Analisi matematica - modulo 2

Matteo Lombardi

Indice

1.0 - Integrali
- 1.1 - Somma di Riemann
- 1.2 - Integrale
- 1.3 - Funzioni integrali e primitive elementari
- 1.4 - Integrazione per parti, cambio variabile e integrali generalizzati

2.0 - Spazio euclideo
- 2.1 - Operazioni nello spazio euclideo
- 2.2 - Vettori
- 2.3 - Successioni e funzioni nello spazio euclideo

3.0 - Derivate e differenziabilità
- 3.0 - Derivate parziali
- 3.1 - Differenziabilità
- 3.2 - Derivate direzionali
- 3.3 - Direzione di massima crescita
- 3.4 - Curve: velocità, derivate e insiemi di livello

4.0 - Punti critici e forme quadratiche
- 4.1 - Tipologie di punti critici
- 4.2 - Derivate parziali seconde e forme quadratiche
- 4.3 - Teorema di Taylor
- 4.4 - Teorema di classificazione dei punti critici

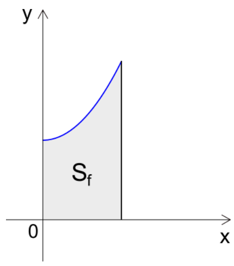
5.0 - Integrale doppio
- 5.1 - Insiemi semplici
- 5.2 - Integrale doppio

6.0 - Cambio di variabile

▼ 1.0 - Integrali

Gli **integrali** sono utili per calcolare l'**area delle figure curvilinee**.

Con essi è infatti possibile determinare l'area del **sottografico** di una certa funzione curvilinea. Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $\forall\ x \in [a, b] . f(x) \geq 0$, il suo sottografico corrisponde a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$:

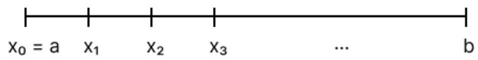


Sottografico di una funzione.

▼ 1.1 - Somma di Riemann

Scomposizione di un intervallo

Dato un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e un numero $n \in \mathbb{N}$, divido $[a, b]$ in n parti uguali:



Ogni k-esima x dell'intervallo è ricavabile tramite: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

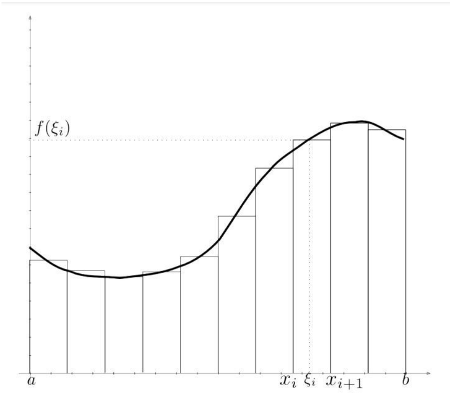
Per ogni parte dell'intervallo scelgo un suo punto interno $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Somma di Riemann

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, definiamo la **somma di Riemann** come segue:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)h = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\frac{b-a}{n}$$

Nota: S_n **dipende** dalla scelta dei vari c_k, la quale è arbitraria.



Somma di Riemann.

▼ **1.2 - Integrale**

> Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora esiste finito il $\lim_{n\to\infty} S_n$ (non dipende dalla scelta dei punti c_k). Si è soliti scrivere tale limite $\lim_{n\to\infty} f(x)$ come $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$ e si dice che f è **integrabile**.

Osservazioni

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.
- L'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero e indica l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Proprietà dell'integrale

1. **Linearità**

   f, g continue su $[a, b]$. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Additività**

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile.

   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ vale:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

   I reali a, b e c possono trovarsi in qualunque posizione, non devono per forza essere nell'ordine $a < b < c$.

3. **Monotonia**

   f, g continue su $[a, b]$.

$$f(x) \leq g(c) \quad \forall\ x \in [a, b] \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

4. **Convenzione**

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Teorema della media integrale

Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora $\exists\ c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

Dimostrazione

Siccome f è continua in $[a, b]$, è possibile utilizzare il teorema di Weierstrass in tale intervallo e affermare che $\exists\ x_1, x_2$ punti di minimo e massimo in $[a, b]$.

Per definizione di punti di minimo e massimo sappiamo che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\ x \in [a, b]$. Per la proprietà di monotonia dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x_1)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b f(x_2)\, dx \\ \implies f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq f(x_2)(b-a) \\ \implies f(x_1) \leq \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b-a} \leq f(x_2) \end{aligned}$$

Per il teorema dei valori intermedi:

$$\exists\ c \in [a, b] \text{ tale che } f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$$

qed

Primitiva di una funzione

Sia $f:]a, b[\to \mathbb{R}$, la funzione $F:]a, b[\to \mathbb{R}$ si dice **primitiva** di f su $]a, b[$ se vale:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\ x \in]a, b[$$

Proposizioni

- Se F è la primitiva di f su $]a, b[$, allora anche $H:]a, b[\to \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(x) + c$ è primitiva di $f \quad \forall\ c \in \mathbb{R}$.

  Le primitive di una funzione f sono dunque infinite, e sono tutte quelle che assumono una forma riconducibile a $F(x) + c$, dove c è uno scalare.

- Siano F e G primitive di f su $]a, b[$. Allora:

$$\exists\ k \in \mathbb{R}, F(x) - G(x) = k \quad \forall\ x \in \left]a, b\right[$$

Dimostrazione

Sia $H : \left]a, b\right[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che $H(x) = F(x) - G(x)$.

Calcoliamo la derivata di $H(x)$, ovvero $H'(x) = F'(x) - G'(x)$, che per definizione di primitiva diventa $H'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Siccome la derivata di $H(x) = 0 \quad \forall\ x \in \left]a, b\right[$, allora $H(x)$ è costante in $\left]a, b\right[$, dunque $H(x) = F(x) - G(x) = k \quad \forall\ x \in \left]a, b\right[$.

qed

▼ **1.3 - Funzioni integrali e primitive elementari**

Funzione integrale

Sia $f : \left]a_0, b_0\right[\rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $c \in \left]a_0, b_0\right[$, la **funzione integrale di punto base** c è la funzione $I_c : \left]a_0, b_0\right[\rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)\ dt$$

Osservazioni

- La funzione integrale rappresenta l'area sottesa al grafico di f da un certo punto base c fino a x.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f continua in $\left]a, b\right[$ e sia $c \in \left]a, b\right[$, allora:

$$I'_c(x) = f(x) \quad \forall\ x \in \left]a, b\right[$$

Dimostrazione

Bisogna dimostrare che $\lim_{h \to o} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$.

Sviluppiamo il numeratore del limite utilizzando la definizione di funzione integrale $I_c(x+h) - I_c(x) = \int_c^{x+h} f(t)\ dt - \int_c^x f(t)\ dt$.

Utilizziamo le proprietà dell'integrale $\int_c^{x+h} f(t)\ dt - \int_c^x f(t)\ dt = \int_x^{x+h} f(t)\ dt$ e abbiamo dimostrato che $\lim_{h \to o} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)}{h}\ dt$.

Per il teorema della media integrale:

$$\exists\ c \in \left]x, x+h\right[\text{ tale che } \frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)$$

Notiamo che $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ è equivalente al contenuto del limite da dimostrare, dunque ci basta dimostrare che $\lim_{h \to o} f(c) = f(x)$. Visto che $c \in \left]x, x+h\right[$, se $h \to 0$ allora $c \to x$, quindi $\lim_{h \to o} f(c) = f(x)$.

qed.

Teorema fondamentale del calcolo integrale 2 - Formula di Torricelli

Sia f continua su $]a, b[$ e sia F la primitiva di f su $]a, b[$, allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \forall\, x \in\,]a, b[$$

Dimostrazione

Sia $c \in\,]a, b[$. Sappiamo per ipotesi che $F(x)$ e $I_c(x)$ sono due primitive di $f(x)$ in $]a, b[$, dunque $F(x) - I_c(x) = k \quad \forall\, x \in\,]a, b[\implies F(x) = I_c(x) + k \quad \forall\, x \in\,]a, b[$.

Partendo da $F(b) - F(a)$ e passando per la definizione di funzione integrale $I_c(x)$ dimostriamo che $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$:

$$\begin{gathered} F(b) - F(a) = I_c(b) + k - I_c(a) - k = I_c(b) - I_c(a) \\ = \int_c^b f(x)\,dx - \int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx \\ = \int_a^b f(x)\,dx \end{gathered}$$

qed.

Primitive elementari

$$\begin{gathered} \int k \to kx \\ \int x^\alpha, \alpha \neq -1 \to \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \int x^{-1} \to \ln|x| \\ \int a^x \to \frac{a^x}{\ln a} \ [\int e^x \to e^x] \\ \int \sin x \to -\cos x \\ \int \cos x \to \sin x \\ \int 1 + \tan^2 x = \int \frac{1}{\cos^2 x} \to \tan x \\ \int 1 + \cot^2 x = \int \frac{1}{\sin^2 x} \to -\cot x \\ \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \arccos x \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \arcsin x \\ \int \frac{1}{1+x^2} \to \operatorname{arctg} x \\ \int f'(g(x))g'(x) \to f(g(x)) \end{gathered}$$

▼ 1.4 - Integrazione per parti, cambio variabile e integrali generalizzati

Integrazione per parti

Per integrare un prodotto può essere talvolta utilizzata la seguente formula di **integrazione per parti**:

$$\int f'(x)g(x)\;dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\;dx$$

Nota: per integrare $\int \sin x\; e^x$ occorre utilizzare due volte la formula di integrazione per parti.

Dimostrazione

$$\begin{gathered} d(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \implies f'(x)g(x) = d(f(x)g(x)) - f(x)g'(x) \\ \implies \int f'(x)g(x) = \int d(f(x)g(x)) - \int f(x)g'(x) \\ \implies \int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \end{gathered}$$

qed.

Formula per il cambio variabile

Siano I, J intervalli aperti, sia $h : I \to J$ una funzione con derivata h' continua su I e $f : J \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $\forall\; \alpha, \beta \in I$ vale:

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\;dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t)\;dt$$

Osservazioni

- Integrali del tipo $\int_a^b g(f(x))f'(x)\;dx$ possono essere risolti sostituendo a $f(x)$ una variabile come z, e visto che $dz = f'(x)\;dx$ possiamo arrivare all'integrale $\int_a^b g'(x)\;dx$. Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale possiamo dunque concludere che $\int_a^b g(f(x))f'(x)\;dx = [g(x)]_a^b$.

Caso particolare: $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$.

Integrali generalizzati

Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è **integrabile in senso generalizzato su** $[a, +\infty[$ se:

$$\exists \lim_{z\to+\infty} \int_a^z f(x)\;dx := \int_a^{+\infty} f(x)\;dx$$

La definizione per $\int_{-\infty}^{a} f(x)\ dx$ è omessa perchè analoga.

Osservazioni

- Se $f(x) \geq 0$ su $[a, +\infty[$ e $\int_a^{+\infty} f(x)$ converge, allora tale integrale esprime l'area del sottografico di $f(x)$ nell'intervallo $[a, +\infty[$.

Esercizio:

▼ Studiare l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \forall p > 0$

- Esponente $1 - p < 0 \implies p > 1$: la prima frazione del limite tende a $+\infty$ e l'integrale diverge, dunque vale $+\infty$.
- Esponente $1 - p > 0 \implies p < 1$: la prima frazione del limite tende a 0 e l'integrale è dunque uguale a $\frac{1}{p-1}$.

Per studiare tale integrale occorre dunque studiare il seguente limite: $\lim_{z\to+\infty} \int_1^z \frac{dx}{x^p}$.

A questo punto il valore dell'integrale dipende dal valore del parametro p in quanto questo determina il valore dell'esponente di z:

- Esponente $p \neq 1$: il limite da valutare è $\lim_{z\to+\infty} [\frac{x^{1-p}}{1-p}]_1^z = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$, il quale dipende a sua volta dal valore dell'esponente di z:
- Esponente $1 - p = 0 \implies p = 1$: il limite da valutare è $\lim_{z\to+\infty} [\ln(x)]_1^z = \lim_{z\to+\infty} \ln(z) - \ln(1)$, dunque l'integrale diverge, ovvero vale $+\infty$.

Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $]a, b]$ se:

$$\exists \lim_{z\to a^+} \int_z^b f(x)\ dx := \int_a^b f(x)\ dx$$

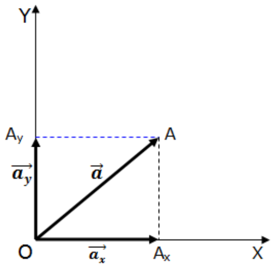
▼ **2.0 - Spazio euclideo**

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ o **spazio euclideo** è definito nel seguente modo:

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

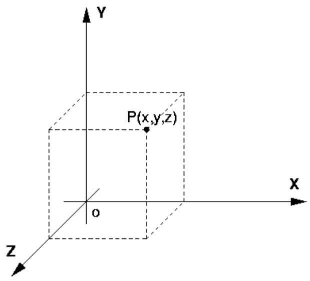
Esempi di spazi euclidei:

- $\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^2$.

- $\mathbb{R}^3$ = spazio ordinario. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.



Visualizzazione grafica di un vettore nello spazio $\mathbb{R}^3$.

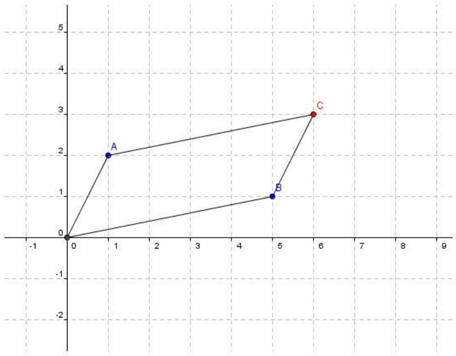
▼ **2.1 - Operazioni nello spazio euclideo**

Somma tra vettori

Dati due vettori $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, definiamo la **somma** tra di essi come:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

La somma tra vettori nello spazio $\mathbb{R}^2$ può essere visualizzata in maniera grafica tramite la regola del parallelogramma:



Regola del parallelogramma.

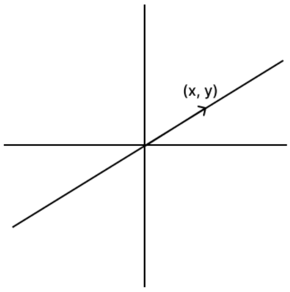
Prodotto con scalare

Dato un vettore $x = (x_1, \dots, x_n)$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, definiamo il prodotto con scalare come:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

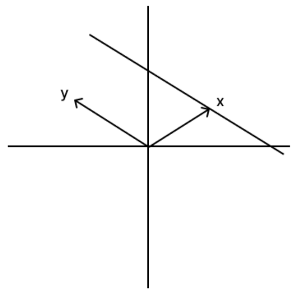
Il prodotto con scalare nello spazio $\mathbb{R}^2$ può essere visualizzato in maniera grafica tramite un cambiamento della lunghezza e/o direzione del vettore di partenza.

Inoltre, se il vettore di partenza è un vettore non nullo, ovvero $x \neq (0, \dots, 0)$, allora l'insieme $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta generata dal vettore x.



Retta generata da un vettore tramite prodotto con scalare.

Se partiamo da due vettori non nulli invece l'insieme $\{x + ty \mid t \in \mathbb{R}\}$ rappresenta la retta passante per x avente direzione e verso del vettore y.

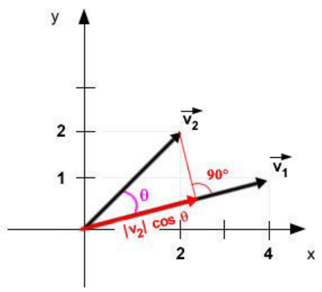


Retta generata dalla somma di un vettore e un prodotto con scalare.

Prodotto scalare euclideo

> Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, definiamo il prodotto scalare euclideo come:
>
> $$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Possiamo visualizzare in maniera grafica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$ come il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori per la lunghezza della componente x dell'altro vettore rispetto al vettore iniziale:



Visualizzazione grafica del prodotto scalare nel piano cartesiano.

Proprietà

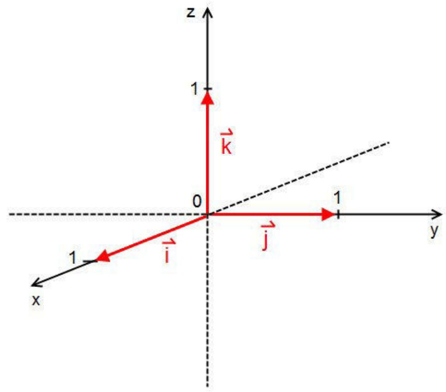
1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e $\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \wedge \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$
   - $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = (0, \dots, 0)$

▼ **2.2 - Vettori**

Vettori standard

In uno spazio vettoriale di dimensione n, ci sono n vettori standard i quali hanno tutte le componenti uguali a zero tranne una, che è uguale a 1:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

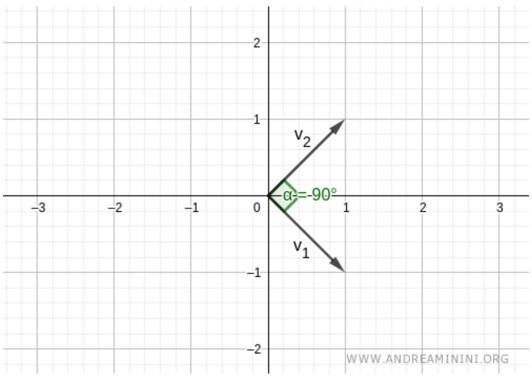


Visualizzazione grafica dei vettori standard dello spazio $\mathbb{R}^3$.

Ortogonalità/Perpendicolarità tra vettori

Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ si dicono **ortogonali/perpendicolari** se $\langle x, y \rangle = 0$.

L'ortogonalità/perpendicolarità può anche essere visualizzata per due vettori $\in \mathbb{R}^2$. Prendiamo infatti ad esempio due vettori $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $y = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Possiamo verificare che tali vettori sono ortogonali calcolando il loro prodotto euclideo $\langle x, y \rangle = -\cos\theta \sin\theta + \sin\theta \cos\theta = 0$. Concludiamo dunque che tutti i vettori che differiscono di un angolo $\frac{\pi}{2}$ sono perpendicolari tra loro.



Visualizzazione grafica di 2 vettori ortoonali tra loro nel piano cartesiano.

Proposizioni

- Il **vettore nullo** è perpendicolare a tutti i vettori, infatti $\sum_{k=1}^{n} 0 y_k = 0$.
- In $\mathbb{R}^n$ i vettori standard $e_1, \dots, e_n$ sono ortogonali tra loro.

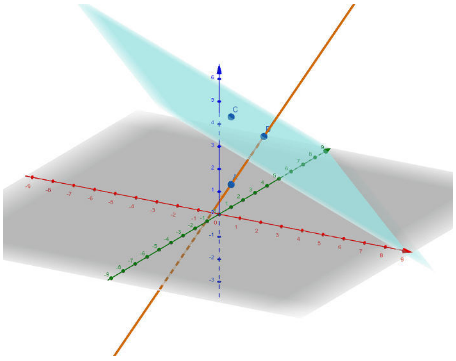
Esercizi:

▼ Dato il vettore $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$, trovare un vettore $x = (x, y, z) \perp v$ diverso dal vettore nullo.

Occorre impostare l'equazione $\langle x, v \rangle = 0$, ovvero $x + 2y + 3z = 0 \implies x = -2y - 3z$.

Abbiamo dunque trovato che l'insieme $\{(-2y - 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ è un insieme di vettori perpendicolari al vettore v.

Osserviamo che l'insieme trovato rappresenta un piano, infatti ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tranne il vettore nullo identifica un piano di vettori perpendicolari ad esso.



Visualizzazione grafica di un piano perpendicolare ad un vettore.

▼ Trovare il rapporto dei parametri m e p affinchè le due rette $y = mx$ e $y = px$ siano ortogonali.

Costruiamo i vettori corrispondenti alle due rette: $(1, m)$ e $(1, p)$.

Impostiamo l'equazione $\langle (1, m), (1, p) \rangle = 1 + mp = 0$, ovvero $p = -\frac{1}{m}$.

Norma euclidea

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo la **norma euclidea** nel seguente modo:

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$$

Nota: le notazioni $||x||$ e $|x|$ sono equivalenti.

Proposizioni

- **Teorema di pitagora generalizzato in $\mathbb{R}^n$**: se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, che è equivalente, in $\mathbb{R}^2$, al quadrato della lunghezza della diagonale del rettangolo che ha come lati i vettori x e y.

  Dimostrazione

  Per ipotesi abbiamo che $\langle x, y \rangle = 0$.

  Dimostriamo la formula del quadrato di un binomio generalizzata sui vettori ($|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$). Sappiamo che $|x + y|^2 = \langle x + y, x + y \rangle$, utilizziamo la proprietà della linearità del primo argomento per ricavarci $\langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle$ e la linearità del secondo argomento per ottenere $\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$, dalla quale, visto che $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, otteniamo infine che $|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Utilizziamo dunque la formula del quadrato di un binomio generalizzata appena dimostrata e per ottenere che $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y\rangle| = |x|^2 + |y|^2 + 0$, qed.

Esempio:

- In $\mathbb{R}^2$, $||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$.

  In $\mathbb{R}^3$, $||(a,b,c)|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

  Notiamo che la norma di un vettore indica la “lunghezza” di tale vettore.

Proprietà

1. $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
2. $|x| \geq 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$
   a. $|x| = 0 \iff x = \langle 0, \dots, 0\rangle$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

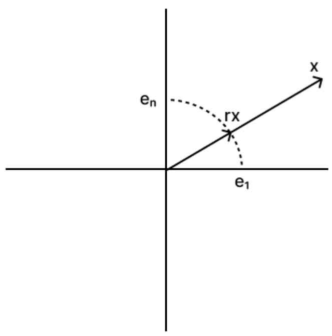
   La possiamo anche leggere come $len(x+y) \geq len(x) + len(y)$, ovvero la **disuguaglianza triangolare**.

Normalizzato di un vettore

Il normalizzato di un vettore consiste in quell’unico vettore positivo multiplo del vettore di partenza che ha come norma 1.

Dobbiamo dunque trovare uno scalare $r > 0$ tale che $|rx| = 1$. Scomponiamo la norma in questo modo $|r||x| = r|x| = 1$ e otteniamo che $r = \frac{1}{|x|}$. Il vettore normalizzato $|rx|$ vale dunque $\frac{x}{|x|}$.

> Dato il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, il **normalizzato** di x è l’unico vettore positivo multiplo di x che ha norma 1, e vale:
>
> $$\frac{x}{|x|}$$



Visualizzazione grafica del normalizzato di un vettore.

Esercizi:

▼ Trovare il normalizzato di $x = (2,3)$

Per trovare il normalizzato di x occorre calcolare il prodotto scalare $\frac{x}{|x|}$.

Calcoliamo dunque $|x|$, il quale è uguale a $|(2,3)| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Infine calcoliamo il normalizzato come $\frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$.

- Trovare il normalizzato di $x = (14, 21, -28)$

  Per semplificarci i calcoli osserviamo che $\frac{x}{|x|} = \frac{\lambda x}{|\lambda x|}$, dunque possiamo calcolare il normalizzato nel seguente modo: $\frac{(14,21,-28)}{|(14,21,-28)|} = \frac{(2,3,-4)}{|(2,3,-4)|} = (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}})$.

Coordinate polari di un vettore

Osserviamo che dato un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^n$ diverso dal vettore nullo, $x = |x|\frac{x}{|x|}$.

Visto che $\frac{x}{|x|}$ è il normalizzato del vettore e ha lunghezza 1, esso, se il vettore x appartiene a $\mathbb{R}^2$, può anche essere scritto in questo modo: $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Utilizziamo inoltre la notazione $r := |x|$ e scriviamo il vettore x come $r(\cos\theta, \sin\theta)$.

> Concludiamo dunque che è possibile descrivere un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^2$ tramite l'utilizzo di due parametri, detti **coordinate polari**: (r, θ).

Esercizi:

- Trovare le coordinate polari del vettore $(0, 3)$

  Per trovare le coordinate polari dobbiamo calcolare il valore dei due parametri r e θ.

  Sappiamo che $r = |(0,3)| = 3$, dunque $x = 3y$, dove y è un vettore che moltiplicato a 3 restituisce x. Troviamo dunque facilmente che $y = (0, 1)$ e, avendo che $\cos\theta = 0$ e $\sin\theta = 1$, otteniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

  Concludiamo dunque che il vettore $(0, 3)$ può essere scritto in coordinate polari come $(3, \frac{\pi}{2})$.

Prodotto scalare in coordinate polari

> Presi due vettori $x = r(\cos\theta, \sin\theta)$ e $y = p(\cos\phi, \sin\phi)$, risulta:
>
> $$\langle x, y\rangle = rp\cos(\theta - \phi) = |x||y|\cos(\theta - \phi)$$
>
> Dove $\theta - \phi$ è l'angolo compreso tra i due vettori.

Disuguaglianza Cauchy-Schwarz

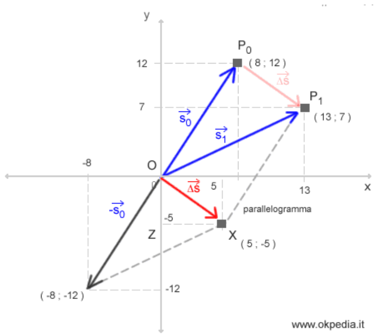
> Per ogni vettore $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la seguente **disuguaglianza**:
>
> $$|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Notiamo che l'uguaglianza vale solo nel caso in cui i due vettori sono dipendenti tra loro, dunque in $\mathbb{R}$ giacciono sulla stessa retta.

Distanza tra due vettori in $\mathbb{R}^n$

La **distanza tra due vettori/punti** in $\mathbb{R}^n$ può essere calcolata tramite la formula:

$$|x - y|$$



Esempio grafico di distanza tra due vettori.

Intorni sferici/palle

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ e uno scalare $r > 0$, possiamo costruire l'insieme intorno sferico/palla con centro x e raggio r in questo modo:

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}$$

▼ **2.3 - Successioni e funzioni nello spazio euclideo**

Successioni in $\mathbb{R}^n$

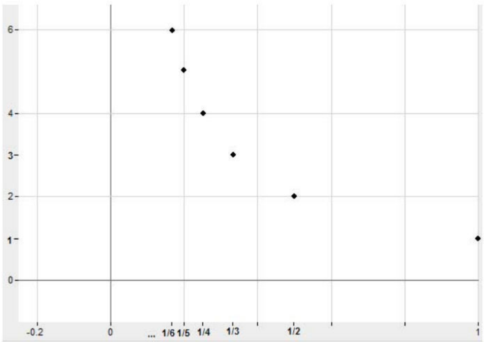
Una **successione** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ è una collezione di n successioni in $\mathbb{R}$:

$$x_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$$

Esempio:

- $(\frac{1}{k}, k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{R}^2$.

  È possibile visualizzare alcuni dei punti che fanno parte di questa successione nella seguente figura:



Successione $(\frac{1}{k}, k)$.

Successione convergente

Data una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ e un vettore $a = (a_1, \dots, a_n)$ si dice che:

$$x_k \underbrace{\to}_{\text{converge}} a \text{ per } k \to \infty \iff \begin{cases} \lim_{k\to\infty} x_k^1 = a_1 \\ \dots \\ \lim_{k\to\infty} x_k^n = a_n \end{cases}$$

Esempi:

- $(\frac{1}{k}, \frac{k+2}{k+1}) \to (0, 1)$, dunque la successione è convergente.
- $((-1)^k, \frac{1}{k})$ non è una successione convergente in quanto $\lim_{k\to\infty}(-1)^k$ è indefinito.

Funzioni

Dati 2 insiemi $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q$ e data una funzione $f : A \to B$, il **grafico** di f può essere definito come l'insieme:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subseteq A \times B$$

Funzioni radiali

Le **funzioni radiali** sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x, y) = g(|(x, y)|) \quad g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Esempi:

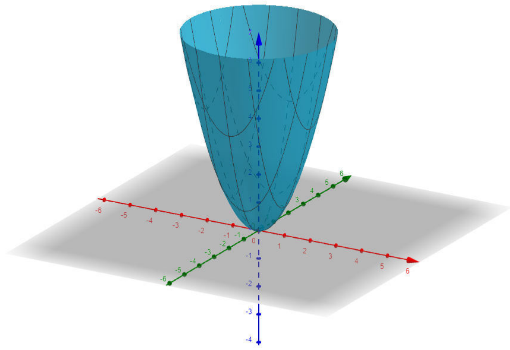
- $f(x, y) = x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$

  Innanzitutto creiamo l'insieme grafico di tale funzione: $Graf(f) = \{(x, y, x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

  Per disegnare tale grafico è utile scrivere (x, y) come $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. In questo modo abbiamo che $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$.

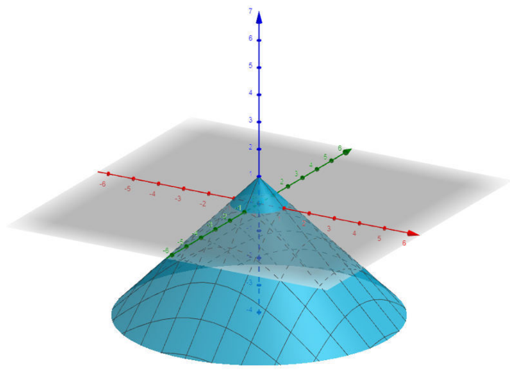
Riscriviamo dunque l'insieme grafico utilizzando le coordinate polari: $Graf(f) = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, r^2) \mid r \geq 0\}$.

Notiamo dunque che l'insieme appena ottenuto descrive il grafico di una parabola nello spazio $\mathbb{R}^3$:



- $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - |(x, y)|$

  Il grafico di tale funzione è il seguente:



Funzioni affini

Le funzioni affini sono funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che si scrivono nella forma:

$$f(x, y) = ax + by + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

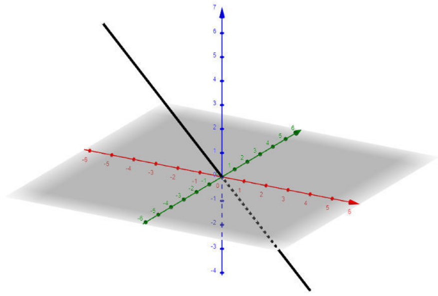
Notiamo che tali funzioni individuano insiemi grafici del tipo $Graf(f) = \{(x, y, ax + by + c) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, i quali descrivono dei piani in $\mathbb{R}^3$.

Esempi:

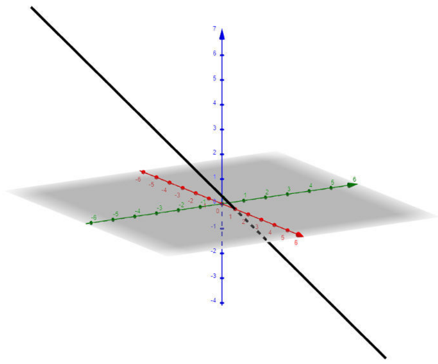
- $f(x, y) = -y$

  Per disegnare il grafico di questa funzione è possibile effettuarne l'intersezione con due piani.

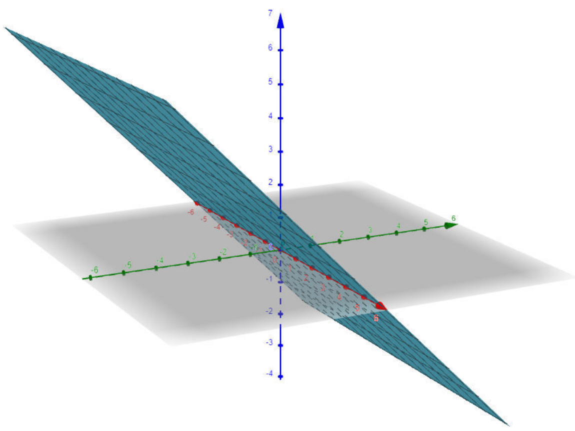
  Intersechiamo con il piano $x = 0$ e otteniamo $Graf(f) \cap x = 0 : \{(0, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Intersechiamo ora con un altro piano, ad esempio $x = 1$, e otteniamo $Graf(f) \cap x = 1$: $\{(1, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, ossia la seguente retta:



Tramite tali intersezioni possiamo dunque prevedere il grafico della funzione data, il quale è il seguente piano:



Funzioni continue

Sia $f : A \to B \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^q)$, f si dice **continua** in $\overline{x}$ se:

$$\forall \ (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_k) \text{ successione in } A, x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \overline{x} \implies f(x_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f(\overline{x})$$

È possibile dimostrare che tale definizione di funzione continua è equivalente alla seguente:

$$\forall \ \epsilon > 0, \ \exists \ \delta \ \text{ t.c. } |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon \quad \forall \ x \in A \cup B(\overline{x}, \delta)$$

Proposizioni

- Tutte le **funzioni elementari** sono continue nei loro domini.

▼ **3.0 - Derivate e differenziabilità**

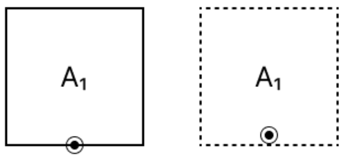
▼ **3.1 - Derivate parziali**

Insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$

> Dato un insieme $A \subseteq R^n$, si dice che A è **aperto** se $\forall\, \overline{x} \in A, \exists\, \epsilon > 0 \mid B(\overline{x}, \epsilon) \subseteq A$, dove $B(\overline{x}, \epsilon)$ è l'intorno sferico di centro $\overline{x}$ e raggio ϵ.

Esempio:

- Nella seguente figura osserviamo due insiemi, uno chiuso e uno aperto:



Notiamo che A_1 è un insieme chiuso in quanto esiste un $\overline{x} \in A_1$ che viola la definizione di insieme aperto, mentre in A_2, preso un qualunque $\overline{x} \in A_2$, questo rispetta la definizione di insieme aperto.

Derivate parziali

Caso $\mathbb{R}^2$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$, poniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + t, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x}, \overline{y} + t) - f(\overline{x}, \overline{y})}{t}$$

Se i due limiti esistono finiti diciamo che f è **derivabile parzialmente** in $(\overline{x}, \overline{y})$.

Inoltre, nel caso in cui f è derivabile parzialmente in $(\overline{x}, \overline{y})$, è possibile definire il **gradiente** di f in $(\overline{x}, \overline{y})$ come:

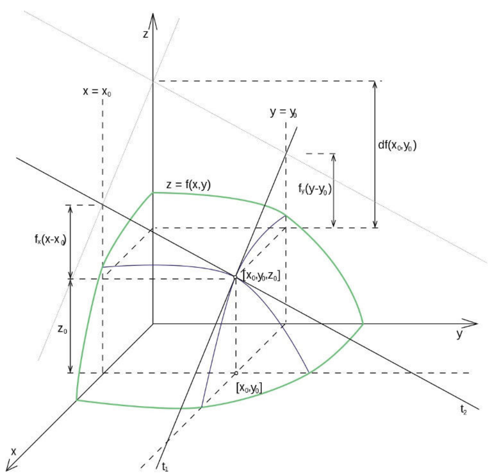
$$\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = (\partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))$$

È possibile altrimenti calcolare equivalentemente i due limiti nel seguente modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})}{x - \overline{x}}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(\overline{x}, y) - f(\overline{x}, \overline{y})}{y - \overline{y}}$$



Esempio grafico delle tangenti che consentono di determinare il valore delle derivate parziali nel punto (x_0, y_0).

Esercizi:

- Sia $f(x, y) = xy^2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$.

  Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})$ occorre calcolare la derivata della funzione in funzione di x e trattare il parametro y come se fosse una costante, dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) = y^2$.

  Lo stesso deve essere fatto per calcolare $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})$, dunque $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) = 2xy$.

Caso generale

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \in A$, poniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + te_j) - f(\overline{x})}{t}$$

Dove $j \in \{1, \dots, n\}$ e e_j è il vettore standard avente un 1 in posizione j. Se i limiti esistono diciamo che f è **derivabile parzialmente** in $\overline{x}$.

Inoltre, nel caso in cui f è derivabile parzialmente in $\overline{x}$, è possibile definire il **gradiente** di f in $\overline{x}$ come:

$$\nabla f(\overline{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x}))$$

Esercizi:

▼ Sia $f(x, y, z) = \frac{xe^{z^2}}{x+y^2}$, calcolare il gradiente di f.

Determiniamo innanzitutto il dominio della funzione f, ovvero $Dom(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y^2 \neq 0\}$.

Calcoliamo poi le 3 derivate parziali:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{y^2 e^{z^2}}{(x+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\frac{2xye^{z^2}}{(x+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2xze^{z^2}}{x+y^2}$

Possiamo dunque concludere che il gradiente di f è il seguente:

$$\nabla f(x, y, z) = (\frac{y^2 e^{z^2}}{(x+y^2)^2}, -\frac{2xye^{z^2}}{(x+y^2)^2}, \frac{2xze^{z^2}}{x+y^2}) \quad (\nabla f : Dom(f) \to \mathbb{R}^3)$$

Matrice Jacobiana

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ tale che $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$, allora la **matrice Jacobiana** $J_f(x) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ di tale funzione è definita nel seguente modo:

$$J_{f(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ & \dots & \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_q & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_q \end{pmatrix}$$

▼ **3.2 - Differenziabilità**

Legame tra derivabilità e continuità

L'esistenza della derivata parziale **non implica** la continuità.

Dimostrazione

È possibile dimostrare tale teorema attraverso un esempio. Prendiamo la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Possiamo infatti dimostrare che:

- f è derivabile parzialmente in $(0,0)$

  Calcoliamo infatti le derivate parziali in $(0,0)$:

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$$

- f è discontinua in $(0,0)$

  Utilizziamo il metodo delle successioni e scegliendo la successione $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ troviamo che:

  $$(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to+\infty} (0,0), f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k}\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$$

O-piccolo in $\mathbb{R}^2$

Sia $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $p > 0$, si scrive $f(x,y) = o(|(x,y)|^p)$ se:

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \quad | \quad \frac{f(x,y)}{|(x,y)|^p} \leq \epsilon \quad \forall\, (x,y) \mid |(x,y)| < \delta$$

Alternativamente:

$$\forall\, (x_n, y_n) \to (0,0), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n,y_n)}{|(x_n,y_n)|^p} = 0$$

Proposizioni

- $f(x,y)$: polinomio di grado $> p \implies f(x,y) = o(|(x,y)|^p)$

  Ad esempio, $x^3 + xy + 2y = o(|(x,y)|^2)$

Esercizi

▼ Verificare che $f(x,y) = x^2 = o(|(x,y)|)$

  Per verificare ciò dobbiamo dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|(x,y)|} = 0$.

  Utilizziamo il teorema del confronto, sapendo che:

  $$f(x,y) = 0 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \leq \frac{x^2}{|(x,y)|} \leq f(x,y) = \frac{|(x,y)|^2}{|(x,y)|} = |(x,y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

  Otteniamo dunque che $\frac{x^2}{|(x,y)|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, verificando quindi il limite.

Funzione differenziabile

Caso generale

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f : A \to \mathbb{R}$, f è differenziabile in $\overline{x} \in A$ se:

- $\exists\ \partial_1 f, \dots, \partial_n f$ nel punto $\overline{x}$
- $f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + o(|h|)$, dove $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Caso $n = 2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f è **differenziabile** in $(\overline{x}, \overline{y})$ se:

- $\exists\ \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}), \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})$
- $f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k)\rangle + o(|(h,k)|)$

Polinomio di Taylor di grado 1

Se f è differenziabile possiamo sviluppare l'equazione della derivabilità impostando $x = \overline{x} + h$ e $y = \overline{y} + k$ e ottenendo il cosiddetto polinomio di Taylor di grado 1 e punto iniziale $(\overline{x}, \overline{y})$:

$$T(x,y) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (x-\overline{x}, y-\overline{y})\rangle + o(|(x-\overline{x}, y-\overline{y})|)$$

Tale polinomio descrive il **piano tangente** al grafico di f nel punto $(\overline{x}, \overline{y}, f(\overline{x}, \overline{y}))$.

Esercizi

▼ Trovare il piano tangente della funzione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(0,0,1)$.

Per trovare il piano tangente a tale funzione occorre calcolare il polinomio di Taylor di grado 1.

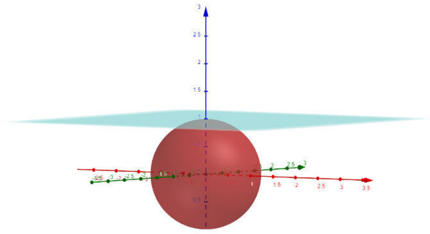
Riscriviamo innanzitutto l'equazione in funzione di $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ (non inseriamo il $\pm$ poichè dobbiamo calcolare la funzione nella parte positiva dell'asse z). Per fare ciò occorre prima di tutto calcolare le derivate parziali di f:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$\partial_y f(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Calcoliamo a questo punto il polinomio di Taylor ottenendo il piano:

$$z = \sqrt{1-0-0} + \langle (-\frac{0}{\sqrt{1-0-y^2}}, -\frac{0}{\sqrt{1-x^2-0}}), (x-0, y-0)\rangle$$
$$= 1 + 0x + 0y = 1$$

Possiamo infatti visualizzare che il piano $z = 1$ è tangente alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel punto $(0,0,1)$.



▼ Scrivere il polinomio di Taylor per la funzione $f(x,y,z) = xe^{x^2yz^2}$ in $(-1,2,1)$ dando per scontato che sia differenziabile.

Il polinomio di Taylor per funzioni con 3 variabili è il seguente:

$$T(x,y,z) = f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) + \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}), (x-\overline{x}, y-\overline{y}, z-\overline{z}) \rangle + o(|(x-\overline{x}, y-\overline{y}, z-\overline{z})|)$$

Per calcolare dunque il gradiente di f nel punto $(-1,2,1)$ occorre calcolare innanzitutto le 3 derivate parziali:

$$\partial_x f = 5e^2, \quad \partial_y f = -e^2, \quad \partial_z f = -4e^2$$

A questo otteniamo il polinomio di Taylor nel seguente modo:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= f(-1,2,1) + \langle (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f), (x+1, y-2, z-1) \rangle + o(|(x+1, y-2, z- \\ &= -e^2 + \langle (5e^2, -e^2, -4e^2), (x+1, y-2, z-1) \rangle + o(|(x+1, y-2, z-1)|) \\ &= -e^2 + 5e^2(x+1) - e^2(y-2) - 4e^2(z-1) \end{aligned}$$

Proposizioni

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **differenziabile** in $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^2 \implies f$ **continua** in $(\overline{x},\overline{y})$.

  Dimostrazione:

  Supponendo che f sia differenziabile, abbiamo che $f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|)$, che per $h,k \to +\infty$ diventa $f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x},\overline{y}) = 0$, dimostrando la continuità.

Teorema della differenziabilità

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Se $\exists\ \partial_x f, \partial_y f$ in ogni punto e le funzioni $\partial_x f, \partial_y f$ sono continue, allora $\forall\ (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^2$, f è **differenziabile** in $(\overline{x},\overline{y})$.

Lemma

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con derivate prime continue $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, allora:

- $\forall\ h \in \mathbb{R}, \exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $f(a+h,b) - f(a,b) = \partial_x f(a+\theta h, b)h$
- $\forall\ k \in \mathbb{R}, \exists\ \overline{\theta} \in [0,1]$ tale che $f(a,b+k) - f(a,b) = \partial_y f(a, b+\overline{\theta}k)k$

Dimostrazione lemma

- Definiamo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in questo modo: $g(x) = f(x,b) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Uso Lagrange per g nell'intervallo $[a, a+h]$. $\exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $g(a+h) - g(a) = g'(a+\theta h)(a+h-a)$, dunque, per definizione di $\partial_x f$:

$$g(a+h) - g(a) = \partial_x f(a+\theta h, b)h$$

Cvd.

- Analogo.

Dimostrazione teorema della differenziabilità

Supponiamo che $f, \partial_x f, \partial_y f$ siano continue, dobbiamo dimostrare che f è differenziabile, dunque che vale Taylor:

$$\begin{gathered} f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) = f(\overline{x}, \overline{y}) + \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|) \\ \implies f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|) \end{gathered}$$

Riscriviamo la parte a sinistra dell'$=$:

$$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, \overline{y}) + f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})$$

Da ora in avanti, per semplificare la dimostrazione, rappresentiamo la formula ottenuta come $[1] + [2]$, dove $[1] = f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}+h, \overline{y})$ e $[2] = f(\overline{x}+h, \overline{y}) - f(\overline{x}, \overline{y})$.

Usiamo il lemma:

- $\exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $[2] = \partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y})h$
- $\exists\ \theta \in [0,1]$ tale che $[1] = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k)k$

Espandiamo le equivalenze appena ottenute nel seguente modo:

- $[2] = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h$ (aggiungendo e sottraendo $\partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h$)
- $[1] = \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))k$ (aggiungendo e sottraendo $\partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k$)

Sostituiamo dunque nell'uguaglianza iniziale gli equivalenti a $[1]$ e $[2]$ appena trovati ottenendo:

$$f(\overline{x}+h, \overline{y}+k) - f(\overline{x}, \overline{y}) = \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k + (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h + (\partial$$

Visto che $\partial_x f(\overline{x}, \overline{y})h + \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})k$ è equivalente a $\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (h,k) \rangle$, per dimostrare la validità di Taylor ci basta dunque dimostrare che:

$$\begin{gathered} (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))k = o(|(h,k)|) \\ \implies \frac{(\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))h + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))k}{|(h,k)|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0 \\ \implies (\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y}))\frac{h}{|(h,k)|} + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y}))\frac{k}{|(h,k)|} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \end{gathered}$$

Osserviamo che $\frac{h}{|(h,k)|}$ e $\frac{k}{|(h,k)|} \leq \frac{|(h,k)|}{|(h,k)|} = 1$ in quanto $\sqrt{h^2+k^2}$ è sempre maggiore o alla peggio uguale dei singoli h e k, dunque ci basta dimostrare che:

$$(\partial_x f(\overline{x}+\theta h, \overline{y}) - \partial_x f(\overline{x}, \overline{y})) + (\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}+\theta k) - \partial_y f(\overline{x}, \overline{y})) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

Lo dimostriamo facilmente sostituendo ad h e k i valori ai quali tendono:

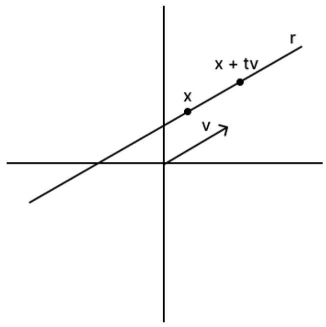
$$(\partial_x f(\overline{x}+\theta h,\overline{y})-\partial_x f(\overline{x},\overline{y}))+(\partial_y f(\overline{x},\overline{y}+\theta k)-\partial_y f(\overline{x},\overline{y}))\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} (\partial_x f(\overline{x},\overline{y})-\partial_x f(\overline{x},\overline{y}))+(\partial_y f(\overline{x},\overline{y})-\partial_y f(\overline{x},\overline{y}))=0+0=0$$

3.3 - Derivate direzionali

Rette in $\mathbb{R}^n$

A partire da un dominio R^n di partenza e due vettori $x=(x_1,\dots,x_n)$ e $v=(v_1,\dots,v_n)\neq 0$ è possibile definire la retta passante per x e avente direzione v tramite l'insieme:

$$r=\{x+tv \mid t\in\mathbb{R}\}$$



Rappresentazione grafica di una retta generica nel piano $\mathbb{R}^2$.

Derivate direzionali in $\mathbb{R}^2$

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$ e $v=(v_1,v_2)$ unitario ($|v|=1$). La **derivata direzionale** di f in $(\overline{x},\overline{y})$ nella direzione (v_1,v_2) è il limite, se esiste finito:

$$\lim_{t\to0}\frac{f((\overline{x},\overline{y})+t(v_1,v_2))-f(\overline{x},\overline{y})}{t}=\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y})=\partial_v f(\overline{x},\overline{y})=D_v f(\overline{x},\overline{y})$$

Osservazione

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^2$ e $v=(v_1,v_2)$ unitario ($|v|=1$). Per calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y})$ è possibile introdurre una funzione ausiliaria $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che:

$g(t)=f((\overline{x},\overline{y})+t(v_1,v_2))$

Utilizzando tale funzione è possibile calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y})$, infatti è possibile dimostrare che:

$$g'(0)=\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y})$$

Dimostrazione

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((\overline{x},\overline{y})+t(v_1,v_2)) - f(\overline{x},\overline{y})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y})$$

Esercizi

- Data $f(x,y) = xy^2$ e $(\overline{x},\overline{y}) = (1,2)$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$.

  Per fare ciò è possibile utilizzare la funzione ausiliaria $g(t) = f((\overline{x},\overline{y}) + t(v_1,v_2)) = f((1,2)+t(v_1,v_2)) = f((1+tv_1),(2+tv_2)) = (1+tv_1)(2+tv_2)^2$.

  Calcoliamo infine il valore della derivata $g'(0)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= v_1(2+tv_2)^2 + (1+tv_1)2(2+tv_2)v_2 \\ \implies g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 4v_1 + 4v_2 \end{aligned}$$

Teorema del calcolo delle derivate direzionali in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x},\overline{y}) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (v_1,v_2)$ unitario ($|v| = 1$), se f è differenziabile in $(\overline{x},\overline{y})$, allora vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (v_1,v_2)\rangle = \partial_x f(\overline{x},\overline{y})v_1 + \partial_y f(\overline{x},\overline{y})v_2$$

Dimostrazione

Dobbiamo calcolare $\lim_{t\to 0} \frac{f((\overline{x},\overline{y})+t(v_1,v_2))-f(\overline{x},\overline{y})}{t}$.

Per fare ciò utilizziamo la formula di Taylor, ottenendo $f((\overline{x},\overline{y}) + t(v_1,v_2)) - f(\overline{x},\overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), t(v_1,v_2)\rangle + o(|t(v_1,v_2)|)$.

Osserviamo che $|t(v_1,v_2)| = |t|\ |(v_1,v_2)|$ e, sapendo che $|(v_1,v_2)| = 1$, otteniamo $|t(v_1,v_2)| = |t|$, quindi $o(|t(v_1,v_2)|) = o(t)$.

Calcoliamo dunque il limite iniziale sostituendo ciò che abbiamo appena trovato:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), t(v_1,v_2)\rangle + o(t)}{t} = \lim_{t\to 0}(\langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (v_1,v_2)\rangle + \frac{o(t)}{t}) = \langle \nabla f(\overline{x},\overline{y}), (v_1,v_2)\rangle$$

Derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \overline{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1,\dots,v_n)$ unitario ($|v| = 1$). La **derivata direzionale** di f in $\overline{x}$ nella direzione $(v_1,\dots,v_n)$ è il limite, se esiste finito:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\overline{x}+tv) - f(\overline{x})}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}) = \partial_v f(\overline{x}) = D_v f(\overline{x})$$

Teorema del calcolo delle derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ unitario ($|v| = 1$), se f è differenziabile in $\overline{x}$, allora vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}) = \langle \nabla f(\overline{x}), v \rangle = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} f(\overline{x}) v_k$$

▼ **3.4 - Direzione di massima crescita**

Direzione di massima crescita in $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2, f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ e $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) \neq (0,0)$.

È possibile derivare $f(\overline{x}, \overline{y})$ in ∞ direzioni v unitarie in $\mathbb{R}^2$. Cerchiamo la direzione v che renda massima la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$ e la chiameremo direzione di massima crescita v_{max}.

Scriviamo il gradiente di $f(\overline{x}, \overline{y})$ utilizzando le coordinate polari: $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$, con $r = |\nabla f(\overline{x}, \overline{y})|$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

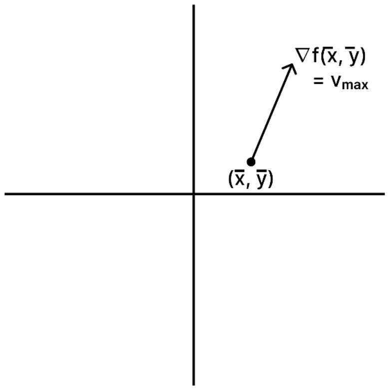
Dobbiamo trovare $v = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ ($|v| = 1$) tale che $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y})$ sia massima.

Ricordiamo che $\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = \langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (v_1, v_2) \rangle = \langle (r\cos\varphi, r\sin\varphi), (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \rangle =$ $r\cos\varphi\cos\vartheta + r\sin\varphi\sin\vartheta = r\cos(\varphi - \vartheta)$. Tale derivata è dunque massima se $\varphi - \vartheta = 1$, ovvero $\vartheta = \varphi \pm 2k\pi$, dunque tale direzione di massima crescita è quella del vettore gradiente e notiamo inoltre che $\langle \nabla f(\overline{x}, \overline{y}), (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \rangle = r$.

In sintesi:

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2, f$ differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$ e $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) \neq (0,0)$, allora:

$$v_{max} = \frac{\nabla f(\overline{x}, \overline{y})}{|\nabla f(\overline{x}, \overline{y})|} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x}, \overline{y}) = |\nabla f(\overline{x}, \overline{y})|$$

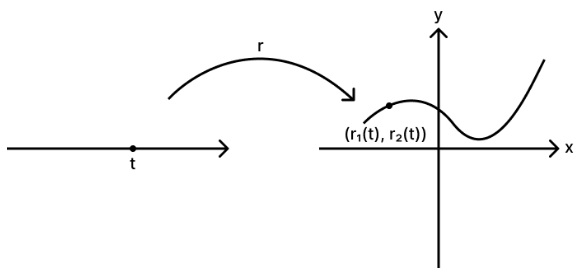


▼ **3.5 - Curve: velocità, derivate e insiemi di livello**

Funzioni di curve parametrizzate

Le **funzioni di curve parametrizzate** sono del tipo $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$:

$$r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$$



Esempio di funzione di curva parametrizzata $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Vettore velocità di una curva

Il **vettore velocità di una curva** r nel punto t indica la direzione tangente alla curva in tale punto e corrisponde al seguente vettore:

$$r'(t) = (r_1'(t), \dots, r_n'(t))$$

Velocità scalare di una curva

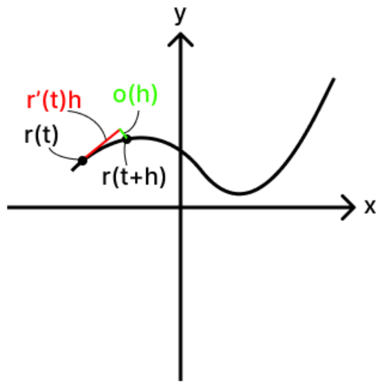
Data $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ avente $r'(t)$ come vettore velocità, la **velocità scalare** di tale curva è lo scalare:

$$|r'(t)|$$

Formula di Taylor per una curva

Sia $r :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ derivabile in $t \in]a, b[$. Vale dunque:

$$\begin{cases} r_1(t+h) = r_1(t) + r_1'(t)h + o(h) \\ \dots \\ r_n(t+h) = r_n(t) + r_n'(t)h + o(h) \end{cases}$$



Esempio grafico dell'uguaglianza di Taylor in una curva.

Lunghezza di un tratto di curva

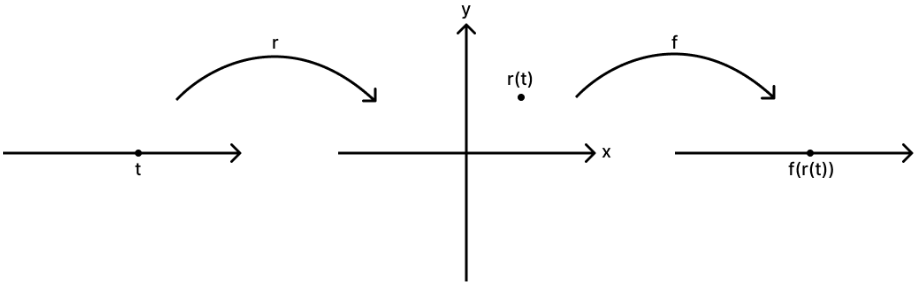
Sia $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, se $r'(t) \neq 0$, allora la **lunghezza del tratto** compreso tra $r(a)$ e $r(b)$ vale:

$$lungh(a, b) = \int_a^b |r'(t)| dt$$

Derivata funzione composta

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Funzione composta: $f \circ r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $(f \circ r)(t) = f(r(t))$.



Visualizzazione di una funzione composta.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile, $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivabile e sia definita $(f \circ r)(t) = f(r(t)) \; \forall \; t \in \mathbb{R}$. Tale funzione è **derivabile** $\forall \; t \in \mathbb{R}$ e vale:

$$(f \circ r)'(t) = \frac{d}{dt} f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

Dimostrazione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dobbiamo dimostrare che $\lim_{h\to 0} \frac{f(r(t+h))-f(r(t))}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$.

Iniziamo scrivendo r e $f \circ r$ con Taylor:

$$r(t+h) - r(t) = r'(t)h + o(h)$$
$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r(t+h) - r(t)\rangle + o(|r(t+h) - r(t)|)$$

Sostituiamo la prima uguaglianza nella seconda espressione ottenendo:

$$f(r(t+h)) - f(r(t)) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)h + o(h)\rangle + o(|r(t+h) - r(t)|) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$$

A questo punto dividiamo il tutto per h, e otteniamo:

$$\frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle h}{h} + \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h)\rangle}{h} + \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h}$$

Calcoliamo dunque $\frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle h}{h} + \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h)\rangle}{h} + \frac{o(|r(t+h)-r(t)|)}{h}$ per $H \to 0$:

$$1. \frac{\langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle h}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$$
$$2. \frac{\langle \nabla f(r(t)), o(h)\rangle}{h} = \langle \nabla f(r(t)), \frac{o(h)}{h}\rangle = 0$$
$$3. \frac{o(|r(t+h) - r(t)|)}{h} \approx \frac{o(h)}{h} = 0 \quad (|r(t+h) - r(t)| \approx h \text{ viene lasciato informale})$$

Otteniamo infine l'uguaglianza:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(r(t+h)) - f(r(t))}{h} = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle$$

Esercizi

▼ Date $f(x,y) = \ln(1 + xy^2)$ e $r(t) = (t^2, e^{2t})$ scrivere $f \circ r$ e calcolare $(f \circ r)'(t)$ sia direttamente che con il teorema.

Per calcolare $f \circ r$ basta sostituire $r_1(t)$ e $r_2(t)$ a x e y:

$$f(r(t)) = \ln(1 + t^2 e^{4t})$$

Calcolando $(f \circ r)'(t)$ direttamente otteniamo:

$$(f \circ r)'(t) = \frac{2te^{4t} + 4t^2e^{4t}}{1 + t^2e^{4t}}$$

Utilizzando il teorema dobbiamo invece prima calcolare $\nabla f(x,y)$ e $r'(t)$:

$$\nabla f(x,y) = (\frac{y^2}{1+xy^2}, \frac{2xy}{1+xy^2}), \quad r'(t) = (2t, 2e^{2t})$$

Calcoliamo poi $\nabla f(r(t)) = (\frac{e^{4t}}{1+t^2e^{4t}}, \frac{2t^2e^{2t}}{1+t^2e^{4t}})$ e infine la derivata:

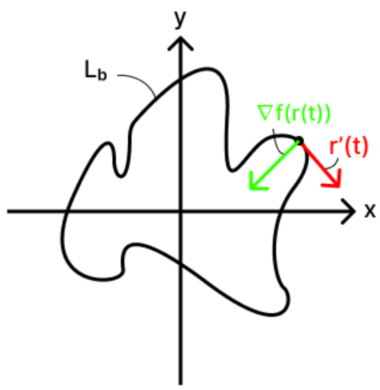
$$(f \circ r)'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t)\rangle = \frac{2te^{4t}}{1+t^2e^{4t}} + \frac{4t^2e^{4t}}{1+t^2e^{4t}} = \frac{2te^{4t} + 4t^2e^{4t}}{1+t^2e^{4t}}$$

Insiemi di livello

Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile e $b \in \mathbb{R}$. Si dice **insieme di livello** il seguente insieme:

$$L_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = b\}$$

È possibile inoltre costruire una curva $r:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $r(t) \in L_b, \forall\, t \in \mathbb{R}$ e quindi $f(r(t)) = b, \forall\, t \in \mathbb{R}$. Notiamo dunque, visto che $f \circ r$ è costante in t, la sua derivata $\frac{d}{dt} f(r(t)) = 0$, dunque anche $\langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle = 0$, il che implica che il gradiente della funzione f calcolato in un qualunque punto di L_b è perpendicolare alla derivata della curva r calcolata in quel punto.



Perpendicolarità tra vettore gradiente e derivata della curva $r(t) \in L_b$.

▼ **4.0 - Punti critici e forme quadratiche**

▼ **4.1 - Tipologie di punti critici**

Punti di massimo e minimo locale

> Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$, $\overline{x} \in A$ si dice di **massimo (minimo) locale** per f se:
>
> $$\exists\, \delta > 0 \text{ tale che } f(x) \leq (\geq) f(\overline{x}) \quad \forall\, x \in A \cap B(\overline{x}, \delta)$$

Teorema di fermat

> Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$, f differenziabile. Se $\overline{x} \in A$ è di massimo/minimo locale, allora:
>
> $$\nabla f(\overline{x}) = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione in $n = 2$

Definiamo la funzione $h(t) = f(\overline{x} + t, \overline{y})$, definita per $t \in$ intorno dell'origine. Siccome f ha un minimo in $(\overline{x}, \overline{y})$, allora $f(\overline{x} + t, \overline{y}) \geq f(\overline{x}, \overline{y}) \quad \forall t \in$ intorno dell'origine, dunque $h(t) \geq h(0)$, quindi $h(t)$ ha un minimo in 0.

Inoltre, per definizione di derivata parziale, abbiamo che $\exists\, h'(t) = \partial_x f(\overline{x} + t, \overline{y})$. Per il teorema di fermat in $n = 1$ sappiamo infine che $f'(0) = 0$, e possiamo quindi concludere che $\partial_x f(\overline{x} + t, \overline{y}) = 0$.

È possibile fare lo stesso ragionamento con $h(t) = f(\overline{x}, \overline{y} + t)$ e arrivare alla conclusione che $\partial_y f(\overline{x} + t, \overline{y}) = 0$, dunque abbiamo dimostrato che $\nabla f(\overline{x}) = (0, 0)$.

Punto critico o stazionario

> Un punto in cui $\nabla f(x) = \underline{0}$ si dice **punto critico o stazionario**.

Caso $n = 1$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0$, con $x \in \mathbb{R}$, può avere in x:

- Punto di **massimo**
- Punto di **minimo**
- Punto di **flesso**

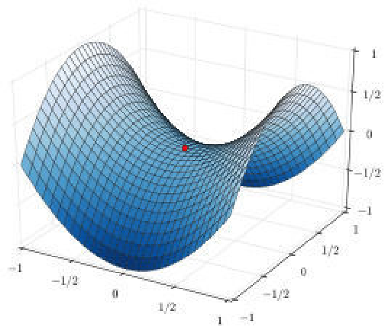
Caso $n = 2$

Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(\overline{x}) = 0$, con $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, può avere in $\overline{x}$:

- Punto di **massimo**
- Punto di **minimo**
- Punto di **sella**

Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha un punto di sella in $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se:

$$\forall \text{ intorno } B(\overline{x}, \delta), \exists\ x_- \text{ e } x_+ \in B(\overline{x}, \delta) \text{ tale che}$$
$$f(x_-) < f(\overline{x}) \text{ e } f(x_+) > f(\overline{x})$$



Esempio grafico di punto di sella.

▼ **4.2 - Derivate parziali seconde e forme quadratiche**

Derivate parziali seconde

Caso $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile con $\begin{cases} \partial_x f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \partial_y f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$, allora definiamo **derivate parziali seconde** le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \to \text{miste} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \to \text{pure} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Caso $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile, allora definiamo **derivate parziali seconde** le seguenti:

$$\forall\ j, k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_k} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Nel caso in cui $j = k$ scriviamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j}$ e tali derivate vengono dette **pure**.

Nel caso in cui $j \neq k$ tali derivate vengono dette **miste**.

Teorema di Schwarz

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ e siano tutte le sue derivate seconde continue allora:

$$\forall\ j, k \in \{1, \ldots, n\} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_j} \quad (\text{in ogni punto di } A)$$

Matrice Hessiana

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ e siano tutte le sue derivate seconde continue allora possiamo definire la **matrice Hessiana** $Hf(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nel seguente modo:

$$(Hf(x))_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) \qquad Hf = \begin{pmatrix} \partial_{11} f & \partial_{12} f & \ldots & \partial_{1n} f \\ \partial_{21} f & \partial_{22} f & \ldots & \partial_{2n} f \\ \ldots \\ \partial_{n1} f & \partial_{n2} f & \ldots & \partial_{nn} f \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana è l'**equivalente del gradiente** per le derivate seconde.

Proposizioni

- Per il teorema del gradiente la matrice Hessiana $Hf(x)$ è simmetrica $\forall\ x \in A$.

Forma quadratica

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = A^T$, la **forma quadratica** associata ad A è la funzione:

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad q(h) = \langle Ah, h \rangle \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n$$

Caso $\mathbb{R}^2$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, la forma quadratica associata ad A è:

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) = \langle \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rangle \\ = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \end{aligned}$$

Segno di forme quadratiche

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- $\langle Ah, h \rangle > 0, \forall\ h \neq 0 \in \mathbb{R}^n \iff A > 0$
- $\langle Ah, h \rangle < 0, \forall\ h \neq 0 \in \mathbb{R}^n \iff A < 0$
- $\exists\ h^+, h^- \in \mathbb{R}^n, \langle Ah^-, h^- \rangle < 0 < \langle Ah^+, h^+ \rangle \iff A$ è indefinita.

Osservazioni

- Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
  - $\begin{cases} a > 0 \\ det(A) > 0 \end{cases} \iff A > 0.$
  - $\begin{cases} a < 0 \\ det(A) > 0 \end{cases} \iff A < 0.$
  - $det(A) < 0 \iff A$ è indefinita.
  - $det(A) = 0 \iff A$ è semidefinita ($A \geq 0$ oppure $A \leq 0$ in base al valore di a).

  Dimostrazione

  Dimostriamo solo il caso in cui $A > 0$:

  - $\implies$

    Dalle ipotesi abbiamo che $a > 0 \wedge det(A) = ac - b^2 > 0$. Siccome $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ si possono presentare i seguenti due casi:

    - $h_2 = 0$

      In questo caso deve essere sicuramente $h_1 \neq 0$. e calcolando la forma quadratica otteniamo $q(h) = ah_1^2$, la quale è sicuramente $> 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ perchè dalle ipotesi abbiamo che $a > 0$.

    - $h_2 \neq 0$

      Calcolando la forma quadratica otteniamo $q(h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = h_2^2(a(\frac{h_1}{h_2})^2 + 2b\frac{h_1}{h_2} + c)$. Calcoliamo il $\Delta = 4b^2 - 4ac = -4(ac - b^2)$. Dalle ipotesi abbiamo che $ac - b^2 > 0$, quindi $\Delta < 0 \implies q(h) > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

  - $\impliedby$

    Dalle ipotesi abbiamo che $A > 0 \implies \langle A(h_1, h_2), A \rangle > 0 \implies ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \quad \forall (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

    Scegliamo ad esempio $h = (1, 0)$, in tal caso la disequazione diventa $a > 0$, avendo dimostrato la prima condizione.

    Scegliendo invece $h = (x, 1)$ la disequazione diventa $ax^2 + 2bx + c > 0$. Poniamo il $\Delta = b^2 - ac < 0 \implies -det(A) < 0 \implies det(A) > 0$.

  qed

- Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora A ammette n **autovalori** reali e vale:
  - $A > 0 \iff$ tutti gli autovalori sono > 0
  - $A < 0 \iff$ tutti gli autovalori sono < 0
  - A indefinita $\iff \exists\ \lambda_1, \lambda_2$ autovalori tali che $\begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$

Esercizi

▼ Classificare il segno della forma quadratica $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$ al variare di e nei reali.

  Calcoliamo innanzitutto il valore di $det(A) = 2e - 1$.

Notando che $a = 2$ otteniamo 3 casistiche:

- $e > \frac{1}{2} \iff det(A) > 0 \iff A > 0$.
- $e < \frac{1}{2} \iff det(A) < 0 \iff A < 0$.
- $e = \frac{1}{2} \iff det(A) = 0 \iff A$ è semidefinita positiva.

  Calcoliamo inoltre la forma quadratica associata ad A:

$$
\begin{aligned}
q(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_1h_2 + \frac{1}{2}h_2^2 = \frac{1}{2}(4h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2) \\
= \frac{1}{2}(2h_1 + h_2)^2 \geq 0 \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

  Possiamo infatti notare che $q(h_1, h_2)$ si annulla $\forall h = \lambda(1, 2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$, dunque A non può essere definita positiva.

Segno del determinante delle sottomatrici

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, considero A_k (es. $A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ecc.), allora:

- $det(A_k) > 0 \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\} \implies A > 0$
- $(-1)^k det(A_k) > 0 \quad \forall\, k \in \{1, \dots, n\} \implies A < 0$

  Ovvero il determinante assume segni alternati per ogni k (k pari $\implies det(A_k)$ positivo, k dispari $\implies det(A_k)$ negativo).

▼ **4.3 - Teorema di Taylor**

Teorema di Taylor di grado 2

Caso $\mathbb{R}^2$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f' e f'' continue, allora $\forall\, \overline{x}, h \in \mathbb{R}, \exists\, \sigma \in \,]0, 1[$ tale che:

$$
f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + f''(\overline{x} + \sigma h)\frac{h^2}{2} \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}
$$

Osservazioni

- Dalla formula trovata segue quella con gli o piccoli:

$$
\begin{aligned}
f(\overline{x} + h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + f''(\overline{x} + \sigma h)\frac{h^2}{2} \\
= f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + f''(\overline{x})\frac{h^2}{2} + \underbrace{(f''(\overline{x} + \sigma h) - f''(\overline{x}))\frac{h^2}{2}}_{o(h^2)}
\end{aligned}
$$

Dimostrazione

Usando $x = \overline{x} + h$ dimostriamo che $\forall\ \overline{x}, x \in \mathbb{R}, \exists\ \sigma \in \left]0,1\right[$ tale che:

$$f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x}))\frac{(x-\overline{x})^2}{2}$$

Modifichiamo la formula da dimostrare nella seguente: $f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x-\overline{x}) - k(x-\overline{x})^2 = 0$ e mostriamo che esiste $\sigma \in \left]0,1\right[$ tale che $k = \frac{f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x}))}{2}$.

Costruiamo la seguente funzione:

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - k(x-t)^2$$

Se utilizziamo x e $\overline{x}$ come t otteniamo:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - f(x) - f'(x)(x-x) - k(x-x)^2 = 0 \\ g(\overline{x}) &= f(x) - f(\overline{x}) - f'(\overline{x})(x-\overline{x}) - k(x-\overline{x})^2 = 0 \end{aligned}$$

Siccome $g(x) = g(\overline{x})$ possiamo utilizzare il teorema di Rolle nell'intervallo $[x, \overline{x}]$ e ottenere:

$$\exists\ \sigma \in \left]0,1\right[\quad g'(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) = 0$$

Calcoliamo $g'(t)$:

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f'(t) - f''(t)(x-t) - f'(t)(-1) - 2k(x-t)^1(-1) \\ &= (-f''(t) + 2k)(x-t) \end{aligned}$$

Sappiamo dunque che:

$$\exists\ \sigma \in \left]0,1\right[\quad (-f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) + 2k)(x-\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) = 0$$

Siccome per $\sigma \in \left]0,1\right[\implies (x-\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) \neq 0$, allora $(-f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x})) + 2k) = 0$, ovvero $k = \frac{f''(\overline{x}+\sigma(x-\overline{x}))}{2}$, come volevasi dimostrare.

Caso $\mathbb{R}^n$

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ con derivate parziali prime e seconde continue, allora $\forall\ \overline{x} \in A, h \in \mathbb{R}^n, \exists\ \sigma \in \left]0,1\right[$ ($\{\overline{x}+\sigma h\} \subseteq A$) tale che:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h) &= f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h, h\rangle \\ &= f(\overline{x}) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\overline{x})h_k + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{jk} f(\overline{x}+\sigma h)h_j h_k \end{aligned}$$

Osservazioni

- Dalla formula trovata segue quella con gli o piccoli:

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(h^2)$$

Dimostrazione

Basta mostrare che:

$$\frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h,h\rangle - \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h,h\rangle = o(|h|^2)$$
$$\iff \frac{1}{2}\langle\underbrace{(Hf(\overline{x}+\sigma h)-Hf(\overline{x}))}_{0 \quad h\to 0}h,h\rangle = o(|h|^2)$$

Dimostrazione

Siano $f, \overline{x}, h$ come da ipotesi, costruiamo la funzione:

$$g(t) = f(\overline{x}+th) \quad t \in [0,1]$$

Abbiamo dunque che $g(0) = f(\overline{x}), g(1) = f(\overline{x}+h)$.

Utilizziamo Taylor grado 2 per $g(1)$:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\sigma)$$

Calcoliamo ora $g'(t)$ utilizzando il teorema per il calcolo della derivata di una funzione su una curva:

$$g'(t) = \frac{\partial}{\partial t}f(\overline{x}+th) = \langle\nabla f(\overline{x}+th),h\rangle = \sum_{j=1}^{n}\partial_j f(\overline{x}+th)h_j$$

Dunque, $g'(0) = \langle\nabla f(\overline{x}),h\rangle$.

Passiamo a calcolare $g''(t)$:

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\partial_k\partial_j f(\overline{x}+th)h_k)h_j = \sum_{k,j=1}^{n}\partial_{kj}f(\overline{x}+th)h_k h_j$$
$$= \langle Hf(\overline{x}+th)h,h\rangle$$

Dunque, $g''(\sigma) = \langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h,h\rangle$.

Possiamo infine concludere che:

$$f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + \langle\nabla f(\overline{x}),h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x}+\sigma h)h,h\rangle$$

▼ 4.4 - Teorema di classificazione dei punti critici

Teorema di classificazione dei punti critici

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad (A \subseteq \mathbb{R}^n)$ con derivate parziali prime e seconde continue e sia $\overline{x} \in A$, se $\nabla f(\overline{x}) = 0$ allora:

- se $Hf(\overline{x}) > 0 \implies \overline{x}$ è un punto di **minimo locale**.
- se $Hf(\overline{x}) < 0 \implies \overline{x}$ è un punto di **massimo locale**.
- se $Hf(\overline{x})$ è indefinita $\implies$ è un punto di **sella**.
- se $Hf(\overline{x})$ è semidefinita $\implies$ nessuna conclusione, occorre verificare in altro modo, magari analizzando gli intorni di $\overline{x}$.

Lemma

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $A > 0$, allora:

$$\exists\, m > 0 \quad \langle Ah, h\rangle \geq m \underbrace{|h|^2}_{\langle Ih,h\rangle = \sum_{j=0}^{n} h_j^2} \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Dimostrazione lemma in $\mathbb{R}^2$

Sia $A = A^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tale che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0$.

Sia $h = (r\cos\theta, r\sin\theta) \neq 0$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, e sia $r = |h|$.

Calcoliamo $\langle Ah, h\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Ah, h\rangle &= ar^2\cos^2\theta + 2br^2\sin\theta\cos\theta + cr^2\sin^2\theta \\ &= r^2(a\cos^2\theta + 2b\sin\theta\cos\theta + c\sin^2\theta) = r^2 g(\theta) = |h|^2 g(\theta) \end{aligned}$$

Siccome $A > 0$, allora $g(\theta) > 0 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$.

Inoltre, siccome $g(\theta)$ è continua su $[0, 2\pi]$, allora per il teorema di Weierstrass esiste un valore $\overline{\theta} \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\theta) \geq \underbrace{g(\overline{\theta})}_{m>0} \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$.

Siccome $\langle Ah, h\rangle = |h|^2 g(\theta) \geq |h|^2 m$, possiamo dunque concludere che:

$$\langle Ah, h\rangle \geq |h|^2 m$$

Dimostrazione (primo caso)

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in A$, supponiamo che $\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) = 0 \\ Hf(\overline{x}) > 0 \end{cases}$, dobbiamo dimostrare che $\overline{x}$ è un punto di minimo, ovvero che.

$$\begin{gathered} \exists\, \delta > 0 \quad f(\overline{x} + h) \geq f(\overline{x}) \quad \forall\, h \in B(0, \delta) \\ \text{ovvero} \\ f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) \geq 0 \quad \forall\, h \in B(0, \delta) \end{gathered}$$

Approssimiamo $f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})$ tramite la formula di Taylor:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) &= \langle \nabla f(\overline{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \\ &= \frac{1}{2}\langle Hf(\overline{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \end{aligned}$$

Siccome da ipotesi sappiamo che $Hf(\overline{x}) > 0$, per il lemma abbiamo che $\exists\ m > 0 \quad \langle Hf(\overline{x})h, h\rangle \geq m|h|^2 \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^n$.

Per l'equivalenza mostrata sopra abbiamo dunque che:

$$f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) \geq \frac{m}{2}|h|^2 + o(|h^2|)$$

Usando la definizione di o piccolo con $\epsilon = \frac{m}{4}$ sappiamo che $\exists\ \delta > 0$ tale che $-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall\ h \in B(0,\delta)$, dunque, per $|h| < \delta$, abbiamo che $o(|h|^2) \leq \frac{m}{4}|h|^2$ e $o(|h|^2) \geq -\frac{m}{4}|h|^2$.

Possiamo dunque procedere affermando che:

$$\begin{gathered} f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) \geq \frac{m}{2}|h|^2 + (-\frac{m}{4}|h|^2) \quad \forall\ h \in B(0,\delta) \\ \implies f(\overline{x}+h) - f(\overline{x}) \geq \frac{m}{4}|h|^2 \geq 0 \quad \forall\ h \in B(0,\delta) \\ \implies f(\overline{x}+h) \geq f(\overline{x}) \quad \forall\ h \in B(0,\delta) \\ \implies \overline{x} \text{ è di minimo locale.} \end{gathered}$$

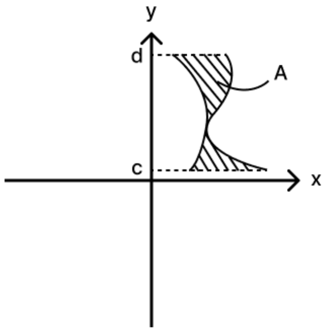
▼ **5.0 - Integrale doppio**

▼ **5.1 - Insiemi semplici**

Insieme x-semplice

Siano $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $h_1(y) \leq h_2(y) \quad \forall\, y \in [c,d]$, l'**insieme x-semplice** definito da h_1 e h_2 è definito nel seguente modo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

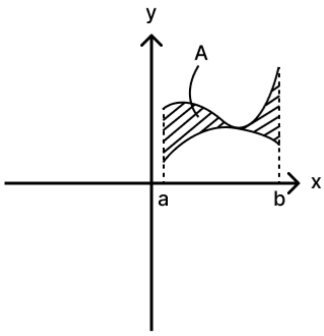


Insieme y-semplice.

Insieme y-semplice

Siano $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e tali che $g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$, l'**insieme y-semplice** definito da g_1 e g_2 è definito nel seguente modo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



Insieme x-semplice.

▼ **5.2 - Integrale doppio**

Definizione di integrale doppio

Sia f una funzione continua e A un insieme semplice, l'**integrale doppio** di f in A viene definito nel seguente modo:

$$\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$

Proprietà dell'integrale doppio

- **Linearità**:

$$\int_A (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\ dx\ dy = \lambda_1 \int_A f_1\ dx\ dy + \lambda_2 \int_A f_2\ dx\ dy$$

- A è un insieme degenere ($g_1(x) = g_2(x) \quad \forall\ x$, quindi A è una linea)

$$\implies \int_A f(x,y)\ dx\ dy = 0$$

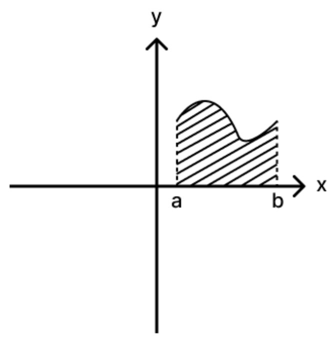
- $\int_A 1\ dx\ dy =$ area di A

Idea grafica dell'integrale doppio

Integrale in $n = 1$

Sia $f : [a,b] \to [0, +\infty[$ continua, l'integrale $\int_a^b f(x)\ dx$ indica il valore dell'area del sottografico di f:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b], 0 \le y \le f(x)\}$$

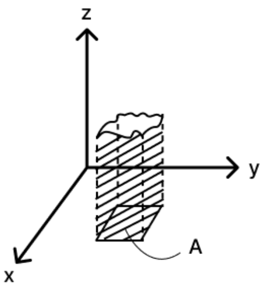


Idea grafica dell'integrale in $n = 1$.

Integrale in $n = 2$

Sia $f : A \to \mathbb{R} \quad ((x,y) \to f(x,y) > 0 \quad \forall\ (x,y) \in A)$, dove A è un insieme semplice, l'integrale $\int_A f(x,y)\ dx\ dy$ indica il valore del volume del sottografico di f:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A, 0 \le z \le f(x,y)\}$$



Idea grafica dell'integrale in $n = 2$.

Formula di riduzione

Insiemi y-semplici

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, con A un insieme y-semplice del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, allora è definito $\int_A f(x, y)\ dx\ dy$ e vale la seguente **formula di riduzione**:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_a^b (\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dy)\ dx$$

Osservazioni

- Se $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$, allora:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_A\ dx\ dy = \int_b^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = \text{area di } A$$

Insiemi x-semplici

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, con A un insieme x-semplice del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, allora è definito $\int_A f(x, y)\ dx\ dy$ e vale la seguente **formula di riduzione**:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_c^d (\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\ dx)\ dy$$

Osservazioni

- Se $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in A$, allora:

$$\int_A f(x, y)\ dx\ dy = \int_A\ dx\ dy = \int_b^a (g_1(x) - g_2(x)) dx = \text{area di } A$$

▼ **6.0 - Cambio di variabile**

Funzioni per cambio variabile

Per il cambio variabile vengono utilizzare funzioni $f : A \to G \quad A, G \subseteq \mathbb{R}^2$ tali che:

$$(u, v) \to f(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Matrice jacobiana di $f : A \to G$

Sia $f : A \to G$ una funzione definita come sopra e siano x e y funzioni con derivate continue in A, la **matrice jacobiana** di tale funzione è la seguente:

$$J_{f(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Definizione di cambio di variabile

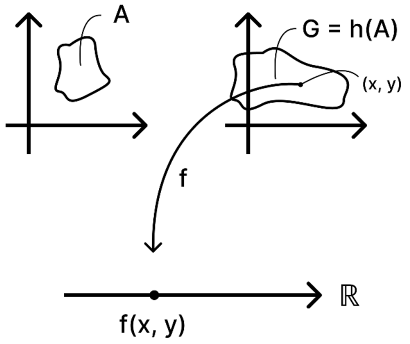
Sia $f : A \to G \quad A, G \subseteq \mathbb{R}^2$ regolare (derivate continue), si dice che f è un **cambio di variabile** se:

- f è iniettiva e suriettiva.
- $det(J_{f(u,v)}) \neq 0 \quad \forall\ (u, v) \in A$.

Formula del cambio di variabile

Sia $h : A \to G$ un cambio di variabile e sia $f : G \to \mathbb{R}$ continua, allora vale:

$$\int_G f(x, y)\ dx\ dy = \int_A f(h(u, v))\ |det(J_{h(u,v)})|\ du\ dv$$



Cambio di variabile.

Esercizi

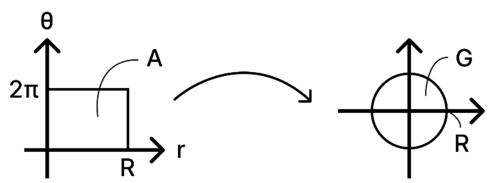
- Dato l'insieme $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R\}$, calcolare l'area di tale insieme (cerchio).

  Per calcolare l'area di un tale insieme occorre calcolare l'integrale doppio $\int_G \ dx \ dy$.

  Per fare ciò è possibile rappresentare G utilizzando un cambio di variabile:

  $$f(\{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\mid 0 < r \leq R, \theta \in]0,2\pi[\})$$

  Tale funzione può essere rappresentata graficamente nel seguente modo:

  Siccome $det(J_{f(r,\theta)}) = r$, possiamo calcolare l'integrale doppio utilizzando la formula del cambio di variabile:

  $$\int_G \ dx \ dy = \int_A 1 \cdot r \ dr \ r\theta$$

  Dove $A = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq R, \theta \in [0,2\pi]\}$.

  Continuiamo a questo punto il calcolo dell'integrale doppio ottenuto per ottenere l'area del cerchio:

  $$\int_A 1 \cdot r \ dr \ r\theta = \int_0^R (\int_0^{2r} r \ d\theta) \ dr = [\pi r^2]_0^R \ = \pi R^2$$