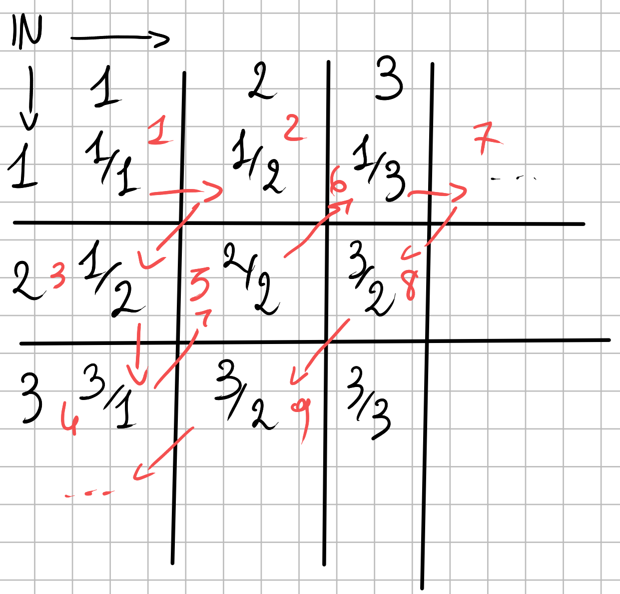
DIMOSTRAZIONI PRE-ESAME

numerazione $\mathbb{Q}$:



$\mathbb{R}$: non numerabile

$0,\ r_{01}\ \ r_{02}\ \ r_{03}\ \ \ldots$

$1,\ r_{11}\ \ r_{12}\ \ r_{13}\ \ \ldots$

$2,\ r_{21}\ \ \ldots$

...

Definisco il numero a come $r_{01}+1$ $r_{12}+1$ in modo che sia diverso da ogni altro --

Dis-equazione di Bernoulli (extra)

$\forall x > -1,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

per ipotesi ho $x > -1$ (H)

- caso $n=0 \Rightarrow 1 \geq 1$ vero
- caso induttivo $P_n:\ (1+x)^n \geq 1+nx$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

$$\geq 1 + \underbrace{nx^2}_{x \geq 0 \text{ per } H} + nx + x$$

$$\Rightarrow 1+nx^2+nx+x \geq 1+nx+x$$

ottenendo $(1+x)^{n+1} \geq 1+x(n+1)$

che corrisponde proprio a P_{n+1}, abbiamo quindi dimostrato il passo induttivo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$n=0$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} a^{n-i}\, b^i \binom{n}{i}$$

Dim (extra)

Caso $n=0$

$$(a+b)^0 = \sum_{i=0}^{0} a^{0-i}\, b^i \binom{0}{0} = a^0 b^0 = 1$$

caso n-esimo:

Per ipotesi induttiva sappiamo

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-i-1}\, b^{n-i}$$

Dim che $P_{n-1} \Rightarrow P_n$

$$(a+b)(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-i-1}\, b^{n-i}\,(a+b)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-i}\, b^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-1-i}\, b^{i+1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} a^{n-1-i}\, b^{i+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} a^{n-1-i}\, b^{i+1}$$

$$= a^n + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right] a^{n-1-i}\, b^{i+1} + b^n$$

$$= a^n + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right]} a^{n-1-i}\, b^{i+1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-\cancel{1}-i\cancel{+1})!\,(i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-i)!\,i!}$$

$$= (n-1)! \left[\frac{1}{\underbrace{(n-i)!}_{(n-i-1)!\,(n-k)}\,(i-1)!} + \frac{1}{(n-1-i)!\,\underbrace{i!}_{i\,(i-1)!}} \right]$$

$$= (n-1)!$$

$$= (n-1)! \,\frac{\cancel{i} + n \cancel{- i}}{i\,(i-1)!\,(n-i)\,(n-i-1)!} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

$$= \binom{n}{i}$$

Riscrivo l'espressione come

$$= a_n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a^i\, b^{n-i} + b_n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \longrightarrow P_n$$

Teorema unicità del limite

$\forall (a_n)_n, \exists! \, l$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} (a_n) = l$

Dim. (per assurdo)

Ipotizziamo $\exists l_1, l_2$ t.c. $l_1 \neq l_2$ e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l_1 \quad e \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = l_2$$

Per def di limite

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists k \in \mathbb{N}, \ |a_n - l_1| < \varepsilon \quad \forall n > k$

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists k \in \mathbb{N}, \ |a_n - l_2| < \varepsilon \quad \forall n > k$

$$|a_n - l_1| < \varepsilon \quad e \quad |a_n - l_2| < \varepsilon$$

$$|a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

- applichiamo la disuguaglianza triangolare:
  $|x+y| \leq |x| + |y|$
- sapendo che $|a_n - l_2| = |l_2 - a_n|$

$|\cancel{a_n} - l_1 - \cancel{a_n} + l_2| < 2\varepsilon$

$|l_2 - l_1| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

l'unica affermazione che rende sempre vera l'affermazione è con $l_2 = l_1$

per assurdo verificato.

Teorema Degli zeri

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Se $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c$ t.c. $f(c) = 0$

Dim

assumiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (H)

$(a_n)_n$, $(b_n)_n$ $a_0 = a$

costruisco le successioni t.c. $b_0 = b$

(I) $f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) = 0 \Rightarrow c = \frac{a_i + b_i}{2}$

(II) $f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right) > 0$ $b_{i+1} = f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)$

$a_{i+1} = a_i$

(III) $<$ $a_{i+1} = f\left(\frac{a_i + b_i}{2}\right)$

$b_{i+1} = b_i$

prop. sulla successione

(1) $a_{i+1} \geq a_i$
$b_{i+i} \leq b_i$

(2) $a_i \leq b_i$
$\forall i \in \mathbb{N}$

(3) $f(a_i) \leq 0$ $\forall_i \in \mathbb{N}$
$f(b_i) \geq 0$

(4) $b_i - a_i = \frac{b_{i-1} - a_{i-1}}{2}$

Dim $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$

$\to$ Def $\lim_{n \to +\infty} a_n = \alpha$

$b_n = \beta$

LEMMA

① se $a_n \overset{\leq}{\geq} 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ con $\ell \overset{\leq}{\geq} 0$

DIM

assumendo $\ell > 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > k$

Def $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$

$|a_n - \ell| < \overset{>0}{\ell}/2 \to -\ell/2 < a_n - \ell < \ell/2$

$\ell/2 < \underbrace{a_n}_{\geq 0} < 3/2\, \ell$

② $f : A \to \mathbb{R} \cap D(A)$

f continua $\Rightarrow \forall (x_n)_n \subseteq A : x_n \to \bar{x} \to f(x_n) \xrightarrow{x \to +\infty} f(\bar{x})$

CONTINUO DIM

ⓐ $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2^{n-1}}$

$b_n - a_n \xrightarrow{n \to +\infty} \alpha - \beta$

$\frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

e quindi $\alpha = \beta$

ⓑ $\underbrace{f(a_n)}_{f(a_n) \leq 0} = f(c)$

$f(a_n) \leq 0$ per lemma 1 e 2 $\Rightarrow f(c) \leq 0$

ⓒ speculare a ⓑ ma $f(b_n) = f(c)$

$\Rightarrow \begin{cases} f(c) \leq 0 \\ f(c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(c) = 0$

Teorema di Weistrass

$f : [a, b]$ e continua

$\exists M := \max f([a,b])$
$\exists m := \min f([a,b])$ e $f([a,b]) \subseteq [m, M]$

T. Weistrass v.2 (+ Teorema $\emptyset$)

$f : [a, b]$ e continua

$\exists M := \max f([a,b])$
$\exists m := \min f([a,b])$ e $f([a,b]) = [m, M]$

T. fermat

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in]a,b[$

Se x_0 e' max o min $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Dim

Assumo x_0 max relativo $\quad \forall x \in [a,b],\ x_0 \geq f(x)$

$\exists r : |x - x_0| < r$

$-r < x - x_0 < r$

ⓐ $-r < x - x_0$

Deriv nel punto

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \to \exists_- f'(x_0) \geq 0$$

ⓑ $x - x_0 < r$

$$\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\text{MAX } \leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \longrightarrow \exists_+ \ f'(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists_+ \ f'(x) \geq 0 \\ \exists_- \ f'(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

T. rolle

$f : [a,b] \rightarrow$ continua e derivabile in $]a,b[$

se $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c$ t.c. $f'(c) = 0$

DIM

Assumo ci sia x_0 max e x_1 min

$\forall x \in [a,b]$ $\quad f(x_0) \geq f(x)$
$\quad f(x_1) \leq f_1(x)$

2 casi : 1° - x_0 e x_1 coincidono sugli estremi

$$f(x_0) = f(a) = f(x_1) = f(b)$$

$$f(x_0) \leq f(a) \leq f(x_1)$$

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

2° - $\{x_1, x_0\} \in]a,b[$

x_0 è max assoluto $\Rightarrow$ max relativo
$\rightarrow f'(x) = 0$

x_1 speculare

T. LAGRANGE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont e deriv in $]a,b[$

$\exists c$ t.c. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

in $]a,b[$

DIM.

Uso una f d'appoggio $g : [a,b]$ cont e deriv

def $g(x) = f(x) + Kx$

$\Rightarrow g(a) = f(a) + ak$ e $g(b) = f(b) + bk$

pongo $g(a) = g(b)$ e cerco k

$f(a) - f(b) = -ak + bk$
$(b-a)k$

$\dfrac{f(a) - f(b)}{b-a} = K$

per Rolle $\exists c$ t.c. $g'(c) = 0$

$f'(c) + K = 0 \Rightarrow f'(c) = -K$

$= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ cvd

T. Cauchy

$g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont, $]a,b[$ deriv

$g'(c) \neq \emptyset \ \forall c \in]a,b[$

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$

Dim
uso sempre una fun d'appoggio $h(x) = f(x) + k\,g(x)$

$h(a) = f(a) + k\,g(a)$ e $h(b) = f(b) + k\,g(b)$

trovo K ponendo $h(a) = h(b)$

$$\Rightarrow K = \frac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)}$$

$\Rightarrow$ applico Rolle

$\exists c$ tc $h'(x) = 0$

$$f'(x) + k\,g'(x) = 0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Teorema

$f\ ]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile

I | $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \forall x \in]a,b[$
f e' crescente in $]a,b[$

II | $f'(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]a,b[$
$\Downarrow$
f e' strett cresc.

I $\Rightarrow$) Siano $x_1, x_2 \in]a,b[$
con $x_1 < x_2$, applico Lagrange

$$\exists c \text{ tc } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ $f(x_2) > f(x_1)$ cvd

$\Leftarrow$) Siano $x_1, x_2 \in]a,b[$ t.c. $x_1 < x_2$ e $f(x_1) \leq f(x_2)$
Allora per Lagrange ho
$\exists x \in]a,b[$

$$\text{t.c. } f'(x) = \frac{\overbrace{f(x_2) - f(x_1)}^{\geq 0}}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} \geq 0$$

(II) ugual al primo implica

Teorema

$I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ $f: I \to \mathbb{R}$

f e' derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ e' continua in x_0

DIM

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = 0$$ Per def di derivata

T. HOPITAL

$h: A \to \mathbb{R}$ $\bar{x} \in D(A)$

$\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$$\lim_{x \to \bar{x}^-} h(x) = \ell \iff \begin{cases} \forall (x_n) \subseteq A, \ x_n < \bar{x} \ \forall n \\ \text{t.c. } x_n \to \bar{x} \\ h(x_n) \to \ell \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} h(x) = \ell \iff \begin{cases} \forall (x_n) \subseteq A, \ x_n < \bar{x} \ \forall n \\ x_n \to \bar{x} \\ h(x_n) \to \ell \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} h(x) \iff \forall (x_n) \subseteq A$ $x_n \neq \bar{x}$ t.c. $x_n \to \bar{x}$

$\Rightarrow h(x_n) \to \ell$

Teorema

$f, g: I \to \mathbb{R}$ cont e derivabile in $I \setminus \{\bar{x}\}$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x$

$\exists \lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}, +\infty, -\infty$ $\boxed{f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

DIM

① $\exists \lim_{x \to \bar{x}^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ ② $\exists \lim_{x \to \bar{x}^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

① $\forall (x_n)_n \subseteq I$ t.c. $\bar{x} > x$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \ell$

dopo lemma 1:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{g(x_n) - g(\bar{x})}$$

applichiamo Cauchy

$\exists c \in]\bar{x}, x_0[$ $\frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{g(x_n) - g(\bar{x})} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \ell$ $\bar{x} < c < x_0$, $\bar{x} \xrightarrow{n \to +\infty} \bar{x}$, $x_0 \xrightarrow{n \to +\infty} \bar{x}$

Sviluppi di Taylor

Data $f: D(A) \to \mathbb{R}$ $D(A) =]a, b[$

ove f è derivabile (e cont) in $D(A)$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

quindi $\lim_{x \to 0} f(x) - f(0) = 0$

$\underbrace{f(x)}_{\text{infinitesimo}} - f(0) = o(1)$

OSS
un generico k non è la migliore approssimazione

I. $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x)$

$\Rightarrow \lim f(x) - f(0) = x f'(x)$

$\Rightarrow \lim f(x) - f(0) - x f'(x) = 0$ INF

$f(x) = f(0) + x f'(x) + o(x)$

II.

$f(x) = f(0) + x f'(0) + a x^2 + o(x^2)$

$f(x) - f(0) - x f'(0) - a x^2 = o(x^2)$

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - x f'(0) - a x^2}{x^2} = 0$

$\overset{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - 2ax}{2x} = 0$

$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} - a = 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{2} f''(0)$

T. Peano

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile

Se $\exists\ f', \dots f^n$ allora la migliore approx al grado n della funzione e' definita dal polinomio di Taylor al grado n

$$\Rightarrow T_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} f^i(\bar{x})(x-\bar{x})^i$$

$$\Rightarrow f(x) = T_n + o\left((x-\bar{x})^i\right)$$

Memo Dimostrazioni

nome	Memos
n disp $\Rightarrow n^2$ disp	$(2K+1)^2$ quadrato n dispari
binomio Newton	Dim induttiva con successioni
T. pitagora	costruzione quadrato con 4 triangoli rettangoli
se n non e' quad perf $\Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$	Dim contro-nominale in cui $n = \frac{m}{q}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$	simile a quella sopra, adattabile a ogni num primo
Numerabilita' di $\mathbb{Q}$	bisciolina matrice di divisore e dividendo

- (non) Numerabilità di $\mathbb{R}$

matrice numeri, ne creo uno come comb. diversa da tutti gli altri

- Unicità Radice

lemmi
$x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$
$x^2 \geq y^2 \Rightarrow x \geq y$
$x^2 > y \Rightarrow (x+\varepsilon)^2 > y$

Dim
$A = \{c \in \mathbb{R} \mid c \geq 0, c^2 \leq a\}$
sfrutto def di ins. superiormente limitato

- Permanenza segno

Pongo $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$
e sfrutto definiz. di limite

- T. dei confronto

NO DIM

- lim fun goniometriche

$\operatorname{sen} x \to$ confronto $\overset{x \to 0}{0}$ e x

$\cos x \to \cos\left(2 \cdot \frac{t}{2}\right)$
$= 1 - 2\operatorname{sen}^2(t/2)$

- lim notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$[0, \pi/2]$

devo provare che
$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x$
per $x \to 0$ $\Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{1}{\cos x}$

- Area cerchio generalizzata

Divido il cerchio in triangoli, applico le formule trig. in relazione al raggio
e genero una successione con $n \to +\infty$ triangoli

- T. degli zeri

lemmi

① $(b_n)_n \geq 0$

$\Rightarrow \lim b_n \geq 0$

② f cont $\Rightarrow$

$(x_n)_n \qquad n \to +\infty$

$x_n \to \bar{x} \Rightarrow f(x_n) = f(\bar{x})$

dim iterativa (ricerca binaria)

provo poi che

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \emptyset$

- T weistrass v1 e v2

NO DIM

- T continuità deriv

Def fun continua

$\to \cdot \frac{(x - \bar{x})}{(x - \bar{x})}$

- T. Fermat

Def max, min relativo

$\Rightarrow$ Interno, def derivata

se $f' \geq 0$ e $\leq 0 \Rightarrow\ ' = 0$

- T. Rolle

Prendo 2 punti [max, min]

2 casi

Ⓐ estremi $\Rightarrow f(x) = k$

Ⓑ in mezzo, T. Fermat

- T. Lagrange

fun d'appoggio

$h(x) = f(x) + k \cdot \begin{cases} x \\ g(x) \end{cases}$

trovo k e applico Rolle

- T cauchy

- T. Hopital

lemmi

$\exists \lim_{x \to \bar{x}^{\pm}} f(x) = l \Rightarrow$

successioni da dx e sx

e lim a succ. in $\bar{x} \neq x$

Dim

per ipotesi

$f(\bar{x}) = 0$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{g(x_n) - g(\bar{x})}$$

T.

- Peano

risolvo per i vari gradi

$\rightarrow f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x)$

$\rightarrow f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + o(x^2)$

$= f(0) + x f'(0) + a x^2 + o(x^2)$