una sola soluzione  $(A'(x), B'(x))$ . Integrando si ottengono poi  $A(x)$  e  $B(x)$ .

## ESEMPIO 17.16

Consideriamo l'equazione

$$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \log(1+x^2) \quad \text{per } x \in \mathbb{R}. \quad (17.38)$$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ , ossia  $(\lambda + 3)^2 = 0$ . La soluzione generale di  $y'' + 6y' + 9y = 0$  è  $Ae^{-3x} + Bxe^{-3x}$  ( $A, B \in \mathbb{R}$ ). Si cerca una soluzione della (17.38) del tipo

$$A(x)e^{-3x} + B(x)xe^{-3x}.$$

Per la (17.37) basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} A'e^{-3x} + B'xe^{-3x} = 0 \\ -3A'e^{-3x} + B'(-3x+1)e^{-3x} = e^{-3x} \log(1+x^2) \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} A' = -xB' \\ B' = \log(1+x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' = -x \log(1+x^2) \\ B' = \log(1+x^2). \end{cases}$$

Integrando per sostituzione ( $x^2 = s$ ) e successivamente per parti, si ha

$$\begin{aligned} A(x) &= - \int x \log(1+x^2) dx = - \frac{1}{2} \int \log(1+s) ds \\ &= - \frac{1}{2} s \log(1+s) + \frac{1}{2} \int \frac{s}{1+s} ds \\ &= - \frac{1}{2} s \log(1+s) + \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \log(1+s) \\ &= - \frac{1}{2} x^2 \log(1+x^2) + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(1+x^2). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda  $B(x)$ , si ha

$$B(x) = \int \log(1+x^2) dx = x \log(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Poiché

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \operatorname{arctg} x$$

si ottiene

$$\begin{cases} A(x) = - \frac{1}{2} x^2 \log(1+x^2) + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \\ B(x) = x \log(1+x^2) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x. \end{cases}$$

Dunque la soluzione generale della (17.38) è

$$y(x) = \alpha e^{-3x} + \beta x e^{-3x} + \frac{1}{2} ((x^2 - 1) \log(1+x^2) - 3x^2 + 4x \operatorname{arctg} x) e^{-3x}$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## 2. Metodo ad hoc

Qualche volta è possibile indovinare la forma di una soluzione particolare della (17.36) (certamente non era il caso dell'esempio precedente ...) ed evitare di applica-

re il metodo di variazione delle costanti. Nel seguito illustriamo alcuni esempi: per un caso più generale si rimanda alla (17.43).

**ESEMPIO 17.17**

Se  $g(x)$  è un polinomio di grado  $n$  conviene cercare una soluzione di tipo polinomiale, dello stesso grado  $n$  se  $c \neq 0$ , di grado  $n + 1$  se invece  $c = 0$  e  $b \neq 0$ .

a) Per determinare una soluzione particolare di

$$y'' + y = 3x^2 + x - 1 \quad (17.39)$$

si pone  $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Allora deve essere  $2a_2 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 3x^2 + x - 1$ , ovvero

$$\begin{cases} a_2 = 3 \\ a_1 = 1 \\ 2a_2 + a_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -1 - 2a_2 = -7 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 3. \end{cases}$$

La soluzione generale della (17.39) è allora  $y(x) = \alpha \cos x - \beta \sin x + 3x^2 + x - 7$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).

b) Una soluzione particolare di  $y'' + 4y' - 5y = 6$  è una soluzione costante:  $y = a_0$ . Ovviamente  $a_0 = -6/5$ .

c) Per trovare una soluzione particolare di

$$y'' + y' = 3x - 1 \quad (17.40)$$

si pone  $y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Dunque, deve essere  $2a_2 + 2a_2x + a_1 = 3x - 1$ , ovvero

$$\begin{cases} 2a_2 = 3 \\ 2a_2 + a_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 3/2 \\ a_1 = -1 - 2a_2 = -1 - 3 = -4. \end{cases}$$

La soluzione generale della (17.40) è allora  $y(x) = \alpha + \beta e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 4x$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).

**ESEMPIO 17.18**

Se  $g(x) = e^{\gamma x}$ , conviene cercare una soluzione particolare del tipo  $Ce^{\gamma x}$ . Se però  $e^{\gamma x}$  è soluzione dell'equazione omogenea  $ay'' + by' + cy = 0$ , si cerca una soluzione del tipo  $Cxe^{\gamma x}$  (se  $b^2 - 4ac > 0$ ) oppure  $Cx^2e^{\gamma x}$  (se  $b^2 - 4ac = 0$ , cioè se anche  $xe^{\gamma x}$  è soluzione di  $ay'' + by' + c = 0$ ).

a) Per trovare una soluzione particolare di  $y'' + y = a_0e^{\gamma x}$  ( $a_0, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$ ), si pone  $y(x) = Ce^{\gamma x}$ . Allora  $C\gamma^2 + C = a_0$ , ovvero  $C = a_0/(\gamma^2 + 1)$ , ovvero la soluzione generale è

$$y(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x + \frac{a_0}{\gamma^2 + 1} e^{\gamma x}.$$

b) Per trovare una soluzione particolare di  $y'' - y = a_0e^{\gamma x}$ , ( $a_0, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq 0$ ), si pone  $y(x) = Ce^{\gamma x}$ . Allora  $C\gamma^2 - C = a_0$ , ovvero  $C = a_0/(\gamma^2 - 1)$  se  $\gamma \neq \pm 1$ . Se  $\gamma = \pm 1$  si pone invece  $y(x) = Cxe^{\gamma x}$ , cioè

$$y' = C(1 + \gamma x)e^{\gamma x} \quad \text{e} \quad y'' = C(2\gamma + \gamma^2 x)e^{\gamma x}.$$

Dunque, se  $\gamma^2 = 1$ , deve essere

$$C(2\gamma + \gamma^2 x - x) = a_0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\gamma C = a_0 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{a_0}{2\gamma}.$$

**ESEMPIO 17.19**

Se  $g(x) = a_0e^{\gamma x} \cos(\delta x)$  oppure  $g(x) = b_0e^{\gamma x} \sin(\delta x)$  con  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}, \delta \neq 0$ , si pone

$$y(x) = e^{\gamma x}(C_1 \cos(\delta x) + C_2 \sin(\delta x))$$

tranne quando tale funzione è soluzione dell'equazione omogenea associata (in tal caso si pone  $y = xe^{\gamma x}(C_1 \cos(\delta x) + C_2 \sin(\delta x))$ ).

Per trovare una soluzione particolare di

$$y'' + y = 2 \sin(\delta x), \quad \delta > 0$$

si pone  $y(x) = C_1 \sin(\delta x) + C_2 \cos(\delta x)$ . Allora deve essere

$$\begin{cases} C_1(-\delta^2 + 1) = 2 \\ C_2(-\delta^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{1 - \delta^2} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e } \delta \neq 1$$

e la soluzione generale è

$$\alpha \cos x + \beta \sin x + \frac{2}{1 - \delta^2} \sin(\delta x) \quad \text{se } \delta \neq 1.$$

Se invece  $\delta = 1$  si pone  $y = C_1 x \sin x + C_2 x \cos x$ . Allora

$$y' = C_1 x \cos x - C_2 x \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y'' = -C_1 x \sin x - C_2 x \cos x + 2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x$$

ovvero

$$2C_1 \cos x - 2C_2 \sin x = 2 \sin x \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = 0, C_2 = -1$$

quindi la soluzione generale è

$$\alpha \cos x + \beta \sin x - x \cos x \quad \text{se } \delta = 1.$$

**Osservazione.** Per quanto visto negli esempi precedenti e sfruttando la linearità dell'equazione, è possibile determinare soluzioni particolari anche quando la funzione è, per esempio, combinazione lineare di  $e^{\gamma x}$ ,  $\cos(\omega x)$ ,  $x^n$ , ecc. Infatti, se  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$  sono soluzioni particolari rispettivamente di

$$ay'' + by' + cy = g_1(x) \quad \text{e} \quad ay'' + by' + cy = g_2(x)$$

allora  $\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$  è soluzione particolare di

$$ay'' + by' + cy = g_1(x) + g_2(x).$$

Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali:

a)  $y'' + 2y' = 0;$

f)  $y'' - 2y' + 4 = 0;$

b)  $y'' + 2y = 0;$

g)  $y'' + 2y' - 3y = e^{\lambda x};$

c)  $y'' + 2y' - 3y = 0;$

h)  $y'' + 2y' - 3y = \cos x;$

d)  $y'' + 6y' + 34y = 0;$

i)  $y'' + y = x^3 - x + 1.$

e)  $y'' + 6y' + 9y = 0;$

#### ESERCIZIO 17.6

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

a)  $\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = y'(0) = 0; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} y'' + y' + y = \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$

#### ESERCIZIO 17.7

Siano  $\omega_0, k > 0$  e  $g \in C(\mathbb{R})$ , e si consideri l'equazione differenziale  $y'' + 2k\omega_0 y' + \omega_0^2 y = g(x)$ .

a) Per  $g = 0$  determinare, al variare di  $k \in [0, +\infty)$ , la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $y(0) = y_0 > 0, y'(0) = 0$ , e calcolarne, se esiste, il limite per  $x \rightarrow +\infty$ ;

b) per  $g = f_0 \sin(\omega x)$  ( $\omega > 0$ ) e  $k \in (0, 1)$ , determinare l'integrale generale.

#### ESERCIZIO 17.8

Oscillatore armonico



## Guida

Il paragrafo è opzionale.

17.4 Equazioni lineari di ordine  $n$ 

Dato un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $n+1$  funzioni  $a_k \in C(I)$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) e  $g \in C(I)$ , consideriamo l'equazione lineare di ordine  $n$

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g. \quad (17.41)$$

Segue dal Teorema 17.6 che il problema di Cauchy per (17.41) con condizioni iniziali

$$y^{(k)}(x_0) = y_{0,k}, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad \mathbf{y}_0 = (y_{0,0}, \dots, y_{0,n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

ammette un'unica soluzione.

Le considerazioni svolte per caratterizzare l'integrale generale nel caso  $n = 2$  possono essere ripetute praticamente parola per parola. Le soluzioni  $y_1, \dots, y_n$  dell'equazione omogenea associata alla (17.41) si dicono linearmente indipendenti in  $I$  se e solo se

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(x) = 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Per caratterizzarle si introduce il determinante wronskiano

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Utilizzando l'esistenza e unicità per il problema di Cauchy, si ottiene che

$$y_1, \dots, y_n \text{ sono linearmente indipendenti in } I \Leftrightarrow \exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0.$$

Per esempio, sono linearmente indipendenti le  $n$  soluzioni del problema di Cauchy per (17.41) (con  $g = 0$ ) ottenute scegliendo come dato iniziale  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Si conclude che l'integrale generale di (17.41) è

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(x), \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,$$

dove  $y_1, \dots, y_n$  sono soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata alla (17.41) e  $\tilde{y}$  è una soluzione particolare della (17.41).

## ESEMPIO 17.20

Si consideri l'equazione  $y^{(4)} - y = -x^4$  in  $\mathbb{R}$ . Si verifica direttamente che le funzioni  $e^x$ ,  $e^{-x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  sono soluzioni dell'omogenea associata (lo studente controlli). Esse sono linearmente indipendenti:

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8$$

(abbiamo sommato la prima riga alla terza e la seconda alla quarta). Inoltre, si verifica direttamente che  $\tilde{y}(x) = x^4 + 24$  è una soluzione particolare (lo studente controlli). Perciò la soluzione generale è

$$y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} + \alpha_3 \cos x + \alpha_4 \sin x + x^4 + 24.$$

## Problema di Cauchy

## Integrale generale

Nel caso di equazioni a coefficienti costanti,  $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea associata si determinano generalizzando il caso  $n = 2$ . L'equazione caratteristica, ottenuta sostituendo  $y = e^{\lambda x}$  nella (17.41), è

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (17.42)$$

che, per il Corollario 1.20, ha radici reali oppure complesse coniugate:

$$\begin{array}{ll} \lambda_i \in \mathbb{R} & \text{con molteplicità } \ell_i, \quad i = 1, \dots, r \\ \mu_j \pm i\omega_j & \text{con molteplicità } m_j, \quad j = 1, \dots, s. \end{array}$$

Dalle radici si determinano, come per  $n = 2$ , le soluzioni; l'unica accortezza sarà quella di gestire le molteplicità (come per  $n = 2$  nel caso in cui il discriminante si annulla):

$$\left. \begin{array}{l} y(x) = x^k e^{\lambda_i x}, \\ y(x) = x^k e^{\mu_j x} \cos(\omega_j x) \\ y(x) = x^k e^{\mu_j x} \sin(\omega_j x) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{ll} k = 0, \dots, \ell_i - 1, & i = 1, \dots, r \\ k = 0, \dots, m_j - 1, & j = 1, \dots, s. \end{array}$$

Riconsideriamo l'equazione omogenea dell'Esempio 17.20,  $y^{(4)} - y = 0$ . L'equazione caratteristica si fattorizza in modo elementare:  $0 = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1)$ . Si ottengono quindi due radici reali,  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = -1$ , e due radici complesse coniugate,  $\mu_1 \pm i\omega_1 = \pm i$ , ciascuna con molteplicità 1, ovvero  $\ell_1 = \ell_2 = m_1 = 1$ . Perciò  $k = 0$  e sostituendo si ottiene  $y(x) = e^x$ ,  $y(x) = e^{-x}$ ,  $y(x) = \cos x$ ,  $y(x) = \sin x$ , le quattro soluzioni linearmente indipendenti introdotte in precedenza.

#### ESEMPIO 17.21

Per risolvere equazioni non omogenee a coefficienti costanti è necessario determinare una soluzione particolare. Il metodo sistematico si generalizza come segue: posto

$$\tilde{y}(x) = A_1(x)y_1(x) + \dots + A_n(x)y_n(x), \quad x \in I,$$

$\tilde{y}$  è una soluzione particolare se

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1'(x) \\ \vdots \\ A_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I.$$

Per ogni  $x \in I$  il sistema ammette un'unica soluzione  $(A_1(x), \dots, A_n(x))$  (in quanto  $W(x) \neq 0$ ), che integrata fornisce la soluzione particolare. Il metodo ad hoc si può formulare in generale come segue:

se  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  e  $g(x) = e^{\gamma x}(p_1(x) \cos(\delta x) + p_2(x) \sin(\delta x))$ , con  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$  e  $p_1, p_2$  polinomi di grado  $\leq m$ , allora esiste una soluzione particolare dell'equazione (17.41) del tipo

$$\tilde{y}(x) = x^k e^{\gamma x} (q_1(x) \cos(\delta x) + q_2(x) \sin(\delta x)), \quad q_1, q_2 \text{ polinomi di grado } \leq m, \quad (17.43)$$

dove  $k = 0$  se  $\gamma + i\delta$  non risolve l'equazione caratteristica (17.42), e altrimenti  $k \geq 1$  è la sua molteplicità.

Si vuole risolvere l'equazione  $y^{(4)} - y = -x^4$ . Si è già determinato l'integrale generale dell'omogenea nell'esempio precedente. Poiché  $\gamma = 0$  non è soluzione dell'equazione caratteristica, per la (17.43) si cerca una soluzione particolare del tipo  $\tilde{y}(x) = ax^4 + bx^3 + cx + d$ . Si ha  $\tilde{y}^{(4)}(x) = 24a$ , quindi sostituendo

$$24a - ax^4 - bx^3 - cx - d = -x^4 \Leftrightarrow a = 1, \quad b = c = 0, \quad d = 24,$$

ovvero  $\tilde{y}(x) = x^4 + 24$ . Si ritrova così l'integrale generale dell'Esempio 17.20.

Equazioni  
non omogenee  
a coefficienti costanti

#### ESEMPIO 17.22

## ESERCIZIO 17.9

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

a)  $y''' + y = 0$ ;

c)  $y''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$ ;

b)  $y^{(6)} - y = 0$ ;

d)  $y'''' + 4y'''' + 8y'' + 16y' + 16y = 0$ .

## Guida

Il paragrafo è opzionale.

## 17.5 Cenno ad alcune altre equazioni e metodi risolutivi

### 17.5.1 Riduzioni dell'ordine, equazioni di Legendre

In certe situazioni è possibile "ridurre l'ordine" di un'equazione differenziale. La prima situazione è molto semplice: se un'equazione differenziale di ordine  $n$  non dipende dalle prime  $k$  derivate della funzione incognita  $y$ ,

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (k \leq n-2)$$

allora può essere interpretata come un'equazione differenziale di ordine  $n - k - 1$  per  $y^{(k+1)}$ :

$$v^{(n-k-1)} = f(x, v, \dots, v^{(n-k-2)}) \quad v = y^{(k+1)}.$$

## ESEMPIO 17.23

Si vuole risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{x}{x^2 + 1} (y')^2 & \text{in } I \\ y(0) = 0, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Ponendo  $v = y'$ , si ottiene un'equazione del primo ordine a variabili separabili che possiamo integrare:

$$\frac{v'}{v^2} = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow -\frac{1}{v} = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C_0 \Rightarrow v = \frac{2}{C - \log(1+x^2)}$$

e da  $y'(0) = v(0) = 1$  segue  $C = 2$ . Perciò, utilizzando anche  $y(0) = 0$ , si ottiene

$$y(x) = \int_0^x \frac{2}{2 - \log(1+s^2)} ds \quad I = (-\sqrt{e^2 - 1}, \sqrt{e^2 - 1}).$$

## ESEMPIO 17.24

Si vuole determinare la soluzione generale dell'equazione

$$y'''' + y'' - 2y'' = 1.$$

Ponendo  $v = y''$  si ottiene un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti,  $v'' + v' - 2v = 1$ , il cui integrale generale è

$$v(x) = ae^x + be^{-2x} - \frac{1}{2}.$$

Due semplici integrazioni forniscono l'integrale generale

$$y(x) = Ae^x + Be^{-2x} + Cx + D - \frac{1}{4}x^2.$$

## Metodo di d'Alembert

Un secondo caso in cui è possibile ridurre l'ordine è quello di un'equazione *lineare omogenea*, quando sia già nota una soluzione  $y_1$ . In tal caso, è possibile determinare un'altra soluzione linearmente indipendente da  $y_1$  del tipo  $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ . Illustriamo questo metodo, detto anche **metodo di d'Alembert**, con un esempio.



Le equazioni di Legendre sono della forma

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(n(n+1) - \frac{m}{1-x^2}\right)y = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Consideriamo il caso  $n = 1, m = 0$ :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Si osserva subito che  $y_1(x) = x$  è una soluzione. Poniamo allora

$$y_2(x) = xv(x) \Rightarrow y_2' = v + xv', \quad y_2'' = 2v' + xv''$$

e sostituendo si ottiene

$$(1-x^2)(2v' + xv'') - 2x(v + xv') + 2xv = (x-x^3)v'' + 2(1-2x^2)v' = 0,$$

un'equazione lineare omogenea del primo ordine rispetto a  $v'$  che si può integrare con i metodi usuali (lo studente controlli) oppure moltiplicandola per  $x$  e osservando che

$$(x^2 - x^4)v'' + (2x - 4x^3)v' = ((x^2 - x^4)v')' = 0 \Rightarrow (x^2 - x^4)v' = C.$$

Con un'ulteriore integrazione si ottiene

$$v(x) = C \int \frac{1}{x^2 - x^4} dx = C \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = C \left( \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \frac{1}{x} \right) + D.$$

Pertanto la seconda soluzione dell'equazione di Legendre di ordine 1 (che si verifica facilmente essere linearmente indipendente da  $x$ ) è

$$y_2(x) = xv(x) = -1 + \frac{x}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad |x| \neq 1.$$

## ESEMPIO 17.25

## Equazioni di Legendre

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{a) } \begin{cases} y''' - 4y' = \cos x, & x \in I \\ y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y'' = 6x(y')^2, & x \in I \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

## ESERCIZIO 17.10

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \quad \text{in } (0, +\infty) \quad (y(x) = 1/x \text{ è soluzione});$$

$$\text{b) } \frac{x^2}{2} y'' - y = 0 \quad \text{in } (0, +\infty) \quad (y = x^2 \text{ è soluzione}).$$

## ESERCIZIO 17.11

## 17.5.2 Cambiamenti di variabile, equazioni di Eulero

In certi casi è possibile utilizzare dei cambiamenti di variabile per ricondurre un'equazione a una struttura a cui siano applicabili dei metodi risolutivi noti. Un tipico esempio è quello delle **equazioni di Eulero** (di secondo ordine):

$$x^2 y'' + bxy' + cy = g(x), \quad x > 0. \quad (17.44)$$

Effettuiamo un cambiamento della variabile  $x$  ponendo

$$x = e^s, \quad \hat{y}(s) = y(e^s).$$

Se  $y$  è soluzione della (17.44), allora

$$e^{2s}y''(e^s) + be^s y'(e^s) + cy(e^s) = g(e^s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$\frac{d\hat{y}}{ds} = e^s y'(e^s) \Rightarrow y'(e^s) = \frac{1}{e^s} \frac{d\hat{y}}{ds}$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{ds^2} = e^s y''(e^s) + e^{2s} y''(e^s) \Rightarrow y''(e^s) = \frac{1}{e^{2s}} \left( \frac{d^2\hat{y}}{ds^2} - \frac{d\hat{y}}{ds} \right)$$

sostituendo si ottiene che  $\hat{y}(s)$  risolve

$$\frac{d^2\hat{y}}{ds^2} + (b-1) \frac{d\hat{y}}{ds} + c\hat{y} = g(e^s).$$

Quest'ultima è un'equazione lineare a coefficienti costanti, quindi se ne determina la soluzione generale. Tornando alle variabili di partenza, si ottiene così la soluzione generale della (17.44).

### ESEMPIO 17.26

Si vuole determinare la soluzione generale dell'equazione

$$x^2 y'' + 3xy' + y = x, \quad x > 0.$$

Attraverso la sostituzione precedente si ottiene

$$\frac{d^2\hat{y}}{ds^2} + 2 \frac{d\hat{y}}{ds} + \hat{y} = e^s, \quad s \in \mathbb{R}$$

il cui integrale generale è (lo studente controlli)

$$\hat{y}(s) = Ae^{-s} + Bse^{-s} + \frac{1}{4}e^s.$$

Tornando alle variabili di partenza, si ottiene la soluzione generale

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B \log x}{x} + \frac{x}{4}.$$

Si noti che in questo caso la soluzione generale, a parte il caso particolare  $A = B = 0$ , diviene illimitata per  $x \rightarrow 0^+$ .

### ESERCIZIO 17.12

Determinare la soluzione generale delle seguenti equazioni:

a)  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \log x$ ;

b)  $x^2 y'' + xy' + y = x^2$ .

## 17.5.3 Equazioni autonome del secondo ordine

Un'equazione autonoma (ovvero indipendente da  $x$ ) del secondo ordine è del tipo

$$y'' = f(y, y').$$

Se la soluzione ammette soluzioni non costanti di classe  $C^2$ , esiste almeno un intervallo  $J$  in cui  $y$  è strettamente monotona, quindi invertibile: la funzione inversa  $y \mapsto x(y)$  verifica  $x'(y) = 1/(y'(x(y)))$ . Posto  $v(y) = y'(x(y))$ , si ottiene quindi

$$v'(y) = y''(x(y)) x'(y) = f(y, y'(x(y))) \frac{1}{y'(x(y))} = \frac{f(y, v)}{v},$$

un'equazione del *primo ordine* in  $v$  per la quale si hanno a disposizione più metodi di integrazione. Si ricordi che abbiamo *ipotizzato* che  $y$  sia monotona: si tratta quindi di un tipico *procedimento formale* e si dovrà porre attenzione a verificare successivamente la validità dei risultati ottenuti.

Si vuole risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = f(y, y') := \frac{(y')^2}{2y} (1 - \sqrt{y}) & x \in I \\ y(e) = 1, y'(e) = 2/e. \end{cases}$$

Il Teorema 17.6 garantisce esistenza e unicità di una soluzione in un intorno di  $x = e$ ; poiché  $y'(e) = 2/e > 0$ , tale soluzione è strettamente crescente, ovvero  $y' > 0$ , in un intorno di  $x = e$ . Ponendo  $v(y) = y'(x(y)) (> 0!)$  e procedendo come descritto prima, si ottiene

$$v'(y) = \frac{v}{2y} (1 - \sqrt{y}), \quad y > 0, \quad v > 0,$$

un'equazione a variabili separabili del primo ordine in  $v$ : quindi

$$\log|v| = \int \left( \frac{1}{2y} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) dy = \frac{1}{2} \log y - \sqrt{y} + C \Rightarrow v(y) = C\sqrt{y}e^{-\sqrt{y}},$$

ovvero, ricordando che  $v(y) = y'(x(y))$  e che  $v(1) = y'(x(1)) = y'(e) = 2/e$ ,

$$y'(x) = 2\sqrt{y(x)}e^{-\sqrt{y(x)}},$$

un'altra equazione a variabili separabili. Integrando ancora una volta e utilizzando le condizioni iniziali, si ottiene  $e^{\sqrt{y(x)}} = x$ ; invertendo la formula, si ottiene

$$y(x) = (\log x)^2, \quad \text{definita per } x \in (0, +\infty).$$

Verifichiamo il risultato ottenuto. Anzitutto è necessario che  $(y, y') \in \text{dom } f$ , ovvero  $y(x) > 0$ ; quindi  $x \neq 1$ . Poiché il punto iniziale  $x = e$  è maggiore di 1, consideriamo  $y(x) = (\log x)^2$  per  $x > 1$ : si verifica facilmente che si tratta effettivamente della soluzione in  $(1, +\infty)$ , l'intervallo massimale di esistenza. In conclusione la soluzione cercata è

$$y(x) = (\log x)^2, \quad x \in I := (1, +\infty).$$

## ESEMPIO 17.27

Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

- a)  $y'' = 12y^2, y(0) = 1/2, y'(0) = 1$ ;  
 b)  $y'' = 6y^2 - 4y, y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = -4$ .

## ESERCIZIO 17.13

### 17.5.4 Metodo di Frobenius, equazioni di Bessel

In taluni casi è possibile determinare una soluzione analitica di un'equazione differenziale lineare utilizzando il suo sviluppo in serie di potenze, particolarmente utile quando non sia possibile esprimere in termini di funzioni elementari la soluzione del problema.

Per spiegare il metodo, anche detto **metodo di Frobenius**, cominciamo con l'esempio dell'oscillatore armonico, di cui conosciamo già la soluzione generale.

Consideriamo l'equazione

$$y'' + y = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (17.45)$$

ignorando il fatto di conoscere già la soluzione generale,  $\alpha \cos x + \beta \sin x$ . Supponiamo invece che

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

## ESEMPIO 17.28



abbia raggio di convergenza  $\rho > 0$  e che  $y$  sia soluzione della (17.45).

Allora, per il Teorema 9.10 si ha, per  $|x| < \rho$ ,

$$\begin{cases} y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \dots \\ y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + (k+1)a_{k+1}x^k + (k+2)a_{k+2}x^{k+1} + \dots \\ y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k + \dots, \end{cases} \quad (17.46)$$

ossia

$$y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)(k+2)a_{k+2} + a_k)x^k.$$

Allora deve essere

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + a_k = 0 \quad \text{per } k \in \mathbb{N}$$

ovvero si è giunti a una formula di ricorrenza:

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}a_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (17.47)$$

Pensando al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

si osservi che

$$y(0) = a_0 \quad \text{e} \quad y'(0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta.$$

Applicando la (17.47) successivamente per  $k = 0, k = 1, k = 2$ , ecc., si trova

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2} = -\frac{1}{2}\alpha & a_3 &= -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3!}\beta & a_4 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{4!}\alpha & a_5 &= -\frac{a_3}{4 \cdot 5} = \frac{1}{5!}\beta \\ a_6 &= -\frac{a_4}{5 \cdot 6} = -\frac{1}{6!}\alpha & a_7 &= -\frac{a_5}{6 \cdot 7} = -\frac{1}{7!}\beta & a_8 &= -\frac{a_6}{7 \cdot 8} = \frac{1}{8!}\alpha \quad \text{ecc.} \end{aligned}$$

Non è difficile determinare la formula generale per  $a_k$ , basta distinguere i casi in cui  $k$  è pari e  $k$  è dispari:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\alpha \quad \text{e} \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\beta \quad \text{per } k \in \mathbb{N}$$

ovvero

$$y(x) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (17.48)$$

in cui si riconoscono la serie di potenze per  $\cos x$  e  $\sin x$ .

Per giustificare il metodo possiamo ragionare come segue: una volta trovata la formula (17.48), si determina il raggio di convergenza della serie di potenze (nel caso specifico  $\rho = +\infty$ ). Allora tutti i passaggi fatti in precedenza sono rigorosi per  $|x| < \rho$  e quindi la (17.48) rappresenta una soluzione analitica dell'equazione per  $|x| < \rho$  (nel caso specifico per  $x \in \mathbb{R}$ ).

Ora applichiamo il metodo all'equazione di Bessel di ordine zero

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad \text{per } x > 0. \quad (17.49)$$

Si vuole determinare, se esiste, una soluzione della (17.49) analitica in un intorno di  $x = 0$ . Dunque, poniamo

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (17.50)$$

Utilizzando la (17.46) si trova che

$$\begin{aligned} xy''(x) &= 2a_2x + 6a_3x^2 + \dots + (k+1)(k+2)a_{k+2}x^{k+1} + \dots \\ xy(x) &= a_0x + a_1x^2 + \dots + a_kx^{k+1} + \dots \\ y'(x) &= a_1 + 2a_2x + \dots + (k+2)a_{k+2}x^{k+1} + \dots \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} xy'' + y' + xy &= a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1+1)a_{k+2} + a_k)x^{k+1} \\ &= a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)^2 a_{k+2} + a_k)x^{k+1}. \end{aligned}$$

Dunque deve essere

$$a_1 = 0 \quad (17.51)$$

e

$$a_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)^2} a_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (17.52)$$

Applicando successivamente la (17.52) per  $k=1, k=3$ , ecc. si ottiene dalla (17.51) che

$$a_k = 0 \quad \text{se } k \text{ è dispari.}$$

Se  $k$  è pari, si riscrive la (17.52) come

$$a_{k+2} = -\frac{1}{2^2 \left(\frac{k}{2} + 1\right)^2} a_k$$

e si trova successivamente

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2^2} & a_4 &= -\frac{a_2}{2^2 2^2} = \frac{1}{2^4} \frac{a_0}{2^2} & a_6 &= -\frac{a_4}{2^2 3^2} = -\frac{a_0}{2^6} \frac{1}{(3!)^2} \\ a_8 &= -\frac{a_6}{2^2 4^2} = \frac{a_0}{2^8 (4!)^2} & a_{10} &= -\frac{a_8}{2^2 5^2} = -\frac{a_0}{2^{10} (5!)^2} \text{ ecc.} \end{aligned}$$

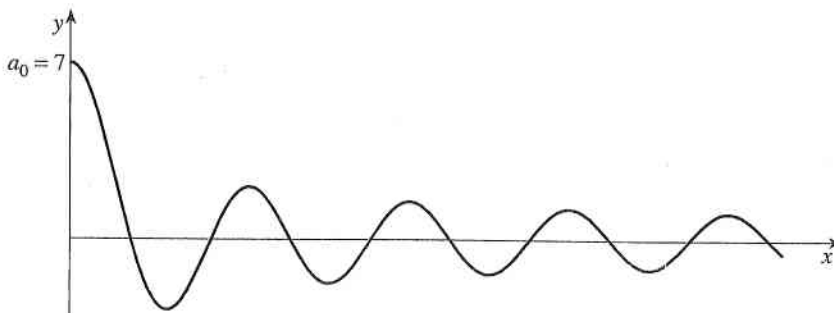
ovvero

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} (k!)^2} \quad \text{per } k \in \mathbb{N}.$$

Sostituendo nella serie di potenze l'espressione dei coefficienti otteniamo

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \text{per } x \geq 0. \quad (17.53)$$

Il raggio di convergenza è  $+\infty$ , quindi la serie di potenze è convergente ed è soluzione della (17.49) per  $x > 0$ . Il grafico è riportato in Figura 17.4.



**Figura 17.4** La funzione di Bessel di ordine 0.

Analizziamo il risultato. La (17.53) rappresenta una famiglia a un parametro di soluzioni: poiché  $y(0) = a_0$ , la costante moltiplicativa  $a_0$  rappresenta il valore della soluzione in  $x = 0$ , ovvero una condizione iniziale se si pensa al problema di Cauchy. D'altra parte, essendo l'equazione del secondo ordine, si potrebbe pensare che sia necessaria un'ulteriore condizione iniziale,  $y'(0) = \beta$ . In questo caso non è così: per la (17.51) si ha  $y'(0) = 0$ , cioè la condizione  $y'(0) = 0$  è contenuta implicitamente nell'equazione di Bessel e nell'ipotesi che la soluzione sia analitica in un intorno di  $x = 0$ . Ciò non contraddice in Teorema 17.7 poiché la (17.49) si scrive in forma normale come

$$y'' = -\frac{1}{x}y' - y$$

quindi il coefficiente del termine di ordine 1 non è continuo in 0 e il teorema non è applicabile.

Si osservi che la condizione  $y'(0) = 0$  si può ricavare a priori, direttamente dall'equazione, purché si assuma che la soluzione abbia derivata seconda limitata in un intorno di  $x = 0$ :

$$y' = -x(y'' + y) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad x \rightarrow 0^+.$$

Si può far vedere che esiste un'altra famiglia a un parametro di soluzioni, definite in tutto l'intervallo  $(0, +\infty)$ , che non sono limitate per  $x \rightarrow 0^+$ .

#### ESERCIZIO 17.14

Sia  $n \in \mathbb{N}$ . Determinare una soluzione

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+2k} \quad (a_0 = 1)$$

dell'equazione di Bessel di ordine  $n$ ;

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad \text{se } x > 0.$$

Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze.

#### Guida

Il paragrafo è utilizzato per discutere la stabilità di sistemi autonomi (seconda parte del Paragrafo 17.7), che a sua volta è opzionale.

#### Sistemi lineari omogenei

## 17.6 Sistemi di equazioni lineari del primo ordine

La caratterizzazione delle soluzioni di equazioni lineari del secondo ordine (Paragrafo 17.3) e di ordine  $n$  (Paragrafo 17.4) può essere ulteriormente generalizzata al caso di sistemi lineari del primo ordine (anzi, si sarebbe potuta ottenere come conseguenza di quanto si dirà adesso; non è stato fatto al solo scopo di introdurre gli argomenti in modo più graduale).

Cominciamo considerando il seguente sistema di equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad \text{per } x \in I \quad (17.54)$$

dove  $I$  è un intervallo aperto e le funzioni  $a_{ij} \in C(I)$  sono assegnate. Posto



$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in I \quad (17.55)$$

il sistema si riscrive in forma compatta come

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} \quad \text{per } x \in I. \quad (17.56)$$

Il seguente risultato mostra che se una combinazione lineare di soluzioni di (17.56) si annulla in un punto, allora è identicamente nulla.

#### LEMMA 17.12

Siano  $a_{ij} \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $A$  definita dalla (17.55),  $x_0 \in I$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ . Se  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  sono soluzioni del sistema  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  in  $I$ , allora

$$\alpha_1 \mathbf{y}_1(x_0) + \dots + \alpha_m \mathbf{y}_m(x_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + \alpha_m \mathbf{y}_m(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I.$$

#### Dimostrazione

Per la linearità del sistema, la combinazione lineare delle soluzioni  $\mathbf{y}_i$ ,  $\mathbf{z} := \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{y}_m$ , è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = A(x)\mathbf{z} & \text{in } I \\ \mathbf{z}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Per il Teorema 17.6,  $\mathbf{z}$  è l'unica soluzione:  $\mathbf{z}(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ , ossia

$$\mathbf{z}(x) = \alpha_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + \alpha_m \mathbf{y}_m(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I.$$

Il lemma precedente suggerisce di definire il concetto di *soluzioni linearmente indipendenti* nel seguente modo.

#### DEFINIZIONE 17.13

Siano  $a_{ij} \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$  e  $A$  definita dalla (17.55);  $m$  soluzioni  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  del sistema  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  in  $I$  si dicono **linearmente indipendenti** se

$$\alpha_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + \alpha_m \mathbf{y}_m(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in I \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

si dicono **linearmente dipendenti** se non sono linearmente indipendenti.

Infatti, segue dal Lemma 17.12 che  $m$  soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono i vettori  $\mathbf{y}_1(x_0), \dots, \mathbf{y}_m(x_0)$  per qualche  $x_0 \in I$ . Si può ora caratterizzare la *soluzione generale* (o *integrale generale*) del sistema (17.56).

#### TEOREMA 17.14

Siano  $a_{ij} \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$  e sia  $A$  definita dalla (17.55).

- (i) Esistono  $n$  soluzioni linearmente indipendenti del sistema  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  in  $I$ .
- (ii) Date  $n$  soluzioni linearmente indipendenti  $\mathbf{y}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  del sistema  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  in  $I$ , le soluzioni del sistema  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  in  $I$  sono tutte e sole le combinazioni lineari di  $\mathbf{y}_i$ :

$$\bar{\mathbf{y}} \text{ è soluzione di } \mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} \text{ in } I \Leftrightarrow \bar{\mathbf{y}}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i(x) \text{ se } x \in I \quad (a_i \in \mathbb{R}).$$

## Dimostrazione

(i) Per il Teorema 17.6, per ogni  $i = 1, \dots, n$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} & \text{per } x \in I \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{e}_i \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in  $I$ ,  $\mathbf{y}_i$ . Per il Lemma 17.12 e per l'indipendenza lineare di  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , le soluzioni  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  sono linearmente indipendenti.

(ii) Per la struttura lineare del problema, ogni combinazione lineare di  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  è soluzione di  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$  in  $I$ . Viceversa, preso  $x_0 \in I$ , per l'indipendenza lineare di  $\mathbf{y}_1(x_0), \dots, \mathbf{y}_n(x_0)$  esistono costanti  $a_1, \dots, a_n$  tali che  $\tilde{\mathbf{y}}(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i(x_0)$ . Quindi, per il Lemma 17.12,  $\tilde{\mathbf{y}}(x)$  e  $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{y}_i(x)$  coincidono.

## Sistemi non omogenei

Anche nel caso dei sistemi di equazioni lineari *non omogenee* i risultati nel caso  $n = 1$  si generalizzano facilmente. Siano  $a_{ij} \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$ , sia  $A$  definita dalla (17.55) e sia  $\mathbf{b}(x)$  il vettore in  $\mathbb{R}^n$  di componenti  $b_i \in C(I)$  per  $i, j = 1, \dots, n$ ; allora la soluzione generale dell'sistema di equazioni lineari non omogenee

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad \text{in } I$$

è del tipo  $\mathbf{y}(x) + \tilde{\mathbf{y}}(x)$ , dove  $\mathbf{y}(x)$  è la soluzione generale del sistema lineare omogeneo associato,  $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}(x)$  in  $I$ , e  $\tilde{\mathbf{y}}(x)$  è una soluzione (detta "soluzione particolare") del sistema lineare non omogeneo.

### 17.6.1 Sistemi di equazioni lineari omogenee del primo ordine a coefficienti costanti

Se la matrice  $A(x)$  non dipende da  $x$ ,  $A(x) = A$ , è possibile determinare esplicitamente  $n$  soluzioni linearmente indipendenti di  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ . L'idea generale è di cercare  $n$  soluzioni del tipo  $\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda_j x} \mathbf{v}_j$ , con  $\lambda_j$  e  $\mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  scelti opportunamente. Sostituendo nel sistema  $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$  e dividendo per  $e^{\lambda_j x}$  si ottiene

$$\lambda_j \mathbf{v}_j = A\mathbf{v}_j \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda_j \text{Id})\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

dove  $\text{Id}$  è la matrice identità, con 1 sulla diagonale e 0 altrimenti:

$$A - \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & A_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Quindi  $\lambda_j$  è un autovalore della matrice  $A$  e  $\mathbf{v}_j$  un autovettore associato. (si veda l'Appendice di Algebra lineare in rete). Ma un autovalore (ovvero una soluzione dell'equazione caratteristica  $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$ , un'equazione polinomiale di grado  $n$ ) non è necessariamente un numero reale; è quindi da vedere come utilizzare eventuali autovalori complessi.

Per semplicità di esposizione ci limitiamo al caso di due equazioni:

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}, \quad \text{ovvero } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (17.57)$$

In questo caso l'equazione caratteristica è quadratica:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda \text{Id}) &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0.\end{aligned}$$

Nei tre esempi successivi distinguiamo i tre casi in cui l'equazione caratteristica  $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$  ha, rispettivamente,

- 1) due soluzioni reali distinte,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;
- 2) due soluzioni complesse coniugate,  $\lambda = \mu \pm i\omega \in \mathbb{C}$  ( $\omega \neq 0$ );
- 3) una sola soluzione reale,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Caso 1.** L'equazione caratteristica associata al sistema

$$\begin{cases} u' = u + 2v \\ v' = 5u - 2v \end{cases} \text{ per } x \in \mathbb{R} \quad (17.58)$$

è  $(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 10 = 0$ , ovvero  $\lambda^2 + \lambda - 12 = (\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0$ ; quindi gli autovalori sono  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = 3$ .

Cerchiamo anzitutto una soluzione del tipo  $\mathbf{y}_1 = e^{-4x}(u_1, v_1)$ , dove  $(u_1, v_1) \neq (0, 0)$  è un autovettore di  $A$  associato a  $\lambda_1 = -4$ :

$$\begin{cases} u_1 + 2v_1 = -4u_1 \\ 5u_1 - 2v_1 = -4v_1 \end{cases} \Leftrightarrow 5u_1 + 2v_1 = 0, \text{ per esempio } (u_1, v_1) = (2, -5).$$

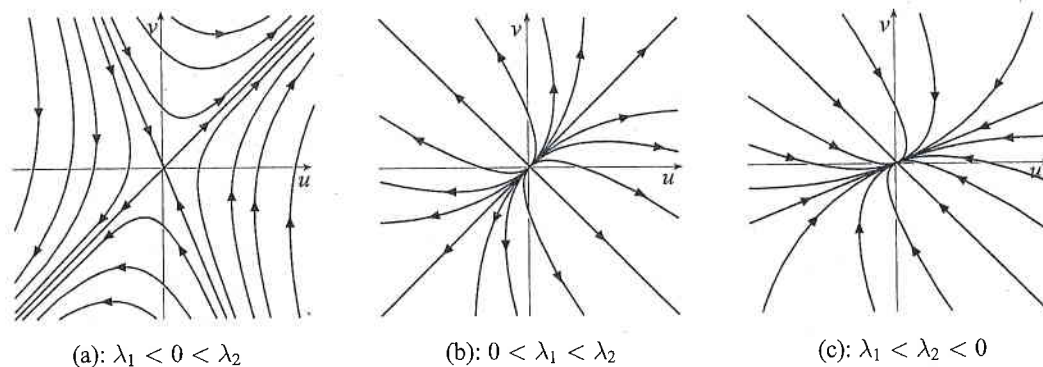
Analogamente, cercando una soluzione del tipo  $\mathbf{y}_2 = e^{3x}(u_2, v_2)$ , si trova l'autovettore  $(u_2, v_2) = (1, 1)$ . Le soluzioni

$$\mathbf{y}_1(x) = (u_1(x), v_1(x)) = (2e^{-4x}, -5e^{-4x}) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_2(x) = (u_2(x), v_2(x)) = (e^{3x}, e^{3x})$$

sono linearmente indipendenti, quindi la soluzione generale di (17.58) è

$$u(x) = 2ae^{-4x} + be^{3x}, \quad v(x) = -5ae^{-4x} + be^{3x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Nella Figura 17.5a sono state rappresentate alcune soluzioni del sistema (17.58) come sostegni delle curve  $x \mapsto (u(x), v(x))$ ; in particolare le frecce indicano la loro orientazione rispetto al parametro  $x$ . Si riconosce un chiaro significato geometrico degli autovalori  $-4$  e  $3$ , infatti tale figura è tipica per il caso di due autovalori reali di segno opposto:  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Nella Figura 17.5b e 17.5c sono indicate le situazioni tipiche di, rispettivamente, due autovalori reali distinti e *positivi* e due autovalori reali distinti e *negativi*.



**Figura 17.5** Soluzioni  $(u(x), v(x))$  di (17.57) con autovalori reali.

**Caso 2.** L'equazione caratteristica associata al sistema

$$\begin{cases} u' = -4u - v \\ v' = 2u - 2v \end{cases} \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

**ESEMPIO 17.30**



è  $(-4 - \lambda)(-2 - \lambda) + 2 = 0$ , ovvero  $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ . I due autovalori sono  $-3 \pm i \notin \mathbb{R}$ , ma ricordando che  $e^{-3x+ix} = e^{-3x}(\cos x + i \sin x)$  si può intuire che le soluzioni sono tutte del tipo

$$u(x) = e^{-3x}(A \cos x + B \sin x), \quad v(x) = e^{-3x}(a \cos x + b \sin x).$$

Sostituendo e dividendo per  $e^{-3x}$  si trova

$$\begin{cases} (-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \sin x = (-4A - a) \cos x + (-4B - b) \sin x \\ (-3a + b) \cos x + (-a - 3b) \sin x = (2A - 2a) \cos x + (2B - 2b) \sin x. \end{cases}$$

Raccogliendo i coefficienti di  $\cos x$  e  $\sin x$  si ha

$$\begin{cases} -3A + B = -4A - a \\ -A - 3B = -4B - b \\ -3a + b = 2A - 2a \\ -a - 3b = 2B - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -a \\ -A + B = -b \\ -a + b = 2A \\ -a - b = 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -A - B \\ b = A - B, \end{cases}$$

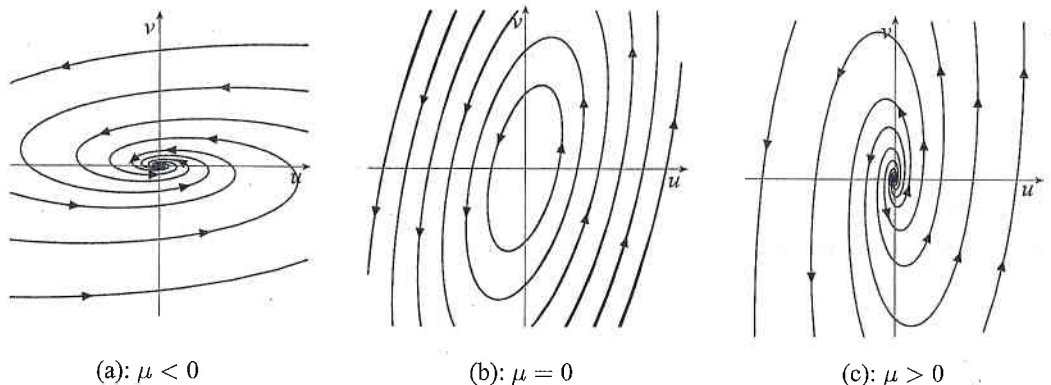
quindi si ottiene la soluzione

$$\begin{cases} u(x) = e^{-3x}(A \cos x + B \sin x) \\ v(x) = e^{-3x}((-A - B) \cos x + (A - B) \sin x) \end{cases} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Si tratta effettivamente della soluzione generale, essendo una combinazione lineare di due soluzioni linearmente indipendenti.

Nella Figura 17.6a sono indicate alcune soluzioni. Il comportamento è tipico per il caso di due autovalori complessi coniugati  $\mu \pm i\omega$  se  $\mu < 0$ . Se invece  $\mu = 0$  o  $\mu > 0$ , si ottengono soluzioni come quelle indicate nella Figura 17.6b e 17.6c.

**Figura 17.6** Soluzioni  $(u(x), v(x))$  di (17.57) con  $\lambda = \mu \pm i\omega$ ,  $\omega \neq 0$ .



(a):  $\mu < 0$

(b):  $\mu = 0$

(c):  $\mu > 0$

### ESEMPIO 17.31

**Caso 3.** L'equazione caratteristica associata al sistema

$$\begin{cases} u' = u + v \\ v' = -u + 3v \end{cases} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

è  $(1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = 0$  ovvero  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ . Cerchiamo una soluzione del tipo  $y_1 = e^{2x}(u_1, v_1)$ , dove  $(u_1, v_1) \neq (0, 0)$  è un autovettore di  $A$  associato a  $\lambda = 2$ :

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2u_1 \\ -u_1 + 3v_1 = 2v_1 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = u_1, \quad \text{per esempio } (u_1, v_1) = (1, 1).$$

Abbiamo quindi trovato la soluzione  $y_1(x) = (e^{2x}, e^{2x})$ . Per trovarne un'altra risulta opportuno cercare una soluzione del tipo

$$y_2(x) = (u_1 x e^{2x} + A e^{2x}, v_1 x e^{2x} + B e^{2x}) = ((x + A)e^{2x}, (x + B)e^{2x}).$$

Sostituendo e dividendo per  $e^{2x}$  si trova

$$\begin{cases} 2x + 1 + 2A = 2x + A + B \\ 2x + 1 + 2B = 2x - A + 3B \end{cases} \Leftrightarrow B = A + 1, \quad \text{per esempio } A = 0, B = 1.$$

Così abbiamo trovato una seconda soluzione,  $y_2(x) = (xe^{2x}, (x+1)e^{2x})$ . Le due soluzioni sono linearmente indipendenti, quindi la soluzione generale è

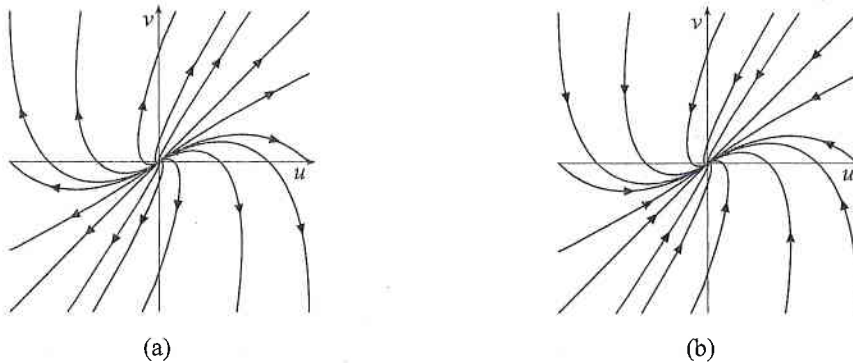
$$u(x) = (a + bx)e^{2x}, \quad v(x) = (a + b(1+x))e^{2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

(si veda Figura 17.7a).

In generale, se  $\lambda \in \mathbb{R}$  è l'unico autovalore di  $A$  con autovalore associato  $(u_1, v_1)$ , oltre alla soluzione  $(u_1 e^{\lambda x}, v_1 e^{\lambda x})$  ne esiste una del tipo

$$(u_1 x e^{\lambda x} + A e^{\lambda x}, v_1 x e^{\lambda x} + B e^{\lambda x}).$$

Dal punto di vista qualitativo, il caso di una sola soluzione reale  $\lambda$  è descritto dalla Figura 17.7a se  $\lambda > 0$  e dalla Figura 17.7b se  $\lambda < 0$ .



**Figura 17.7** Soluzioni  $(u(x), v(x))$  di (17.57) con  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ :  $\lambda > 0$  (a) o  $\lambda < 0$  (b).

Come si è già osservato, una equazione lineare del secondo ordine si lascia riscrivere come un sistema di due equazioni del primo ordine: in particolare, nel caso di coefficienti costanti

Equazioni del secondo ordine

$$\text{se } y'' + by' + cy = 0, \text{ posto } (u, v) := (y, y') \text{ si ha } \begin{cases} u' = v \\ v' = -cu - bv, \end{cases}$$

e l'equazione caratteristica coincide con quella già incontrata:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -c \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + b\lambda + c.$$

I grafici qualitativi delle Figure 17.5 e 17.6 si interpretano come *traiettorie* della coppia  $(y(x), y'(x))$  nel piano  $(y, y')$ , detto *piano delle fasi*. La rappresentazione nel piano delle fasi ha senso anche per equazioni non lineari (autonome) ed è di grande utilità nell'analisi qualitativa delle soluzioni.

Piano delle fasi

Determinare la soluzione generale dei seguenti sistemi:

$$\text{a) } \begin{cases} u' = u - v \\ v' = 5u - v \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u' = -2u + \frac{1}{2}v \\ v' = 2u - 2v. \end{cases}$$

ESERCIZIO 17.15

## 17.7 Cenno al concetto di stabilità

Consideriamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$y' = f(y) \quad \text{in } \mathbb{R} \quad (17.59)$$

Guida

Il paragrafo è opzionale.

Soluzione  
stazionaria

ESEMPIO 17.32

dove  $f \in C(\mathbb{R})$ . Si noti che  $f$  non dipende dalla variabile  $x$ , quindi l'equazione è *autonoma*. Come abbiamo osservato nel Paragrafo 17.2.1, se  $a \in \mathbb{R}$  è uno zero di  $f$ , ossia  $f(a) = 0$ , la funzione costante  $y(t) = a$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) è soluzione della (17.59); essa è anche detta **soluzione stazionaria** della (17.59). Il termine "stazionaria" fa riferimento a una *situazione dinamica*, ovvero a un problema che dipende dal *tempo*  $t$ , e questo è anche il motivo per il quale in questo paragrafo sceglieremo, come nell'introduzione,  $t$  come variabile indipendente.

L'equazione  $y' = y(1 - y^2)$  ha tre soluzioni stazionarie:  $y = 0$  e  $y = \pm 1$ . Per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(1 - y^2) & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (17.60)$$

procediamo formalmente. Si ha

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{y'}{y(1 - y^2)} dy = t$$

e calcolando la primitiva si trova una formula esplicita per la soluzione:

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + (1 - y_0^2)e^{-2t}}} \quad \text{per ogni } y_0 \in \mathbb{R}. \quad (17.61)$$

Si noti che, per  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$y(t) \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } y_0 > 0 \\ -1 & \text{se } y_0 < 0. \end{cases} \quad (17.62)$$

Nell'esempio precedente, se inizialmente la soluzione non è esattamente uguale alla soluzione stazionaria  $y = 0$ , col trascorrere del tempo tende ad allontanarsi da  $y = 0$  e ad avvicinarsi alle soluzioni stazionarie  $y = \pm 1$ . È quindi naturale chiamare *stabili* le soluzioni stazionarie  $y = \pm 1$  e *instabile* la soluzione stazionaria  $y = 0$ . Formalizziamo tali concetti per il problema

$$\begin{cases} y' = f(y) & \text{per } t > 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (17.63)$$

DEFINIZIONE 17.15

Siano  $J$  un intervallo aperto,  $f \in C^1(J)$  e  $a \in J$  tale che  $f(a) = 0$ . Per  $y_0 \in J$ , sia  $y(t; y_0)$  la soluzione del problema (17.63) nell'intervallo massimale di esistenza  $[0, T_{y_0})$  ( $0 < T_{y_0} \leq +\infty$ ). Allora la soluzione stazionaria  $y = a$  di  $y' = f(y)$  si dice

(i) **stabile** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|y_0 - a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} T_{y_0} = +\infty \\ |y(t; y_0) - a| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{per ogni } t > 0, \quad (17.64)$$

(ii) **asintoticamente stabile** se oltre alla (17.64) vale

$$|y_0 - a| < \delta \Rightarrow y(t; y_0) \rightarrow a \quad \text{per } t \rightarrow +\infty,$$

(iii) **instabile** se non è stabile.

Per la (17.62), le soluzioni  $y = \pm 1$  dell'esempio precedente sono *asintoticamente stabili*. Si noti che anche senza eseguire calcoli espliciti è facile intuire la differenza tra  $y = 0$  e  $y = \pm 1$  dal punto di vista della stabilità: il segno di  $y'$  è determinato dal segno di  $f(y) = y(1 - y^2)$ ; quindi, come illustrato in Figura 17.8, se per esempio  $y_0 > 1$  allora  $y' < 0$  e  $y$  decresce (ovvero si avvicina a 1), mentre se  $y_0 \in (0, 1)$  allora  $y$  cresce (ovvero si allontana da 0 e si avvicina a 1).



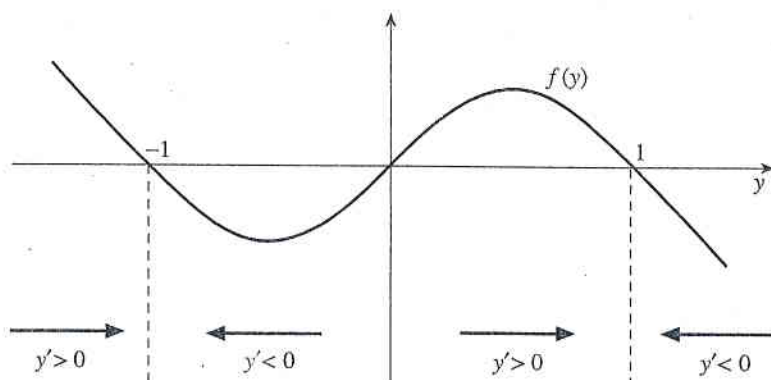


Figura 17.8 Grafico di  $f(y)$  e direzioni di  $y(x)$ .

Questo ragionamento sta alla base del seguente risultato.

### TEOREMA 17.16

Siano soddisfatte le ipotesi della Definizione 17.15.

(i) Se esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che

$$f \geq 0 \text{ in } [a - \varepsilon_0, a) \quad \text{e} \quad f \leq 0 \text{ in } (a, a + \varepsilon_0] \quad (17.65)$$

allora  $y = a$  è stabile, ed è asintoticamente stabile se la (17.65) è verificata con disuguaglianze strette.

(ii) Se esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che

$$f < 0 \text{ in } [a - \varepsilon_0, a) \quad \text{o} \quad f > 0 \text{ in } (a, a + \varepsilon_0] \quad (17.66)$$

allora  $y = a$  è instabile.

Dimostrazione

Se  $f'(a) \neq 0$  si può usare il segno di  $f'(a)$  per distinguere i casi (17.65) e (17.66):

$$\text{lo zero } a \text{ di } f \text{ è } \begin{cases} \text{asintoticamente stabile se } f'(a) < 0 \\ \text{instabile se } f'(a) > 0. \end{cases} \quad (17.67)$$

La Definizione 17.15 si generalizza immediatamente al caso di *sistemi autonomi*

$$y' = f(y)$$

sostituendo alla distanza  $|y(t) - a|$  la distanza  $\|y(t) - \mathbf{a}\|$ , dove  $\mathbf{a}$  è uno zero di  $\mathbf{f}$ , ovvero  $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ . In particolare, nel caso del sistema lineare studiato nel paragrafo precedente,

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \quad \text{per } t \in \mathbb{R},$$

$(0, 0)$  è una soluzione stazionaria e la sua stabilità dipende dalla distanza tra  $(u(t), v(t))$  e  $(0, 0)$ . In tal modo segue subito dalle Figure 17.5, 17.6 e 17.7, o più precisamente dalle soluzioni generali sulle quali tali figure si basano, che

- $(0, 0)$  è stabile se *tutti gli autovalori*  $\lambda$  della matrice dei coefficienti hanno parte reale non positiva:  $\text{Re } \lambda \leq 0$ ;
- $(0, 0)$  è asintoticamente stabile se *tutti gli autovalori*  $\lambda$  della matrice dei coefficienti hanno parte reale negativa:  $\text{Re } \lambda < 0$ ;
- $(0, 0)$  è instabile se *almeno un autovalore*  $\lambda$  della matrice dei coefficienti ha parte reale positiva:  $\text{Re } \lambda > 0$ .

Infatti, se per esempio i due autovalori sono reali ma di segno opposto, “quasi” tutte le soluzioni si allontanano da  $(0, 0)$  con l'aumentare del tempo  $t$  (si veda la Figura 17.5a), mentre se tutti gli autovalori hanno parte reale positiva,  $\text{Re } \lambda > 0$ , tut-

te le soluzioni tranne la stazionaria,  $(0, 0)$ , si allontanano da  $(0, 0)$  con l'aumentare del tempo  $t$  (si vedano le Figure 17.5b e 17.5c).

In altre parole, se il sistema di equazioni differenziali descrive un processo dinamico, le soluzioni stazionarie stabili sono le uniche che "si vedono" in una situazione realistica di equilibrio. È vero che una soluzione stazionaria è soluzione del problema, ma in una situazione realistica sono sempre presenti piccole perturbazioni che hanno la tendenza a portare le soluzioni "lontano" dalle soluzioni stazionarie instabili.

**ESEMPIO 17.33**

Riconsideriamo i sistemi degli esempi del paragrafo precedente. Nell'Esempio 17.29  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = 3$ , quindi  $(0, 0)$  è instabile (infatti la soluzione generale contiene un termine del tipo  $be^{3x}$ , che diverge se  $b \neq 0$ ). Nell'Esempio 17.30  $\text{Re } \lambda = -3$ , quindi  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile; nell'Esempio 17.31  $\lambda = 2$ , quindi  $(0, 0)$  è instabile.

**Sistemi autonomi non lineari**

Merita un cenno anche il caso di un sistema autonomo di due equazioni *non lineari*:

$$\begin{cases} u' = f(u, v) \\ v' = g(u, v). \end{cases} \quad (17.68)$$

Supponiamo che  $(u_*, v_*)$  sia una soluzione stazionaria del sistema. Effettuando se necessario il cambio di variabili  $(\hat{u}, \hat{v}) = (u - u_*, v - v_*)$  e rimuovendo i cappucci, si può supporre senza perdere in generalità che la soluzione stazionaria sia  $(0, 0)$ :

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0.$$

Supponiamo inoltre che  $f, g$  siano di classe  $C^1$  in un intorno  $\mathcal{V}$  di  $(0, 0)$ . Ciò garantisce l'esistenza locale di un'unica soluzione per ogni  $(u_0, v_0) \in \mathcal{V}$ .

Studiare la stabilità di una soluzione stazionaria di un sistema non lineare è un problema certamente non banale. In certi casi le informazioni si possono ottenere *linearizzando* il sistema, ovvero sostituendo a  $f$  e  $g$  le rispettive approssimazioni lineari:

$$\begin{cases} u' = au + bv \\ v' = cu + dv \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = J_{(f,g)}(0, 0) = \begin{pmatrix} f_u(0, 0) & f_v(0, 0) \\ g_u(0, 0) & g_v(0, 0) \end{pmatrix}. \quad (17.69)$$

La soluzione stazionaria  $(0, 0)$  si dice **linearmente asintoticamente stabile** o **linearmente instabile** se il sistema linearizzato (17.69) è, rispettivamente, asintoticamente stabile o instabile. In questi due casi, le proprietà *locali* del sistema (17.68) sono, dal punto di vista della stabilità, analoghe a quelle del sistema linearizzato: se  $(0, 0)$  è linearmente asintoticamente stabile, esiste un intorno  $\mathcal{V}_0$  di  $(0, 0)$  tale che ogni soluzione di (17.68) con dato iniziale in  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$  esiste globalmente e tende a  $(0, 0)$  per  $t \rightarrow +\infty$ ; viceversa, se  $(0, 0)$  è linearmente instabile allora esiste un intorno  $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$  di  $(0, 0)$  tale che ogni intorno  $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{V}_0$  di  $(0, 0)$  contiene un dato iniziale  $(u_0, v_0)$  per cui la soluzione esce da  $\mathcal{V}_0$  in tempo finito.

L'idea che motiva queste affermazioni è la seguente: se per esempio  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile per il sistema linearizzato, la parte reale di entrambi gli autovalori è negativa; poiché l'errore che si commette sostituendo a  $f$  e  $g$  le loro approssimazioni lineari è un  $o$ -piccolo della distanza da  $(0, 0)$  e le soluzioni sono regolari, la parte reale degli "autovalori" del sistema non lineare resta negativa in un intorno sufficientemente piccolo di  $(0, 0)$ .

**ESEMPIO 17.34**

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} u' = f(u, v) = -v + u(1 - u^2 - v^2) \\ v' = g(u, v) = u + v(1 - u^2 - v^2) \end{cases} \quad (17.70)$$

Si noti che  $(0, 0)$  è una soluzione stazionaria. Linearizzando intorno a  $(0, 0)$  si ottiene il sistema linearizzato

$$\begin{cases} u' = u - v \\ v' = u + v \end{cases}$$

i cui autovalori sono dati da

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm i.$$

Perciò la soluzione  $(0, 0)$  del sistema (17.70) è linearmente instabile.

Il concetto di stabilità si applica ad altre soluzioni oltre a quelle stazionarie. Nell'esempio successivo introduciamo, in modo solo intuitivo, il concetto di *stabilità di una soluzione periodica*.

Il sistema

$$\begin{cases} u' = -v + u(1 - u^2 - v^2) \\ v' = u + v(1 - u^2 - v^2) \end{cases} \quad (17.71)$$

considerato nell'esempio precedente ha una struttura molto particolare che permette di trovarne delle soluzioni esplicite. Infatti, posti

$$u(t) = r(t) \cos \varphi(t), \quad v(t) = r(t) \sin \varphi(t)$$

si ha

$$\begin{cases} u' = -v + u(1 - u^2 - v^2) \\ v' = u + v(1 - u^2 - v^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r' \cos \varphi - r\varphi' \sin \varphi = -r \sin \varphi + r(1 - r^2) \cos \varphi \\ r' \sin \varphi + r\varphi' \cos \varphi = r \cos \varphi + r(1 - r^2) \sin \varphi. \end{cases}$$

Sommando la prima equazione moltiplicata per  $\cos \varphi$  alla seconda moltiplicata per  $\sin \varphi$  si ottiene l'equazione per  $r$ :

$$r' = r(1 - r^2).$$

Sommando invece la prima equazione moltiplicata per  $-(\sin \varphi)/r$  alla seconda moltiplicata per  $\cos(\varphi)/r$  si ottiene l'equazione per  $\varphi$ :

$$\varphi' = 1 \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + t \quad \text{per } t > 0.$$

L'equazione per  $r$  è la stessa studiata nell'Esempio 17.32, quindi la soluzione è data dalla formula (17.61) e il comportamento per  $t \rightarrow +\infty$  è descritto dalla (17.62). In conclusione, la soluzione del problema (17.71) con dato iniziale  $(u_0, v_0) = (r_0 \cos \varphi_0, r_0 \sin \varphi_0)$  è definita per ogni  $t > 0$  e, se  $r_0 > 0$ , si avvicina alla soluzione *periodica*  $(\cos(\varphi(0) + t), \sin(\varphi(0) + t))$ . A questo punto si potrebbe introdurre il concetto di stabilità per una famiglia di soluzioni periodiche, e formalizzare l'idea che la famiglia di soluzioni

$$(\cos(\varphi_0 + t), \sin(\varphi_0 + t)) \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi)$$

è stabile per il sistema (17.71). Ma questo ci porterebbe troppo lontano, e ci accontentiamo dell'aspetto intuitivo.

### ESEMPIO 17.35

Determinare le soluzioni stazionarie delle seguenti equazioni differenziali e discuterne la stabilità:

a)  $y' = \max\{1 - |y + 1|, 1 - |y - 1|\};$

c)  $y' = \log \left( \frac{2e^y + 5}{e^{2y} + 2} \right);$

b)  $y' = \log \left( |y^2 + y| + \frac{1}{2} \right);$

d)  $y' = (y^2 - a^2)(y - 1)$   
al variare di  $a \in [0, +\infty)$ .

### ESERCIZIO 17.16



## ESERCIZIO 17.17

Discutere la stabilità della soluzione stazionaria  $(0, 0)$  dei seguenti sistemi:

a)  $\begin{cases} u' = u - bv \\ v' = u - 2v \end{cases}$  al variare di  $b \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\begin{cases} u' = au - v \\ v' = u - 2v \end{cases}$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\begin{cases} u' = e^u - 1 - \sin(3v) \\ v' = \log(1 + u - v) \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} u' = v - u \\ v' = \sqrt{1 - v} - 1 \end{cases}$ .

## FILO ROSSO Il teorema fondamentale dell'algebra

Un polinomio complesso di grado  $n$  è un esempio particolarmente semplice di una funzione complessa definita in tutto il piano complesso:

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f: z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_n \neq 0).$$

Analogamente al caso reale, esiste la *derivata complessa* di  $f$  in ogni  $z_0 \in \mathbb{C}$ :

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{k=0}^n k a_k z_0^{k-1}.$$

In questo capitolo vedremo che le funzioni derivabili in senso complesso, anche dette *funzioni olomorfe*, hanno una struttura molto particolare. A livello insiemistico l'insieme  $\mathbb{C}$  coincide con  $\mathbb{R}^2$  e perciò si potrebbe interpretare una funzione da  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$  come una funzione reale ma vettoriale da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^2$  (identificando  $z = x + iy$  con  $(x, y)$  e  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  con  $(u(x, y), v(x, y))$ ). Ma contrariamente a  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{C}$  è anche un insieme numerico ed è esattamente la struttura numerica che serve se vogliamo definire la derivata complessa: per definire il rapporto incrementale di  $f$  dobbiamo dividere un numero complesso per un altro!

Le conseguenze di questa osservazione elementare saranno sorprendenti e, come vedremo, porteranno a una teoria matematica di notevole eleganza. Infatti le funzioni olomorfe godono di proprietà molto particolari. Per esempio, vedremo che la derivata di una funzione olomorfa è a sua volta una funzione olomorfa, ovvero una funzione derivabile in senso complesso è automaticamente di classe  $C^\infty$  (ovviamente questo non vale per le funzioni reali:  $f(x) = x\sqrt{x}$  è derivabile in  $\mathbb{R}$  ma la derivata seconda non esiste in  $x = 0$ ).

Un'altra proprietà notevole è il *teorema di Liouville*, dimostrato nell'Esercizio 18.11:

*ogni funzione olomorfa e limitata in  $\mathbb{C}$  è costante in  $\mathbb{C}$*

( $f$  è limitata in  $\mathbb{C}$  se  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ). Il risultato evidentemente non vale per le funzioni reali:  $f(x) = 1/(x^2 + 1)$  è di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ , è banalmente limitata ( $0 < f(x) \leq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ), ma non è costante. Si noti che in questo esempio abbiamo usato la proprietà che il polinomio  $x^2 + 1$  non ha zeri *reali*. Viceversa, si può utilizzare il teorema di Liouville per dimostrare il *teorema fondamentale dell'algebra*:

*un polinomio di grado  $n \geq 1$  ha  $n$  zeri complessi (contati secondo la loro molteplicità), ovvero si scompone in fattori lineari.*

La cosa non banale da dimostrare è che esiste almeno uno zero,  $z_1$  (infatti, poi si mette in evidenza il fattore  $z - z_1$  e si considera il polinomio rimanente di grado  $n - 1$ , che a sua volta ha uno zero,  $z_2$ , eccetera). Dimostriamo quindi che

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

ha almeno uno zero complesso. Ragionando per assurdo, supponiamo che  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Allora la funzione razionale

$$g(z) = 1/f(z)$$

è definita in  $\mathbb{C}$  e, analogamente al caso reale, è continua e olomorfa in  $\mathbb{C}$ . Inoltre  $|f(z)| \rightarrow +\infty$  per  $|z| \rightarrow +\infty$ , ovvero  $|g(z)| \rightarrow 0$  per  $|z| \rightarrow +\infty$ . Perciò, essendo continua,  $z \mapsto |g(z)|$  è limitata:

$$|g(z)| \leq M \text{ per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

Ma allora, per il teorema di Liouville,  $g$  è costante; quindi anche  $f$  è costante, che è assurdo se  $n \geq 1$ .

Esistono dimostrazioni diverse del teorema fondamentale dell'algebra; per esempio, nel testo ne presentiamo una che, pur molto simile a quella ap-



pena descritta, fa uso del principio del massimo anziché del teorema di Liouville (si veda l'Esercizio 18.10). Alcune sono di tipo topologico, altre di tipo algebrico, anche se per adesso nessuna sembra poter fare totalmente a meno del concetto di continuità.

### Guida

Per la lettura di questo capitolo non sono necessarie le nozioni fornite nei Capitoli da 13 a 16. Alcune prime applicazioni della teoria delle funzioni olomorfe sono discusse nel Capitolo 19 (trasformata di Laplace) e nella seconda parte del Capitolo 20 (trasformata di Fourier).

### ESEMPIO 18.1

## 18.1 Derivata complessa; funzione olomorfa

Dato un insieme aperto  $A \subseteq \mathbb{C}$ , una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  può essere considerata come una funzione di *una* variabile complessa,

$$z \mapsto f(z)$$

oppure, identificando gli elementi  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  e  $f(z) = u + iv \in \mathbb{C}$  rispettivamente con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e con  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , come una funzione (vettoriale) di *due* variabili reali,

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Se  $f(z) = 1/z$  per  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , si ha che

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

quindi  $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$  e  $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$  per  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

### Intorni e limiti in $\mathbb{C}$

Identificando  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$ , si definiscono gli intorni sferici di  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

e il concetto di limite: dato  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , punto di accumulazione per  $\text{dom } f$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = \text{Re } \ell \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = \text{Im } \ell. \end{cases}$$

Se  $f$  è definita in  $z_0$ ,  $f$  si dice **continua** in  $z_0$  se  $f(z) \rightarrow f(z_0)$  per  $z \rightarrow z_0$ . Inoltre, per definire limiti per  $z \rightarrow \infty$ , si identifica l'insieme  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  con  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  (si veda il Paragrafo 10.2.3): quindi, per esempio,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} u(x, y) = \text{Re } \ell \\ \lim_{(x,y) \rightarrow \infty} v(x, y) = \text{Im } \ell \end{cases}$$

e

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (u^2(x, y) + v^2(x, y)) = +\infty.$$



Utilizzando l'esempio precedente si verifica facilmente che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty.$$

L'insieme dei numeri complessi  $\mathbb{C}$  ha, oltre alla struttura vettoriale di  $\mathbb{R}^2$ , una *struttura algebrica* grazie all'introduzione del *prodotto* in  $\mathbb{C}$ . In particolare è ben definito il quoziente e possiamo quindi dare una nozione di *derivabilità in senso complesso* modellata su quella di funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

### DEFINIZIONE 18.1

Siano  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $z_0 \in A$ . Se esiste finito (in  $\mathbb{C}$ ) il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$f$  si dice *derivabile in senso complesso* in  $z_0$  e  $f'(z_0)$  si dice la *derivata complessa* di  $f$  in  $z_0$ . Se  $f$  ha derivata complessa in ogni  $z \in A$ ,  $f$  si dice *olomorfa* in  $A$ . Una funzione olomorfa in  $\mathbb{C}$  si dice anche *intera*.

Come nel caso di funzioni reali di una variabile reale, una funzione è derivabile in senso complesso in  $z_0$  se e solo se

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0. \quad (18.1)$$

Il seguente risultato è notevole, in quanto indica che il concetto di derivabilità in senso complesso è più forte della differenziabilità delle parti reali e immaginarie  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$ .

### TEOREMA 18.2

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$  e  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$  per  $x + iy \in A$ . Allora  $f$  è derivabile in senso complesso in  $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$  se e solo se  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$  e

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases} \quad (18.2)$$

Condizioni di  
Cauchy-Riemann

Le condizioni (18.2) prendono il nome di **condizioni di Cauchy-Riemann** e sono un primo esempio della particolarità della teoria delle funzioni complesse derivabili. Ponendo

$$f_x(z_0) := u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \quad f_y(z_0) := u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0) \quad (18.3)$$

le (18.2) si possono riscrivere come

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0). \quad (18.4)$$

### Dimostrazione

Si osservi prima che la differenziabilità di  $u$  e  $v$  in  $(x_0, y_0)$  è equivalente a

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

per  $z \rightarrow z_0$ , ovvero, ricordando le (18.3), a

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= f(z_0) + f_x(z_0)(x - x_0) + f_y(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) \end{aligned} \quad (18.5)$$

per  $z \rightarrow z_0$ . Supponiamo ora  $f$  derivabile in  $z_0$ . Allora, riscrivendo la (18.1) come

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(x - x_0) + if'(z_0)(y - y_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0$$

la (18.5) è verificata con  $f_x(z_0) = f'(z_0)$  e  $f_y(z_0) = if'(z_0)$ . Quindi  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$  e vale la (18.4), che è equivalente alle condizioni di Cauchy-Riemann.

Ripercorrendo al contrario questi passi, è altrettanto facile mostrare che la (18.2) e la (18.5) implicano la (18.1).

**ESEMPIO 18.3**

La funzione  $f(z) = z^2$  è olomorfa in  $\mathbb{C}$ . Per verificarlo si può usare la definizione di  $f'(z)$ :

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0,$$

oppure si possono verificare le condizioni di Cauchy-Riemann:  $f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$ , quindi  $u := x^2 - y^2$  e  $v := 2xy$  sono differenziabili in  $\mathbb{R}^2$  e per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y).$$

**ESEMPIO 18.4**

La funzione  $f(z) = |z|$  non ammette derivata complessa in alcun punto  $z \in \mathbb{C}$ . Infatti  $f(x + iy) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ovvero  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $v(x, y) = 0$ , quindi, per  $(x, y) \neq (0, 0)$  (nell'origine  $u$  non è differenziabile),  $u_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq v_y(x, y)$  se  $x \neq 0$  e  $u_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq -v_x(x, y)$  se  $y \neq 0$ .

**ESEMPIO 18.5**

Nel caso complesso la funzione esponenziale  $e^z$  è definita come

$$e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{per } x + iy \in \mathbb{C}.$$

La definizione di  $e^z$  è compatibile con la notazione  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  (si veda la (1.25)); inoltre, ponendo  $y = 0$  ritroviamo la funzione reale  $e^x$ . Segue dal Teorema 18.2 che la funzione  $e^z$  è intera e che

$$(e^z)' = e^z \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Infatti

$$f(z) = e^z = u(x, y) + iv(x, y), \quad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

$u$  e  $v$  sono differenziabili in  $\mathbb{R}^2$  e

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x \quad \text{in } \mathbb{R}^2.$$

Inoltre, ricordando che  $f'(z) = f_x(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$  si ottiene che

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Esponenziale  
complesso

Continuano a valere anche nel caso complesso le principali regole di derivazione e i teoremi riguardanti la derivata di funzione composta e della funzione inversa. Le dimostrazioni sono completamente analoghe al caso delle funzioni reali.

**TEOREMA 18.3** Algebra delle derivate

Siano  $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $z_0 \in A$ . Se  $f$  e  $g$  sono derivabili in senso complesso in  $z_0$ , allora lo sono anche  $\alpha f + \beta g$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ),  $fg$  e, se  $g(z_0) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$ . Inoltre

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)'(z_0) &= \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0) \\(fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.\end{aligned}$$

**TEOREMA 18.4** Derivata di funzione composta

Siano  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : B \rightarrow A$ ,  $A, B \subseteq \mathbb{C}$  insiemi aperti. Se  $g$  è derivabile in senso complesso in  $z_0 \in B$  e  $f$  lo è in  $w_0 = g(z_0)$ , allora la funzione composta  $f \circ g : B \rightarrow \mathbb{C}$  è derivabile in  $z_0$  e

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

**TEOREMA 18.5** Derivata di funzione inversa

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto. Se  $f$  è invertibile e olomorfa in  $A$  e se  $f'(z_0) \neq 0$ , allora la funzione inversa di  $f$ ,  $f^{-1}$ , è derivabile in  $w_0 = f(z_0)$  e

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Per esempio, segue da queste proprietà che se  $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(z^n)' = nz^{n-1}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad \boxed{(z^{-n})' = -nz^{-n-1}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (n \neq 0).$$

Nel caso complesso le funzioni  $\sin z$  e  $\cos z$  sono definite come

$$\boxed{\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Essendo  $e^z$  intera (con derivata  $e^z$ ), lo sono anche  $\sin z$  e  $\cos z$ , e segue dalla regola della catena che

$$\boxed{(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z} \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

Si osservi che se  $z = x \in \mathbb{R}$  si ritrovano le funzioni reali  $\sin x$  e  $\cos x$ .

Siano

$$A = \{x + iy \in \mathbb{C} : x > 0\}, \quad f(z) = z^2 \quad \text{per } z \in A.$$

Allora  $f$  è iniettiva, quindi invertibile, nel semipiano  $A$  e il dominio della funzione inversa  $f^{-1}$  è l'immagine di  $f$ , ovvero il piano complesso meno il semiasse negativo, che per brevità indicheremo nel seguito con la notazione  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ :

$$\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

(si veda la Figura 18.1). Infatti

**ESEMPIO 18.6**

Funzioni  
trigonometriche  
complesse

**ESEMPIO 18.7**

Valore principale  
di  $\sqrt{z}$



$$z = \rho e^{i\varphi} \in A \iff \rho > 0 \text{ e } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

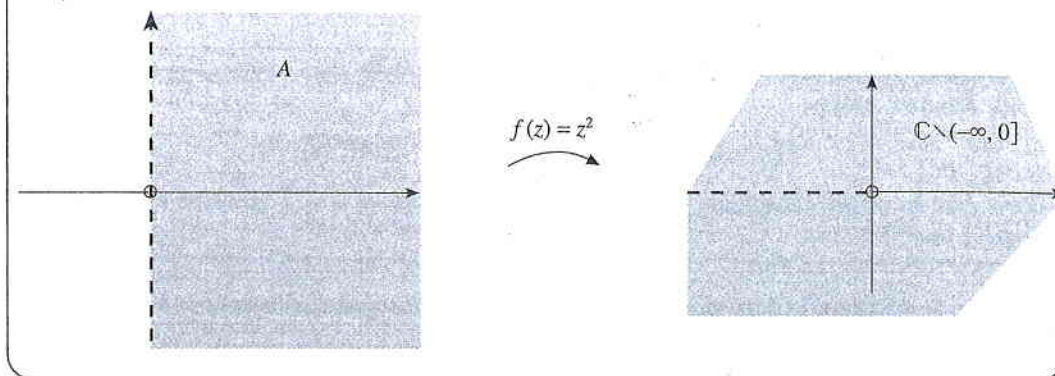
quindi  $z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi}$  e

$$z \in A \iff |z^2| = \rho^2 > 0 \text{ e } \arg(z^2) = 2\varphi \in (-\pi, \pi).$$

La funzione inversa,  $f^{-1}(z) = \sqrt{z}$ , si dice **valore principale di  $\sqrt{z}$** ; per il Teorema 18.5,  $\sqrt{z}$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  e

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{f'(\sqrt{z})} = \frac{1}{2\sqrt{z}} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (18.6)$$

Figura 18.1



**ESEMPIO 18.8**

Valore principale del logaritmo

Sia

$$f(z) = e^z \quad \text{per } z \in A = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}.$$

Allora  $f$  è invertibile in  $A$  e il dominio di  $f^{-1}$  è l'immagine di  $f$ :

$$\text{dom}(f^{-1}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

(si veda la Figura 18.2). Infatti

$$z = x + iy \in A \iff x \in \mathbb{R} \text{ e } -\pi < y < \pi$$

quindi  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$

$$z \in A \iff |e^z| = e^x > 0 \quad \text{e} \quad \arg(e^z) = y \in (-\pi, \pi).$$

La funzione inversa,  $f^{-1}(z) = z$ , si dice **valore principale del logaritmo** e si indica con  $\text{Log } z$ . Per il Teorema 18.5,  $\text{Log } z$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  e

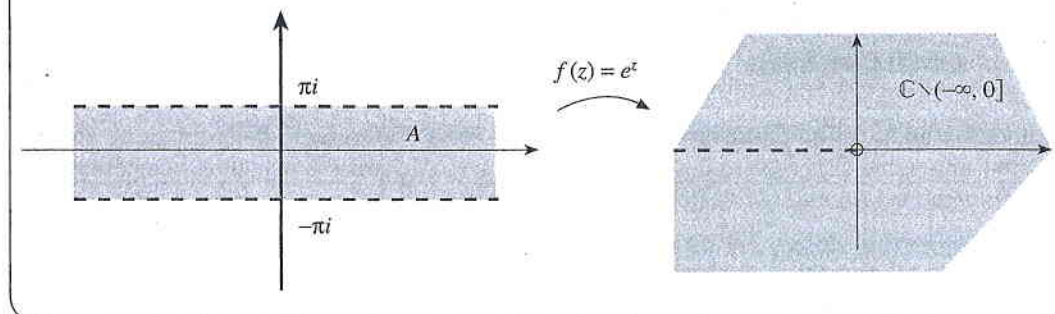
$$(\text{Log } z)' = \frac{1}{e^{\text{Log } z}} = \frac{1}{z} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (18.7)$$

Inoltre vale che

$$\text{Log } z = \text{Log } |z| + i \arg z \quad \text{dove } |\arg z| < \pi \text{ e } z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}. \quad (18.8)$$

Infatti, dati  $w = x + iy \in A$  e  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ,  $z = \text{Log } w \iff z = e^w \iff z = e^x (\cos y + i \sin y) \iff |z| = e^x \text{ e } \arg z = y \iff x = \text{Log } |z|, \arg z = y$ .

Figura 18.2



La funzione  $f(z) = z^a$  ( $a \in \mathbb{C}$ ), detta **valore principale di  $z^a$** , è così definita:

$$z^a := e^{a \operatorname{Log} z} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Per il Teorema 18.4  $z^a$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  e

$$(z^a)' = (e^{a \operatorname{Log} z})' = a e^{a \operatorname{Log} z} (\operatorname{Log} z)' = a z^{a-1} \quad \text{per } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \quad (18.9)$$

Si noti che i valori principali di  $\sqrt{z}$ , del logaritmo e di  $z^a$  coincidono, rispettivamente, con le funzioni reali  $\sqrt{x}$ ,  $\log x$  e  $x^a$  per  $x \in (\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]) \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$  e per  $a \in \mathbb{R}$ . In particolare  $\operatorname{Log} |z|$  coincide con il logaritmo naturale di  $|z|$ .

Provare che la funzione

$$f(x + iy) = e^x \cos y + ai e^x \sin y \quad (a \in \mathbb{R})$$

è derivabile in senso complesso in  $x_0 + iy_0 \in \mathbb{R}$  se e solo se  $a = 1$  (ovvero se e solo se  $f(x + iy) = e^{x+iy}$ ).

Calcolare, se esistono, le derivate in senso complesso delle seguenti funzioni complesse:

a)  $f(z) = (3z + 2)^2$ ;

c)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \quad (z \neq \pm i)$ ;

b)  $f(z) = \sin^4(2z)$ ;

d)  $f(z) = |z|^2$ .

Determinare l'immagine delle seguenti funzioni:

a)  $x \mapsto e^{x+iy_0}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (al variare di  $y_0$ );

c)  $z \mapsto e^z$ ,  $|\operatorname{Im} z| < \pi$ ;

b)  $y \mapsto e^{x_0+iy}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  (al variare di  $x_0$ );

d)  $z \mapsto e^z$ ,  $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\pi$ .

a) Mostrare che

$$\operatorname{Log}(z^2) = 2 \operatorname{Log} z \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}$$

e che, invece,

$$\operatorname{Log}(z^2) \neq 2 \operatorname{Log} z \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad \frac{\pi}{2} < |\arg z| < \pi;$$

b) dire se

$$(\operatorname{Log}(z-3))' = \frac{1}{z-3} \quad \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

### ESEMPIO 18.9

Valore principale di  $z^a$

### ESERCIZIO 18.1

### ESERCIZIO 18.2

### ESERCIZIO 18.3

### ESERCIZIO 18.4

## 18.2 Significato geometrico della derivata complessa

Una **curva in  $\mathbb{C}$**  è una funzione continua da un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  in  $\mathbb{C}$ ,

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in I.$$

La nomenclatura stessa, e l'uso del grassetto, sottolineano che in questo contesto si sta identificando  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ : il punto  $x(t) + iy(t) \in \mathbb{C}$  corrisponde al punto  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ . Attraverso questa identificazione si definiscono i concetti di curva

Curve in  $\mathbb{C}$

**rettificabile** (con lunghezza  $L(\gamma)$ ), curva **semplice, chiusa e di Jordan**, curva di classe  $C^1$  (a tratti), **regolare (a tratti)** e il concetto di **curve equivalenti** (con lo stesso verso o verso opposto). In particolare la curva è regolare se  $\gamma'(t) := x'(t) + iy'(t) \neq 0$  ( $\Leftrightarrow (x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$ ) per ogni  $t \in I$ . Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $\gamma$  una curva regolare contenuta in  $A$ , e  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua in  $A$  e derivabile in senso complesso in  $z_0 = \gamma(t_0)$  ( $t_0 \in I$ ). Allora  $\gamma$  passa per  $z_0$  e la curva

$$t \mapsto w(t) := f(\gamma(t)), \quad t \in I$$

passa per  $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{C}$ . Nella Figura 18.3 abbiamo indicato  $\gamma'(t_0)$ , identificando il numero complesso  $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$  e il vettore  $(x'(t_0), y'(t_0))$ . Se  $f'(z_0) \neq 0$ , dalla regola della catena si ottiene che

$$w'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0.$$

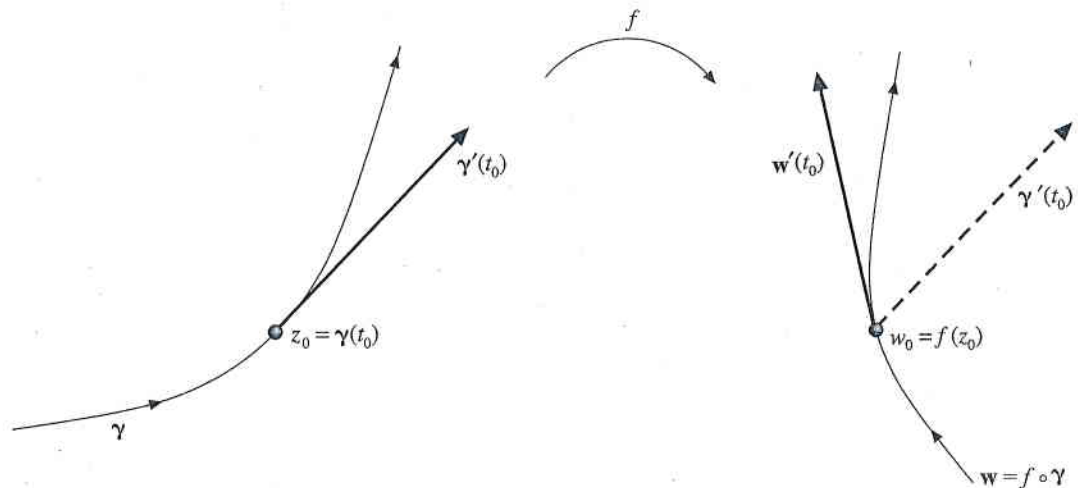
Si noti inoltre che

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0), \quad (18.10)$$

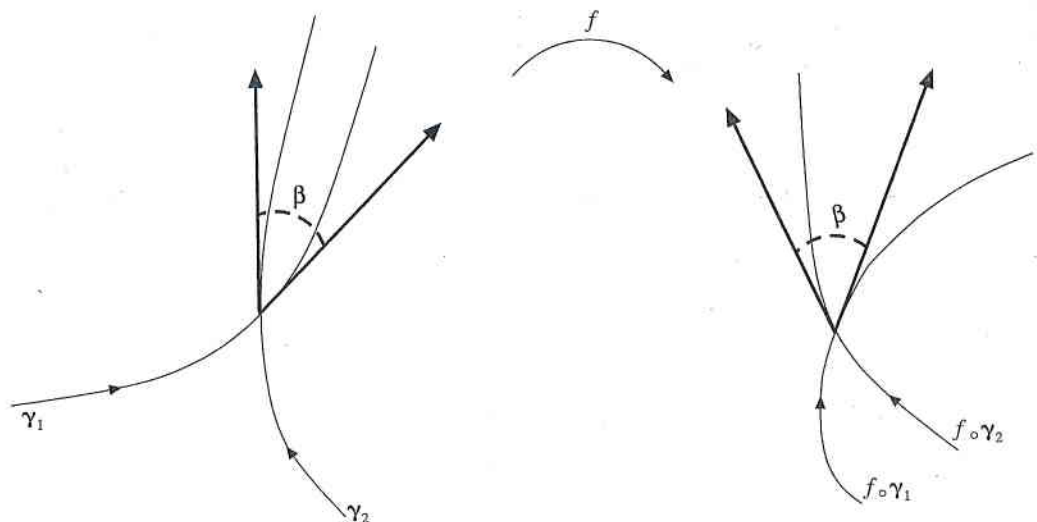
ovvero

$$\arg w'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) \quad \text{non dipende da } \gamma \text{ ma solo da } f'(z_0) \neq 0. \quad (18.11)$$

**Figura 18.3** Le curve  $t \mapsto \gamma(t)$  e  $t \mapsto f(\gamma(t))$ .



**Figura 18.4**  $f : A \mapsto \mathbb{C}$  definisce una trasformazione conforme.





In particolare, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due curve regolari passanti per  $z_0$ , allora le curve  $t \mapsto f(\gamma_1(t))$  e  $t \mapsto f(\gamma_2(t))$  passano per  $f(z_0)$  e, se  $f'(z_0) \neq 0$ , l'angolo  $\beta$  indicato nella Figura 18.4 è preservato dalla trasformazione indotta da  $f$ .

**DEFINIZIONE 18.6**

Una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto, si dice **trasformazione conforme** se preserva gli angoli (in ampiezza e orientazione) tra i vettori tangenti di ogni coppia di curve regolari in un loro punto di intersezione.

Abbiamo quindi visto che

$$\text{se } f : A \rightarrow \mathbb{C} \text{ è olomorfa in } A \text{ e } f'(z) \neq 0 \text{ per } z \in A \quad (18.12)$$

allora  $f$  è una trasformazione conforme.

Sia  $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$  per  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . Fissato  $z_0 \in \mathbb{C}$ , siano  $\gamma_1(t) = t + iy_0$  e  $\gamma_2(t) = x_0 + it$  rispettivamente la retta orizzontale e la retta verticale (in  $\mathbb{C}$ ) passanti per  $z_0$ . Allora  $f(z) = e^z$  trasforma la retta orizzontale nella semiretta uscente dall'origine di coefficiente angolare  $\tan y_0$  e la retta verticale nella circonferenza di raggio  $e^{x_0}$ , percorsa infinite volte in senso antiorario. Chiaramente l'angolo retto è preservato dalla trasformazione indotta da  $f$  (si veda Figura 18.5).

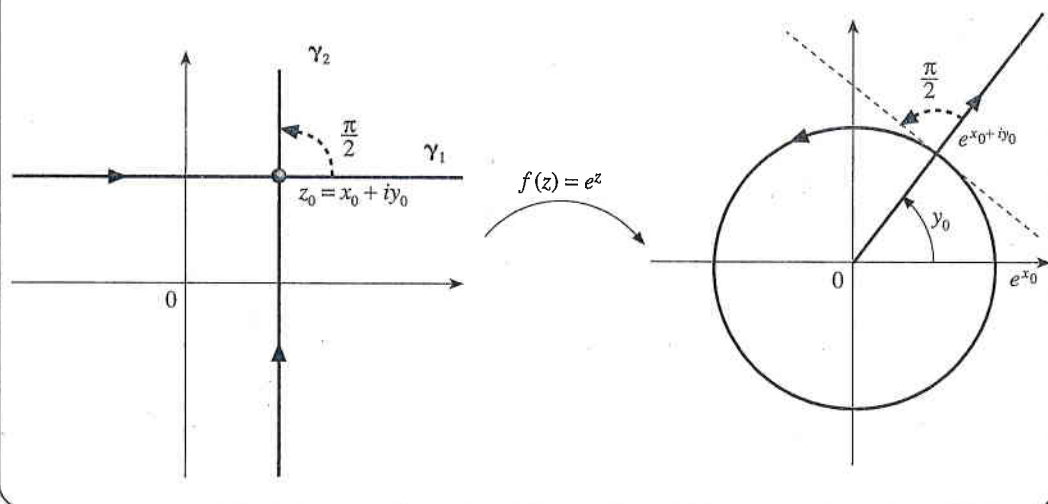


Figura 18.5

Siano  $z_0 \neq 0$  e  $f(z) = z^2$ . Determinare l'immagine rispetto a  $f$  della circonferenza di centro 0 e raggio  $|z_0|$  e della semiretta  $t \mapsto te^{i \arg z_0}$  per  $t > 0$ ; verificare che la trasformazione indotta da  $f$  preserva l'angolo retto tra la circonferenza e la semiretta nel punto  $z_0$ .

**ESERCIZIO 18.5**

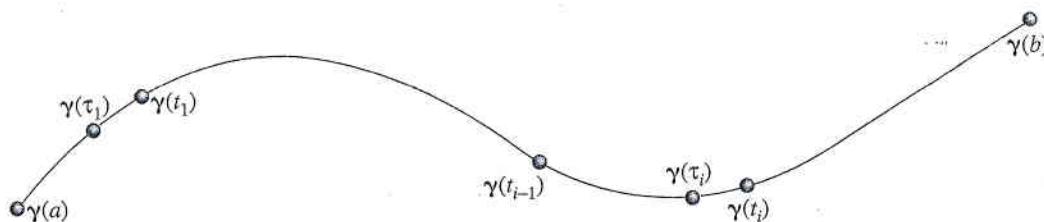
## 18.3 Integrali curvilinei di funzioni complesse

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva di classe  $C^1$  contenuta in  $A$ . Per definire l'integrale curvilineo di  $f$  su  $\gamma$  procediamo in modo simile a quanto fatto nel Paragrafo 12.2. Data una suddivisione  $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  di  $[a, b]$  con

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_n = b$$

si ottengono  $n$  curve  $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{C}$  di estremi  $\gamma(t_{i-1})$ ,  $\gamma(t_i)$ . Per ciascuna di esse, si sceglie arbitrariamente  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ : ciò individua un punto  $\gamma(\tau_i)$  sul sostegno di  $\gamma_i$  (si veda Figura 18.6).

Figura 18.6 Partizione del sostegno di  $\gamma$ .



Dati  $\mathcal{D}$  e l'insieme dei punti  $\{\tau_i\}$ , si definisce la **somma di Riemann**

$$S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) := \sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})). \quad (18.13)$$

Secondo il seguente risultato le somme di Riemann convergono a un numero complesso  $J$ , l'integrale di  $f$  lungo  $\gamma$ , "per  $n \rightarrow +\infty$ "; le parti reale e immaginaria di  $J$  possono essere identificate come integrali curvilinei (reali). Per formularlo si userà la notazione

$$\int_a^b g(t) dt := \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt, \quad (18.14)$$

dove  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : t \mapsto u(t) + iv(t)$ .

**Dimostrazione**

**TEOREMA 18.7**

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $\gamma$  una curva contenuta in  $A$  di classe  $C^1$ . Sia  $S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)$  la somma di Riemann definita dalla (18.13). Allora esiste un unico numero complesso, detto **integrale di  $f$  sulla curva  $\gamma$**  e indicato con

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni suddivisione  $\mathcal{D} = \{t_0, \dots, t_n\}$  di ampiezza minore di  $\delta$  e per ogni scelta dei punti  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$  risulta

$$\left| S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f) - \int_{\gamma} f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Inoltre

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (18.15)$$

Si noti che, posti  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  e  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , si ha

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) \gamma'(t) &= u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \\ &\quad + i(u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t)). \end{aligned}$$

Perciò, segue dalle (18.14) e (18.15) e dalla definizione di integrale curvilineo (reale!) di seconda specie che

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy. \quad (18.16)$$

In particolare, l'integrale dipende dall'orientazione di  $\gamma$  ma non dalla sua parametrizzazione:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{se } \gamma \text{ e } \tilde{\gamma} \text{ sono equivalenti con lo stesso verso,} \quad (18.17)$$

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{se } \gamma \text{ e } \tilde{\gamma} \text{ sono equivalenti con verso opposto.}$$

La definizione di  $\int_{\gamma} f(z) dz$  si generalizza facilmente a curve di classe  $C^1$  a tratti.

Poiché, per la disuguaglianza triangolare,

$$|S(\mathcal{D}, \{\tau_i\}, f)| = \left| \sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\gamma(\tau_i))| |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

$$\leq \left( \max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \right) \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \left( \max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \right) L(\gamma)$$

si ha che

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left( \max_{t \in I} |f(\gamma(t))| \right) L(\gamma) \quad (18.18)$$

dove  $L(\gamma)$  è la lunghezza di  $\gamma$ .

#### ESEMPIO 18.11

La curva  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , parametrizza la circonferenza di centro 0 e raggio  $R$  percorsa una volta in senso antiorario. Calcoliamo i seguenti integrali:

$$\oint_{\gamma_R} z dz, \quad \oint_{\gamma_R} \bar{z} dz, \quad \oint_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz.$$

Si ha  $\gamma'_R(t) = iRe^{it}$ , quindi

$$\oint_{\gamma_R} z dz = R^2 \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = iR^2 \int_0^{2\pi} e^{2it} dt = iR^2 \int_0^{2\pi} (\cos(2t) + i \sin(2t)) dt = 0.$$

Analogamente, poiché  $\overline{\gamma_R(t)} = Re^{-it}$  e  $\frac{1}{\gamma_R(t)} = \frac{1}{R} e^{-it}$ ,

$$\oint_{\gamma_R} \bar{z} dz = R^2 \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = iR^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i R^2 \quad (18.19)$$

e

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad (18.20)$$

#### ESERCIZIO 18.6

Calcolare l'integrale curvilineo di  $f$  su  $\gamma$  nei seguenti casi:

a)  $f(z) = \bar{z}$ ,  $\gamma(t) = t(1+i)$ ,  $t \in [0, 1]$ ;      b)  $f(z) = e^z$ ,  $\gamma(t) = 2t + it$ ,  $t \in [0, 2]$ .

#### ESERCIZIO 18.7

Siano  $\sqrt{z}$  il valore principale della radice quadrata,  $0 < \alpha < \pi$  e  $\gamma_{\alpha}(t) = e^{it}$  per  $-\alpha \leq t \leq \alpha$ . Determinare

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \int_{\gamma_{\alpha}} \sqrt{z} dz.$$



## 18.4 Teorema e formula integrale di Cauchy

Consideriamo la (18.16):

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy$$

dove  $\gamma$  è una curva di classe  $C^1$  a tratti con sostegno in un aperto  $A \subseteq \mathbb{C}$  e  $f = u + iv$  è una funzione continua in  $A$ . Se  $f$  è olomorfa in  $A$  segue dalle condizioni di Cauchy-Riemann, (18.2), che  $u_y = -v_x$  e  $v_y = u_x$ , ovvero le forme differenziali  $u dx - v dy$  e  $v dx + u dy$  sono chiuse in  $A$ . Perciò se  $A$  è semplicemente connesso e se supponiamo anche che  $u$  e  $v$  siano di classe  $C^1(A)$ , per il Teorema 12.21  $u dx - v dy$  e  $v dx + u dy$  sono esatte in  $A$  e, per il Teorema 12.17, l'integrale  $\int_{\gamma} f(z) dz$  dipende solo dei punti iniziali e finali di  $\gamma$ .

Il seguente teorema rende rigoroso questo risultato senza utilizzare l'ipotesi che  $u, v \in C^1(A)$ . Tuttavia senza tale informazione aggiuntiva la dimostrazione diventa considerevolmente più complicata e la omettiamo.

### TEOREMA 18.8 Teorema integrale di Cauchy

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e semplicemente connesso e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa in  $A$ . Allora, se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due curve di classe  $C^1$  a tratti con sostegno in  $A$  e con gli stessi punti iniziali e finali, risulta

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (18.21)$$

In particolare

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \text{se } \gamma \text{ è chiusa.} \quad (18.22)$$

Come si è visto nell'Esempio 18.11, la (18.22) non vale se  $f$  non è olomorfa (si consideri per esempio la funzione  $f(z) = \bar{z}$  e il risultato nella (18.19)) o se  $A$  non è semplicemente connesso (per esempio  $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  nella (18.20)).

La seguente classe di curve comparirà spesso nel seguito e conviene dargli un nome:

### DEFINIZIONE 18.9

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  un aperto e  $B$  un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$ . Una curva di Jordan  $\gamma$  di classe  $C^1$  a tratti si dice **cammino in  $A$  intorno a  $B$**  se il sostegno di  $\gamma$  è contenuto in  $A$  e  $B$  è contenuto nell'interno di  $\gamma$ .

Consideriamo la situazione rappresentata nella Figura 18.7:  $A \subseteq \mathbb{C}$  è un insieme aperto che ha al suo interno una e una sola lacuna,  $B$ , quindi  $A$  non è semplicemente connesso (per esempio  $A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  per qualche  $z_0 \in \mathbb{C}$ ).

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due cammini in  $A$  intorno a  $B$  orientati positivamente (cioè in senso antiorario). Se  $f$  è olomorfa in  $A$ ,  $\int_{\gamma_1} f(z) dz$  e  $\int_{\gamma_2} f(z) dz$  non valgono necessariamente 0 (si veda la (18.20)), ma segue facilmente dal teorema integrale di Cauchy che sono uguali:

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (18.23)$$

Figura 18.7  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  circondano la lacuna  $B$ .

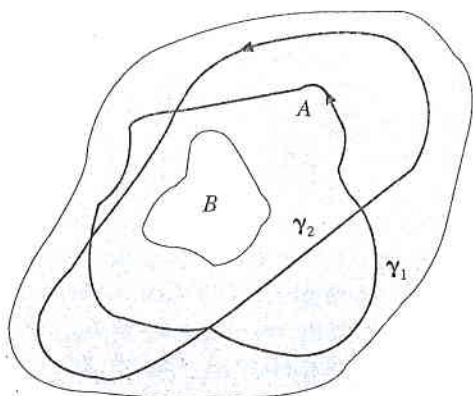
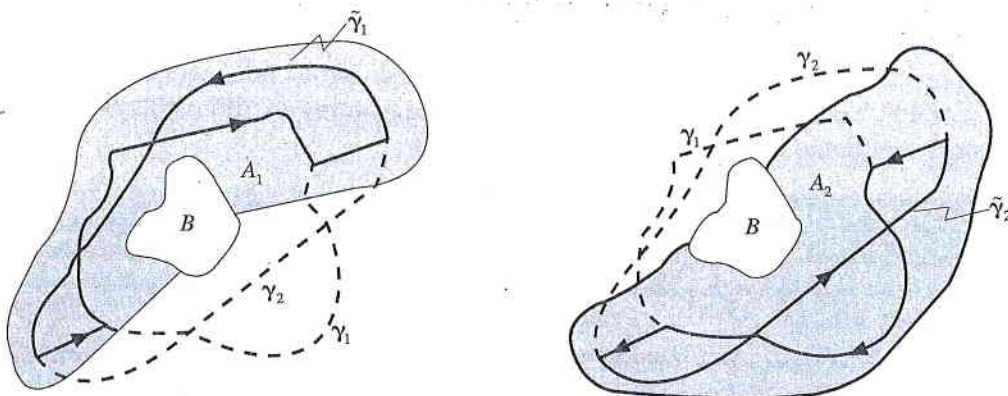


Figura 18.8



Infatti, siano  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_2$  le due curve chiuse costruite come indicato in Figura 18.8. Allora

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz + \int_{\tilde{\gamma}_2} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz - \oint_{\gamma_1} f(z) dz.$$

D'altra parte i sostegni di  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_2$  sono contenuti rispettivamente in  $A_1$  e  $A_2$ , due sottoinsiemi semplicemente connessi di  $A$ ; quindi, per il teorema integrale di Cauchy,

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}_2} f(z) dz = 0$$

e si ottiene la (18.23).

Poiché  $1/z$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , per la (18.20) e la (18.23) si ha che

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

per ogni cammino in  $\mathbb{C}$  intorno all'origine orientato positivamente.

Dal teorema integrale di Cauchy segue la notevolissima *formula integrale di Cauchy*.

#### ESEMPIO 18.12

#### TEOREMA 18.10 Formula integrale di Cauchy

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e semplicemente connesso,  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa in  $A$ ,  $z_0 \in A$  e  $\gamma$  un cammino in  $A$  intorno a  $z_0$  orientato positivamente. Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (18.24)$$

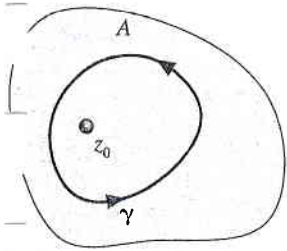


figura 18.9

**Dimostrazione**

La curva  $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  (che parametrizza la circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $r$ , si veda la Figura 18.9) è un cammino in  $A$  intorno a  $z_0$  per  $r$  sufficientemente piccolo. Allora, per la (18.23),

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{per } r > 0$$

quindi risulta

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \lim_{r \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Per la (18.20),

$$\oint_{\gamma_r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad \text{per ogni } r > 0.$$

Per giungere alla (18.24) basta allora provare che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

ma questo segue immediatamente dalla (18.18) e dalla limitatezza di  $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$  in un intorno di  $z_0$ :

$$\left| \oint_{\gamma_r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq M(2\pi r) \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow 0.$$

La formula integrale di Cauchy mette in evidenza una proprietà peculiare delle funzioni olomorfe: se  $\gamma$  è una curva di Jordan di classe  $C^1$  a tratti in un insieme semplicemente connesso, il valore di una funzione olomorfa in  $A$  in un qualunque punto  $z$  all'interno di  $\gamma$  è determinato dai valori di  $f$  su  $\gamma$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{z - w} dw.$$

In particolare, scegliendo  $\gamma(t) = z + re^{it}$ , si ha che  $\gamma'(t) = ire^{it}$  e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{2}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt$$

ovvero

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt. \tag{18.25}$$

La (18.25) si può interpretare come un teorema di valor medio: se  $f$  è olomorfa in un intorno di  $z$ , allora  $f(z)$  è il valor medio di  $f$  su una circonferenza di centro  $z$  e raggio sufficientemente piccolo.



## ESERCIZIO 18.8

## Integrali di Fresnel

Siano  $R > 0$  e  $\gamma_R = \gamma_{1,R} \cup \gamma_{2,R} \cup \gamma_{3,R}$ , dove  $\gamma_{1,R}(t) = t$  per  $0 \leq t \leq R$ ,  $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$  per  $0 \leq t \leq \frac{1}{4}\pi$  e  $\gamma_{3,R}(t) = (R-t)e^{i\pi/4}$  per  $0 \leq t \leq R$ .

- a) Disegnare  $\gamma_R$  e utilizzare il Teorema integrale di Cauchy per calcolare  $\int_{\gamma_R} e^{-z^2} dz$ .  
b) Dimostrare che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_{1,R}} e^{-z^2} dz = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

- c) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_{2,R}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

- d) Dimostrare che

$$\int_{\gamma_{3,R}} e^{-z^2} dz = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) \int_0^R (\cos(t^2) - i \sin(t^2)) dt.$$

- e) Calcolare gli integrali di Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

utilizzando la relazione  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  (si veda il Paragrafo 14.4).

## ESERCIZIO 18.9

## Principio di massimo

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso e sia in  $A$ , tale che per qualche  $z_0 \in A$

$$|f(z)| \leq M := |f(z_0)| \quad \text{per } z \in A.$$

- a) Utilizzando la (18.25), dimostrare che per  $r > 0$  sufficientemente piccolo

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt.$$

- b) Utilizzare (a) per dimostrare che  $|f(z)|$  è costante in  $A$ .  
c) Utilizzare (b) e le condizioni di Cauchy-Riemann per dimostrare che  $f(z)$  è costante in  $A$ .  
d) Utilizzare (c) per dimostrare il seguente **principio di massimo**:

Sia  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto, connesso e limitato e sia  $f$  olomorfa in  $A$ , continua in  $\bar{A}$  e non costante. Allora la funzione  $z \mapsto |f(z)|$  assume il massimo su  $\partial A$ .

## ESERCIZIO 18.10

Teorema  
fondamentale  
dell'algebra

Sia  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  un polinomio di grado  $n \geq 1$  con coefficienti complessi  $a_0, \dots, a_n$  ( $a_n \neq 0$ ). Supponendo che  $p(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , si definisca  $g(z) := \frac{1}{p(z)}$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

- a) Dimostrare che  $\lim_{z \rightarrow \infty} |g(z)| = 0$ .  
b) Dimostrare che esiste  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che

$$|g(z)| \leq |g(z_0)| \neq 0 \quad \text{per } z \in \mathbb{C}.$$

- c) Utilizzare l'esercizio precedente per concludere che  $p(z) = p(z_0)$  in  $\mathbb{C}$ ; dedurre l'assurdo dell'ipotesi  $p(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$  e la seguente versione del **teorema fondamentale dell'algebra**:

Ogni polinomio di grado  $n \geq 1$  possiede almeno uno zero nel piano complesso.

## 18.5 Derivate di ordine superiore di funzioni olomorfe

Siano  $f$  olomorfa in  $A$ ,  $z \in A$  e  $\gamma$  un cammino in  $A$  intorno a  $z$ . Se  $\gamma$  è orientato positivamente, allora, per la formula integrale di Cauchy, si ha

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Per ogni  $w \in \gamma$  fissato, la funzione  $z \rightarrow \frac{f(w)}{w-z}$ ,  $z \neq w$ , è derivabile rispetto a  $z$  e la sua derivata rispetto a  $z$  è

$$\frac{f(w)}{(w-z)^2}$$

quindi, ricordando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (Teorema 11.10), si ottiene che

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Ripetendo questo ragionamento risulta

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw$$

$$f'''(z) = \frac{6}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^4} dw$$

⋮

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Da questo procedimento, che può essere reso rigoroso, segue un altro risultato sorprendente: se  $f$  è olomorfa in  $A$ , ovvero se esiste la derivata complessa di  $f$  in  $A$ , allora esistono tutte le derivate di ordine superiore di  $f$  in  $A$ .

**Dimostrazione**

### TEOREMA 18.11

Sia  $f$  olomorfa in  $A$ . Allora  $f$  è derivabile infinite volte in  $A$ . Se  $z \in A$  e  $\gamma$  è un cammino in  $A$  intorno a  $z$  orientato positivamente, si ha

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{per ogni } n = 0, 1, 2, \dots \quad (18.26)$$

### ESERCIZIO 18.11

Teorema di Liouville

Sia  $f$  una funzione intera (ossia definita e olomorfa in tutto  $\mathbb{C}$ ).

a) Utilizzando la (18.26), dimostrare che

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{R} \left( \max_{|w-z|=R} |f(w)| \right) \quad \text{per ogni } R > 0 \text{ e per ogni } z \in \mathbb{C}.$$

b) Dedurre da (a) che se  $f$  è limitata, ovvero se  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , allora  $|f'(z)| = 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

c) Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann, dedurre da (b) il **Teorema di Liouville**:

Se  $f$  è intera e limitata, allora  $f$  è costante

- d) Mostrare con un esempio che il teorema di Liouville non è valido per le funzioni reali, limitate e di classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

## 18.6 Funzioni primitive

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , una funzione  $G : A \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **primitiva** di  $f$  in  $A$  se  $G$  è olomorfa in  $A$  e se  $G'(z) = f(z)$  per  $z \in A$ .

Funzione primitiva

Dimostrazione

### TEOREMA 18.12 Teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni complesse

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua e  $z_0 \in A$ . Per ogni  $z \in A$ , sia  $\gamma_{z_0, z}$  una curva semplice di classe  $C^1$  a tratti con punto iniziale  $z_0$  e punto finale  $z$ .

- (i) Se per ogni  $z \in A$  e per ogni curva semplice  $\tilde{\gamma}_{z_0, z}$  di classe  $C^1$  a tratti con punto iniziale  $z_0$  e punto finale  $z$  si ha

$$\int_{\tilde{\gamma}_{z_0, z}} f(w) dw = \int_{\gamma_{z_0, z}} f(w) dw$$

allora la funzione

$$F(z) = \int_{\gamma_{z_0, z}} f(w) dw$$

è una primitiva di  $f$  in  $A$ .

- (ii) Se  $G$  è una primitiva di  $f$  in  $A$ , allora

$$\int_{\gamma_{z_0, z}} f(w) dw = G(z) - G(z_0).$$

Sia  $n = 2, 3, \dots$  e

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \quad \text{per } z \neq 0.$$

Allora  $G(z) = \frac{1}{1-n} z^{1-n}$  è primitiva di  $f$  in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e per ogni curva regolare a tratti in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  che va da  $z_0$  a  $z_1$  si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^n} dz = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{z_0^{n-1}} - \frac{1}{z_1^{n-1}} \right).$$

Se  $n = 1$ , la funzione  $\frac{1}{z}$  non ha primitive in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (altrimenti, per il Teorema 18.12(ii),  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$  sarebbe stato uguale a 0 per ogni curva chiusa  $\gamma$ ). Per la (18.7), la funzione  $\text{Log } z$  è primitiva di  $\frac{1}{z}$  nell'insieme semplicemente connesso  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ .

### ESEMPIO 18.13

La seconda parte dell'esempio precedente mostra che per una funzione olomorfa in  $A$  non esiste sempre una funzione primitiva in  $A$ . Se però  $A$  è semplicemente connesso, segue dalla (18.22) e dal Teorema 18.12(i) che  $f$  ammette una primitiva.



**COROLLARIO 18.13**

Se  $A \subseteq \mathbb{C}$  è aperto e semplicemente connesso e se  $f$  è olomorfa in  $A$ ,  $f$  ha una primitiva in  $A$ .

Concludiamo con un risultato che caratterizza le funzioni olomorfe in  $A$  come le funzioni continue  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  il cui l'integrale è "localmente indipendente dal cammino di integrazione".

**Dimostrazione****TEOREMA 18.14**

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua in  $A$ . Allora  $f$  è olomorfa in  $A$  se e solo se per ogni  $z_0 \in A$  esiste un intorno  $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  di  $z_0$  tale che

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

per ogni curva di Jordan di classe  $C^1$  a tratti  $\gamma$  con sostegno contenuto in  $B_r(z_0)$ .

**ESERCIZIO 18.12**

Utilizzare una primitiva per calcolare i seguenti integrali:

a)  $\int_{\gamma} (e^{2iz} + z^2 - 1) dz$ ,  $\gamma$  una curva da 0 a 1.

b)  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ ,  $\gamma(t) = e^{it}$  per  $0 \leq t \leq \pi$ .

c)  $\int_{\gamma} \frac{1}{(3z - i)^3} dz$ ,  $\gamma$  una curva da 0 a 1 che non passa per  $\frac{i}{3}$ .

**18.7 Serie di potenze e funzioni olomorfe**

Nel Capitolo 9 sono state discusse le serie di potenze reali, ma è anche stato osservato che le loro proprietà più importanti continuano a valere nel caso di potenze complesse. Cominciamo ricapitolando i risultati più significativi.

**18.7.1 Serie di potenze complesse**

Una serie numerica complessa,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ( $a_k \in \mathbb{C}$ ), si dice (semplicemente) **convergente** con somma  $s \in \mathbb{C}$  se le somme parziali  $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$  convergono a  $s$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = s;$$

in tal caso il "resto" tende a zero:

$$s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

La serie si dice **assolutamente convergente** se è convergente  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ . Convergenza assoluta implica convergenza semplice.

Siano  $\{a_k\}$  una successione complessa e  $z_0 \in \mathbb{C}$ . La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

si dice **serie di potenze complesse**. Ragionando come nel caso reale (si veda il Capitolo 9), esiste  $r \in [0 + \infty]$ , detto **raggio di convergenza**, tale che

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \begin{cases} \text{converge assolutamente se } |z - z_0| < r \\ \text{non converge se } |z - z_0| > r; \end{cases}$$

inoltre la serie converge totalmente e uniformemente in  $B(z_0, \rho) = \{|z - z_0| < \rho\}$  per ogni  $\rho \in (0, r)$ , ovvero

$$\text{(convergenza totale)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \rho^k \text{ è convergente,}$$

$$\text{(convergenza uniforme)} \quad \sup_{z \in B(z_0, \rho)} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Se esiste

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad (\text{possibilmente } L = +\infty)$$

oppure

$$L = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \quad (\text{possibilmente } L = +\infty)$$

allora il raggio di convergenza è

$$r = \frac{1}{L} \quad (r = 0 \text{ se } L = +\infty; r = +\infty \text{ se } L = 0). \quad (18.27)$$

### TEOREMA 18.15

Sia  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $r > 0$  e con somma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{se } |z - z_0| < r.$$

Allora:

- (i)  $f$  è continua in  $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ;  
 (ii) **(scambio di integrale e sommatoria)** per ogni curva semplice di classe  $C^1$  a tratti  $\gamma$  con punto iniziale  $z_1$ , punto finale  $z_2$  e sostegno contenuto in  $B_r(z_0)$ , risulta

$$\int_{\gamma} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz \right)$$

ovvero

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \left( (z_2 - z_0)^{k+1} - (z_1 - z_0)^{k+1} \right); \quad (18.28)$$

- (iii) **(scambio di derivata e sommatoria)**  $f$  è olomorfa in  $B_r(z_0)$  e per ogni  $n = 1, 2, \dots$  la derivata  $f^{(n)}(z)$  è somma della serie delle derivate di  $a_k (z - z_0)^k$ :

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n} \quad \text{se } |z - z_0| < r. \quad (18.29)$$

Dimostrazione 



La dimostrazione è in gran parte simile a quella del caso reale (si veda il Capitolo 9). Si osservi che dalla (18.28) segue che  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  se  $\gamma$  è chiusa, quindi (i), (ii) e il Teorema 18.12 implicano che la somma  $f$  è olomorfa in  $B_r(z_0)$ .

**ESERCIZIO 18.13**

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} (iz)^k &= 1 + iz - z^2 - iz^3 + z^4 + \dots; & \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} &= 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \dots \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} &= z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \dots; \end{aligned}$$

### 18.7.2 Sviluppabilità in serie di potenze di funzioni olomorfe

Ricordiamo che la somma delle serie di Taylor di una funzione *reale* di classe  $C^{\infty}$  non coincide necessariamente con la funzione stessa (si veda l'Esempio 7.39). Ancora una volta si nota la grande differenza tra le funzioni olomorfe e le funzioni derivabili reali.

**Dimostrazione****TEOREMA 18.16**

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e connesso,  $z_0 \in A$  e  $f$  olomorfa in  $A$ . Allora la serie di Taylor di  $f$  centrata in  $z_0$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

converge nel più grande cerchio di centro  $z_0$  contenuto in  $A$  alla somma  $f(z)$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{per ogni } z \in B_r(z_0) \text{ se } B_r(z_0) \subseteq A.$$

Inoltre, se in un intorno di  $z_0$  risulta

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

allora

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0).$$

Se  $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ , le derivate in senso complesso di  $f$  in  $x_0$  coincidono con le derivate di  $f$  in  $x_0$  pensata come funzione della variabile reale  $x$ . Quindi, le serie di Taylor complesse con  $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$  avranno gli stessi coefficienti delle serie di Taylor reali. In particolare si ha che

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$



$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{se } |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \quad \text{se } |z| < 1$$

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad \text{se } |z| < 1.$$

## ESERCIZIO 18.14

Determinare la serie di Taylor centrata in 0 delle seguenti funzioni:

a)  $e^{-z^2}$ ;                      b)  $e^{iz}$ .

## ESERCIZIO 18.15

Utilizzando la serie geometrica  $\sum_{k=0}^{\infty} w^k = \frac{1}{1-w}$  se  $|w| < 1$ , determinare la serie di Taylor centrata in 0 delle seguenti funzioni:

a)  $\frac{1}{1+z}$ ;                      c)  $\frac{1}{2-z}$ ;  
 b)  $\frac{1}{1-z^2}$ ;                      d)  $\frac{1}{z+3i}$ .

## ESERCIZIO 18.16

Sapendo che  $\frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$ , determinare la serie di Taylor di  $\frac{1}{z^2+5z+6}$  centrata in 0.

## ESERCIZIO 18.17

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$ , aperto,  $a \in A$  e

$$d(a, \partial A) = \sup\{r \in (0, \infty) : B_a(r) \subset A\}.$$

Sia  $f$  olomorfa in  $A$  con serie di Taylor  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ , ( $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ ).

Utilizzare la (18.26) per dimostrare la seguente **stima di Cauchy** per  $c_k$ :

$$|c_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{se } 0 < r < d(a, \partial A)$$

dove

$$M(r) := \max_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Stima di Cauchy

## 18.8 Singolarità isolate: le serie di Laurent

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che se  $f$  è olomorfa in  $B_r(z_0)$ , allora

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad \text{se } z \in B_r(z_0)$$

dove, per la (18.26),

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$$

per ogni cammino  $\gamma$  in  $B_r(z_0)$  intorno a  $z_0$ .

Il seguente teorema può essere interpretato come una generalizzazione di questo risultato al caso in cui  $f$  non è definita nel centro  $z_0$  del cerchio, ovvero quando  $z_0$  è una *singolarità isolata* di  $f$ .

**Dimostrazione**

**TEOREMA 18.17** Sviluppo in serie di Laurent

Sia  $f$  ologorfa in  $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Allora

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < r \quad (18.30)$$

dove

$$c_k := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad (18.31)$$

e  $\gamma$  è un qualunque cammino in  $B_r(z_0)$  intorno a  $z_0$ , orientato positivamente. Lo sviluppo in serie è unico, nel senso che se

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k (z - z_0)^k \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < r$$

allora  $d_k = c_k$  per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ .

Segue dalla (18.23) che la definizione dei coefficienti  $c_k$  è consistente, ovvero non dipende dal cammino  $\gamma$ .

Se  $f$  è ologorfa in  $B_r(z_0)$ , cioè anche nel punto  $z_0$ , la funzione  $\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$  è ologorfa in  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$  se  $k = -1, -2, -3, \dots$ ; quindi, per il teorema di Cauchy,  $c_k = 0$  se  $k = -1, -2, \dots$  e ritroviamo lo sviluppo in serie di Taylor. La serie

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k &= \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} \\ &+ c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

si dice **serie di Laurent** di  $f$  centrata in  $z_0$ .

**ESEMPIO 18.14**

La funzione  $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$  è ologorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ed essendo  $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ , risulta

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{6!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \quad \text{se } z \neq 0.$$

La funzione  $f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$  è ologorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  e la serie di Laurent centrata in  $z_0 = 1$  è

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{1-z}} &= 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{(1-z)^3} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(1-z)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^{-k}. \end{aligned}$$

Una funzione complessa  $f$  ha una **singolarità isolata** in  $z_0 \in \mathbb{C}$  se  $f$  è definita e ologorfa in

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \quad \text{per qualche } r > 0.$$

**Singolarità isolata**

Per esempio, le funzioni

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\sin z}{z^2}, \quad e^{1/z}, \quad \frac{1}{z - z^3}$$

hanno una singolarità isolata in  $z = 0$ . La funzione  $\frac{1}{1 + z^2}$  ha due singolarità isolate, in  $z = \pm i$ , e la funzione  $e^{\frac{1}{1-z}}$  ha una singolarità isolata in  $z = 1$ .

### DEFINIZIONE 18.18

Sia  $z_0$  una singolarità isolata di  $f(z)$  e sia  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z - z_0)^k$  la serie di Laurent di  $f$  centrata in  $z_0$ . Il punto  $z_0$  si dice

- (i) **singolarità eliminabile** se  $c_k = 0$  per  $k = -1, -2, \dots$ ;
- (ii) **polo di ordine  $m \geq 1$**  se  $c_{-m} \neq 0$  e  $c_k = 0$  per  $k < -m$ ;
- (iii) **singolarità essenziale** se  $c_k \neq 0$  per infiniti valori negativi di  $k$ .

Per esempio,  $\frac{\sin z}{z}$  ha una singolarità eliminabile in 0,  $\frac{\sin z}{z^2}$  e  $\frac{1}{z - z^3} = \frac{1}{z(1 - z^2)}$  hanno un polo di ordine 1 in 0,  $e^{1/z}$  ha una singolarità essenziale in 0 (si veda l'Esempio 18.14).

### ESEMPIO 18.15

La funzione  $\frac{1}{z^2 + 1}$  ha due poli di ordine 1 in  $z = \pm i$ . Scriviamo per esempio la sua serie di Laurent in  $B_2(i)$ , ovvero nel più grande intorno sferico di  $i$  che non contiene l'altra singolarità  $-i$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2 + 1} &= \frac{1}{(z + i)(z - i)} = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{z - i + 2i} = \frac{1}{z - i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z - i}{2i}} \cdot \frac{1}{2i} \\ &= \frac{1}{z - i} \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 - (z - i)\frac{i}{2}} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} \sum_{k=0}^{\infty} \left((z - i)\frac{i}{2}\right)^k \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} \left(1 + \frac{i}{2}(z - i) - \frac{1}{4}(z - i)^2 - \frac{i}{8}(z - i)^3 \dots\right) \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{z - i} + \frac{1}{4} + \frac{i}{8}(z - i) - \frac{1}{16}(z - i)^2 + \dots = -\sum_{k=-1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{k+2} (z - i)^k. \end{aligned}$$

Si noti che per scrivere la serie di Taylor abbiamo utilizzato la stima  $\left|\frac{z - i}{2i}\right| = \frac{1}{2}|z - i| < 1$ , che è vera se  $z \in B_2(i)$ .

Una **funzione razionale** (complessa) è della forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad \text{con } p \text{ e } q \text{ polinomi complessi.}$$

Le singolarità di  $f$  sono date dagli zeri di  $q$ . Essendo  $q$  un polinomio, esso ha un numero finito di zeri, quindi ogni singolarità è isolata. L'ordine  $m$  di uno zero  $z_0$  di  $q$  è il numero intero positivo tale che

$$q(z) = (z - z_0)^m q_1(z)$$

per un certo polinomio  $q_1$  che verifica  $q_1(z_0) \neq 0$ . Allora possiamo scrivere



$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^m q_1(z)}$$

La funzione  $\frac{p(z)}{q_1(z)}$  è olomorfa e quindi ammette uno sviluppo in serie di Taylor in un intorno di  $z_0$ :

$$\frac{p(z)}{q_1(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{per } |z - z_0| < r.$$

Di conseguenza

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m}$$

e ci sono due possibilità:  $f$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$  oppure un polo di ordine al più  $m$ . In altri termini

una funzione razionale non ha singolarità essenziali.

#### DEFINIZIONE 18.19

Una funzione definita in un insieme aperto e connesso  $A \subseteq \mathbb{C}$ , olomorfa tranne in eventuali singolarità isolate, si dice **meromorfa** se le singolarità non sono essenziali.

Dunque, ogni funzione razionale è meromorfa in  $\mathbb{C}$ .

#### ESERCIZIO 18.18

Trovare le singolarità isolate delle seguenti funzioni e determinarne la natura:

a)  $\frac{1}{z^2 + z + 1}$ ;

c)  $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ ;

b)  $\frac{\sin z}{z^4 + 10z^3 + 25z^2}$ ;

d)  $\frac{z}{\sin z}$ .

#### ESERCIZIO 18.19

Trovare la serie di Laurent centrata in 0 delle seguenti funzioni:

a)  $z^3 \sin \frac{1}{z}$ ;

c)  $\frac{\sin z - z}{z^5}$ ;

b)  $\frac{1}{z^3(1 - z^2)}$ ;

d)  $\frac{\cos(\pi z)}{z^2}$ .

## 18.9 Singolarità isolate: il teorema dei residui

Siano  $A \subseteq \mathbb{C}$  aperto e semplicemente connesso e  $f$  olomorfa in  $A \setminus \{z_0\}$ . Per il Teorema 18.17,  $f$  è sviluppabile in serie di Laurent centrata in  $z_0$ . Il coefficiente  $c_{-1}$  riveste un ruolo particolare in quanto, per definizione,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w) dw$$

dove  $\gamma$  è un qualunque cammino in  $A$  intorno a  $z_0$  orientato positivamente. Il coefficiente  $c_{-1}$  si dice **residuo di  $f$  nella singolarità isolata  $z_0$**  e si scrive

$$c_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0) \quad \text{oppure} \quad c_{-1} = \operatorname{Res} f|_{z=z_0}.$$

Quindi

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f|_{z=z_0}.$$

Non è difficile generalizzare questo risultato al caso di più singolarità isolate di  $f$  appartenenti all'interno di  $\gamma$ .

### TEOREMA 18.20 Teorema dei residui

Sia  $f$  olomorfa nell'insieme aperto e semplicemente connesso  $A \subseteq \mathbb{C}$  con l'eccezione delle singolarità isolate  $z_1, \dots, z_n$ . Sia  $\gamma$  un cammino in  $A$  intorno a  $\{z_1, \dots, z_n\}$  orientato positivamente. Allora

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f|_{z=z_k}.$$

Dimostrazione

Per capire il teorema dei residui basta ripetere il ragionamento che è alla base della (18.23), mostrando che

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$$

dove  $\gamma_k(t) = z_k + \rho e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , con  $\rho > 0$  così piccolo che: (a) ciascun  $\gamma_k$  è un cammino nell'interno di  $A$  intorno a  $z_k$ ; (b) i sostegni di  $\gamma_k$  sono a due a due disgiunti (si veda Figura 18.10).

Se  $z_0$  è un polo di ordine 1 (oppure una singolarità eliminabile), allora

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{se } 0 < |z - z_0| < \rho$$

ovvero

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1} \rightarrow c_{-1} \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Dunque, se  $z_0$  è un polo di primo ordine di  $f$ , si ha che

$$\operatorname{Res} f|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

Calcolo dei residui

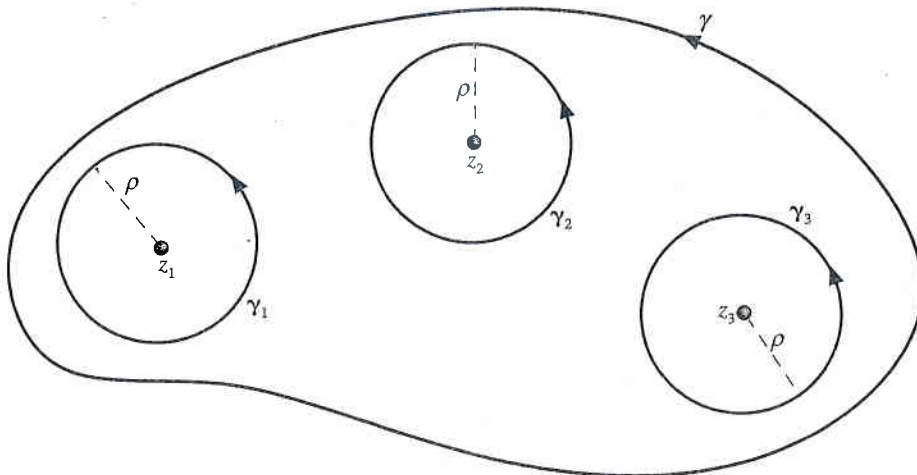


Figura 18.10

Non è difficile dimostrare un risultato leggermente più generale:

$$\text{se } z_0 \text{ è una singolarità isolata di } f \text{ e se esiste finito il limite} \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z), \text{ allora } \text{Res } f|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (18.32)$$

È frequente il caso in cui  $f(z) = g(z)/h(z)$  e  $z_0$  è uno zero isolato di  $h$ . Se  $g(z)$  e  $h(z)$  sono olomorfe in un intorno di  $z_0 \in \mathbb{C}$  e se  $h(z_0) = 0$  e  $h'(z_0) \neq 0$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{(z - z_0)(h'(z_0) + o(1))} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Quindi, per la (18.32),

$$\text{se } g \text{ e } h \text{ sono olomorfe in un intorno di } z_0 \in \mathbb{C} \text{ e} \\ \text{se } h(z_0) = 0 \text{ e } h'(z_0) \neq 0, \text{ allora } \text{Res } \frac{g}{h} |_{z=z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (18.33)$$

### ESEMPIO 18.16

Si vuole calcolare

$$\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)}, \quad \gamma(t) = \frac{i}{2} + e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

La funzione integranda  $f(z)$  ha tre possibili singolarità:  $z = 0$  e  $z = \pm i$ . L'interno di  $\gamma$  è  $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{i}{2}| \leq 1\}$ . Quindi  $-i$  è esterno a  $\gamma$  mentre  $0$  e  $i$  sono interni. Si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z(z^2 + 1)} = 1, \quad \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{\sin z}{z^2(z^2 + 1)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\sin z}{z^2(z + i)} = -\frac{\sin i}{2i}.$$

Poiché entrambi i limiti sono finiti, per la (18.32)  $0$  e  $i$  sono singolarità isolate di  $f$  e i valori del limite sono i corrispondenti residui: quindi segue dal Teorema dei residui che l'integrale vale

$$2\pi i \left( 1 - \frac{\sin i}{2i} \right) = 2\pi i \left( 1 + \frac{e^{-1} - e}{4} \right).$$

Se il limite nella (18.32) non esiste finito, significa che  $z_0$  è un polo di ordine  $m > 1$  o una singolarità essenziale. Nel primo caso vale la seguente formula:

$$\text{se } z_0 \text{ è un polo di ordine } m \text{ di } f, \text{ allora} \\ \text{Res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) \right). \quad (18.34)$$

### ESEMPIO 18.17

Si vuole calcolare

$$\oint_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z(z-1)^2(z+4i)} dz, \quad \text{dove } \gamma = 2e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

La funzione integranda  $f(z)$  ha: una singolarità eliminabile in  $z = 0$  (infatti  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -i/4$ ); un polo di ordine 1 in  $z = -4i$ , che però si trova all'esterno di  $\gamma$ ; un polo di ordine 2 in  $z = 1$ , infatti

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{e^z - 1}{z(z+4i)} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z(z^2 + (4i-2)z - 4i) + 2z + 4i}{z^2(z+4i)^2} = \frac{2 - e + 4i}{(1+4i)^2}.$$



Il valore del limite coincide con  $\text{Res } f(1)$  e perciò l'integrale vale  $2\pi(-4 + i(2 - e))/(1 + 4i)^2$ .

Il teorema dei residui può essere usato per calcolare l'integrale improprio di una funzione razionale di una variabile reale,  $P(x)/Q(x)$  (purché ovviamente la funzione sia integrabile). Si ricordi che comunque il calcolo può anche essere effettuato mediante integrazione diretta.

Integrali impropri di funzioni razionali

Si vuole calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx.$$

A questo scopo si considera l'integrale

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz$$

dove  $\gamma_R^+(t) = Re^{it}$  per  $0 \leq t \leq \pi$  e  $\gamma_R$  è la curva indicata in Figura 18.11. La funzione  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  ha all'interno di  $\gamma_R$  due singolarità isolate,  $\frac{\pm 1+i}{\sqrt{2}}$ ; quindi, per il teorema dei residui,

$$\int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left( \text{Res } f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \text{Res } f|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right) - \int_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz.$$

Poiché, per la disuguaglianza triangolare,

$$|z^4| \leq |z^4 + 1| + 1$$

si ha che

$$|1+z^4| \geq R^4 - 1 \quad \text{se } z \in \gamma_R^+ \quad (R > 1)$$

dunque, per la (18.18), risulta che, per  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\left| \int_{\gamma_R^+} \frac{1}{1+z^4} dz \right| \leq \frac{1}{R^4 - 1} L(\gamma_R^+) = \frac{\pi R}{R^4 - 1} \rightarrow 0.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi i \left( \text{Res } f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \text{Res } f|_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} \right).$$

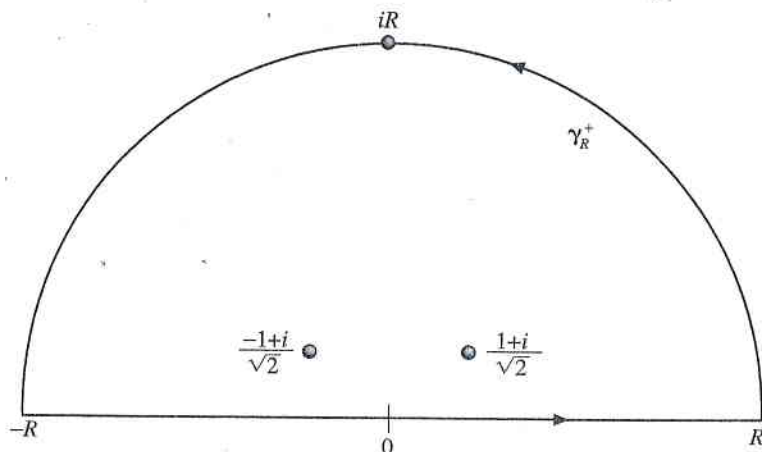


Figura 18.11 La curva  $t \mapsto \gamma_R(t)$  dell'Esempio 18.18.

Per la (18.32)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{z - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{1+z^4} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\left(z - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(z - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)} \end{aligned}$$

quindi il residuo vale  $\frac{1}{4}\sqrt{2}/(-1+i)$ . Si può anche utilizzare la (18.33):

$$\operatorname{Res} f|_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3} = \frac{\sqrt{2}}{4(-1+i)}.$$

Analogamente si calcola

$$\operatorname{Res} f|_{z=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4(1-i)}$$

quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{1}{-1+i} + \frac{1}{1+i} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Nell'esempio precedente abbiamo dovuto stimare l'integrale su un semicerchio per mostrare che tendeva a zero per il raggio  $R \rightarrow +\infty$ . In generale segue dalla (18.18) che

$$\text{se } |f(z)| = o\left(\frac{1}{|z|}\right) \text{ per } z \rightarrow \infty, \text{ allora } \oint_{|z|=R} f(z) dz \rightarrow 0 \text{ per } R \rightarrow +\infty$$

(ovviamente la stima si basa sul fatto che il perimetro di una circonferenza è proporzionale al suo raggio). Una stima più raffinata è fornita dal seguente risultato.

Lemma di Jordan

Dimostrazione

#### TEOREMA 18.21 Lemma di Jordan

Siano  $a \in \mathbb{R}$ ,  $R_0 > 0$ ,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Im} z > -a\}$$

e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  continua in  $A$  tale che

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in A}} f(z) = 0.$$

Per  $R > R_0$ , sia  $\gamma_R$  una parametrizzazione regolare dell'arco di cerchio di raggio  $R$  contenuto in  $A$  (si veda Figura 18.12a). Allora per ogni  $\lambda > 0$  si ha che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{\lambda z} dz = 0.$$

Sottolineiamo l'importanza del segno di  $\lambda$  e la posizione del semipiano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -a\}$ :

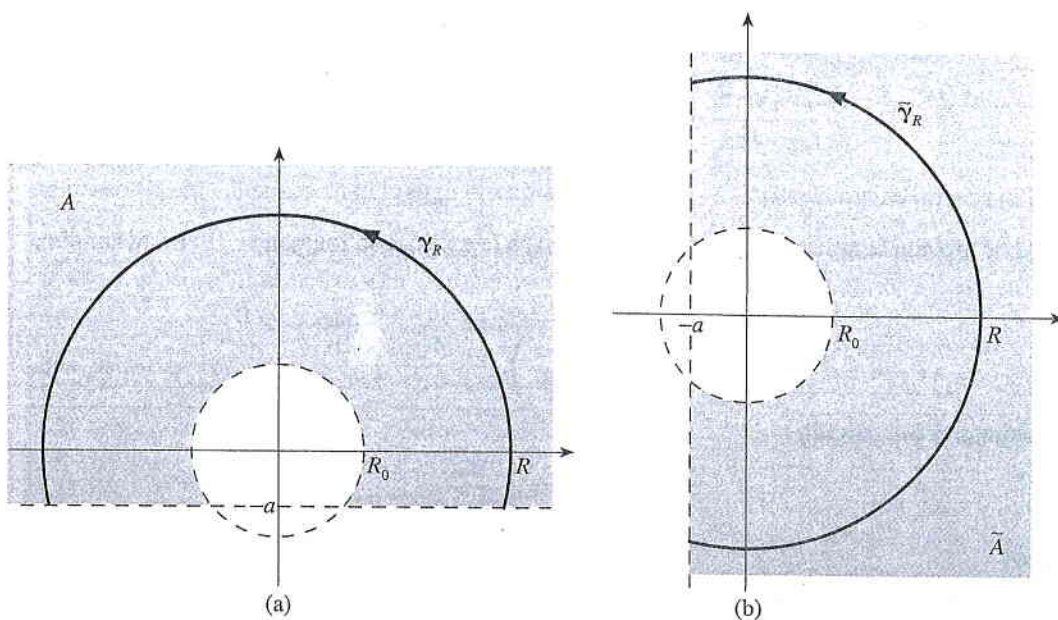
$$\lambda > 0 \Rightarrow |e^{\lambda z}| = e^{-\lambda(\operatorname{Im} z)} \rightarrow 0 \text{ per } \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty.$$

Infatti, sostituendo ad  $A$  l'insieme

$$\tilde{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0, \operatorname{Re} z > -a\}$$

si ottiene una versione diversa del lemma di Jordan: per  $R > R_0$ , sia  $\tilde{\gamma}_R$  una parametrizzazione regolare dell'arco di cerchio di raggio  $R$  contenuto nella chiusura di  $\tilde{A}$  (si veda Figura 18.12b); allora per ogni  $\lambda > 0$

Figura 18.12



$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} f(z) e^{-\lambda z} dz = 0.$$

Proviamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (18.35)$$

Ricordando che  $\frac{\sin z}{z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2iz}$ , l'idea è quella di ricondursi a un'applicazione del teorema dei residui e del lemma di Jordan. Siano  $R > 0$ ,  $\gamma_R^{(1)}(t) = Re^{it}$  per  $0 \leq t \leq \pi$  e  $\gamma_R^{(2)}(t) = Re^{it}$  per  $-\pi \leq t \leq 0$ . Siano inoltre  $\tilde{\gamma}_{R,\varepsilon}^{(1)}$  e  $\tilde{\gamma}_{R,\varepsilon}^{(2)}$  ( $0 < \varepsilon < R$ ) le curve chiuse indicate rispettivamente nelle Figure 18.13a e 18.13b. Per il teorema dei residui, si ha

$$\oint_{\tilde{\gamma}_{R,\varepsilon}^{(1)}} \frac{e^{iz}}{iz} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{iz}}{iz} \Big|_{z=0} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{i} = 2\pi, \quad \oint_{\tilde{\gamma}_{R,\varepsilon}^{(2)}} \frac{e^{-iz}}{iz} dz = 0. \quad (18.36)$$

D'altra parte, per il lemma di Jordan,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R^{(1)}} \frac{e^{iz}}{iz} dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R^{(2)}} \frac{e^{-iz}}{iz} dz = 0.$$

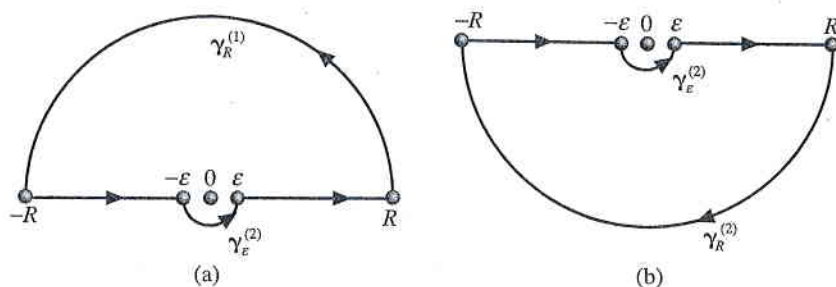


Figura 18.13 Le curve  $t \mapsto \tilde{\gamma}_{R,\varepsilon}^{(1)}$  (a) e  $t \mapsto \tilde{\gamma}_{R,\varepsilon}^{(2)}$  (b).

Perciò, sottraendo i due integrali nella (18.36) si ottiene



$$\begin{aligned}
 2\pi &= \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} dx + \int_{\gamma_{\varepsilon}^{(2)}} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{iz} dz \\
 &= 4 \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + 2 \int_{\gamma_{\varepsilon}^{(2)}} \frac{\sin z}{z} dz
 \end{aligned}$$

(abbiamo utilizzato la parità di  $(\sin x)/x$ ). Da questa uguaglianza segue la (18.35) osservando che, poiché la funzione  $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$  è olomorfa (e quindi continua) in  $\mathbb{R}$ , la (18.18) implica

$$\left| \int_{\gamma_{\varepsilon}^{(2)}} \frac{\sin z}{z} dz \right| \leq \max_{|z| \leq 1} \left| \frac{\sin z}{z} \right| \pi \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

**ESERCIZIO 18.20**

Calcolare i seguenti residui:

a)  $\text{Res} \frac{1}{z^2 + 1} \Big|_{z=\pm i}$ ;

c)  $\text{Res} \frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=-1}$ ;

b)  $\text{Res} z^2 \sin \frac{1}{z} \Big|_{z=0}$ ;

d)  $\text{Res} \frac{1}{z^3 + z^2} \Big|_{z=0}$ .

**ESERCIZIO 18.21**

Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

a)  $\oint_{\gamma} \frac{e^z - 1}{z(z+3)} dz$ , dove  $\gamma(t) = 5e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;

b)  $\oint_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3 - z} dz$ , dove  $\gamma = 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;

c)  $\oint_{\gamma} \frac{z^2 - 3z - e^{\frac{1}{z+1}}}{z} dz$ , dove  $\gamma(t) = \frac{1}{4} e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;

d)  $\oint_{\gamma} \frac{z^2}{z^2 - 7iz - 6} dz$ , dove  $\gamma(t) = 7e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

e)  $\oint_{\gamma} \frac{1}{\cos z} dz$ , dove  $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ;

f)  $\oint_{\gamma} \frac{1}{z^3 - 9i} dz$ , dove  $\gamma(t)$  è una curva di Jordan, regolare a tratti, orientata positivamente, il cui interno è  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3, \text{Im } z > 0\}$ .

**ESERCIZIO 18.22**

Sia  $I$  il valore dell'integrale improprio convergente

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(3x^2 + 1)} dx.$$

a) Mostrare che

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(3x^2 + 1)} dx.$$

b) Mostrare che

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(3z^2 + 1)} dz \rightarrow 0 \quad \text{per } R \rightarrow +\infty,$$

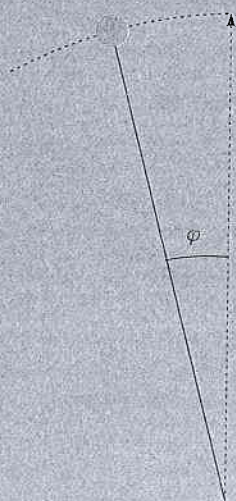
dove  $\gamma_R(t) = Re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

c) Calcolare  $I$ .

## FILO ROSSO Verso la teoria del controllo

La motivazione principale della teoria del controllo si trova nell'ingegneria, innanzitutto nell'ingegneria elettronica e dell'automazione. L'idea è semplice: studiando un sistema che varia nel corso del tempo, si cerca di *ottimizzare l'output del sistema* scegliendo alcuni parametri, *le variabili di controllo o di ingresso*, opportunamente in un certo arco temporale (il regime temporale del controllo). Per esempio, nel caso dell'impianto di distribuzione del motore a scoppio, il rapporto aria/benzina, la durata della scintilla della candela di accensione e il momento dell'iniezione della benzina nella camera di scoppio sono esempi di variabili di controllo, mentre la composizione dei gas di scarico è un esempio dell'output.

I problemi di controllo sono estremamente complessi da affrontare, e naturalmente non sono l'oggetto di questo capitolo. Qui introduciamo invece la *trasformata di Laplace*, uno strumento che trasforma equazioni differenziali lineari in equazioni algebriche e che consente di trattare anche dati discontinui o impulsivi. Come vediamo adesso con un esempio, nei casi più semplici di problemi di controllo queste caratteristiche possono facilitare la soluzione.



Riconsideriamo l'esempio del pendolo (si veda il filo rosso del Capitolo 17), ma stavolta occupiamoci della posizione di equilibrio  $\theta = \pi$ . Ponendo  $\varphi = \pi - \theta$  (si veda la figura precedente), è facile verificare che, nel caso di piccole oscillazioni e in assenza di resistenza,  $\varphi$  verifica

$$\varphi'' - \varphi = g(t) \quad (*)$$

dove  $g(t)$  è proporzionale al momento angolare di una forza esterna (applicata per esempio sul perno); a meno di un riscaldamento, abbiamo assunto che  $\omega_0^2 = 1$ . Poiché le radici del polinomio caratteristico sono  $\lambda = \pm 1$ , come suggerisce l'intuizione in assenza di forze esterne la posizione di equilibrio  $\varphi = 0$  è instabile: la soluzione corrispondente a un dato iniziale  $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  diverge per  $t \rightarrow +\infty$  (a parte il caso eccezionale in cui  $\beta = -\alpha$ ), ovvero una generica piccola perturbazione viene amplificata, il pendolo si allontana da  $\varphi = 0$  e abbandona in tempo finito il regime delle piccole oscillazioni.

L'obiettivo è quello di controllare il moto del pendolo, portandolo nella configurazione di equilibrio (instabile)  $\varphi = 0$ , attraverso una opportuna scelta di  $g(t)$  (il "controllo"). Naturalmente le possibili scelte di  $g$  sono molte. Qui mimiamo un "controllo digitale": supponiamo cioè di disporre di uno strumento che, a intervalli di tempo fissati,

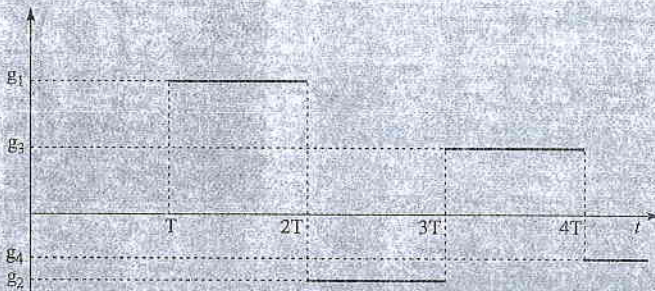
$$T, 2T, 3T, \dots, kT, \dots$$

misuri  $\varphi(kT)$  e  $\varphi'(kT)$  e, in base all'esito di tale misura, scelga un momento angolare  $g = g_k \in \mathbb{R}$  e lo applichi sul perno nell'intervallo di tempo  $(kT, (k+1)T]$ :

$$g(t) = g_k \quad \text{per } t \in (kT, (k+1)T].$$

Qui stiamo supponendo che tale processo (acquisizione dei dati, scelta del momento angolare e inizio dell'applicazione) avvenga "istantaneamente", ovvero su una scala temporale molto più picco-





la di quella su cui evolve il pendolo (cosa ragionevole se lo strumento è digitale). L'obiettivo quindi è determinare i controlli  $g_k$  "migliori": idealmente, siamo interessati a portare il pendolo in equilibrio (instabile) in tempo finito, ovvero in  $N$  passi, e nel tempo più breve possibile (con il minor numero  $N$  di passi). Quindi la domanda è:

(D) esistono  $N \geq 1$  e  $g_1, \dots, g_N$  tali che  $\varphi(t) = 0$  per  $t > NT$ ? Se sì, qual è il valore minimo di  $N$ ?

Per rispondere dobbiamo determinare  $\varphi$ , ovvero risolvere (\*) con il termine noto appena introdotto. Si potrebbe procedere così: si determina la soluzione  $\varphi_0$  di (\*) in  $(0, T]$  con  $g_0 = 0$  e dato iniziale  $(\varphi_0(0), \varphi_0'(0)) = (\alpha, \beta)$ , si ricavano  $(\varphi_0(T), \varphi_0'(T))$ , si determina la soluzione  $\varphi_1$  di (\*) in  $(T, 2T]$  con  $g = g_1$  e dato iniziale  $(\varphi_0(T), \varphi_0'(T))$ , e così via; infine si pone

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) \quad \text{per } t \in (kT, (k+1)T).$$

Si noti che la scelta delle condizioni iniziali garantisce che  $\varphi$  è di classe  $C^1$  nel suo dominio (si può dimostrare che è l'unica in questa classe). È chiaro però che questa procedura sarebbe piuttosto laboriosa. Come vedremo in questo capitolo, la trasformata di Laplace fornisce un metodo più semplice, in quanto permette di trattare l'equazione differenziale globalmente anziché per passi: basta osservare che  $g$  si può riscrivere come

$$g(t) = \sum_{k=1}^N g_k (H(t - kT) - H(t - (k+1)T))$$

( $H$  è l'usuale funzione di Heaviside) e applicare formalmente gli strumenti sviluppati nel capitolo per ottenere

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha \cosh t + \beta \sinh t \\ &+ \sum_{k=1}^N g_k \left( H(t - kT) \left( \cosh(t - kT) - 1 \right) \right. \\ &\left. - H(t - (k+1)T) \left( \cosh(t - (k+1)T) - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

(si veda l'Esercizio 19.7b). A posteriori si verifica che  $\varphi$  ha le proprietà desiderate. In particolare

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha \cosh t + \beta \sinh t + \sum_{k=1}^N g_k (\cosh(t - kT) \\ &- \cosh(t - (k+1)T)) \quad \text{per } t > NT. \end{aligned}$$

Se  $N = 1$  la risposta a (D) è negativa (a meno di dati iniziali particolari), ma se  $N = 2$  la risposta è sempre positiva: infatti, raccogliendo i termini  $e^t$  e  $e^{-t}$ , la condizione  $\varphi(t) = 0$  per  $t > NT$  è equivalente al sistema lineare

$$\begin{cases} (e^{-T} - e^{-2T})g_1 + (e^{-2T} - e^{-3T})g_2 = -\alpha - \beta \\ (e^T - e^{2T})g_1 + (e^{2T} - e^{3T})g_2 = \beta - \alpha \end{cases}$$

la cui matrice ha determinante diverso da zero ( $-4 \sinh T (\cosh T - 1)$ ). Abbiamo quindi ottenuto un controllo molto forte, che (almeno teoricamente) porta il sistema in equilibrio in soli due passi. In figura abbiamo riportato il controllo e la soluzione nel caso in cui  $T = 1$  e  $(\alpha, \beta) = (\pi/6, 1/4)$ .



Anziché un momento angolare costante in  $(kT, (k+1)T]$ , si potrebbe pensare di applicare un momento angolare *impulsivo*, ovvero concentrato nell'istante  $t = kT$ : nel capitolo accenniamo a come descrivere questa situazione con la *distribuzione di Dirac*,

$$g(t) = \sum_{k=1}^N g_k \delta(t - kT),$$

e verifichiamo che questo controllo funziona bene quanto il precedente (si veda l'Esercizio 19.13).



## 19.1 Definizione di trasformata di Laplace (unilatera)

Sia  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione complessa con parte reale  $u$  e parte immaginaria  $v$ :

$$g(x) = u(x) + iv(x) \quad \text{per } x \geq 0.$$

La funzione  $g$  si dice **localmente integrabile** in  $[0, +\infty)$  se  $u$  e  $v$  sono integrabili secondo Riemann in  $[0, b]$  per ogni  $b > 0$ . La funzione  $g$  si dice **assolutamente integrabile** in  $[0, +\infty)$  se  $g$  è localmente integrabile in  $[0, +\infty)$  e se esiste finito il limite

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b |g(x)| dx.$$

Poiché  $|u(x)|, |v(x)| \leq |g(x)|$ , segue dal Teorema del confronto per gli integrali impropri che anche  $u$  e  $v$  sono assolutamente integrabili in  $[0, +\infty)$ . Se  $g$  è assolutamente integrabile in  $[0, +\infty)$ , è quindi convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} g(x) dx := \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b g(x) dx = \int_0^{+\infty} u(x) dx + i \int_0^{+\infty} v(x) dx.$$

Siano ora  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  e  $p_0 \in \mathbb{C}$  tali che  $e^{-p_0 x} f(x)$  sia assolutamente integrabile in  $[0, +\infty)$ . Poiché

$$|e^{-px}| \leq |e^{-p_0 x}| \quad \text{per ogni } x \geq 0 \text{ ed ogni } p \in \mathbb{C} \text{ tale che } \operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0,$$

il Teorema del confronto implica che anche  $e^{-px} f(x)$  è assolutamente integrabile in  $[0, +\infty)$  per ogni  $p \in \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re} p \geq \operatorname{Re} p_0$ . Allora, posto

$$a := \inf \left\{ \operatorname{Re} z : e^{-zx} f(x) \text{ è assolutamente integrabile in } [0, +\infty) \right\}, \quad (19.1)$$

l'integrale improprio  $\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$  è convergente per ogni  $p$  che appartiene al semipiano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a\}$  (se  $a = -\infty$  si tratta di tutto il piano complesso; si veda Figura 19.1). Quindi ha senso la seguente definizione:

### DEFINIZIONE 19.1

Siano  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  e  $p_0 \in \mathbb{C}$  tali che  $e^{-p_0 x} f(x)$  sia assolutamente integrabile in  $[0, +\infty)$ , e sia  $a \in [-\infty, \operatorname{Re} p_0]$  definito dalla (19.1). Allora la funzione

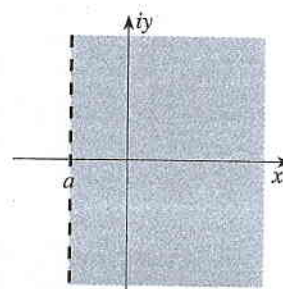
$$F(p) := \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad \text{se } \operatorname{Re} p > a \quad (19.2)$$

si dice **trasformata di Laplace (unilatera)** di  $f$  con **ascissa di convergenza**  $a$  e si scrive

$$\mathcal{L}[f] = F.$$

Naturalmente esistono funzioni che non verificano le condizioni della Definizione 19.1, per esempio  $f(x) = e^{x^2}$ . Viceversa, se  $f$  è localmente integrabile in  $[0, +\infty)$  ed esistono  $M, s_0 \in \mathbb{R}$  tali che  $|f(x)| \leq M e^{s_0 x}$  per  $x \geq 0$ , allora l'ascissa di convergenza  $a$  di  $f$  soddisfa  $a \leq s_0$  e la trasformata  $F(p)$  di  $f$  è ben definita per  $\operatorname{Re} p > a$ .

Se  $f(x) = M e^{s_0 x}$  ( $M, s_0 \in \mathbb{R}$ ) per  $x \geq 0$  si ha che  $a = s_0$  e  $F(p) = M \int_0^{+\infty} e^{(s_0-p)x} dx = \frac{M}{p-s_0}$  se  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Infatti, la funzione  $w \mapsto \frac{1}{s_0-p} e^{(s_0-p)w}$  è primitiva di  $w \mapsto e^{(s_0-p)w}$ , quindi, per



**Figura 19.1**  
 $\operatorname{dom} \mathcal{L}[f] = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a\}$ .

### ESEMPIO 19.1

### ESEMPIO 19.2

il Teorema 18.12(ii) si ha  $\int_0^b e^{(s_0-p)x} dx = \frac{1}{s_0-p} (e^{(s_0-p)b} - 1) \rightarrow \frac{1}{p-s_0}$  per  $b \rightarrow +\infty$  se  $\operatorname{Re} s_0 < \operatorname{Re} p$ . In particolare si ha:

$$\mathcal{L}[e^{s_0 x}] = \frac{1}{p-s_0} \text{ se } \operatorname{Re} p > s_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \text{ se } \operatorname{Re} p > 0.$$

La trasformata di Laplace è una funzione olomorfa:

**Dimostrazione**

### TEOREMA 19.2

La trasformata di Laplace di  $f$  con ascissa di convergenza  $a < +\infty$  è olomorfa nel semipiano  $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > a\}$  e

$$(\mathcal{L}[f])'(p) = - \int_0^{+\infty} x e^{-px} f(x) dx.$$

Formalmente, il risultato si ottiene derivando  $F(p)$  rispetto a  $p$  sotto il segno d'integrale nella (19.2).

## 19.2 Trasformata inversa

Sia  $F(p)$  la trasformata di Laplace di una funzione  $f(x)$  con ascissa di convergenza  $a$ :

$$\mathcal{L}[f] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-px} dx \quad \text{per } \operatorname{Re} p > a.$$

Sia  $a_0 > a$  e consideriamo

$$\text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} F(p) e^{px} dp := \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a_0-ib}^{a_0+ib} F(p) e^{px} dp \quad (19.3)$$

dove il percorso di integrazione nell'ultimo integrale è il segmento verticale da  $a_0 - ib$  ad  $a_0 + ib$ . Le lettere v.p. stanno per **valore principale** dell'integrale improprio e indicano la simmetria nella scelta degli estremi  $a_0 - ib$  e  $a_0 + ib$ . Si sottolinea che questa simmetria rende la nozione diversa da quella usuale: per esempio, nel caso di funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \text{ non è convergente, mentre } \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

### ESEMPIO 19.3

Nell'Esempio 19.2 abbiamo visto che

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^{+\infty} e^{-px} dx = \frac{1}{p} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > 0.$$

Siano  $a_0, b > 0$  e  $x \neq 0$ . Consideriamo l'integrale  $\int_{a_0-ib}^{a_0+ib} \frac{e^{px}}{p} dp$  e siano  $\gamma_b$  e  $\tilde{\gamma}_b$  parametrizzazioni regolari dei due archi della circonferenza di centro  $O$  e raggio  $\sqrt{a_0^2 + b^2}$  rappresentati in Figura 19.2 e percorsi da  $a_0 + ib$  ad  $a_0 - ib$ . Dal Lemma di Jordan segue che

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_b} \frac{e^{px}}{p} dp = 0 \quad \text{se } x > 0 \quad (19.4)$$

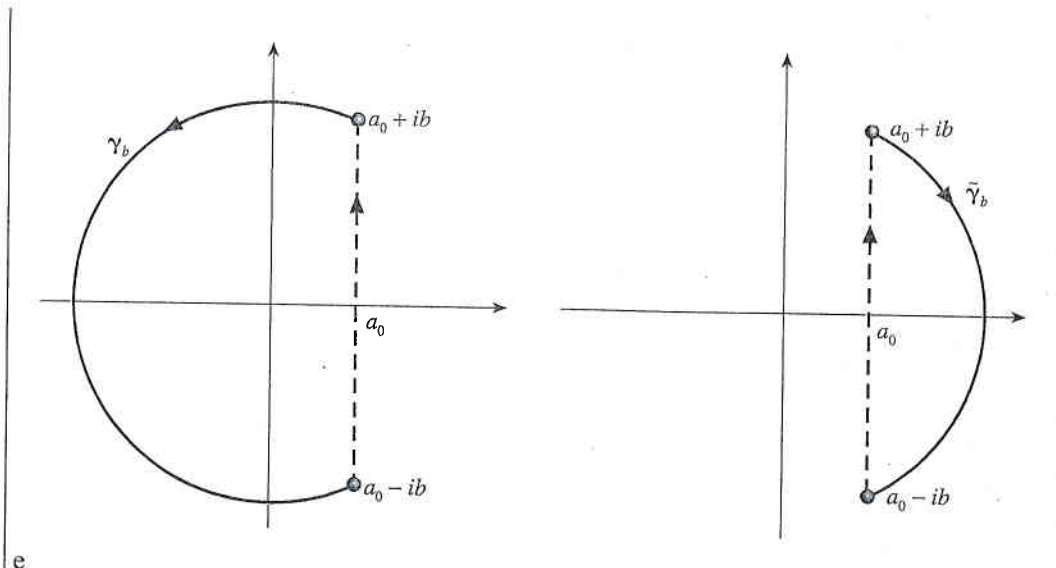


Figura 19.2

e

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\gamma}_b} \frac{e^{px}}{p} dp = 0 \quad \text{se } x < 0. \quad (19.5)$$

D'altra parte  $\frac{e^{px}}{p}$  è olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e, per il teorema dei residui,

$$\int_{a_0 - ib}^{a_0 + ib} \frac{e^{px}}{p} dp + \int_{\gamma_b} \frac{e^{px}}{p} dp = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{px}}{p} \Big|_{p=0} = 2\pi i$$

e

$$\int_{a_0 - ib}^{a_0 + ib} \frac{e^{px}}{p} dp + \int_{\tilde{\gamma}_b} \frac{e^{px}}{p} dp = 0.$$

Allora, per la (19.4) e la (19.5),

$$\text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} \frac{e^{px}}{p} dp = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (19.6)$$

Si osservi che per  $x > 0$  il risultato della (19.6) coincide con la funzione di partenza,  $f(x) = 1$ . Il seguente risultato mostra che ciò non è casuale.

**TEOREMA 19.3**

Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrabile in  $[0, +\infty)$  e tale che

$$|f(x)| \leq M e^{s_0 x} \quad \text{se } x \geq 0. \quad (19.7)$$

Siano  $a_0 > s_0$  e

$$F(p) = \mathcal{L}[f] \quad \text{se } \operatorname{Re} p > s_0.$$

Allora

$$\text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0 - i\infty}^{a_0 + i\infty} F(p) e^{px} dp = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \text{ e } f \text{ è continua in } x \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (19.8)$$

Dimostrazione

Si noti che, se  $f$  verifica la (19.7), l'ascissa di convergenza  $a$  soddisfa  $a \leq s_0$  (si veda l'Esempio 19.1), quindi  $\mathcal{L}[f]$  è ben definita se  $\operatorname{Re} p > s_0$ .

Il Teorema 19.3 suggerisce la seguente definizione di una classe di funzioni  $f$  particolarmente adatte per la trasformata di Laplace.



**DEFINIZIONE 19.4**

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **originale** per la trasformata di Laplace se

- (i)  $f$  è localmente integrabile in  $[0, +\infty)$ ;
- (ii)  $f(x) = 0$  se  $x < 0$ ;
- (iii) esistono  $M \geq 0$  e  $s_0 \in \mathbb{R}$  tali che  $|f(x)| \leq Me^{s_0 x}$  per ogni  $x > 0$ .

Il Teorema 19.3 può essere così riformulato:

**COROLLARIO 19.5**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un originale per la trasformata di Laplace e sia

$$\mathcal{L}[f] = F(p) \quad \text{se } \operatorname{Re} p \geq s_0.$$

Allora per ogni  $a > s_0$  si ha che

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{px} dp$$

in ogni punto  $x \neq 0$  in cui  $f$  è continua.

Questo risultato implica che una funzione  $f$ , continua e originale per la trasformata di Laplace, è completamente determinata dalla sua trasformata  $F(p) = \mathcal{L}[f]$ ; in tal caso si scrive anche

$$\mathcal{L}^{-1}[F](x) := \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{px} dp,$$

e  $\mathcal{L}^{-1}[F]$  si dice **trasformata di Laplace inversa** o **antitrasformata di Laplace** di  $F$ .

La condizione " $f(x) = 0$  per  $x < 0$ " nella Definizione 19.4 è motivata dal fatto che  $\mathcal{L}^{-1}[F] = 0$  per  $x < 0$ , ed è per questa ragione che nella definizione di  $\mathcal{L}[f]$  si tiene conto solo dei valori di  $f(x)$  per  $x \geq 0$  (la trasformata bilatera, che tiene conto di tutti i valori di  $f$ , è trattata brevemente nel Paragrafo 19.5). Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica le condizioni (i) e (iii) della definizione di originale, ricordando la definizione della funzione di Heaviside,

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

si ha che  $Hf$  è un originale per la trasformata di Laplace e  $\mathcal{L}[Hf] = \mathcal{L}[f]$ . Quindi

$$\text{se } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ verifica (i) e (iii) nella Definizione 18.2, allora} \\ \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f]](x) = H(x) f(x) \text{ in ogni punto di continuità di } Hf, x \neq 0.$$

Per esempio

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = H(x) \quad \text{se } x \neq 0$$

e

$$\mathcal{L}[e^{s_0 x}] = \frac{1}{p - s_0} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > s_0 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p - s_0}\right] = H(x) e^{s_0 x} \quad \text{se } x \neq 0.$$

Il Teorema 19.3 fornisce una formula per la trasformata inversa di  $F(p)$  se si sa a priori che  $F$  è la trasformata di qualche funzione  $f$ . Data una qualsiasi funzione di variabile complessa,  $F(p)$ , è importante sapere quando essa possa essere pensata come

trasformata di Laplace di un certo originale. Abbiamo già visto che  $F$  deve essere olomorfa in un semipiano  $\operatorname{Re} p > a$ . Per ricavare una seconda condizione necessaria, consideriamo la trasformata  $F$  di un originale  $f$ :

$$F(p) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx.$$

Se  $|f(x)| \leq Me^{s_0 x}$  per  $x \geq 0$  si ha che, se  $\operatorname{Re} p > s_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b f(x)e^{-px} dx \right| &\leq \int_0^b |f(x)| \cdot |e^{-px}| dx \leq M \int_0^b e^{-(\operatorname{Re} p - s_0)x} dx \\ &= \frac{M}{\operatorname{Re} p - s_0} (1 - e^{-(\operatorname{Re} p - s_0)b}) \rightarrow \frac{M}{\operatorname{Re} p - s_0} \quad \text{per } b \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

ovvero

$$|F(p)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} p - s_0} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > s_0. \quad (19.9)$$

Allora la condizione

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$$

è necessaria per riconoscere la trasformata di Laplace di un originale: per esempio, la funzione  $F(p) = 1$  per ogni  $p \in \mathbb{C}$  non può essere la trasformata di Laplace di un originale  $f(x)$ .

È possibile fornire delle condizioni sufficienti, ma non ci soffermeremo su questo problema. Osserviamo soltanto che ogni funzione razionale che va a zero per  $p \rightarrow \infty$  è trasformata di Laplace di un originale:

$$F(p) = \frac{Q_0(p)}{Q_1(p)}, \quad p \neq p_1, \dots, p_n$$

dove  $Q_0$  e  $Q_1$  sono polinomi complessi,  $p_1, \dots, p_n$  sono gli zeri di  $Q_1(p)$  e

grado di  $Q_0 <$  grado di  $Q_1$ .

Inoltre, ragionando esattamente come nell'Esempio 19.3 (con  $a_0$  e  $b$  tali che  $a_0 > \operatorname{Re} p_k$  e  $|p_k|^2 < a_0^2 + b^2$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ ), si ottiene una formula esplicita per la trasformata inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[F] = H(x) \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} (F(p)e^{px})|_{p=p_k}. \quad (19.10)$$

Se  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$ , per la (18.32) o (18.33), i residui di  $\frac{e^{px}}{p^2 + 1}$  nei poli  $\pm i$  valgono  $\frac{1}{2i} e^{ix}$  e  $-\frac{1}{2i} e^{-ix}$ , quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2 + 1}\right] = H(x) \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = H(x) \sin x.$$

#### ESEMPIO 19.4

**ESERCIZIO 19.1**

Dimostrare la formula (19.10) per la trasformata inversa di una funzione razionale  $F(p)$  che va a zero per  $p \rightarrow \infty$ .

### 19.3 Prime proprietà; trasformate di funzioni elementari

La *linearità* della trasformata di Laplace segue immediatamente dalla definizione.

**TEOREMA 19.6**

Siano  $F(p)$  e  $G(p)$  rispettivamente le trasformate di Laplace di  $f$  e di  $g$ , con ascissa di convergenza  $a_f$  e  $a_g$ . Allora, per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha F(p) + \beta G(p) \quad \text{se } \operatorname{Re} p > \max\{a_f, a_g\}. \quad (19.11)$$

**ESEMPIO 19.5**

Per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  si ha, per l'Esempio 19.2,

$$\mathcal{L}[\sin(\omega x)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}\right] = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > 0.$$

Analogamente, si ottiene che

$$\mathcal{L}[\cos(\omega x)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > 0, \quad (19.12)$$

$$\mathcal{L}[\sinh(\omega x)] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > |\omega|, \quad (19.13)$$

$$\mathcal{L}[\cosh(\omega x)] = \frac{p}{p^2 - \omega^2} \quad \text{se } \operatorname{Re} p > |\omega|. \quad (19.14)$$

La Tabella 19.1 raccoglie la proprietà principali della trasformata di Laplace; il punto di partenza è la trasformata  $F(p)$  di un originale  $f(x)$ .

Osserviamo che al punto 2  $f(0^+) := \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , al punto 3  $f_+^{(k)}(0)$  indica la derivata destra di ordine  $k$  in 0.

**Dimostrazione**

Si dimostrano le proprietà elencate nella Tabella 19.1.

1) Posto  $y = \alpha x$ , si ha che, per  $\operatorname{Re} p > \alpha s_0$ ,

$$\mathcal{L}[f(\alpha x)] = \int_0^{+\infty} f(\alpha x) e^{-px} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{\alpha} y} dy = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

2)  $f(x)e^{-px} \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$  se  $\operatorname{Re} p > s_0$  e  $|f(x)| \leq Me^{s_0 x}$ , quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f'(x) e^{-px} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( f(x) e^{-px} \Big|_{x=0}^{x=b} + p \int_0^b f(x) e^{-px} dx \right) \\ &= pF(p) - \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \end{aligned}$$



Tabella 19.1

	originale	trasformata	dominio della trasformata	condizioni
	$f(x)$	$F(p)$	$\operatorname{Re} p > s_0$	$ f(x)  \leq M e^{s_0 x}$
1	$f(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$	$\operatorname{Re} p > \alpha s_0$	$\alpha > 0$
2	$f'(x)$	$pF(p) - f(0^+)$	$\operatorname{Re} p > s_0$	$f \in C^1([0, +\infty))$
3	$f^{(n)}(x)$	$\frac{p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'_+(0) \cdots - f_+^{(n-1)}(0)}{1}$	$\operatorname{Re} p > s_0$	$f \in C^n([0, +\infty))$ $ f^{(k)}(x)  \leq M e^{s_0 x}$ per $k = 1, \dots, n-1$
4	$(-1)^n x^n f(x)$	$F^{(n)}(p)$	$\operatorname{Re} p > s_0$	
5	$\int_0^x f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p}$	$\operatorname{Re} p > \max\{s_0, 0\}$	
6	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_p^{+\infty+i\operatorname{Im} p} F(z) dz$	$\operatorname{Re} p > s_0$	$\frac{f(x)}{x}$ è originale
7	$H(x-x_0)f(x-x_0)$	$e^{-px_0} F(p)$	$\operatorname{Re} p > s_0$	$x_0 \geq 0$
8	$e^{p_0 x} f(x)$	$F(p-p_0)$	$\operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re} p_0$	
9	$f(x)$	$\frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-px} f(x) dx$	$\operatorname{Re} p > 0$	$s_0 = 0, T > 0,$ $f(x+T) = f(x)$ se $x \geq 0$

3) Segue applicando ripetutamente il punto 2.

4) Se  $|f(x)| \leq M e^{s_0 x}$ ,  $x^n f(x) e^{-px}$  è assolutamente integrabile in  $[0, +\infty)$  se  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Per il Teorema 19.2,  $F'(p)$  è la trasformata di  $-xf(x)$ ,  $F''(p)$  quella di  $x^2 f(x)$  ecc.

5) Se  $|f(x)| \leq M e^{s_0 x}$  per  $x \geq 0$ , la primitiva  $g(x) := \int_0^x f(t) dt$  verifica

$$|g(x)| \leq \begin{cases} \frac{M}{s_0} e^{s_0 x} & \text{per } x \geq 0 \text{ se } s_0 > 0 \\ \frac{M}{|s_0|} & \text{per } x \geq 0 \text{ se } s_0 < 0 \end{cases}$$

quindi è originale. Allora se  $\mathcal{L}[g] = G$ , per il punto 2 si ha che  $\mathcal{L}[g'] = pG(p) - g(0^+) = pG(p)$ , ovvero  $G(p) = F(p)/p$ .

6) Se  $|f(x)| \leq M e^{s_0 x}$  per  $x \geq 0$ ,  $f(x) e^{-px}/x$  è assolutamente integrabile in  $[1, +\infty)$  se  $\operatorname{Re} p > s_0$ ; inoltre, poiché  $f(x)/x$  è originale,  $f(x) e^{-px}/x$  è integrabile in  $[0, 1]$ . Posto  $G(p) = \mathcal{L}[f(x)/x]$ ,  $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[xg(x)] = -G'(p)$ . D'altra parte  $\mathcal{L}[f] = F(p)$  e allora, scelto  $p_0$  con  $\operatorname{Re} p_0 > 0$ ,

$$G(p) = - \int_{p_0}^p F(z) dz + C = \int_p^{p_0} F(z) dz + C$$

dove il percorso di integrazione è una qualunque curva di classe  $C^1$  contenuta nel semipiano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > s_0\}$ . Per determinare  $C$  ricordiamo che  $G(p) \rightarrow 0$  per  $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ , quindi  $C = - \int_{p_0}^{+\infty} F(z) dz$  e  $G(p) = \int_p^{+\infty} F(z) dz$ .

- 7) Se  $x_0 > 0$  si ha che  $H(x - x_0)f(x - x_0) = 0$  se  $0 \leq x \leq x_0$ ; quindi, posto  $y = x - x_0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} H(x - x_0)f(x - x_0)e^{-px} dx &= \int_{x_0}^{+\infty} f(x - x_0)e^{-px} dx = \int_0^{+\infty} f(y)e^{-p(y+x_0)} dy \\ &= e^{-px_0} \int_0^{+\infty} f(y)e^{-py} dy = e^{-px_0} F(p). \end{aligned}$$

- 8) Segue dalla definizione di trasformata che  $\int_0^{+\infty} (e^{p_0 x} f(x))e^{-px} dx = F(p - p_0)$  se  $\text{Re}(p - p_0) > s_0$ .
- 9) Sia  $f_0(x) = f(x)\mathbf{1}_{[0, T)}(x)$ , dove  $\mathbf{1}_{[0, T)}$  indica la funzione caratteristica dell'intervallo  $[0, T)$ . Allora per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f_0(x) + f_0(x - T) + f_0(x - 2T) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(x - nT).$$

Posto  $F_0(p) = \mathcal{L}[f_0] = \int_0^T f(x)e^{-px} dx$  per  $p \in \mathbb{C}$ , risulta per ogni  $n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^{+\infty} f_0(x - nT)e^{-px} dx = e^{-npT} F_0(p)$$

quindi, se  $\text{Re } p > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_0(x) + f_0(x - T) + \dots + f_0(x - NT)] &= \sum_{n=0}^N e^{-npT} F_0(p) \\ &= \frac{1 - e^{-(N+1)pT}}{1 - e^{-pT}} F_0(p) \rightarrow \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}} \quad \text{per } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

### ESEMPIO 19.6

Si vuole determinare la trasformata di Laplace e l'ascissa di convergenza delle funzioni  $f_1(x) = H(x - 2)e^{3x}$  ed  $f_2(x) = H(x - 2)xe^{3x}$ .

Per la prima, si riscrive la funzione in modo da poter applicare la proprietà 7 della Tabella 19.1:

$$f_1(x) = H(x - 2)e^{3(x-2)+6} = e^6 H(x - 2)e^{3(x-2)} = e^6 H(x - 2)g(x - 2), \quad \text{dove } g(x) = e^{3x}.$$

Ricordando l'Esempio 19.2,  $\mathcal{L}[g] = 1/(p - 3)$ ,  $\text{Re } p > 3$ . Perciò, per la proprietà 7 e la linearità,  $\mathcal{L}[f_1] = e^{6-2p}/(p - 3)$  e l'ascissa di convergenza è 3.

Per la seconda, osservando che  $f_2(x) = xf_1(x)$ , si può applicare direttamente la proprietà 4:

$$\mathcal{L}[f_2] = -\mathcal{L}[-xf_1(x)] = -\frac{d}{dp} \left( \frac{e^{6-2p}}{p - 3} \right) = \frac{e^{6-2p}(5 - 2p)}{(p - 3)^2}.$$

### ESEMPIO 19.7

Si vuole determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - k & x \in [k, k + 1), k \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(si veda Figura 19.3). Per la proprietà 9 della Tabella 19.1

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{1 - e^{-p}} \mathcal{L}[f_0], \quad \text{dove } f_0(x) = x\mathbf{1}_{[0, 1)} = x(H(x) - H(x - 1))$$

e per le proprietà 4 e 7

$$\mathcal{L}[f_0] = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}[H(x) - H(x - 1)] = -\frac{d}{dp} \left( \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} \right) = \frac{1 - e^{-p}(p + 1)}{p^2}.$$

Perciò

$$\mathcal{L}[f] = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p(1 - e^{-p})}.$$

Naturalmente per il calcolo di  $\mathcal{L}[f_0]$  si può utilizzare direttamente la definizione (lo studente verifichi).

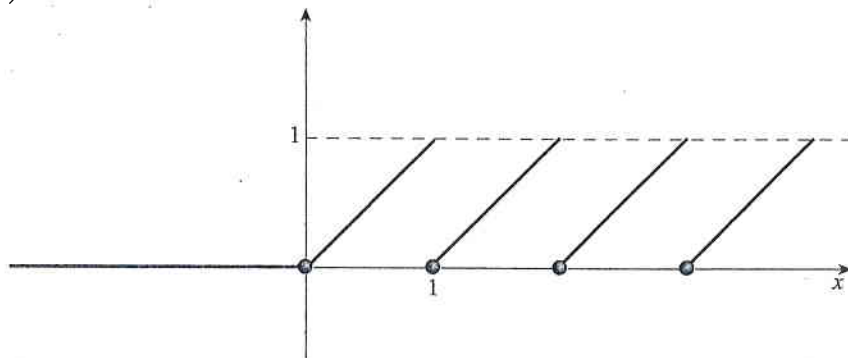


Figura 19.3 La funzione dell'Esempio 19.7.

Negli esempi precedenti sono state ricavate le trasformate di alcune funzioni elementari che possono essere utilizzate, insieme alle proprietà appena descritte, per ottenerne altre. Ne riportiamo alcune nella Tabella 19.2 (le prime sei e quella di  $\sin x/x$  sono già note).

Descriviamo brevemente come ottenere le formule della Tabella 19.2. Poiché  $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$  risulta  $\mathcal{L}[-x] = \left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$ ,  $\mathcal{L}[x^2] = \frac{2}{p^3}$ ,  $\mathcal{L}[-x^3] = -\frac{6}{p^4}$  ecc. Il fattore  $e^{p_0 x}$  causa una traslazione, quindi  $F(p) \rightarrow F(p - p_0)$ .

Trasformate di funzioni elementari

Poiché  $\mathcal{L}[\sin(\omega x)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ , si ha che

$$\mathcal{L}[-x \sin(\omega x)] = \frac{d}{dp} \left( \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = -\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

Tabella 19.2

$f$	$\mathcal{L}[f]$	dom $\mathcal{L}[f]$	$f$	$\mathcal{L}[f]$	dom $\mathcal{L}[f]$
1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re } p > 0$	$x^n e^{p_0 x}$	$\frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}$	$\text{Re } p > \text{Re } p_0$
$e^{p_0 x}$	$\frac{1}{p - p_0}$	$\text{Re } p > \text{Re } p_0$	$x \sin(\omega x)$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\text{Re } p > 0$
$\sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re } p > 0$	$x \cos(\omega x)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\text{Re } p > 0$
$\cos(\omega x)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re } p > 0$	$\frac{\sin x}{x}$	$\int_p^{+\infty + i\text{Im } p} \frac{1}{p^2 + 1} dp$	$\text{Re } p > 0$
$\sinh(\omega x)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{Re } p >  \omega $	$e^{-\lambda x} \sin(\omega x)$	$\frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$\text{Re } p > -\lambda$
$\cosh(\omega x)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{Re } p >  \omega $	$e^{-\lambda x} \cos(\omega x)$	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$\text{Re } p > -\lambda$
$x^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re } p > 0$			



$$\text{e, analogamente, } \mathcal{L}[-x \cos(\omega x)] = \frac{d}{dp} \left( \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) = -\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

La tabella può essere utile per determinare la trasformata inversa di alcune funzioni.

**ESEMPIO 19.8**

Per determinare un originale  $f$  per la funzione  $F(p) = 3p/(p^3 + 1)$  (che esiste per quanto osservato nel Paragrafo 19.2), si può procedere o applicando la (19.10) o utilizzando la Tabella 19.2. Utilizziamo il secondo approccio, lasciando allo studente la verifica mediante il primo. Si ha, mediante scomposizione in fratti semplici,

$$\frac{3p}{p^3 + 1} = -\frac{1}{p + 1} + \frac{p + 1}{p^2 - p + 1}.$$

Il primo addendo è la trasformata di  $-H(x)e^{-x}$ . Per il secondo, si scrive

$$\frac{p + 1}{p^2 - p + 1} = \frac{p + 1}{(p - 1/2)^2 + 3/4} = \frac{p - 1/2}{(p - 1/2)^2 + 3/4} + 2 \frac{3/4}{(p - 1/2)^2 + 3/4}$$

e si osserva che il primo addendo è la trasformata  $H(x)e^{x/2} \cos(\sqrt{3}x/2)$  e il secondo è la trasformata di  $2H(x)e^{x/2} \sin(\sqrt{3}x/2)$ . Pertanto l'originale  $f$  è

$$f(x) = H(x) \left( e^{-x} + e^{x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + 2e^{x/2} \sin(\sqrt{3}x/2) \right).$$

**ESERCIZIO 19.2**

Determinare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni:

a)  $2 \sin(3x) - \cos(4x)$ ;

c)  $H(x - 2) \sin x$ ;

b)  $x^2 \sin x$ ;

d)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$

e) verificare che

$$\max\{0, \min\{x, 1 - x\}\} = H(x - 1/2) - H(x - 1) + x(H(x) - 2H(x - 1/2) + H(x - 1))$$

e determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \min\{x - k, k + 1 - x\} & x \in [k, k + 1), k \geq 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

**ESERCIZIO 19.3**

Determinare l'originale, se esiste, che ha come trasformata di Laplace le seguenti funzioni:

a)  $\frac{16p^2 + 3p - 1}{p(p^2 + 1)}$ ;

c)  $\frac{1}{p^2 + 2p + 1}$ ;

b)  $\frac{1}{p} e^{-p}$ ;

d)  $\frac{2p + 4}{p^2 + 3p + 1}$ .

**19.4 Applicazioni****19.4.1 Equazioni differenziali ordinarie lineari**

Le applicazioni più frequenti della trasformata di Laplace riguardano la soluzione di equazioni differenziali ordinarie lineari e sono basate sulla linearità della trasformata e sulla formula  $\mathcal{L}[f'] = pF(p) - f(0^+)$ , che trasforma l'operazione di derivazione in

un'operazione algebrica. Per far vedere come si utilizza la trasformata riconsideriamo prima un problema già risolto nel Capitolo 17.

Si cerca una funzione due volte derivabile  $y(x)$  per  $x \geq 0$ , che verifica

$$\begin{cases} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 & \text{se } x > 0 \\ y(0) = a, y'(0) = b \end{cases} \quad (19.15)$$

dove  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\omega > 0$ . Procediamo formalmente, ovvero senza giustificare rigorosamente tutti i passaggi di calcolo: troveremo così una formula per  $y(x)$  e verificheremo a posteriori che  $y(x)$  è soluzione (sappiamo già che la soluzione è unica, si veda il Capitolo 17). Supponiamo dunque che  $y(x)$  sia soluzione di (19.15) e sia un originale: poniamo quindi  $Y(p) = \mathcal{L}[y]$  e applichiamo la trasformata di Laplace a entrambi i membri dell'equazione. Utilizzando, nell'ordine, la linearità della trasformata e la proprietà 3 della Tabella 19.1, si ottiene

$$0 = \mathcal{L}[0] = \mathcal{L}[y'' + \omega^2 y] = \mathcal{L}[y''] + \omega^2 \mathcal{L}[y] = p^2 Y(p) - ap - b + \omega^2 Y(p),$$

ovvero

$$Y(p) = \frac{ap + b}{p^2 + \omega^2} = a \frac{p}{p^2 + \omega^2} + b \frac{1}{p^2 + \omega^2}.$$

Poiché  $\mathcal{L}[\sin(\omega x)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$  e  $\mathcal{L}[\cos(\omega x)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$  si ha che

$$\mathcal{L}\left[a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x)\right] = Y(p) = \mathcal{L}[y]$$

ovvero abbiamo trovato un candidato  $y(x)$  per essere soluzione del problema (19.15):

$$y(x) = a \cos(\omega x) + \frac{b}{\omega} \sin(\omega x) \quad \text{per } x \geq 0. \quad (19.16)$$

A posteriori si verifica facilmente che  $y(0) = a$ ,  $y'(0) = b$  e che  $y$  soddisfa l'equazione  $y'' + \omega^2 y = 0$  per  $x \in \mathbb{R}$ .

### ESEMPIO 19.9

Il metodo descritto nell'esempio precedente può essere utilizzato per risolvere un'ampia classe di equazioni differenziali lineari. Di seguito si descrivono due tipiche applicazioni.

**(Sistemi di equazioni differenziali ordinarie)** Si vuole risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u + v + e^{-x} & x \in \mathbb{R} \\ v' = u - v + e^x & x \in \mathbb{R} \\ u(0) = -1, v(0) = 1. \end{cases}$$

Come nell'esempio precedente procediamo formalmente per  $x > 0$ . Posti  $U(p) = \mathcal{L}[u]$  e  $V(p) = \mathcal{L}[v]$ , passando alle trasformate si ottiene

$$\begin{cases} pU + 1 = U + V + \frac{1}{p+1} \\ pV - 1 = U - V + \frac{1}{p-1} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (p-1)U - V = -\frac{p}{p+1} \\ U - (p+1)V = -\frac{p}{p-1} \end{cases}$$

(si è utilizzato la proprietà 2 della Tabella 19.1 e il fatto che  $\mathcal{L}[e^{s_0 x}] = 1/(p - s_0)$ ). Tale sistema lineare si risolve rispetto a  $U, V$  con il metodo preferito: si ottiene

$$U(p) = \frac{p(2-p)}{(p-1)(p^2-2)}, \quad V(p) = \frac{p^2}{(p+1)(p^2-2)}.$$

Si utilizza la (19.10) per determinare gli originali  $u$  e  $v$  per  $x > 0$ :

### ESEMPIO 19.10

$$\begin{aligned} u(x) &= \operatorname{Res}(U(p)e^{px})|_{p=1} + \operatorname{Res}(U(p)e^{px})|_{p=\sqrt{2}} + \operatorname{Res}(U(p)e^{px})|_{p=-\sqrt{2}} \\ &= -e^x + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}x} \end{aligned}$$

e analogamente

$$v(x) = -e^{-x} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x}.$$

A posteriori si verifica che queste funzioni risolvono il problema per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

### ESEMPIO 19.11

**(Equazioni differenziali ordinarie di ordine  $n > 2$ )** Si vuole determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''''(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si procede formalmente per  $x > 0$ . Posti  $Y(p) = \mathcal{L}[y]$  e  $c_j = y_+^{(j)}(0)$ , passando alle trasformate si ottiene

$$p^4 Y - p^3 c_3 - p^2 c_2 - p c_1 - c_0 + Y = 0, \quad \text{ovvero} \quad Y(p) = \frac{c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0}{p^4 + 1}.$$

(si è utilizzato la proprietà 2 della Tabella 19.1). Scomponendo in fratti semplici, si ottiene

$$Y(p) = \frac{C_1}{p + \frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \frac{C_2}{p - \frac{1+i}{\sqrt{2}}} + \frac{C_3}{p + \frac{1-i}{\sqrt{2}}} + \frac{C_4}{p - \frac{1-i}{\sqrt{2}}}$$

per opportune costanti complesse  $C_1, \dots, C_4$ . Ricorrendo alla Tabella 19.2, si ottiene

$$\mathcal{L}^{-1}[Y] = C_1 e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}x} + C_2 e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}}x} + C_3 e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}x} + C_4 e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x}.$$

Mediante addizioni e sottrazioni, si ricombinano le soluzioni in modo che siano reali (è ciò che cerchiamo):

$$y(x) = A e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + B e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + D e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

A posteriori si verifica che  $y(x)$  è l'integrale generale cercato (ovvero che i quattro addendi sono soluzioni linearmente indipendenti).

La trasformata di Laplace permette di determinare le soluzioni di problemi di Cauchy lineari a coefficienti costanti anche nel caso in cui i dati presentino discontinuità: per esempio, un interruttore chiuso fino al tempo  $t_0$  e aperto per  $t > t_0$  può essere descritto attraverso la funzione di Heavyside  $H(t - t_0)$ . In tali casi si deve "indebolire" il concetto di soluzione, un argomento in cui non possiamo entrare: ci limitiamo a due esempi (l'Esempio 19.12 e l'Esempio 19.16 nel Paragrafo 19.4.4).

### ESEMPIO 19.12

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = H(x - \pi) & \text{se } x > 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases} \quad (19.17)$$

La funzione  $H(x - \pi)$  presenta una discontinuità di salto in  $x = \pi$ , quindi non si può sperare che il problema abbia una soluzione nel senso usuale (due volte derivabile per  $x \geq 0$ ). Tuttavia, si può sperare che il problema abbia una soluzione con una derivata continua,  $y \in C^1([0, +\infty))$ , e due derivate continue fuori dal salto,  $y \in C^2([0, +\infty) \setminus \{\pi\})$ . Se una tale soluzione esiste, è regolare in  $[0, \pi)$  (ossia dove  $H(x - \pi) = 0$ ), quindi in  $[0, \pi)$  coincide con l'unica soluzione del problema di Cauchy



$$\begin{cases} y_0'' + y_0 = 0 & \text{se } x > 0 \\ y_0(0) = 0, y_0'(0) = 1. \end{cases}$$

Sempre se la soluzione esiste, è derivabile in  $x = \pi$ , quindi esistono finiti  $y(\pi) = y_0(\pi)$  e  $y'(\pi) = y_0'(\pi)$ ; inoltre è regolare in  $(\pi, +\infty)$ , quindi in  $(\pi, +\infty)$  coincide con l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'' + y_1 = 1 & \text{se } x > \pi \\ y_1(\pi) = y_0(\pi), y_1'(\pi) = y_0'(\pi). \end{cases}$$

Abbiamo quindi dimostrato in modo costruttivo che la soluzione  $y$  esiste ed è unica nella classe  $y \in C^1([0, +\infty)) \cap C^2([0, +\infty) \setminus \{\pi\})$ . L'argomento si estende in modo analogo al caso di un numero finito di discontinuità di salto.

Per risolvere il problema mediante la trasformata di Laplace, ricordando i calcoli dell'Esempio 19.9 si ottiene

$$(p^2 + 1)Y(p) - 1 = \mathcal{L}[H(x - \pi)] = \frac{e^{-\pi p}}{p}, \quad \text{ovvero} \quad Y(p) = \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{e^{-\pi p}}{p(p^2 + 1)}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\pi p}}{p(p^2 + 1)} &= \frac{e^{-\pi p}}{p} - \frac{pe^{-\pi p}}{p^2 + 1}, & \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi p}}{p}\right] &= H(x - \pi), \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{pe^{-\pi p}}{p^2 + 1}\right] &= H(x - \pi) \cos(x - \pi), \end{aligned}$$

antitrasformando si ottiene

$$y(x) = \sin x + H(x - \pi)(1 - \cos(x - \pi)) = \sin x + H(x - \pi)(1 + \cos x).$$

A posteriori si verifica facilmente che  $y$  ha le proprietà richieste.

Determinare la soluzione  $u(x)$ ,  $v(x)$  dei seguenti problemi utilizzando la trasformata di Laplace:

$$\text{a) } \begin{cases} u' = u + 3v + 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ v' = u - v - 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 3, v(0) = -1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u' = -u + v - 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ v' = u - 2v + 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 1, v(0) = 2. \end{cases}$$

#### ESERCIZIO 19.4

Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

$$\text{a) } y'''(x) + y(x) = 0; \quad \text{b) } y''''(x) + 3y''(x) + 2y(x) = 0.$$

#### ESERCIZIO 19.5

Utilizzare la trasformata di Laplace per risolvere il problema

$$\begin{cases} u' = u + H(x - 5) & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Disegnare il grafico della soluzione e interpretare la discontinuità di  $u'(x)$  in  $x = 5$ .

#### ESERCIZIO 19.6

Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Si utilizzi la trasformata di Laplace per determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = g(x) \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \end{cases}$$

$$\text{a) con } g(x) = g_1(H(x - X) - H(x - 2X)) \quad (X > 0, g_1 \in \mathbb{R});$$

$$\text{b) con } g(x) = \sum_{k=1}^N g_k(H(x - kX) - H(x - (k+1)X)) \quad (X > 0, g_k \in \mathbb{R}).$$

#### ESERCIZIO 19.7

### 19.4.2 Serie di Laurent e trasformata di Laplace

Nell'esempio successivo si fornisce un'applicazione meno elementare della trasformata di Laplace alla risoluzione di equazioni differenziali lineari.

#### ESEMPIO 19.13

Riconsideriamo l'equazione di Bessel di ordine zero introdotta nel Paragrafo 17.5.4: si cerca una funzione  $y(x)$ , due volte derivabile per  $x \geq 0$  tale che

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0 \quad \text{se } x > 0 \quad (19.18)$$

e

$$y(0) = 1 \quad \text{e} \quad y'(0) = 0 \quad (19.19)$$

(di solito si prescrive nella (19.19) solo il valore di  $y$  in  $x = 0$  poiché la condizione  $y'(0) = 0$  si può ricavare dall'equazione:  $y'(x) = -x(y''(x) + y(x)) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 0$  (si veda il 17.5.4). Posto  $Y(p) = \mathcal{L}[y]$  si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[xy(x)] &= -Y'(p), & \mathcal{L}[y'] &= pY(p) - 1, & \mathcal{L}[y''] &= p^2Y(p) - p, \\ \mathcal{L}[xy''(x)] &= -2pY(p) - p^2Y'(p) + 1. \end{aligned}$$

Il problema si trasforma dunque in

$$-2pY(p) - p^2Y'(p) + 1 + pY(p) - 1 - Y'(p) = 0$$

ovvero

$$(p^2 + 1)Y'(p) + pY(p) = 0. \quad (19.20)$$

Formalmente si può integrare la (19.20) per separazione di variabili: limitandosi all'insieme  $\{|p| > 1\}$  si dimostra (si veda l'Esercizio 19.8) che la (19.20) ha una famiglia di soluzioni olomorfe:

$$Y(p) = \frac{C}{p\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}} \quad \text{per } |p| > 1, \quad (19.21)$$

dove  $C \in \mathbb{R}$  e  $\sqrt{\phantom{x}}$  indica il valore principale della radice. La tabella 19.2 non basta per trovare una funzione  $y(x)$  la cui trasformata sia  $Y(p)$ , per cui si ricorre alla teoria delle serie per individuarla: sviluppando  $Y(p)$  in serie di Laurent si trova (si veda l'Esercizio 19.8) che

$$Y(p) = C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2!2^k} p^{-(2k+1)} \quad \text{se } |p| > 1. \quad (19.22)$$

Procediamo ancora una volta in modo formale: poiché  $\mathcal{L}\left[\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\right] = p^{-(2k+1)}$ , scambiando tra loro i simboli di serie e di trasformata si ottiene

$$Y(p) = \mathcal{L}\left[C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)}{k!2^k} \cdot \frac{1}{(2k)!}x^{2k}\right].$$

Quindi, poiché la serie di potenze vale  $C$  in  $x = 0$ , scelto  $C = 1$  e osservato che

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{(2k)!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1)(2k)} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)} = \frac{1}{2^k k!}$$

si ritrova la soluzione del problema (19.18)-(19.19) già ottenuta nel Paragrafo 17.5.4, ovvero la funzione di Bessel di ordine zero:

$$y(x) = J_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad \text{per } x \geq 0. \quad (19.23)$$

Il passaggio dalla (19.22) alla (19.23), che abbiamo motivato in modo formale, è giustificato dal seguente risultato.

**TEOREMA 19.7**

Sia  $F(p)$  una funzione olomorfa per  $|p| > R$  con uno sviluppo in serie di Laurent del tipo

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p^{-k} \quad \text{per } |p| > R. \quad (19.24)$$

Allora la funzione

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} z^{k-1}$$

è olomorfa in  $\mathbb{C}$  (ossia intera) e

$$\mathcal{L}[Hf] = F(p).$$

Dimostrazione

**Osservazione.** La serie di Laurent nella (19.24) contiene solo potenze negative. In effetti segue dalla (19.9) che, per essere la trasformata di Laplace di una funzione  $f(x)$ , una serie di Laurent deve necessariamente contenere solo potenze negative.

- a) Risolvere formalmente l'equazione (19.20) ricavando la formula (19.21);  
 b) dimostrare che le funzioni  $Y(p)$  definite dalla (19.22) sono olomorfe e risolvono la (19.20) in  $\{|p| > 1\}$ .

**ESERCIZIO 19.8**

Siano  $\sqrt{\cdot}$  il valore principale della radice e  $Y(p)$  le funzioni definite nella (19.21).

- a) Utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione olomorfa  $g: \{|z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = 1/\sqrt{1+z}$  (si veda il Teorema 9.13), per trovare la serie di Laurent di  $Y(p)$  in  $\{|p| > 1\}$ .  
 b) Utilizzare la definizione dei coefficienti binomiali generalizzati per trovare la (19.22).

**ESERCIZIO 19.9**

### 19.4.3 Prodotto di convoluzione; equazioni integro-differenziali

Siano  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni integrabili in  $\mathbb{R}$  tali che la funzione  $\xi \mapsto f(\xi)g(x-\xi)$  sia integrabile in  $\mathbb{R}$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Allora è ben definito il **prodotto di convoluzione** di  $f$  e  $g$ ,

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si vuole determinare, se esiste, il prodotto di convoluzione tra  $f(x) = e^{-|x|}$  e  $g(x) = x$ . Per  $x \in \mathbb{R}$ , utilizzando le simmetrie delle funzioni integrande si ottiene per  $b > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{-|\xi|}(x-\xi)d\xi &= x \int_0^b e^{-\xi}d\xi - \int_0^b e^{-\xi}\xi d\xi = x(1-e^{-b}) + be^{-b} - \int_0^b e^{-\xi}d\xi \\ &= (x-1)(1-e^{-b}) + be^{-b} \rightarrow x-1 \quad \text{per } b \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

e analogamente per  $a < 0$

**ESEMPIO 19.14**



$$\int_a^0 e^{-|\xi|} (x - \xi) d\xi = (x+1)(1 - e^a) + ae^a \rightarrow x+1 \quad \text{per } a \rightarrow -\infty.$$

Perciò  $\xi \mapsto e^{-|\xi|} (x - \xi)$  è integrabile in  $\mathbb{R}$  e  $f * g(x) = 2x$ .

Il prodotto di convoluzione è commutativo, ovvero  $f * g = g * f$ . Infatti, ponendo  $s = x - \xi$  si ottiene

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - s)g(s)ds = g * f(x).$$

Se si considerano le funzioni  $x \mapsto H(x)f(x)$  e  $x \mapsto H(x)g(x)$ , è facile verificare che il prodotto di convoluzione assume la forma

$$Hf * Hg(x) = \begin{cases} \int_0^x f(\xi)g(x - \xi)d\xi & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \quad (19.25)$$

La denominazione “prodotto” è dovuta al seguente risultato.

#### TEOREMA 19.8

Se  $f$  e  $g$  sono originali per la trasformata di Laplace con ascissa di convergenza rispettivamente  $a_f$  e  $a_g$ , allora  $f * g$  è ben definito, è originale per la trasformata di Laplace con ascissa di convergenza  $a = \max\{a_f, a_g\}$ , e

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g].$$

In altri termini, il prodotto (usuale) delle trasformate coincide con la trasformata del prodotto di convoluzione.

Omettiamo i dettagli della dimostrazione, ma verifichiamo formalmente la formula. Scambiando l'ordine di integrazione (si veda Figura 19.4), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g] &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \int_0^x f(\xi)g(x - \xi)d\xi dx = \int_0^{+\infty} f(\xi) \int_{\xi}^{+\infty} e^{-px} g(x - \xi) dx d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} f(\xi) \int_0^{+\infty} e^{-p(s+\xi)} g(s) ds d\xi = \left( \int_0^{+\infty} f(\xi) e^{-p\xi} d\xi \right) \left( \int_0^{+\infty} e^{-ps} g(s) ds \right). \end{aligned}$$

Il Teorema 19.8 è molto utile per risolvere equazioni la cui incognita è una funzione  $y(x)$  che compare anche sotto il segno di integrale. Tale classe di equazioni, dette *equazioni integrali* o, se compaiono anche derivate di  $y(x)$ , *equazioni integro-differenziali*, sono utili per descrivere fenomeni fisici (comportamento di materiali elastici) o biologici (dinamiche di popolazioni) che non dipendono solo dalla situazione presente ma anche dal passato; si parla anche di effetti di “memoria”.

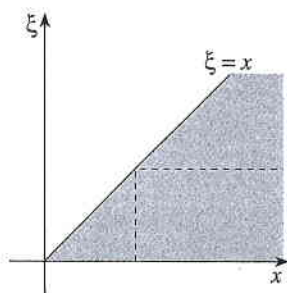


Figura 19.4

#### ESEMPIO 19.15

Si vuole risolvere l'equazione integro-differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = \int_0^x e^{2(\xi-x)} y(\xi) d\xi & \text{per } x > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (19.26)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace: posto  $Y(p) = \mathcal{L}[y]$ , si ottiene

$$pY(p) - 1 = \mathcal{L}[y(x) * e^{-2x}] = \mathcal{L}[e^{-2x}] Y(p) = \frac{Y(p)}{p+2}$$

ovvero

$$Y(p) = \frac{p+2}{p^2+2p-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \frac{1}{p-1-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \frac{1}{p-1+\sqrt{2}}$$

e quindi, antitrasformando,

$$y(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) e^{-(1+\sqrt{2})x} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) e^{-(1-\sqrt{2})x}.$$

A posteriori si verifica che  $y(x)$  è effettivamente una soluzione di (19.26). Si noti che in questo caso particolare è possibile, derivando, ricondurre l'equazione a un'equazione differenziale:

$$y''(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x e^{2(\xi-x)} y(\xi) d\xi = y(x) - 2 \int_0^x e^{2(\xi-x)} y(\xi) d\xi = y(x) - 2y'(x).$$

Determinare una soluzione delle seguenti equazioni per  $x \geq 0$ :

a)  $y(x) = 2 \cos x - \int_0^x [(x-\xi) \cos(x-\xi) + \sin(x-\xi)] y(\xi) d\xi;$

b)  $y'(x) = 3 + \int_0^x \cos(2(x-\xi)) y(\xi) d\xi, y(0) = 1.$

**ESERCIZIO 19.10**

### 19.4.4 Delta di Dirac; fenomeni impulsivi

Sia, per ogni  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$\delta_n(x) := \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se altrimenti.} \end{cases} \quad (19.27)$$

Nella Figura 19.5 abbiamo indicato i grafici di  $\delta_n(x)$  e  $\delta_n(x-x_0)$ , dove  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si noti che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x-x_0) dx = 1 \quad (19.28)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0, \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x-x_0) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x = x_0 \\ 0 & \text{se } x \neq x_0. \end{cases} \quad (19.29)$$

Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua:  $g \in C(\mathbb{R})$ . Allora

$$g * \delta_n(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta_n(x_0-x) dx = n \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0} g(x) dx.$$

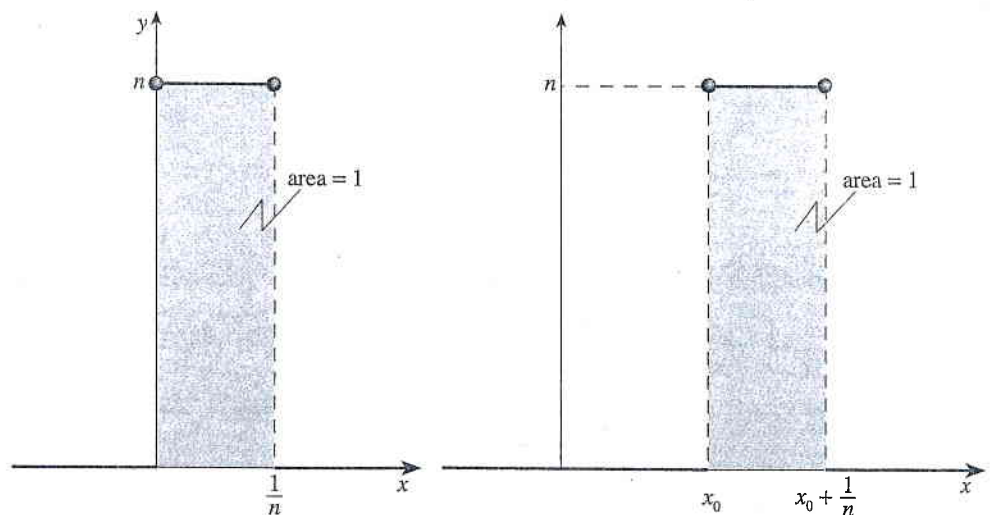
Poiché l'intervallo di integrazione ha ampiezza  $\frac{1}{n}$ , si ha che

$$\min_{x \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0]} g(x) \leq n \int_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0} g(x) dx \leq \max_{x \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0]} g(x).$$

Per la continuità di  $g$  in  $x_0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \min_{x \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0]} g(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \max_{x \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0]} g(x) \right) = g(x_0)$$

Figura 19.5 I grafici di  $\delta_n(x)$  e  $\delta_n(x - x_0)$



ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g * \delta_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta_n(x_0 - x) dx = g(x_0). \quad (19.30)$$

Si usano le notazioni

$$g * \delta(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \delta(x_0 - x) dx = g(x_0) \quad \text{per ogni } g \in C(\mathbb{R}). \quad (19.31)$$

In altri termini, la delta di Dirac rappresenta l'“elemento neutro” del prodotto di convoluzione.

Si sottolinea che la notazione (19.31) non ha alcuna relazione con il concetto di integrale di Riemann:  $\delta(x)$ ,  $\delta(x - x_0)$  e  $\delta(x_0 - x)$  non sono funzioni (non esiste una funzione integrabile  $\delta(x)$  tale che  $\delta(x) = 0$  per  $x \neq 0$  e  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1!$ ). Sono invece esempi di *distribuzioni*, un concetto matematico che esula dalla trattazione elementare di questo testo. Nel caso di  $\delta(x)$  si parla anche di *delta di Dirac* o di *distribuzione di Dirac*.

**Osservazione** La (19.30) non dipende dalla forma particolare delle funzioni approssimanti  $\delta_n(x)$  e vale per una qualsiasi successione di funzioni non negative  $\tilde{\delta}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , che sono integrabili in  $\mathbb{R}$  e soddisfano

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\delta}_n(x) dx = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\delta}_n = 0 \quad \text{se } x \neq 0. \quad (19.32)$$

La successione  $\delta_n$  definita dalla (19.27) è stata scelta perché, come vedremo subito dopo, è più adatta per la trasformata di Laplace (unilatera). Qualora quest'ultima non sia coinvolta, è più usuale scegliere successioni simmetriche rispetto a  $x = 0$ : per esempio

$$\tilde{\delta}_n(x) = \begin{cases} n & |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & x \geq \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

In generale, se  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  è tale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  e  $xf(x) \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$ , allora  $\tilde{\delta}_n(x) = nf(nx)$  verifica la (19.32).



Sia ora  $x_0 \geq 0$  e consideriamo la trasformata di Laplace di  $\delta_n(x - x_0)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_n(x - x_0)] &= \int_0^{+\infty} \delta_n(x - x_0) e^{-px} dx = n \int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{n}} e^{-px} dx = \frac{n}{p} \left( e^{-px_0} - e^{-px_0 - \frac{p}{n}} \right) \\ &= e^{-px_0} \left( \frac{1 - e^{-p/n}}{p/n} \right) \rightarrow e^{-px_0} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.\end{aligned}$$

Questo suggerisce di definire la trasformata di Laplace di  $\delta(x - x_0)$  come

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(x - x_0)] := e^{-px_0}} \quad \text{se } p \in \mathbb{C} \text{ e } x_0 \geq 0. \quad (19.33)$$

In particolare

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta] := 1} \quad \text{se } p \in \mathbb{C}, \quad (19.34)$$

che è consistente con il Teorema 19.8 e la (19.31):

$$\mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[g * \delta] = \mathcal{L}[g] \mathcal{L}[\delta] = \mathcal{L}[g].$$

Si noti che in questo caso è importante che ciascuna  $\delta_n(x)$  sia positiva solo per  $x \geq 0$ .

L'esempio seguente mostra come utilizzare e giustificare le (19.33) e (19.34).

Una particella di massa  $m$  e posizione  $x(t)$  al tempo  $t$  si muove sulla retta reale secondo la legge di Newton:  $mx''(t) = F(t)$ . Si consideri il caso in cui la forza  $F(t)$  agisce in un intervallo temporale  $(t_0, t_0 + \varepsilon)$  molto piccolo rispetto alla scala temporale in cui si vuole risolvere il problema (si pensi a un colpo di stecca su una palla da biliardo). Tale situazione si può modellizzare come un "impulso" di intensità  $A \in \mathbb{R}$  concentrato nell'istante  $t_0 > 0$ :

$$mx''(t) = A\delta(t - t_0) \quad \text{se } t > 0 \quad (19.35)$$

dove posizione e velocità iniziali sono assegnate:

$$x(0) = a, \quad x'(0) = b. \quad (19.36)$$

Quindi anche nella modellistica fisica si considera  $\delta(t - t_0)$  come un "limite" di  $\delta_n(t - t_0)$ .

Applichiamo alla (19.35) la trasformata di Laplace, utilizzando in modo formale la definizione (19.33). Posto  $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$ , si ha che

$$\mathcal{L}[x''] = p^2 X(p) - ap - b.$$

Allora

$$mp^2 X(p) = map + mb + Ae^{-pt_0}$$

ossia

$$X(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{A}{m} \frac{e^{-pt_0}}{p^2}$$

e, dalle Tabelle 19.1 e 19.2, si ottiene che

$$x(t) = a + bt + \frac{A}{m} (t - t_0) H(t - t_0) \quad \text{se } t \geq 0,$$

ovvero

$$x(t) = \begin{cases} a + bt + \frac{A}{m} (t - t_0) & \text{se } t \geq t_0 \\ a + bt & \text{se } 0 \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

#### ESEMPIO 19.16

Forza impulsiva

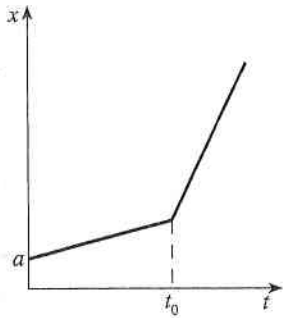


Figura 19.6

(si veda Figura 19.6). Si osservi che questa soluzione descrive bene l'effetto di una forza "impulsiva" applicata a un tempo prefissato; infatti la velocità della particella cambia bruscamente al tempo  $t = t_0$ :

$$x'(t) = \begin{cases} b & \text{se } 0 \leq t < t_0 \\ b + \frac{A}{m} & \text{se } t > t_0. \end{cases}$$

Procedendo come nell'Esempio 19.12 si verifica che la funzione  $x$  ottenuta è l'unica "soluzione" di (19.35)-(19.36) nella classe  $C([0, +\infty)) \cap C^2([0, +\infty) \setminus \{t_0\})$ .

**ESERCIZIO 19.11**

Risolvere il problema

$$\begin{cases} u'' + u' + u = 2\delta(x-4) + H(x-3) + 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1. \end{cases}$$

Dire in quali punti la  $u$  non è derivabile e ivi caratterizzare l'andamento di  $u$ .

**ESERCIZIO 19.12**

Provare che se  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$  è tale che  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  e  $xf(x) \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow +\infty$ , allora  $\tilde{\delta}_n(x) = nf(x/n)$  verifica la (19.32).

**ESERCIZIO 19.13**

Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Si utilizzi la trasformata di Laplace per determinare una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = g(x) \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta \end{cases}$$

a) con  $g(x) = g_1\delta(x-X)$  ( $X > 0, g_1 \in \mathbb{R}$ );

b) con  $g(x) = \sum_{k=1}^N g_k\delta_k(x-kX)$  ( $X > 0, N \geq 1, g_k \in \mathbb{R}$ ), verificando che per  $N = 2$  esistono  $g_1$  e  $g_2$  tali che la soluzione ottenuta verifica  $y(x) = 0$  per ogni  $x > 3X$ .

**19.5 La trasformata bilatera**

In questo paragrafo utilizzeremo la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px}f(x)dx$$

per definire una trasformata, la *trasformata di Laplace bilatera*. Anche se non ne tratteremo alcuna applicazione (per esempio, può essere utilizzata per introdurre la trasformata di Mellin), risulta utile averla a disposizione per trattare alcuni aspetti della trasformata di Fourier (si veda il capitolo successivo).

Sia quindi  $f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione **localmente integrabile in  $\mathbb{R}$** , ovvero tale che  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$  sono integrabili secondo Riemann in qualsiasi intervallo limitato:  $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{R}(x_1, x_2)$  per ogni  $x_1 < x_2$ . Ragionando come nel Paragrafo 19.1, si suppone che esista  $p_0 \in \mathbb{C}$  tale che

$$e^{-p_0x}f(x) \quad \text{è assolutamente integrabile in } \mathbb{R} \quad (19.37)$$

e si definiscono *due* ascisse di convergenza:

$$a := \inf \left\{ \operatorname{Re} z : \int_0^{+\infty} e^{-zx} f(x) dx \text{ è assolutamente convergente} \right\} \quad (19.38)$$

$$b := \sup \left\{ \operatorname{Re} z : \int_{-\infty}^0 e^{-zx} f(x) dx \text{ è assolutamente convergente} \right\}. \quad (19.39)$$

Per la (19.37),  $-\infty \leq a \leq \operatorname{Re} p_0 \leq b \leq +\infty$ . Se  $a < b$ , la funzione  $p \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$  è definita nella striscia verticale  $\{p \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} p < b\}$  e si dice trasformata di Laplace bilatera.

**DEFINIZIONE 19.9**

Siano  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  e  $p_0 \in \mathbb{C}$  tali che  $e^{-p_0 x} f(x)$  è assolutamente integrabile in  $\mathbb{R}$  e siano  $a \in [-\infty, \operatorname{Re} p_0]$  e  $b \in [\operatorname{Re} p_0, +\infty]$  definiti dalle (19.38) e (19.39). Se  $a < b$ , la funzione

$$F(p) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad \text{se } a < \operatorname{Re} p < b \quad (19.40)$$

si dice **trasformata di Laplace bilatera** di  $f$ ,  $a$  e  $b$  si dicono **ascisse di convergenza** e si scrive

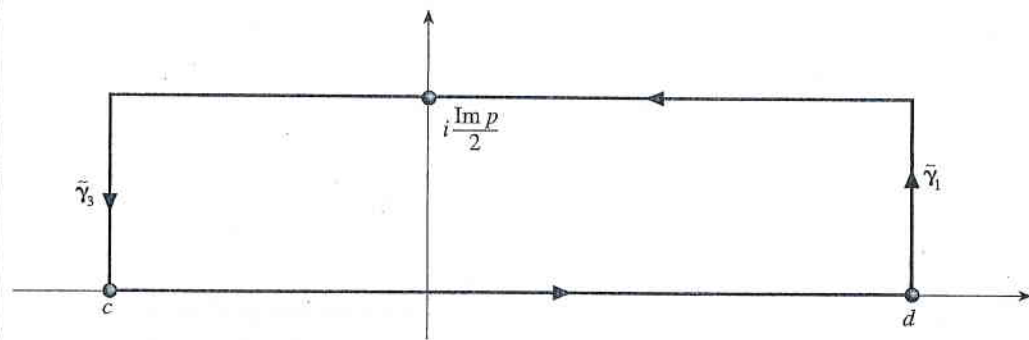
$$\mathcal{L}_{\text{bil}}[f] = F.$$

La gaussiana  $f(x) = e^{-x^2}$  ha ascisse di convergenza  $a = -\infty$  e  $b = +\infty$ . Infatti, se per esempio  $x < 0$  si ha

$$|f(x)e^{-px}| \leq e^{-x(\operatorname{Re} p + x)} = e^{|x|(\operatorname{Re} p - |x|)} \leq e^{-|x|/2} \quad \text{per ogni } x < 2 \operatorname{Re} p.$$

e quindi  $f(x)e^{-px}$  è assolutamente integrabile in  $(-\infty, 0)$  per il teorema del confronto per integrali impropri. Inoltre, osservando che  $x^2 + px = (x + p/2)^2 - p^2/4$  e ponendo  $s = x + p/2$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{bil}}[e^{-x^2}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - px} dx = e^{p^2/4} \int_{-\infty + i \frac{\operatorname{Im} p}{2}}^{+\infty + i \frac{\operatorname{Im} p}{2}} e^{-s^2} ds \\ &= e^{p^2/4} \left[ \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_{c + i \frac{\operatorname{Im} p}{2}}^{i \frac{\operatorname{Im} p}{2}} e^{-s^2} ds + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_{i \frac{\operatorname{Im} p}{2}}^{d + i \frac{\operatorname{Im} p}{2}} e^{-s^2} ds \right]. \end{aligned}$$



Ora, la funzione integranda è olomorfa nel rettangolo in Figura 19.7 ed è facile verificare che l'integrale su  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_3$  tende a zero per  $c \rightarrow -\infty$  e  $d \rightarrow +\infty$ . Pertanto, ricordando il teorema integrale di Cauchy (Teorema 18.8) e la (8.50) si conclude che

$$\mathcal{L}_{\text{bil}}[e^{-x^2}] = e^{p^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{p^2/4}.$$

**ESEMPIO 19.17**

Figura 19.7



I seguenti risultati sono analoghi a quelli ottenuti per la trasformata di Laplace unilatera e si provano con gli stessi argomenti.

**TEOREMA 19.10**

La trasformata di Laplace bilatera di  $f$  con ascisse di convergenza  $a < b$  è olomorfa in  $\{p \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} p < b\}$  e

$$(\mathcal{L}_{\text{bil}}[f])'(p) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-px} f(x) dx.$$

**DEFINIZIONE 19.11**

Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrabile in  $\mathbb{R}$  si dice **originale** per la trasformata di Laplace bilatera se esistono  $a_0 < b_0$  tali che

$$|f(x)| \leq \begin{cases} M e^{a_0 x} & \text{se } x > 0 \\ M e^{b_0 x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**TEOREMA 19.12**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  un originale per la trasformata di Laplace bilatera e sia

$$\mathcal{L}_{\text{bil}}[f] = F(p) \quad \text{per} \quad a_0 \leq \operatorname{Re} p \leq b_0.$$

Allora per ogni  $c \in (a_0, b_0)$  si ha che

$$f(x) = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{px} dp$$

in ogni punto  $x$  in cui  $f$  è continua.

Per la **trasformata inversa**, o **antitrasformata**, bilatera, si usa la seguente notazione:

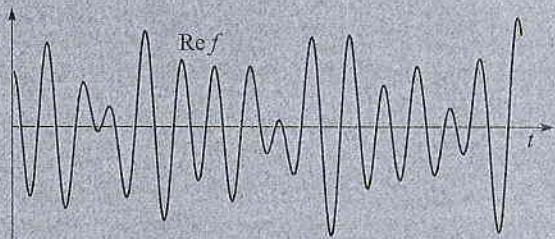
$$\mathcal{L}_{\text{bil}}^{-1}[F] = \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{px} dp.$$



## FILO ROSSO La diffrazione

In questo capitolo si accenna ai concetti fondamentali riguardanti *serie e trasformata di Fourier*. Oltre a essere alla base di un'intero campo della matematica, l'*analisi armonica*, serie e trasformata di Fourier sono utilizzate in molti ambiti e per vari scopi: per approssimare *globalmente* (anziché localmente, come le serie di Taylor) una funzione periodica (Paragrafo 20.1), per risolvere equazioni alle derivate parziali (Paragrafo 20.2), per ricostruire in modo *esatto* una funzione (ovvero un segnale) che "non oscilli troppo rapidamente" conoscendo solo una successione di suoi valori (ovvero un suo *campionamento*, Paragrafo 20.5). In generale, serie e trasformata di Fourier permettono di passare dalla descrizione di un dato fenomeno in termini del tempo (o di spazio-tempo) a una sua rappresentazione in termini di frequenze e ampiezze. In tal senso è illuminante – anche se si tratta di un caso "singolare", si veda il Paragrafo 20.5.1 – osservare che se  $f$  è una combinazione lineare di funzioni trigonometriche, la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}[f]$  ne isola e identifica esattamente ampiezze e frequenze: per esempio se

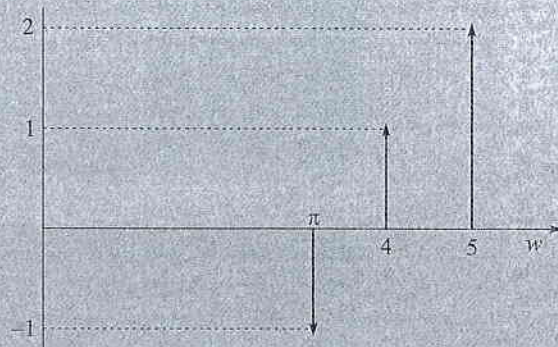
$$f(t) = -e^{\pi i t} + e^{4i t} + 2e^{5i t}$$



(si noti che  $f$  non è periodica!) allora

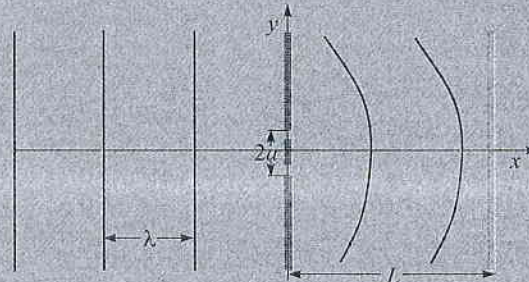
$$\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f](\omega) = -\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 4) + 2\delta(\omega - 5)$$

(si veda la figura nella colonna a fianco). Per questo, serie e trasformate di Fourier emergono in modo naturale in ogni campo delle scienze in cui compaiano, debbano essere analizzati o manipolati se-

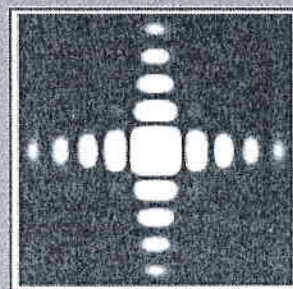


gnali ondulatori (acustica, ottica, elettromagnetismo, trattamento di immagini, oceanografia, medicina...). Lo spazio disponibile ci consente solo un esempio.

Un fascio di luce monocromatica colpisce una superficie (la barriera) su cui sono praticate alcune fessure, e la luce che le attraversa illumina una seconda superficie (lo schermo).



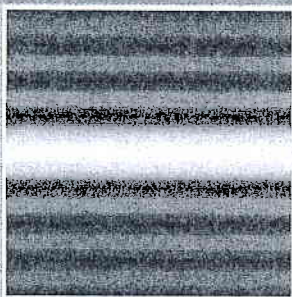
Nella prossima figura è riportata l'immagine proiettata sullo schermo nel caso di una singola fessura di forma quadrata. Perché sono presenti zone scure intermittenti?





L'idea intuitiva (che forse qualcuno avrà già incontrato nei suoi studi) è che le onde uscenti da ciascun punto della fessura giungono nello stesso punto dello schermo con una fase diversa, e così possono annullarsi a vicenda.

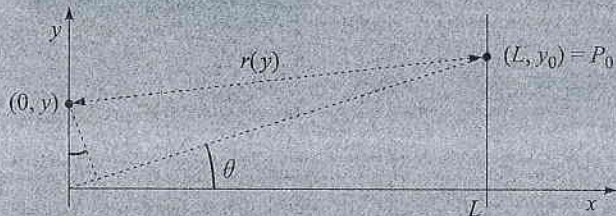
Per dare un'idea quantitativa della risposta, faremo varie ipotesi semplificative, la prima delle quali consiste nel considerare la situazione unidimensionale idealizzata in figura, in cui le fessure sono infinitamente estese nella direzione uscente da questa pagina: per analogia, il risultato che ci si aspetta di osservare sullo schermo è riportato qui sotto.



Rappresentiamo il fascio di luce diretto verso la barriera come (la parte reale di) un'onda piana  $\Psi_0$  di ampiezza  $|E|$ , frequenza  $\omega$  e lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi/k$ ,

$$\Psi_0(x, y, t) = Ee^{i(kx - \omega t)} \quad \text{per } x < 0.$$

Fissiamo un punto  $P_0 = (L, y_0)$  sullo schermo, e per ciascun punto  $(0, y)$  delle fessure poniamo  $r(y) = |P_0 - (0, y)|$ .



Per il principio di Huygens, ogni punto  $(0, y)$  delle fessure è la sorgente di un'onda radiale e il contributo complessivo si ottiene "sommando le sorgenti", ovvero integrando rispetto a  $y$ . Più precisamente, l'espressione dell'onda  $\Psi$  uscente dalle fessure nel punto  $P_0$  è

$$\begin{aligned} \Psi(P_0) &= C \int_{\text{fessure}} \frac{1}{r(y)} e^{i(kr(y) - \omega t)} dy \\ &= Ce^{-i\omega t} \int_{\text{fessure}} \frac{1}{r(y)} e^{ikr(y)} dy \end{aligned}$$

(indichiamo con  $C$  una generica costante per non appesantire le notazioni). Fissiamo, come in figura,

l'origine nel punto medio tra i punti delle fessure che hanno massima distanza tra loro, e chiamiamo  $2a$  tale distanza. Facciamo alcune altre ipotesi semplificative (analoghe a quelle della cosiddetta *diffrazione di Fraunhofer*): l'ampiezza della fessura è molto minore sia della distanza tra barriera e schermo, sia della lunghezza d'onda, ovvero  $a/L \ll 1$  e  $a/\lambda = ak/(2\pi) \ll 1$ . Inoltre concentriamo l'attenzione sui punti "al centro" dello schermo:  $y_0/L \ll 1$ . In queste ipotesi, si può in prima approssimazione sostituire  $r(y)$  con  $r(0) - y \sin \theta$  (si veda la figura). Inoltre, per semplicità, sostituiamo  $r(y)$  con  $L$  al denominatore dell'integranda (a posteriori si può verificare che l'errore commesso è trascurabile rispetto all'effetto che stiamo cercando di descrivere). In conclusione,

$$\begin{aligned} \Psi(P_0) &\approx Ce^{-i\omega t} \int_{\text{fessure}} e^{ik(r(0) - y \sin \theta)} dy \\ &= Ce^{i(kr(0) - \omega t)} \int_{\text{fessure}} e^{-iky \sin \theta} dy. \end{aligned}$$

Per concludere, introduciamo la "funzione fessura"

$$A(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (0, y) \text{ è in una fessura} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In tal modo, si ottiene

$$\Psi(P_0) \approx Ce^{i(kr(0) - \omega t)} \int_{-\infty}^{+\infty} A(y) e^{-iky \sin \theta} dy.$$

L'integrale a destra in questa espressione rappresenta la *trasformata di Fourier* della funzione  $A(y)$  rispetto alla variabile  $\omega = k \sin \theta$ :

$$\Psi(P_0) \approx Ce^{i(kr(0) - \omega t)} \mathcal{F}[A](k \sin \theta),$$

ovvero

$$|\Psi(P_0)|^2 \approx C^2 |\mathcal{F}[A](k \sin \theta)|^2.$$

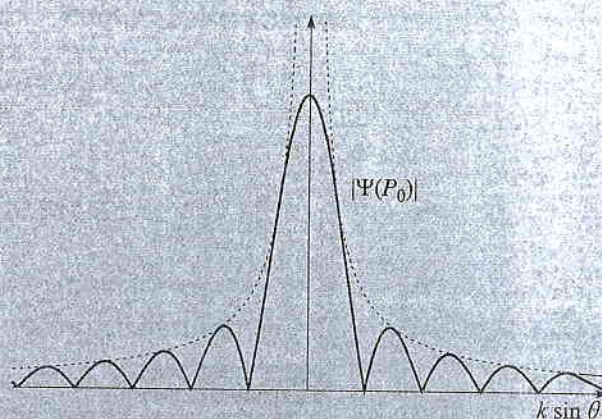
In altri termini, *l'intensità luminosa sullo schermo è proporzionale al modulo della trasformata di Fourier della funzione fessura*.

Vedremo nel Paragrafo 20.3 come calcolare queste espressioni per opportune classi di funzioni  $A$ . Nel caso particolare di una singola fessura  $y \in [-a, a]$ , si ottiene (si veda l'Esempio 20.5)

$$|\Psi(P_0)| \approx C \left| \frac{\sin(ak \sin \theta)}{k \sin \theta} \right|.$$



Il grafico qualitativo di questa funzione, riprodotto in figura, spiega chiaramente sia la presenza di zone buie (gli zeri) sia il decadimento dell'intensità luminosa che cercavamo di spiegare. Sul sito internet è disponibile il collegamento a un programmino che visualizza questo risultato.



## 20.1 Serie di Fourier

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$ :

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente  $f$  è determinata dai suoi valori in  $[-\pi, \pi)$  (o in qualsiasi altro intervallo di ampiezza  $2\pi$ ). Gli esempi più immediati sono le funzioni trigonometriche,

$$\cos(nx) \quad \text{per } n \in \mathbb{N}, \quad \sin(nx) \quad \text{per } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(se  $n = 0$ ,  $\cos(nx)$  è la funzione costante, 1), e le loro combinazioni lineari, i **polinomi trigonometrici**:

$$S_N(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) \quad \text{per } N \in \mathbb{N}.$$

Fissato  $N$  si vogliono determinare, se esistono,  $2N + 1$  coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_N$  e  $b_1, \dots, b_N$  che minimizzano la quantità

$$\mathcal{E}_N := \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx.$$

Ricordiamo che una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **continua a tratti** in  $I$  se è continua in  $I$  a parte un numero finito di punti  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) in cui presenta discontinuità eliminabili o di salto. Una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $L$  si dice **continua a tratti** se è continua a tratti in  $[-L/2, L/2]$  (si veda la Figura 19.3).

### TEOREMA 20.1

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e continua a tratti. Allora per ogni  $N \in \mathbb{N}$  esiste un'unica scelta di  $a_0, a_1, \dots, a_N$  e  $b_1, \dots, b_N$  che minimizza  $\mathcal{E}_N$ :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (0 \leq n \leq N), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (1 \leq n \leq N). \quad (20.1)$$

La dimostrazione del Teorema 20.1 si basa sulla seguente osservazione:

#### Guida

Per introdurre le serie di Fourier sono sufficienti le nozioni acquisite fino al Capitolo 8 e il concetto di serie a termini complessi (Paragrafo 9.2). L'applicazione presentata nel paragrafo successivo richiede anche la conoscenza del calcolo differenziale per funzioni di più variabili e delle EDO.

#### Polinomi trigonometrici

**TEOREMA 20.2**

Sia  $V$  uno spazio vettoriale  $V$  dotato di un prodotto scalare e siano  $v_1, \dots, v_m \in V$  ( $v_i \neq 0$  per ogni  $i$ ) mutuamente ortogonali:  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  se  $i \neq j$ . Sia  $v \in V$  e siano

$$S_m = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \quad \mathcal{E}_m := \langle v - S_m, v - S_m \rangle.$$

Allora c'è un'unica scelta di  $a_1, \dots, a_m$  che minimizza  $\mathcal{E}_m$ :

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \quad (i = 1, \dots, m).$$

**Dimostrazione del Teorema 20.2**

Infatti, per l'ortogonalità dei vettori  $v_i$  si ha che

$$\mathcal{E}_m = \langle v, v \rangle + \sum_{i=1}^m (a_i^2 \langle v_i, v_i \rangle - 2a_i \langle v, v_i \rangle)$$

e, per ogni  $i = 1, \dots, m$ , la funzione quadratica  $a_i \mapsto \langle v_i, v_i \rangle a_i^2 - 2\langle v, v_i \rangle a_i$  ha un minimo assoluto in  $a_i = \langle v, v_i \rangle / \langle v_i, v_i \rangle$ .

**Dimostrazione del Teorema 20.1**

Consideriamo prima il caso in cui  $f$  è continua. Sia  $V$  l'insieme delle funzioni continue in  $[-\pi, \pi]$ :  $V = C([-\pi, \pi])$ . Posto che, per ogni  $f, g \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \quad \lambda f : x \mapsto \lambda f(x) \quad \text{per } x \in [-\pi, \pi]$$

allora  $V$  è uno spazio vettoriale. Definiamo il seguente prodotto scalare in  $V$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx \quad \text{per ogni } f, g \in C([-\pi, \pi]) \quad (20.2)$$

(si tratta effettivamente di un prodotto scalare, si veda l'Esempio 20.1). Si noti che

$$\langle 1, 1 \rangle = 2\pi, \quad \langle \cos(nx), \cos(nx) \rangle = \langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle = \pi \quad \text{per } n = 1, 2, \dots \quad (20.3)$$

e

$$\begin{aligned} \langle 1, \cos(nx) \rangle &= \langle 1, \sin(nx) \rangle = \langle \cos(nx), \sin(mx) \rangle = 0 \quad \text{per } n, m = 1, 2, \dots \\ \langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle &= \langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = 0 \quad \text{per } n, m = 1, 2, \dots (n \neq m). \end{aligned} \quad (20.4)$$

(si veda l'Esempio 20.2). In altre parole, definendo

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \cos x, \quad v_3 = \sin x, \quad v_4 = \cos(2x), \quad v_5 = \sin(2x) \dots$$

si ha che

$$\langle v_1, v_1 \rangle = 2\pi, \quad \langle v_k, v_k \rangle = \pi \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \langle v_k, v_\ell \rangle = 0 \quad (k, \ell \in \mathbb{N}, k \neq \ell).$$

Allora il risultato segue dal Teorema 20.2 (con  $m = 2N + 1$ ). Se  $f$  è continua a tratti la dimostrazione è essenzialmente uguale, solo che  $\langle f, g \rangle$  non si può più chiamare prodotto scalare perché non verifica la proprietà che  $\langle f, f \rangle = 0$  implica che  $f(x) = 0$  per ogni  $x$  (per esempio, se  $f(0) = 1$  e  $f(x) = 0$  se  $x \neq 0$ ,  $f$  è continua a tratti e  $\langle f, f \rangle = 0$ ). D'altra parte, nella dimostrazione appena svolta non si utilizza tale proprietà, quindi il Teorema 20.2 continua a valere per le funzioni continue a tratti.



Si noti che lo spazio vettoriale considerato nella dimostrazione del Teorema 20.1 contiene un numero *infinito* di elementi mutuamente ortogonali (si dice anche che  $V$  ha dimensione infinita). In analogia con il concetto di base di uno spazio vettoriale di dimensione  $N$ , nasce spontanea la domanda se ogni vettore  $v \in V$  possa essere scritto come una “combinazione lineare infinita di  $v_i$ ”, cioè se  $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i$ . Si noti però che il concetto di limite in  $V$  sarebbe tutto da approfondire: il lettore interessato può farsi un’idea del concetto di convergenza in spazi di funzioni nel Paragrafo 9.5. Per trattare queste idee correttamente sarebbe necessaria la teoria matematica dell’*analisi funzionale*. Nel caso specifico delle *serie di Fourier* si può formulare una risposta senza entrare nel merito dell’analisi funzionale.

**DEFINIZIONE 20.3**

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e continua a tratti. I numeri  $a_0, a_1, a_2, \dots$  e  $b_1, b_2, \dots$  definiti dalla (20.1) si dicono **coefficienti di Fourier** associati a  $f$  e la serie

$$S(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad x \in \mathbb{R}$$

si dice **serie di Fourier** di  $f$ .

Vale infatti il seguente risultato, di cui omettiamo la dimostrazione.

**TEOREMA 20.4**

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica, di periodo  $2\pi$  e continua a tratti. Sia  $S(x)$  la serie di Fourier associata con somme parziali  $S_N(x)$ :

$$S_N(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Allora  $S(x)$  è convergente per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e

(i)  $\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx \rightarrow 0$  per  $N \rightarrow +\infty$ ;

(ii)  $S(x) = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$  per  $x \in \mathbb{R}$ ; in particolare  $S(x) = f(x)$  se  $f$  è continua in  $x$ ;

(iii) vale la **disuguaglianza di Bessel**:

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Disuguaglianza  
di Bessel

Se  $f$  ha periodo  $L > 0$  invece di  $2\pi$ , è sufficiente applicare il Teorema 20.4 alla funzione  $y \mapsto f(Ly/(2\pi))$ , che ha periodo  $2\pi$ . Questo porta alla seguente serie di Fourier:

$$S(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \left( \omega_0 := \frac{2\pi}{L} \right)$$

dove i coefficienti di Fourier sono definiti come

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx. \quad (20.5)$$

Il numero  $\omega_0$  si dice anche **frequenza fondamentale** di  $f$ . La serie di Fourier può essere interpretata come la scomposizione di un “segnale periodico”  $f$  (in questo caso una funzione continua a tratti e periodica di periodo  $L$ ) nelle frequenze  $n\omega_0$  multiple



della frequenza fondamentale (dette anche “armoniche”). Il Teorema 20.4 afferma quindi che un segnale continuo e periodico è completamente determinato dalla sua scomposizione in frequenza, ossia dal valore dei coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  che misurano i contributi della  $n$ -esima frequenza.

Si noti che:

(i) se  $f$  è **pari**, la serie di Fourier non contiene i termini con i seni e diventa

$$S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{L}\right) \quad (20.6)$$

con

$$a_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

(ii) se  $f$  è **dispari**, la serie di Fourier contiene solo i termini con i seni e diventa

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{L}\right) \quad (20.7)$$

con

$$b_n = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}).$$

### ESEMPIO 20.1

Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  tale che  $f(x) = x$  per  $-\pi \leq x < \pi$ . Allora la serie di Fourier associata è

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

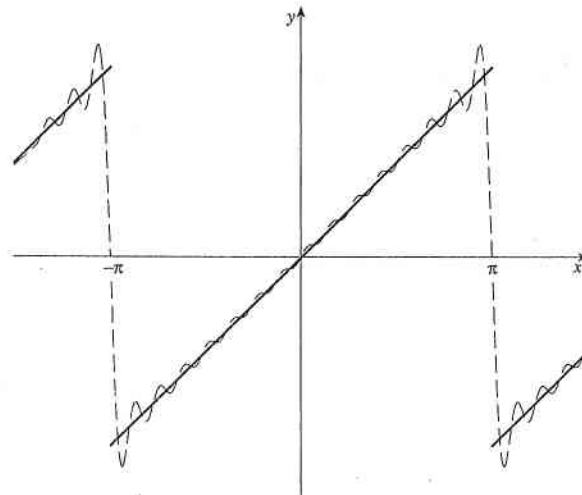
(si veda Figura 20.1). Infatti

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n\pi} x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(nx) dx}_{= 0 \quad \forall n} \\ &= -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

e  $a_n = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (lo studente controlli) in quanto  $f$  è “dispari tranne nei punti  $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ”.

Si noti che nel punto  $x = -\pi$  la somma della serie vale banalmente 0, coerentemente con il Teorema 20.4:  $0 = \frac{1}{2}(f(-\pi^+) + f(-\pi^-)) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi)$

**Figura 20.1** La serie di Fourier troncata  $S_{15}(x)$  della funzione dell'Esempio 20.1.



Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  tale che  $f(x) = |x|$  per  $-\pi \leq x < \pi$ . Allora  $f$  è pari e la serie di Fourier associata è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

(si veda Figura 20.2). Infatti

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{n\pi} x \sin(nx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx$$

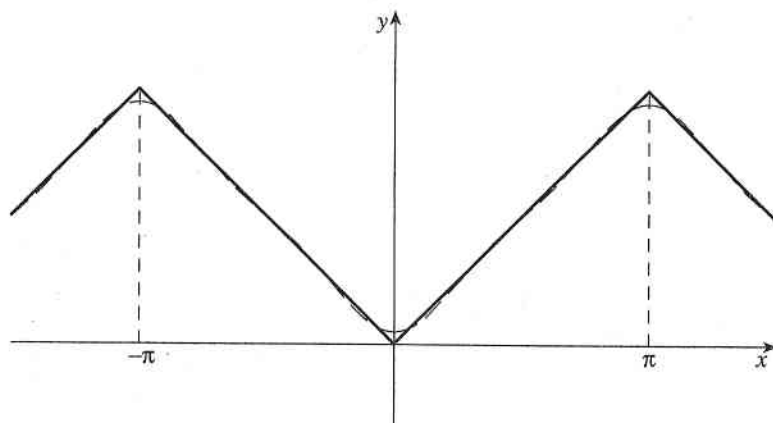
$$= \frac{2}{n^2\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & n = 2k+2 \\ -\frac{4}{(2k+1)^2\pi} & n = 2k+1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Essendo  $f$  continua in  $\mathbb{R}$ , per il Teorema 20.4

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

quindi, essendo  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (assolutamente) convergente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$



**Figura 20.2** La serie di Fourier troncata  $S_3(x)$  della funzione dell'Esempio 20.2.

Qualche volta risulta utile rappresentare la serie di Fourier in forma complessa, utilizzando le ben note relazioni  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  e  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ :

$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) - i \sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Rappresentazione complessa della serie di Fourier.

e

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) + i \sin(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-n)x} dx.$$

In tal modo si ottiene la **rappresentazione complessa della serie di Fourier**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{dove } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (20.8)$$

(lo studente controlli che il ragionamento è corretto anche se  $n = 0$ :  $c_0 = 2a_0$ ). Si osservi che in questo caso la serie bilatera va intesa come il limite di “somme parziali bilatere”: in formule,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N z_n.$$

La formula precedente suggerisce l'estensione naturale del concetto di serie di Fourier a funzioni complesse. Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$  sono periodiche di periodo  $2\pi$  e continue a tratti. Allora la serie e i numeri complessi  $c_n$  in (20.8) si dicono rispettivamente **serie di Fourier** di  $f$  e **coefficienti di Fourier** di  $f$ . Per funzioni complesse valgono risultati del tutto analoghi al caso reale (con le ovvie modifiche): in particolare, la serie di Fourier è convergente, continua a valere (ii) del Teorema 20.4 e

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{per } N \rightarrow +\infty, \quad \text{con } S_N(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

Nel caso di una funzione di periodo  $L > 0$  si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{2\pi}{L} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx. \quad (20.9)$$

Le serie di Fourier troncate,  $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega_0 x}$ , non sono molto adatte per approssimare eventuali salti della funzione  $f$ : in un intorno di un punto di salto l'errore commesso mostra due “picchi” di segno opposto a quello della discontinuità che, per grandi valori di  $N$ , sono ambedue intorno al 9% del salto: nella Figura 20.3 abbiamo rappresentato il grafico della funzione dell'Esempio 20.1 nell'intorno di  $(x, y) = (\pi, \pi)$  (si veda Figura 20.1) e le serie di Fourier troncate  $S_{15}$  e  $S_{90}$ . Come si vede, con l'aumentare di  $N$  le ascisse dei picchi si spostano verso il punto di salto, ma la loro ampiezza non diminuisce. Si tratta del noto **fenomeno di Gibbs**, causato da un contributo “troppo grande” dei coefficienti  $c_n$  corrispondenti alle frequenze  $n\omega_0$  più alte. Ricordiamo che, per il Teorema 20.1, la scelta dei coefficienti  $c_n$  era basata sulla minimizzazione di

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{in\omega_0 x} \right|^2 dx.$$

Se  $f$  è continua, si può anche minimizzare il massimo dell'errore commesso:

$$\max_{|x| \leq L/2} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{in\omega_0 x} \right|.$$

Serie di Fourier di funzioni complesse

Fenomeno di Gibbs

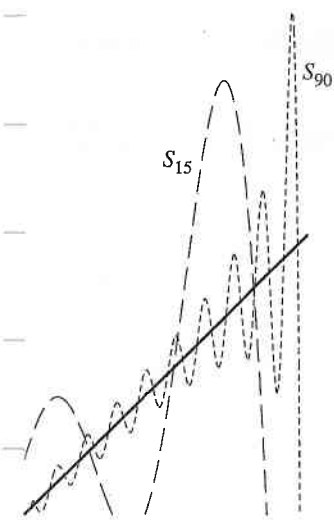


Figura 20.3 Il fenomeno di Gibbs.



In tal caso risulta (ma non lo dimostriamo) che

$$\gamma_n = \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n$$

ovvero si ottiene una serie in cui, rispetto ai coefficienti  $c_n$ , si “favoriscono” i coefficienti a frequenza più bassa. Infatti le corrispondenti **somme di Fejér**,

$$S_N^F(x) := \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n e^{in\omega_0 x}$$

non soffrono del fenomeno di Gibbs che si presenta per le serie di Fourier troncate.

Sia le serie di Fourier troncate sia le somme di Fejér possono essere rappresentate da un integrale invece che da una sommatoria.

Somme di Fejér

**TEOREMA 20.5**

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione periodica di periodo  $L$  e continua a tratti. Siano  $S_N(x)$  e  $S_N^F(x)$ , rispettivamente, la serie di Fourier troncata e la somma di Fejér associate a  $f$ . Allora

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) k_N(x-y) dy \quad \text{e} \quad S_N^F(x) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) k_N^F(x-y) dy$$

dove

$$k_N(x) := \frac{\sin(\omega_0(N+1/2)x)}{\sin(\omega_0 x/2)} \quad \text{e} \quad k_N^F(x) := \frac{\sin^2(\omega_0 N x/2)}{N \sin^2(\omega_0 x/2)} \quad (\omega_0 = 2\pi/L).$$

Si osservi che  $k_N^F(x)$ , anche detto **nucleo di Fejér**, è una funzione non negativa, e ciò permette di approssimare funzioni non negative,  $f(x) \geq 0$ , con polinomi trigonometrici anch'essi positivi.

Omettiamo la dimostrazione del Teorema 20.5; nel Paragrafo 20.5.1, comunque, useremo la trasformata di Fourier per dare un'indicazione sull'origine del nucleo  $k_N(x)$ .

Provare che la (20.2) definisce un prodotto scalare in  $V = C([- \pi, \pi])$ .

**ESERCIZIO 20.1**

Provare le (20.3) e (20.4).

**ESERCIZIO 20.2**

Determinare la serie di Fourier delle seguenti funzioni periodiche  $f(x)$ :

a)  $f$  ha periodo  $2\pi$  e  $f(x) = x$  per  $0 \leq x < 2\pi$ ;

b)  $f$  ha periodo  $2\pi$  e  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  per  $-\pi \leq x < \pi$ ; dedurne la somma della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ;

c)  $f$  ha periodo 2 e  $f(x) = x^2$  per  $0 \leq x < 2$ ;

d)  $f$  ha periodo 2 ed è pari e  $f(x) = x^2$  per  $0 \leq x < 1$ ;

e)  $f$  ha periodo 2 ed è dispari e  $f(x) = x^2$  per  $0 \leq x < 1$ .

**ESERCIZIO 20.3****20.2 Un'applicazione delle serie di Fourier**

Le serie di Fourier hanno una vastissima gamma di applicazioni. In questo paragrafo ne presentiamo una che permette di segnalare una classe di problemi di importanza

fondamentale: le *equazioni alle derivate parziali*. Si tratta di equazioni differenziali in cui la funzione incognita  $u$  dipende da più di una variabile e in cui compaiono le derivate parziali di  $u$ . Gran parte dei modelli matematici per la descrizione di fenomeni fisici (ma non solo: biologici, economici ecc.) coinvolge equazioni alle derivate parziali, e il loro studio rappresenta una parte essenziale dell'analisi matematica. La vastità e la profondità dei concetti coinvolti impedisce in quest'ambito alcun ragionevole approfondimento di tali equazioni: quel che ci interessa qui è soltanto accennare a come gli strumenti fin qui sviluppati possano aiutare a risolverle.

La dinamica di una corda di uno strumento musicale di lunghezza  $L > 0$ , fissata nei suoi due estremi, può essere descritta da una funzione  $u(x, t)$  che rappresenta la deviazione della corda rispetto alla sua posizione di equilibrio nel punto  $x \in [0, L]$  e al tempo  $t$  (Figura 20.4).

Se  $u$  è sufficientemente piccolo rispetto alla lunghezza  $L$  e se si trascura il fenomeno dello smorzamento (ossia la perdita di energia cinetica dovuta agli attriti e alle forze coesive interne alla corda), l'accelerazione  $u_{tt} := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  è proporzionale a  $u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  e a eventuali forze esterne, come quella esercitata dall'arco nel caso di un violino (Figura 20.5).

Pensiamo per esempio alla corda di una chitarra che è stata pizzicata al tempo  $t = 0$  e della quale vogliamo sapere l'evoluzione temporale. L'azione al tempo  $t = 0$  avrà portato la corda in una certa posizione,  $u_0(x)$ , con una certa velocità iniziale,  $v_0(x)$ :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) := \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x).$$

Dobbiamo quindi risolvere il seguente problema: determinare una funzione  $u(x, t)$  tale che

$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{se } 0 < x < L \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & \text{se } 0 < x < L \end{cases} \quad (20.10)$$

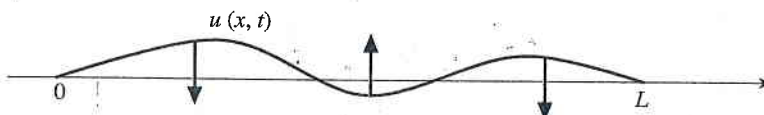
dove  $u_0$  e  $v_0$  sono da considerare funzioni date, le cosiddette *condizioni (o dati) iniziali*, definite e continue a tratti in  $[0, L]$ . Le condizioni in  $x = 0$  e  $x = L$ , dette *condizioni al contorno* o *dati al bordo*, in questo caso esprimono il fatto che la corda non può muoversi nei punti di estremo. La costante  $\sigma > 0$  dipende dalle proprietà della corda (materiale, tensione ecc.).

L'equazione  $u_{tt} = \sigma^2 u_{xx}$ , detta anche *equazione delle onde*, è quindi un primo esempio di *equazione alle derivate parziali*, un'equazione differenziale per una funzione di più variabili. Si noti che le equazioni

Figura 20.4



Figura 20.5 Il verso di



$$\begin{cases} u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} & \text{se } 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (20.11)$$

sono *lineari e omogenee*, quindi, se  $u_1$  e  $u_2$  sono due soluzioni, lo è anche qualsiasi combinazione lineare  $\lambda u_1 + \mu u_2$ . Cominciamo quindi a cercare qualche soluzione particolare. Sia  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , dove  $X$  e  $T$  sono funzioni di una variabile ancora da determinare. Ragionando formalmente si ha:

$$u_{tt} = \sigma^2 u_{xx} \Rightarrow X(x)T''(t) = \sigma^2 X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = \sigma^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Nell'ultima equazione si trova a sinistra una funzione che non dipende da  $x$  e a destra una funzione che non dipende da  $t$ ; poiché le due funzioni devono essere uguali, non possono dipendere né da  $x$  né da  $t$ . Distinguiamo tre casi:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2 < 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \beta^2 > 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = 0.$$

Poiché  $X(0)T(t) = u(0, t) = 0$  e  $X(L)T(t) = u(L, t) = 0$ , si richiede che  $X(0) = X(L) = 0$ . Allora il primo caso da studiare porta al problema

$$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0 & \text{se } 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0. \end{cases} \quad (20.12)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è  $X(x) = \lambda \cos(\alpha x) + \mu \sin(\alpha x)$ . Inoltre  $X(0) = \lambda = 0$ , quindi  $X(x) = \mu \sin(\alpha x)$ . Infine  $X(L) = \mu \sin(\alpha L) = 0$ , e poiché la soluzione  $X(x) \equiv 0$  non ci interessa, richiederemo che  $\sin(\alpha L) = 0$ , ovvero  $\alpha L = n\pi$  per qualche  $n = 1, 2, \dots$ . Quindi abbiamo trovato infinite soluzioni particolari del problema (20.12):

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Per trovare le soluzioni corrispondenti  $T_n(t)$  si risolve l'equazione

$$\begin{aligned} \frac{T_n''(t)}{T_n(t)} = \sigma^2 \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = -\frac{n^2 \pi^2 \sigma^2}{L^2} &\Rightarrow T_n''(t) + \frac{n^2 \pi^2 \sigma^2}{L^2} T_n(t) = 0 \\ \Rightarrow T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi \sigma t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi \sigma t}{L}\right). \end{aligned}$$

Posto quindi

$$\omega_0 := \frac{\pi \sigma}{L}$$

abbiamo trovato infinite soluzioni particolari del problema (20.11):

$$u_n(x, t) = (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{per } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0.$$

Per giustificare il procedimento formale seguito per trovare le funzioni  $u_n$ , si controlla a posteriori (e facilmente) che si tratta effettivamente di soluzioni del problema (20.11).

Ragionando analogamente per i problemi

$$\begin{cases} X'' - \beta^2 X = 0 & \text{se } 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} X'' = 0 & \text{se } 0 < x < L \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

non si trovano soluzioni oltre a quella banale,  $X \equiv 0$  (per esempio, nel secondo caso  $X = ax + b$  ma poiché  $X(0) = X(L) = 0$  si ha che  $a = b = 0$ ).



Come osservato prima, qualsiasi combinazione lineare di  $u_n$  è soluzione di (20.11); quindi è naturale considerare come soluzione, sempre a livello puramente formale, una serie del tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (20.13)$$

e scegliere i coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  in modo tale che siano soddisfatte anche le due condizioni rimaste,  $u(x, 0) = u_0(x)$  e  $u_t(x, 0) = v_0(x)$  se  $0 < x < L$ :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = u_0(x) \quad \text{per } 0 < x < L$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = v_0(x) \quad \text{per } 0 < x < L.$$

Le serie nelle due formule precedenti coincidono con serie di Fourier di funzioni dispari di periodo  $2L$ . Perciò, estendendo  $u_0$  e  $v_0$  a  $\mathbb{R}$  come funzioni dispari e periodiche di periodo  $2L$ , si scelgono  $A_n$  uguali ai coefficienti di Fourier di  $u_0$  e  $n\omega_0 B_n$  a quelli di  $v_0$ :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad B_n = \frac{2}{n\pi\sigma} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Sotto opportune ipotesi sul dato iniziale è possibile dimostrare (ma non lo facciamo, accontentandoci del risultato formale) che la serie (20.13) è convergente e che la sua somma è effettivamente soluzione del problema (20.10).

Si noti che  $u(x, t)$  è periodica rispetto a  $t$ , di periodo  $\omega_0$  (in realtà l'intensità del suono diminuirà nel corso del tempo, ma ricordiamo di avere trascurato l'effetto dello smorzamento nel nostro modello). Il suono ci risulta "armonico" perché le frequenze  $n\omega_0$  che compaiono nei termini della serie sono multipli di quella più bassa,  $\omega_0$ , determinante per l'altezza del suono. Ovviamente  $\omega_0$  dipende dalle proprietà materiali della corda (tramite il coefficiente  $\sigma$ ) e dalla sua lunghezza (più piccolo è  $L$ , più alta diventa la frequenza e più acuto è il suono).

Il procedimento costruttivo seguito per trovare  $u(x, t)$  può essere generalizzato a situazioni molto più generali e ha anche una variante computazionale. Nell'ultimo caso si parla anche del *metodo di Galerkin*, la cui idea principale è: individuare le funzioni  $X_n(x)$  (essenzialmente utilizzando l'approccio seguito prima, solo che in generale non saranno più funzioni trigonometriche), prenderne un numero finito,  $N$ , e considerare come approssimazione della soluzione una funzione del tipo  $a_1(t)X_1 + \dots + a_N(t)X_N$  scegliendo le funzioni  $a_n(t)$  in modo opportuno. Per esempio, nel caso appena considerato si userebbe come approssimazione

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(si noti che  $u_N(0, t) = u_N(L, t) = 0$ ). Per definire le funzioni  $a_n(t)$  si usa l'equazione delle onde:

$$(u_N)_{tt} = (u_N)_{xx} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^N a_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

ovvero per ogni  $n = 1, 2, \dots, N$

$$a_n''(t) = \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n(t) \quad \text{per } t > 0.$$

Per approssimare "al meglio" le condizioni al tempo  $t = 0$  si usano il Teorema 20.1 e la (20.5):

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad a'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Quindi  $a_n$  è soluzione del problema

$$\begin{cases} a''_n(t) = \frac{n^2\pi^2}{L^2} a_n(t) & \text{per } t > 0 \\ a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ a'_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{cases}$$

ovvero ritroviamo l'espressione

$$a_n(t) = A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t) \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, N$$

dove le costanti  $\omega_0$ ,  $A_n$  e  $B_n$  sono definite come sopra. L'utilizzo del Teorema 20.1 e della sua dimostrazione permette anche di trovare delle stime per l'errore commesso.

Si vuole determinare una soluzione formale del problema

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx} & \text{se } 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = 1 - x & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases} \quad (20.14)$$

La soluzione  $u(x, t)$  rappresenta la temperatura nel punto  $x$  e al tempo  $t$  di una barra di metallo di lunghezza 1; la costante  $\kappa > 0$  dipende dalle proprietà della barra. L'equazione  $u_t = \kappa u_{xx}$  si dice anche *equazione del calore*. Le condizioni iniziali e al contorno in (20.14) indicano che: inizialmente la barra ha temperatura  $1 - x$ ; all'estremo  $x = 0$  la barra è termicamente isolata; all'estremo  $x = 1$  la temperatura è mantenuta costante e uguale a 0. Procedendo come sopra, cerchiamo delle soluzioni particolari a variabili separate  $u(x, t) = X(x)T(t)$  delle equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx} & \text{se } 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = 0 & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (20.15)$$

Allora

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \kappa \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{costante}, \quad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0.$$

Se la costante vale  $-\alpha^2 \kappa < 0$ , si ha che

$$\begin{cases} X'' + \alpha^2 X = 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(x) = \lambda \cos(\alpha x) + \mu \sin(\alpha x) \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} X(x) = \lambda \cos(\alpha x) \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

ovvero ci sono infinite soluzioni non banali corrispondenti a  $\alpha = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(1+2n)\pi}{2}$ :

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\right) \quad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

### ESEMPIO 20.3

### Equazione del calore

(si controlli che i valori non negativi della costante non forniscono altre soluzioni non banali per  $X$ ). La soluzione corrispondente  $T_n(t)$  si ottiene facilmente:

$$T_n'(t) = -\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\kappa T_n(t) \Rightarrow T_n(t) = A_n e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\kappa t}$$

quindi si cerca una soluzione nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\kappa t} \cos\left(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\right).$$

I coefficienti  $A_n$  dovrebbero essere scelti in modo tale che  $u$  verifichi la condizione  $u(x, 0) = 1 - x$ , ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\right) = 1 - x \quad \text{per } 0 < x < 1. \quad (20.16)$$

Al contrario del caso precedente, però, nella (20.16) non si riconosce immediatamente uno degli sviluppi in serie di Fourier considerati finora. Per capire come procedere, si osserva che le funzioni  $X_n$  sono in realtà definite su tutto  $\mathbb{R}$ , pari rispetto a  $x = 0$  e dispari rispetto a  $x = 1$ :

$$X_n(-x) = X_n(x) \quad \text{e} \quad X_n(x) = -X_n(2-x).$$

Perciò estendiamo il dato iniziale  $u_0(x) := 1 - x$  allo stesso modo, e poi estendiamo periodicamente su tutto  $\mathbb{R}$ :

$$f_0(x) = 1 - |x - 4k| \quad \text{per } x \in [-2 + 4k, 2 + 4k] \quad k \in \mathbb{Z}$$

(si veda la Figura 20.6). Lo sviluppo in serie di Fourier di  $f_0$  è dato da

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right), \quad \text{dove } a_k = \int_0^2 (1-x) \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) dx$$

(si veda la (20.6)). Un semplice calcolo mostra che

$$a_{2n} = 0 \quad \text{e} \quad a_{2n+1} = \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

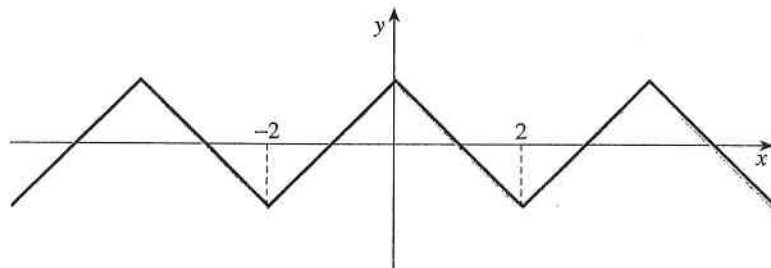
(in particolare, come è naturale attendersi per le suddette ragioni di simmetria, i coefficienti di indice pari si annullano). Perciò, ponendo  $k = 2n + 1$ , dal Teorema 20.2 segue che

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2}\right),$$

che coincide con la (20.16) ponendo  $A_n = a_{2n+1}$ . Si è quindi trovato, sempre a livello formale, la soluzione del problema (20.14):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2n+1)^2} e^{-\frac{1}{4}(1+2n)^2\pi^2\kappa t} \cos\left(\frac{(1+2n)\pi x}{2}\right).$$

**Figura 20.6** La funzione  $f_0(x)$ .







## ESERCIZIO 20.4

Determinare le soluzioni (formali) dei seguenti problemi:

$$\text{a) } \begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = x & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(x, 0) = x & \text{se } 0 < x < \pi \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

## 20.3 Trasformata di Fourier

### 20.3.1 Introduzione e definizione

Nel Paragrafo 20.1 si è visto che è possibile scomporre una funzione continua a tratti e  $L$ -periodica in uno spettro discreto di frequenze  $2\pi n/L$ , e che se la funzione è continua tale scomposizione determina completamente  $f$ ; in altre parole, si può associare a un segnale continuo e periodico la sua rappresentazione “in frequenza”, ovvero in serie di Fourier, e ricostruirlo a partire da essa.

La domanda da cui si vuole partire per introdurre la trasformata di Fourier è la seguente: è possibile rappresentare “in frequenza” (e ricostruire) un segnale *non* periodico? Per poter rispondere serve anzitutto un candidato naturale per tale rappresentazione. Data una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oppure  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ) continua e un numero reale  $L > 0$ , consideriamo la restrizione di  $f$  all'intervallo  $[-L/2, L/2)$  ed estendiamo con periodo  $L$ :

$$f_L(x) \text{ di periodo } L, \quad f_L(x) = f(x) \quad \text{per } x \in [-L/2, L/2).$$

In  $[-L/2, L/2)$   $f$  coincide con  $f_L$  e, per il Teorema 20.4,  $f_L$  coincide con il suo sviluppo in serie di Fourier:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_L x}, \quad \text{con } \omega_L = \frac{2\pi}{L} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f_L(x) e^{-in\omega_L x} dx.$$

Ponendo  $F(n\omega_L) := Lc_n$  (ovvero  $c_n = F(n\omega_L)/L = \omega_L F(n\omega_L)/(2\pi)$ ), possiamo riscrivere la formula precedente come

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_L) e^{in\omega_L x} \omega_L, \quad \text{con } F(n\omega_L) = \int_{-L/2}^{L/2} f_L(x) e^{-in\omega_L x} dx.$$

Pensiamo all'insieme  $\{n\omega_L, n \in \mathbb{Z}\}$  come a una suddivisione di  $\mathbb{R}$  di ampiezza  $\omega_L$ . Poiché  $\omega_L \rightarrow 0$  per  $L \rightarrow +\infty$ , la formula precedente può essere interpretata come un'approssimazione dell'integrale improprio<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Per motivi di maggiore simmetria, in letteratura spesso si utilizza il fattore  $1/\sqrt{2\pi}$  nella definizione di (anti)trasformata:

$$\mathcal{F}[f](\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{per } \omega \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

#### Guida

Per introdurre la trasformata di Fourier è necessario aver già introdotto sia la trasformata di Laplace sia le serie di Fourier.

$$\frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad \text{con} \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Abbiamo così identificato i candidati naturali a rappresentare in frequenza una funzione  $f$ :

**DEFINIZIONE 20.6**

Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrabile e tale che per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  esiste finito

$$F(\omega) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Allora  $f$  si dice **trasformabile secondo Fourier**, la funzione  $\omega \mapsto F(\omega)$  si dice **trasformata di Fourier di  $f$**  e si scrive  $\mathcal{F}[f] = F(\omega)$ .

Se  $f$  è reale (ovvero se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) allora l'integrale nella definizione si spezza nella somma di due integrali di funzioni reali:

$$F(\omega) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dx - i \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\omega x) dx.$$

In particolare, segue immediatamente dalle proprietà di simmetria di seno e coseno che

- se  $f$  è reale e pari, allora  $\mathcal{F}[f]$  è reale e pari;
- se  $f$  è reale e dispari, allora  $\mathcal{F}[f]$  è immaginaria e pari

( $\mathcal{F}[f]$  è immaginaria se  $i\mathcal{F}[f]$  è reale).

L'antitrasformata di Fourier si definisce analogamente:

**DEFINIZIONE 20.7**

Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrabile e tale che per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$  esiste finito

$$f(x) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Allora  $F$  si dice **antitrasformabile secondo Fourier**, la funzione  $x \mapsto f(x)$  si dice **trasformata inversa** o **antitrasformata di Fourier di  $F$**  e si scrive  $\mathcal{F}^{-1}[F] = f(x)$ .

Poiché  $|e^{i\alpha}| = 1$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ogni funzione assolutamente integrabile in  $\mathbb{R}$  è (anti)trasformabile secondo Fourier, e in tal caso il valore principale dell'integrale coincide con l'integrale in senso improprio.

La definizione di trasformata di Fourier ricorda da vicino la trasformata di Laplace bilatera introdotta nel Paragrafo 19.5:

$$\mathcal{L}_{\text{bil}}[f](p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-px} dx \quad \text{per } a_0 < \text{Re } p < b_0.$$

Sia ora  $f(x)$  un originale per la trasformata di Laplace bilatera tale che la striscia verticale  $\{p \in \mathbb{C} : a_0 < \text{Re } p < b_0\}$  contiene l'asse immaginario, cioè

$$a_0 < 0 < b_0.$$

Allora, per il Teorema 19.12, la trasformata inversa è

$$f(x) = \mathcal{L}_{\text{bil}}^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{-i\infty}^{+i\infty} F(p) e^{px} dp.$$

Posto  $p = i\omega$  per  $\omega \in \mathbb{R}$ , ciò si traduce nel seguente risultato.

**TEOREMA 20.8**

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continua e originale per la trasformata di Laplace bilatera, tale che  $0 \in \text{dom } \mathcal{L}[f]$ . Allora

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = \frac{\text{v.p.}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{dove } F(\omega) = \mathcal{F}[f]. \quad (20.17)$$

In effetti l'identità (20.17) vale (eventualmente in senso più debole) in una classe di funzioni più vasta (si ricordi che, se  $a_0 < 0 < b_0$ , l'originale  $f(x)$  ha un decadimento esponenziale del modulo  $|f|$  sia per  $x \rightarrow +\infty$  che per  $x \rightarrow -\infty$ , che in effetti rappresenta una restrizione considerevole). Incontreremo, ma non tratteremo in dettaglio, alcune di queste generalizzazioni: lo scopo principale di questi paragrafi è dare un'idea del senso e dell'utilizzo della trasformata di Fourier.

L'identità (20.17) conferma che la trasformata di Fourier di una funzione  $f(x)$  definita in  $\mathbb{R}$  gioca un ruolo molto simile a quello dei coefficienti delle serie di Fourier di una funzione periodica di periodo  $L$ . Come i valori  $|c_n|$  misurano il contributo delle frequenze discrete  $n\omega_0$  alla funzione  $f$ , così  $|F(\omega)|$  misura la "densità" del contributo della frequenza  $\omega$  a  $f(x)$ . Non è casuale che in varie applicazioni, quali la teoria di fluidi turbolenti,  $|F(\omega)|^2$  ha il significato di densità di energia (come funzione della frequenza  $\omega$ ).

Si può dimostrare, ma non lo facciamo, che vale l'**identità di Parseval**. Se  $f$  è trasformabile secondo Fourier e  $|f(x)|^2$  è integrabile in  $\mathbb{R}$ , allora, posto  $F(\omega) = \mathcal{L}[f]$  anche  $|F(\omega)|^2$  è integrabile in  $\mathbb{R}$  e risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Identità di Parseval

Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $f(x) = e^{-c|x|}$ ,  $c > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c|x|} e^{-i\omega x} dx &= \int_{-\infty}^0 e^{cx-i\omega x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-cx-i\omega x} dx \\ &= \left[ \frac{e^{cx-i\omega x}}{c-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{-cx-i\omega x}}{-c-i\omega} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{c-i\omega} + \frac{1}{c+i\omega} = \frac{2c}{c^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 20.4**

Sia  $a > 0$  e sia  $\mathbf{1}_{[-a, a]}$  la funzione caratteristica di  $[-a, a]$ :

$$\mathbf{1}_{[-a, a]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora

$$\mathcal{F}[\mathbf{1}_{[-a, a]}](\omega) = \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}) = \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega}. \quad (20.18)$$

(si veda Figura 20.7). Applicando il Teorema 20.8 per la trasformata inversa si ottiene che

$$\mathbf{1}_{[-a, a]}(x) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(\omega a)}{\omega} e^{i\omega x} d\omega \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

ovvero

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\omega a)}{\omega} e^{-i\omega x} d\omega = \pi \mathbf{1}_{[-a, a]}(-x) = \pi \mathbf{1}_{[-a, a]}(x).$$

Scambiando  $x$  e  $\omega$  otteniamo la formula

**ESEMPIO 20.5**

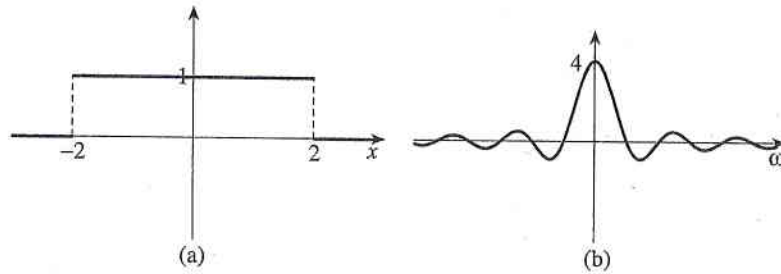


$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} e^{-i\omega x} dx = \pi \mathbf{1}_{[-a,a]}(\omega). \quad (20.19)$$

Quindi, anche se la funzione  $\sin(ax)/x$  non è un originale per la trasformata di Laplace bilaterale (non è neanche assolutamente integrabile in  $\mathbb{R}$ , si veda l'Esempio 8.45), per la (20.19) si ha

$$\mathcal{F}\left[\frac{\sin(ax)}{x}\right](\omega) = \pi \mathbf{1}_{[-a,a]}(\omega) \quad \text{se } a > 0. \quad (20.20)$$

**Figura 20.7** La funzione  $x \mapsto \mathbf{1}_{[-2,2]}(x)$  e la sua trasformata  $F(\omega) = \mathcal{F}[\mathbf{1}_{[-2,2]}]$ .



**ESEMPIO 20.6**

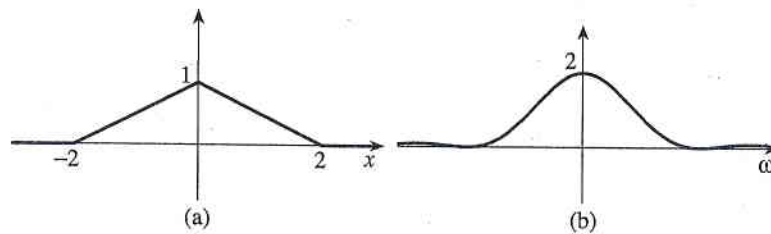
Siano  $a > 0$  e

$$g_a(x) = (1 - |x|/a)_+ = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 1 + \frac{x}{a} & \text{se } -a \leq x < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (20.21)$$

(Si veda Figura 20.8). Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g_a](\omega) &= \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) e^{-i\omega x} dx + \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\omega^2 a} (2 - e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}) = \frac{2}{\omega^2 a} (1 - \cos(\omega a)). \end{aligned} \quad (20.22)$$

**Figura 20.8** La funzione  $g_2$  dell'Esempio 20.6 e la sua trasformata  $\mathcal{F}[g_2]$ .



**ESERCIZIO 20.5**

Determinare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

- a)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ;
- b)  $f(x) = e^{-a|x|} \sin(bx), \quad a > 0$ ;
- c)  $f(x) = e^{-a|x|} \cos(bx), \quad a > 0$ .

**20.3.2 Proprietà elementari della trasformata di Fourier**

Le proprietà elementari della trasformata di Fourier sono molto simili a quelle della trasformata di Laplace e la loro verifica è del tutto analoga. Anzitutto la trasformata di Fourier è lineare: la trasformata di una combinazione lineare di funzioni trasforma-

bili è la combinazione lineare delle trasformate. Nella Tabella 20.1 sono raccolte alcune tra le principali proprietà della trasformata di Laplace.

Tabella 20.1

	$f(x)$	$\mathcal{F}[f] = F(\omega)$	condizioni
1	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$a \neq 0$
2	$\bar{f}(x)$	$\bar{F}(-\omega)$	
3	$f(x - x_0)$	$F(\omega)e^{-ix_0\omega}$	$x_0 \in \mathbb{R}$
4	$f(x + x_0) + f(x - x_0)$	$2F(\omega) \cos(\omega x_0)$	$x_0 \in \mathbb{R}$
5	$f(x)e^{i\omega_0 x}$	$F(\omega - \omega_0)$	$\omega_0 \in \mathbb{R}$
6	$f^{(n)}(x)$	$(i\omega)^n F(\omega)$	$f^{(k)}(x)$ esiste ed è trasformabile per $k = 1, \dots, n$
7	$(-ix)^n f(x)$	$F^{(n)}(\omega)$	$n = 1, 2, \dots$
8	$g * h$	$\mathcal{F}[g] \mathcal{F}[h]$	$g, h$ trasformabili

Determiniamo la trasformata di Fourier di un **segnale replicato**  $2N$  volte: data una funzione trasformabile secondo Fourier,  $f_0$  (il "segnale"), si pone

$$f_N(x) := \sum_{n=-N}^N f_0(x - nx_0) \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Allora, per la proprietà 3 della Tabella 20.1 e per la formula per la somma di una progressione geometrica di ragione  $e^{-ix_0\omega}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_N](\omega) &= \mathcal{F}[f_0](\omega) \sum_{n=-N}^N e^{-inx_0\omega} = \mathcal{F}[f_0](\omega) e^{iNx_0\omega} \sum_{j=0}^{2N} (e^{-ix_0\omega})^j \\ &= \mathcal{F}[f_0](\omega) e^{iNx_0\omega} \frac{1 - e^{i(2N+1)x_0\omega}}{1 - e^{-ix_0\omega}} = \mathcal{F}[f_0](\omega) \frac{e^{iNx_0\omega} - e^{-i(N+1)x_0\omega}}{1 - e^{-ix_0\omega}} \\ &= \mathcal{F}[f_0](\omega) \frac{e^{i(N+1/2)x_0\omega} - e^{-i(N+1/2)x_0\omega}}{e^{ix_0\omega/2} - e^{-ix_0\omega/2}} \end{aligned}$$

(nell'ultima uguaglianza si è moltiplicato e diviso per  $e^{ix_0\omega/2}$ ). Quindi

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-N}^N f_0(x - nx_0)\right] = \mathcal{F}[f_0] \frac{\sin((N+1/2)\omega x_0)}{\sin(\omega x_0/2)}.$$

Determinare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

- a)  $f(x) = x \mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$  (si ricordi l'Esempio 20.5);  
 b)  $f(x) = \mathbf{1}_{(3,7)}(x)$ .

## ESEMPIO 20.7

## ESERCIZIO 20.6

## 20.4 Trasformata di Fourier e serie di Fourier

Nonostante la trasformata di Fourier sia stata motivata nel Paragrafo 20.3.1 come "limite" di serie di Fourier, le funzioni periodiche non sono trasformabili secondo la Definizione 20.6 (si prenda per esempio  $\omega = 0$  nella definizione). Il legame tra i due concetti è fornito dalla seguente semplice osservazione che collega i coefficienti della serie di Fourier di una funzione  $L$ -periodica  $f$  con  $F_0(\omega) = \mathcal{F}[f \mathbf{1}_{(-L/2, L/2)}]$ .

**TEOREMA 20.9**

Sia  $f$  una funzione periodica di periodo  $L$  e continua a tratti, sia  $\omega_0 = 2\pi/L$  e sia  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x}$  la serie di Fourier associata a  $f$  con coefficienti

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Siano

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } -L/2 \leq x \leq L/2 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad F_0(\omega) := \mathcal{F}[f_0].$$

Allora

$$c_n = \frac{\omega_0}{2\pi} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{L} F_0\left(\frac{2\pi n}{L}\right).$$

**Dimostrazione**

Per la definizione di  $f_0$ ,

$$\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-in\omega_0 x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x) e^{-in\omega_0 x} dx$$

quindi il risultato segue dalla definizione di  $c_n$  e  $F_0(\omega)$ .

**ESEMPIO 20.8**

Sia  $f(x)$  un segnale triangolare replicato infinite volte:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_a(x + nL)$$

dove  $a, L > 0$  e  $g_a$  è la funzione definita dalla (20.21). Per la (20.22),

$$\mathcal{F}[g_a]\omega = \frac{2}{\omega^2 a} (1 - \cos(\omega a)),$$

quindi i coefficienti di Fourier associati a  $f$  sono

$$c_n = \frac{1}{L} \mathcal{F}\left(\frac{2\pi n}{L}\right) = \frac{L}{2\pi^2 n^2 a} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n a}{L}\right)\right).$$

**20.5 Teorema di campionamento**

Un **segnale a banda limitata** è una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  trasformabile secondo Fourier tale che  $F(\omega) = \mathcal{F}[f]$  verifica

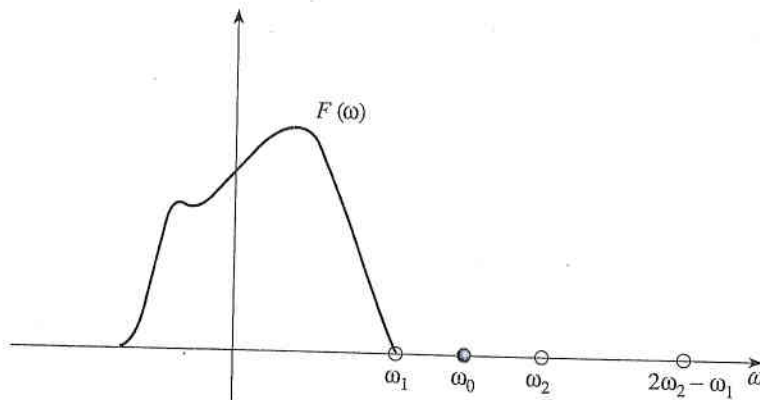
$$F(\omega) = 0 \quad \text{se } |\omega| > \omega_1$$

per qualche  $\omega_1 > 0$ ; l'estremo inferiore di tali  $\omega_1$  si dice **ampiezza della banda** (si veda Figura 20.9). Il seguente risultato, di forte impatto applicativo, mostra che un segnale a banda limitata è interamente determinato dai suoi "campionamenti"  $f(nL)$ .

Segnale a banda limitata



Figura 20.9

**TEOREMA 20.10** Teorema del campionamento

Sia  $f(x)$  un segnale a banda limitata di ampiezza  $\omega_1$ , assolutamente integrabile e continuo in  $\mathbb{R}$ , e sia  $F = \mathcal{F}[f]$ . Se

$$\omega_2 > \omega_1, \quad L = \frac{\pi}{\omega_2}, \quad \omega_0 \in [\omega_1, 2\omega_2 - \omega_1]$$

allora

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nL) \frac{\sin(\omega_0(x - nL))}{\omega_2(x - nL)}.$$

Di solito si sceglie  $\omega_0 = \omega_2$  e in tal caso

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nL) \frac{\sin(\omega_0(x - nL))}{\omega_0(x - nL)}.$$

Diamo solo un cenno di dimostrazione. Sviluppando  $F$  in serie di Fourier in  $[-\omega_2, \omega_2]$ , si ottiene:

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-inL\omega} \quad \text{se } |\omega| \leq \omega_2,$$

dove, per la (20.9),

$$A_n = \frac{1}{2\omega_2} \int_{-\omega_2}^{\omega_2} F(\omega) e^{inL\omega} d\omega = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{inL\omega} d\omega = L\mathcal{F}^{-1}[F](nL) = Lf(nL).$$

Si noti che la serie di Fourier è il prolungamento periodico (di periodo  $2\omega_2$ ) di  $F(\omega)$  a  $\mathbb{R}$ , quindi si annulla nell'intervallo  $(\omega_1, 2\omega_2 - \omega_1)$ . In particolare, per la scelta di  $\omega_0$ ,

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Lf(nL) e^{-inL\omega} \mathbf{1}_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega) \quad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R}.$$

Per la (20.20) e per la proprietà 3 della Tabella 20.1,

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\sin(\omega_0(x - nL))}{x - nL} \right] = \pi \mathbf{1}_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega) e^{-inL\omega}. \quad (20.23)$$

Quindi, formalmente, il risultato segue scambiando le operazioni di serie e trasformata e antitrasformando:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{Lf(nL)}{\pi} \frac{\sin(\omega_0(x-nL))}{x-nL}.$$

### 20.5.1 Delta di Dirac e altre funzioni singolari

Ricordiamo la *delta di Dirac* introdotta nel capitolo precedente, la sua interpretazione come segnale istantaneo “di massa 1” e la notazione formale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0 - x)f(x) dx := f(x_0) \quad \text{se } f \in C(\mathbb{R})$$

anche se  $\delta(x)$  non è una funzione. In analogia con l'introduzione della trasformata di Laplace della delta di Dirac (si vedano le (19.33) e (19.34)), si definiscono per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] := \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega x_0} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega x_0}] := \delta(x - x_0). \quad (20.24)$$

Analogamente si definiscono

$$\mathcal{F}[e^{i\omega_0 x}] := 2\pi\delta(\omega - \omega_0), \quad \mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega - \omega_0)] := \frac{1}{2\pi} e^{i\omega_0 x} \quad (20.25)$$

(si noti che  $e^{i\omega_0 x}$  non è trasformabile secondo Fourier, quindi non si può applicare direttamente la definizione di trasformata di Fourier). In particolare, scegliendo  $x_0 = 0$  nella (20.24) e  $\omega_0 = 0$  nella (20.25) si ottiene

$$\mathcal{F}[\delta] := 1, \quad \mathcal{F}[1] := 2\pi\delta(\omega). \quad (20.26)$$

#### ESEMPIO 20.9

Ragionando come nell'Esempio 20.7 e utilizzando la (20.24) si ottiene la trasformata di Fourier di un **impulso replicato**  $2N$  volte:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-N}^N \delta(x - nx_0)\right] = \sum_{n=-N}^N e^{-inx_0\omega} = \frac{\sin(\omega(N+1/2)x_0)}{\sin(\omega x_0/2)}. \quad (20.27)$$

Analogamente

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{n=-N}^N \delta(\omega - n\omega_0)\right] = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega_0 x} = \frac{\sin(\omega_0(N+1/2)x)}{2\pi \sin(\omega_0 x/2)}. \quad (20.28)$$

#### ESEMPIO 20.10

Sia  $S_N$  la serie di Fourier troncata associata a una funzione periodica di periodo  $L > 0$  e continua a tratti. Sia  $F_0(\omega)$  la trasformata di Fourier della restrizione di  $f$  all'intervallo  $[-L/2, L/2]$ ,  $f\mathbf{1}_{[-L/2, L/2]}$  e sia  $\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$ . Per il Teorema 20.9

$$\mathcal{F}[S_N] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-N}^N \frac{\omega_0}{2\pi} F_0(n\omega_0)e^{in\omega_0 x}\right] = \sum_{n=-N}^N \omega_0 F_0(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0).$$

Poiché “ $\delta(\omega - n\omega_0) = 0$  se  $\omega \neq n\omega_0$ ”, si può scrivere

$$\mathcal{F}[S_N] = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-N}^N \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{\omega_0}{2\pi} \mathcal{F}[f_0] \mathcal{F}\left[\sum_{n=-N}^N e^{in\omega_0 x}\right]$$

e quindi, per la proprietà del prodotto di convoluzione,

$$\mathcal{F}[S_N] = \frac{\omega_0}{2\pi} \mathcal{F} \left[ f_0(x) * \left( \sum_{n=-N}^N e^{in\omega_0 x} \right) \right].$$

Antitrasformando ritroviamo, almeno formalmente, la parte del Teorema 20.5 che riguarda  $S_N(x)$ :

$$S_N(x) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(y) k_N(x-y) dy \quad \text{con} \quad k_N(x) = \frac{\sin(\omega_0(N+1/2)x)}{\sin(\omega_0 x/2)}.$$

Oltre alla precedente estensione del concetto di trasformata, è utile segnalarne un'altra, che consente di definire la trasformata di Fourier della funzione di Heaviside. La funzione  $f(x) = 1/x$  non è trasformabile secondo Fourier, perché  $\cos(\omega x)/x$  non è integrabile in senso improprio in  $x = 0$ . Osservando che tale funzione è dispari, si può però dar senso all'integrale come valore principale per  $x \rightarrow 0^\pm$  e per  $x \rightarrow \pm\infty$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-i\omega x} dx &:= \lim_{r \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right) \frac{\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)}{x} dx \\ &= -2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x} dx = -2i \operatorname{sgn} \omega \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = -i\pi \operatorname{sgn} \omega. \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si è utilizzato la (18.35)). Perciò definiamo

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{x} \right] := -i\pi \operatorname{sgn} \omega \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}[\operatorname{sgn} \omega] = \frac{i}{\pi x}.$$

Procedendo allo stesso modo si ottiene

$$\frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{i\omega} e^{i\omega x} d\omega = \lim_{r \rightarrow 0^+, R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right) \frac{\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)}{i\pi\omega} d\omega = \operatorname{sgn} x$$

perciò si definisce

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{2}{i\omega} \right] := \operatorname{sgn} x \quad \text{e} \quad \mathcal{F}[\operatorname{sgn} x] = \frac{2}{i\omega}.$$

Osservando che  $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x)$  e che  $\mathcal{F} \left[ \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} x) \right] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$ , si definisce la *trasformata della funzione di Heaviside* come

$$\mathcal{F}[H(x)] := \frac{1}{2} \mathcal{F}[1 + \operatorname{sgn} x] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.$$

Si noti che né  $\operatorname{sgn} x$  né  $H(x)$  sono trasformabili secondo la Definizione 20.6. Formalmente la proprietà 6 della Tabella 20.1 è ancora soddisfatta nel caso di  $H(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}[H'(x)] &= \mathcal{F}[\delta(x)] = 1 \\ i\omega \mathcal{F}[H(x)] &= i\pi\omega\delta(\omega) + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \implies \mathcal{F}[H'(x)] = i\omega \mathcal{F}[H(x)].$$



**ESERCIZIO 20.7**

Trasformata di Fourier di un segnale periodico

Sia  $f$  continua a tratti e periodica di periodo  $L$ , con  $f(x) = f_0(x)$  per  $x \in [-L/2, L/2]$ . Procedendo come nell'Esempio 20.10, verificare formalmente che

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad \text{dove } \omega_0 = \frac{2\pi}{L} \text{ e } F_0(\omega) = \mathcal{F}[f_0].$$

**ESERCIZIO 20.8**

Trasformata di Fourier del treno di impulsi

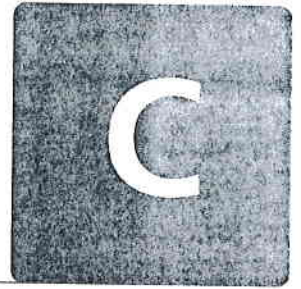
Un impulso replicato infinite volte, usualmente detto **treno di impulsi**, è un segnale del tipo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL).$$

Utilizzando l'esercizio precedente, ricavarne formalmente la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL)\right] = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{L}\right).$$

# Crediti



## Capitolo 5

p. 145 (sinistra) © 2008-2009 Soapbubble.dk.

## Capitolo 10

p. 302 (sinistra) Image courtesy of USGS National Center for EROS and NASA Landsat Project Science Office; p. 302 (destra) Department of Defense; p. 303 riprodotta da R.A. Fosbinder, C.A. Kelsey, *Essentials of Radiologic Science*, © 2002 The McGraw-Hill Companies Inc. New York.

## Capitolo 13

p. 384 (alto) cc by-sa Namazu-tron; p. 384 (basso) cc by-sa William Thielicke.

## Capitolo 14

p. 413 Valor, Enric, Vicente Meneu, Vicente Caselles, 2001: Daily Air Temperature and Electricity Load in Spain. *J. Appl. Meteor.*, 40, 14131421. doi: 10.1175/1520-0450(2001)040<1413:DATAEL>2.0.CO;2

## Capitolo 15

p. 453 2002-2010 Gershon Elber.